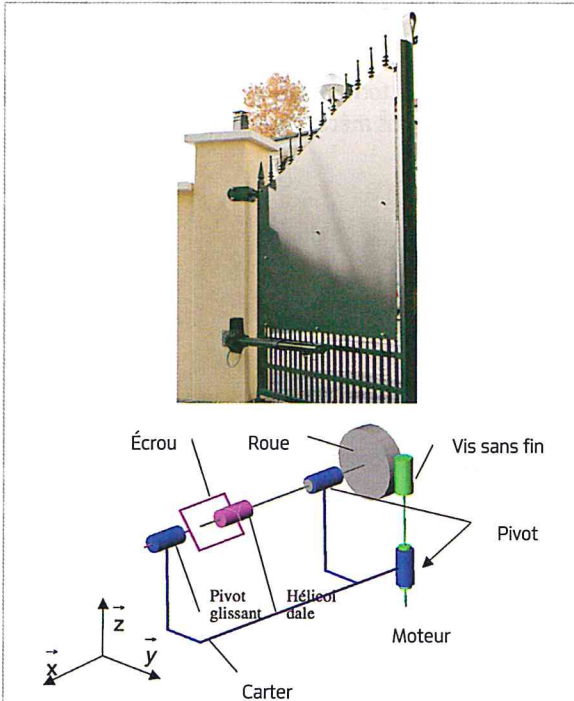


POUR S'ENTRAÎNER

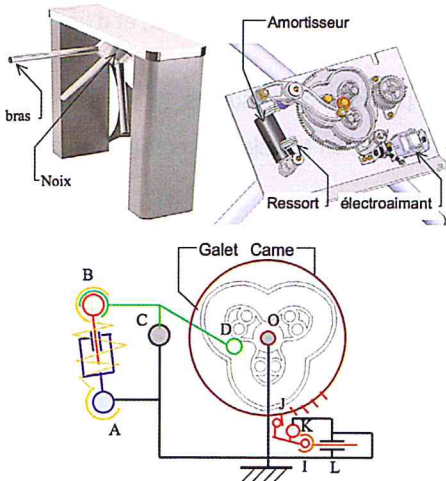
1 Vérin électrique de portail automatique

1. À partir du schéma cinématique proposé, déterminer le mouvement de la vis/carter et de l'écrou/carter.
 2. Déterminer les actions transmissibles par la liaison entre l'écrou et le carter.
- Le couple moteur est transmis à la roue par la vis.
3. Déterminer les actions transmissibles par la liaison entre l'écrou et le carter.



2 Tourniquet d'accès

Le tourniquet est destiné au contrôle d'accès piéton.

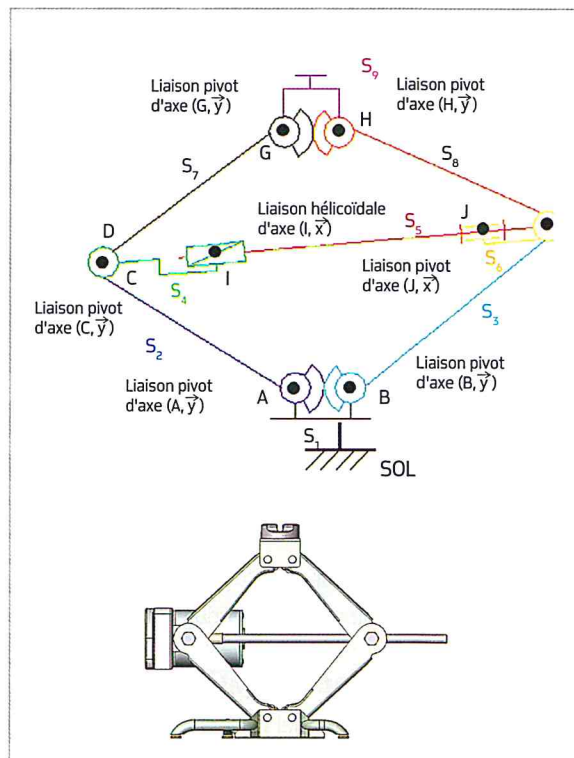


Les bras en acier inoxydable sont disposés à des intervalles de 120° sur une noix guidée en rotation autour du socle. Ainsi lorsque le tripode est en position de repos, un des bras est en position pour interdire l'accès.

Le dispositif de blocage du mécanisme est composé d'un basculeur agissant sur les dents de l'ensemble came dentelée. Le tout est actionné par un électro-aimant commandé par la carte magnétique d'accès.

1. Identifier le type de ressort utilisé et en déduire son rôle.
2. Quelle est la nature de la liaison entre le galet et la came ?
3. Quel type de mouvement peut faire la tige de l'électro-aimant ?
4. Que se passe-t-il lorsqu'elle rentre ?

3 Cric automobile



1. À partir du schéma cinématique ci-dessus, identifier les liaisons aux points A, B, C, E, I et J.

On considère la liaison en I sans frottement. Le mouvement imposé par le moteur est une rotation de l'ensemble S5 autour de l'axe

2. Établir les actions transmissibles par la liaison en I entre S4 et S5.
3. Quel est l'action effectivement transmise par la vis à l'écrou ? En déduire le mouvement attendu de l'écrou S4 par rapport à la vis S5.
4. Quel va être l'effet sur la distance DE puis sur le châssis du véhicule
5. Que deviennent ces actions transmissibles en I si l'on considère le frottement ?
6. Quel sera l'effet sur le cric ? le mouvement du cric est-il rendu possible par la liaison S1/Sol ?

9 COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES STRUCTURES ET DES SYSTÈMES

Le concept d'action mécanique permet d'expliquer comment on arrive à :

- ▶ maintenir un corps au repos ;
- ▶ créer ou modifier un mouvement ;
- ▶ déformer un corps.

Les actions mécaniques objet de ce chapitre existent sous deux formes, les forces (en **Newton N**) et les moments (**Newton mètre N.m**) et peuvent être classées en actions **mécaniques de contact** (concentrées ou réparties) ou en actions mécaniques **à distance**.

Notations : on notera dans la suite de l'ouvrage :

\vec{F}_{ij} comme étant la force exercée par le solide i sur le solide j ;

$\vec{M}_P \vec{F}_{ij}$ comme étant le moment exercé au point P par la force \vec{F}_{ij} .

Définitions :

- ▶ la somme des vecteurs forces appliqués à un solide S est appelée résultante ;
- ▶ la somme des vecteurs moments appliqués à un solide S est appelée moment résultant.

1 Repère – Système et frontière d'isolement

Les résultats qui vont suivre ne sont valables que sous certaines conditions d'étude qui amènent à définir quelques notions préalables.

a Repère galiléen

Un référentiel galiléen est constitué d'un repère d'espace dont l'unité est la longueur, et d'un repère de temps dont l'unité est la seconde.

Le choix du repère dépend du type d'étude et influe sur la précision des résultats.

Pour les études menées dans la suite de l'ouvrage, tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel terrestre sera considéré galiléen.

b Système matériel

Définition : on appelle système matériel un ensemble de solides et de fluides que l'on souhaite étudier. Un système matériel peut avoir des mobilités en son sein. Il n'est pas nécessairement figé.

c Frontières d'isolement

Pour étudier des systèmes (mécanismes ou fluides) il est nécessaire de procéder à leur isolement, c'est-à-dire de les séparer du reste de leur milieu environnant.

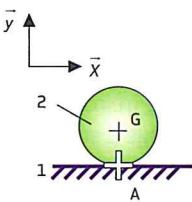
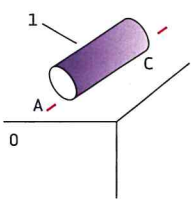
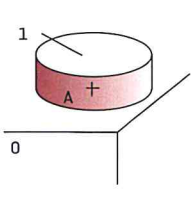
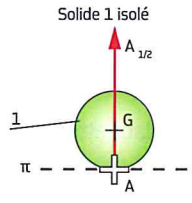
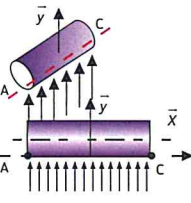
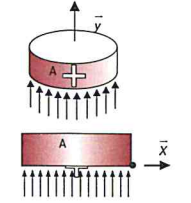
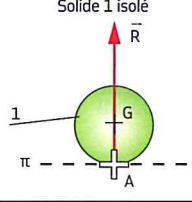
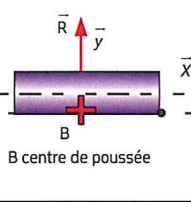
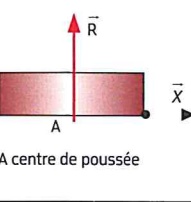
On est donc amené à décrire de quoi le système est composé et lister ce qui n'en fait pas partie : c'est la frontière d'isolement.

2 Forces

Définition préliminaire : on appelle vecteur force un vecteur qui représente et modélise la résultante d'une action ; la norme de ce vecteur représente l'intensité d'une action mécanique en Newton.

a Action mécanique de contact

Une action mécanique de contact peut être appliquée sur une surface très réduite, on peut alors la modéliser par une force appliquée en un point on parle alors de **charge concentrée**. Elle peut également s'appliquer sur une ligne ou encore une surface, on parle alors de **charge répartie**.

Type de description	Charges concentrées	Charges réparties	
Type de contact	Ponctuel	Linéique	Surfacique
Nature du contact	Point	Ligne droite ou courbe	Surface plane, cylindrique ou gauche
Représentation du contact			
Représentation de la charge sur le solide isolé			
Représentation de la résultante des actions mécaniques sur le solide isolé			
Expression de la résultante	$R = A_{1/2}$	$R = q.L$ (q en N/m)	$R = p.S$ (p en Pa (N/m ²) ou en bar 1 bar = 10 ⁵ Pa)
Condition de réalisation	L'étendue du contact doit être suffisamment petite	Les charges q et p sont uniformes (constantes)	

EXEMPLE

En hiver il est courant que les lignes haute tension rompent sous l'effet cumulé de leur propre poids et de la charge linéique que représente la neige.

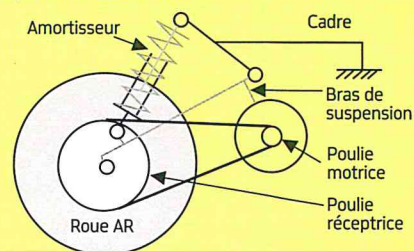
ACTIVITÉ 1

Le schéma ci-contre représente l'essieu moteur situé à l'arrière d'un quadricycle à moteur électrique FUN ELEC. La courroie est en élastomère. Le système est à l'arrêt.

Déterminer le type d'action mécanique s'exerçant entre la courroie et la poulie de la roue arrière, entre l'amortisseur et la cadre, ainsi qu'entre le sol et le pneu arrière.

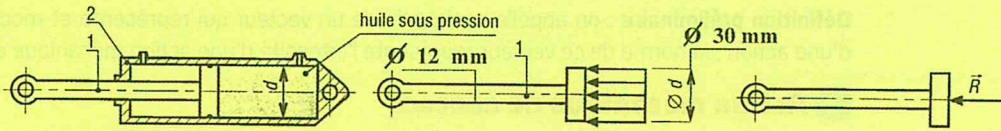
Déterminer les directions des résultantes de ces actions de contact.

Que deviennent les contacts poulie/ courroie et pneu/sol lorsque le système est en train de rouler ?



ACTIVITÉ 2

Contact surfacique d'un fluide sous pression (pression $p = 0,8 \text{ MPa}$) sur un piston de vérin ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ bars}$).



La force est dirigée selon la perpendiculaire à la surface d'appui du fluide : l'axe du piston.

$$\text{Elle est d'intensité } R = p \cdot S = \frac{\pi d^2}{4} \cdot p \text{ A.N.} : R = 0,8 \times \frac{\pi \cdot (30)^2}{4} = 565,5 \text{ N.}$$

Unités légales : p en Pa, S en m^2 , $\|R\|$ en N.

Autres unités : p en MPa, S en mm^2 , $\|R\|$ en N.

Unités pratiques : p en bars, S en cm^2 , $\|R\|$ en daN.

EXEMPLE

Contact surfacique entre garnitures et disque de freins d'automobile

Lorsqu'on cherche à connaître le couple de freinage d'une automobile il est nécessaire d'étudier la pression exercée par les patins de freinage 2 sur le disque de frein 1.

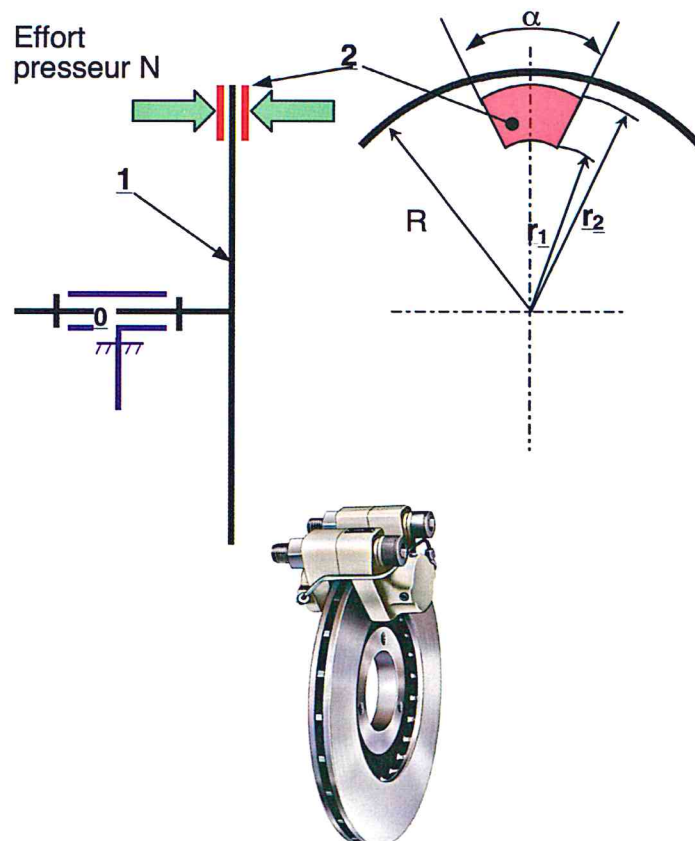
Le résultat sera, entre autres, fonction des dimensions du disque, des matériaux utilisés et de la pression exercée par le fluide.

Dans le cas d'une hypothèse d'usure constante en tout point de la plaquette de frein :

$$C_{\text{grott}} = \mu \cdot N \cdot (r_1 + r_2) \text{ avec } N = 2 \cdot P_m \cdot r_1 \cdot \alpha \cdot (r_1 + r_2).$$

P_m pression en un point quelconque de la plaquette.

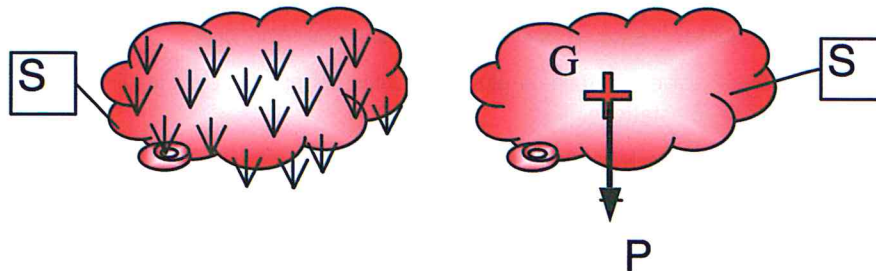
μ coefficient lié aux matériaux en contact.



Dans les cas simples que nous traiterons par la suite, le centre de poussée peut être trouvé en traçant l'intersection de cette surface de contact et de la droite perpendiculaire à cette surface passant par le centre de gravité de la surface couverte par la répartition de pression.

b Action mécanique à distance

Une action mécanique à distance s'applique, sans qu'il y ait besoin de contact, sur tous les éléments de volume du solide. L'action exercée est schématisée par une charge volumique.



La Terre exerce à distance sur chaque particule d'un système S une action mécanique vers le centre de la Terre appelée le poids.

Cette action mécanique est proportionnelle à la masse m (en kg) du système étudié est représentée en G (centre de gravité du système) par une force P (en Newton N).

La norme du vecteur Poids est :

$$P = m \cdot g \text{ avec } g \text{ champ de pesanteur (en } m \cdot s^{-2} \text{).}$$

MATIÈRES ET STRUCTURES

c Point de vue d'observation - Modélisation locale ou globale

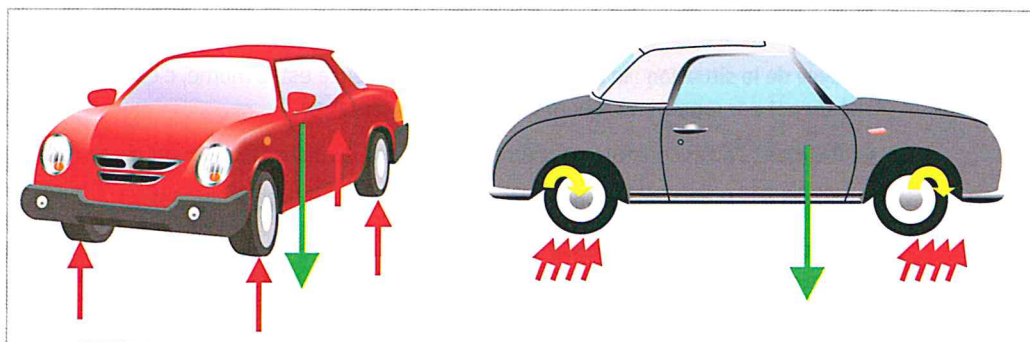


Fig. 9 Actions sur les suspensions d'une voiture

Pour déterminer les actions s'exerçant sur chacune des suspensions du véhicule à l'arrêt (Fig. 9), on va étudier l'ensemble comme étant composé de solides indéformables et le contact de chaque pneu i sur le sol sera modélisé par une liaison ponctuelle à laquelle on associera une force F_i .

Pour analyser l'adhérence des pneumatiques sur le sol lorsque le véhicule est en mouvement, les fabricants de pneus sont, eux, amenés à étudier des actions réparties sur la surface de contact.

Étudier un système mécanique peut mobiliser plusieurs échelles de description. Le point de vue macroscopique (global) utilisera une description par des forces concentrées, tandis que le point de vue mésoscopique (local) utilisera une description liée à des forces réparties et ce pour le même objet d'étude.

Une charge répartie peut être remplacée par une action mécanique équivalente :

- la résultante de cette action R (en N) est la somme des forces élémentaires appliquées sur les éléments ;
- le moment de cette action est la somme des moments de ces mêmes forces élémentaires.

EXEMPLE

Pourquoi un sous-marin à coque métallique ne coule-t-il pas ?

On comprend qu'un bateau en bois dont la densité est inférieure à 1 puisse flotter, mais comment un navire en métal (dont la densité est de 7,8) fait-il pour ne pas couler à pic.

Le sous-marin s'enfonce, sous l'action de son poids. Sous l'eau il subit la pression de l'eau qui est fonction de la profondeur.

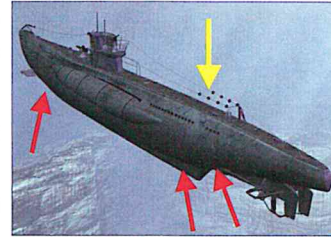
Plus il est en profondeur plus la pression est grande, c'est la loi de l'hydrostatique :

$$p = p_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h \text{ (h étant l'altitude ou la profondeur).}$$

Comme l'illustre la figure ci contre, le dessus du navire subit donc une pression plus faible que le dessous.

La résultante des actions de pression du dessous est égale à la résultante de celle du dessus augmentée du poids du navire.

En faisant la somme de toutes les forces surfaciques agissant sur la coque, on trouve une force volumique F appelée poussée d'Archimède (savant grec du IIIe siècle avant J.-C.). Le principe d'Archimède s'énonce ainsi : « tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace ».



3 Moment d'une force et couple

Une planche est posée sur un rebord de fenêtre. On pose un pot de peinture sur cette planche. Quand on place le centre de gravité du pot à l'aplomb du rebord, rien ne se passe (Fig. 10a). Si on déplace le pot pour le mettre au bord de la planche en bois, celle-ci bascule (Fig. 10b).

Paradoxe : les solides sont les mêmes et pourtant il ne se passe pas la même chose.

Analyse de la situation : le bilan des forces en présence est le même, c'est la position du centre de gravité du pot par rapport au rebord de fenêtre qui a changé.

Explication : l'effet constaté peut être expliqué par la notion de moment d'une force.

En G passe la force volumique appelée poids du pot de peinture (Fig. 10c).

Le produit de l'intensité de cette force par la distance d entre la droite verticale qui passe par G et celle verticale également qui passe par B , forme un moment (exprimé en N.m) qui provoque la rotation de la planche.

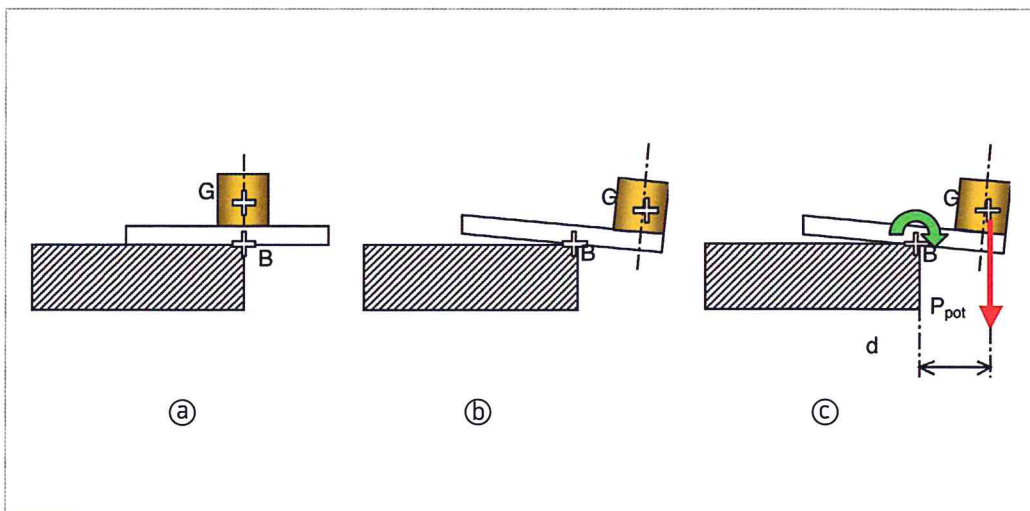


Fig. 10 Influence du moment sur l'équilibre d'un solide

Le moment d'une force représente donc l'aptitude d'une force à faire tourner un solide autour d'un point donné.

Définition : on appelle moment d'une force en un point A le produit de la norme d'un vecteur force F (en Newton), appliqué en B, par la distance (en mètre) qui sépare le point A de la droite Δ support du vecteur passant par B. $M_A(F) = \|F\| \cdot d$ (d est appelé bras de levier).

Le terme distance est ici pris au sens mathématique. C'est donc une mesure de la longueur qui sépare le point A de la droite Δ, faite perpendiculairement à la droite Δ, soit ici la mesure faite de la longueur AH (Fig. 11a).

Changer l'orientation de la force change la valeur du moment (Fig. 11c).

Déplacer le point d'application B de la force F en le conservant sur la droite Δ, ne change pas la valeur de la distance d, donc celle du moment (Fig. 11b).

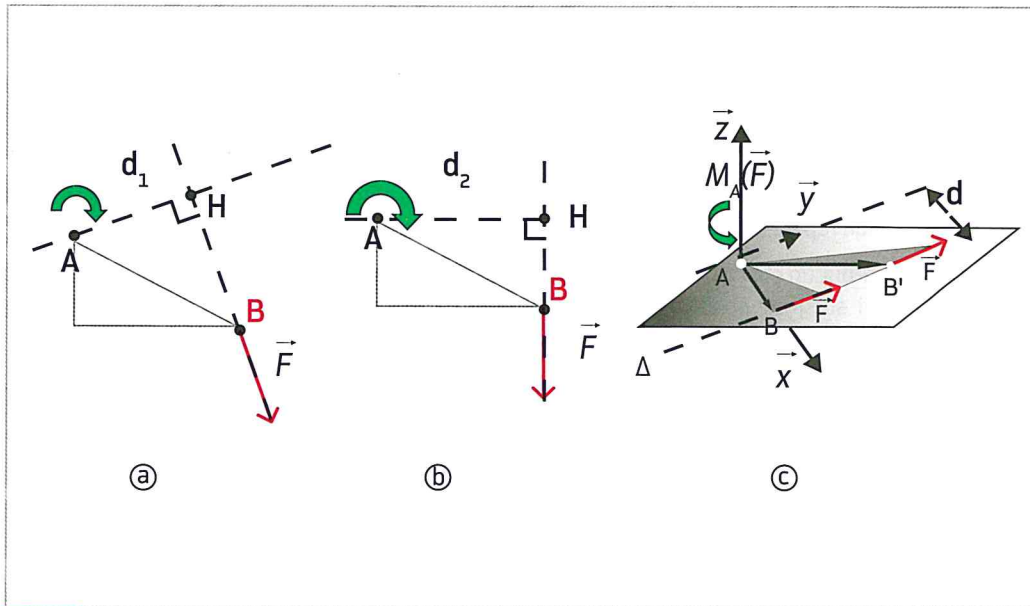


Fig. 11 Moment d'une force par rapport à un point

EXEMPLE

Pour changer un pneu de voiture, il est nécessaire de la mettre sur cale puis de prendre une clef. Certaines de ces clefs sont télescopiques. Augmenter la longueur de la clef permet donc de fournir un moment plus grand et donc un effort plus faible.

Le moment, appliqué au point de contact (ici A), est porté par l'axe de rotation du solide. Il peut être représenté :

- ▶ par un vecteur moment (ici $M_A(F)$ voir figure 11) porté par l'axe de rotation du solide ;
- ▶ par un tableau appelé torseur que l'on exprime au point de rotation (ici A) dans un repère (ici $R(x, y, z)$).

On range les coordonnées du vecteur moment dans la deuxième colonne de ce torseur le moment étant porté par le vecteur directeur de l'axe de rotation (ici z)

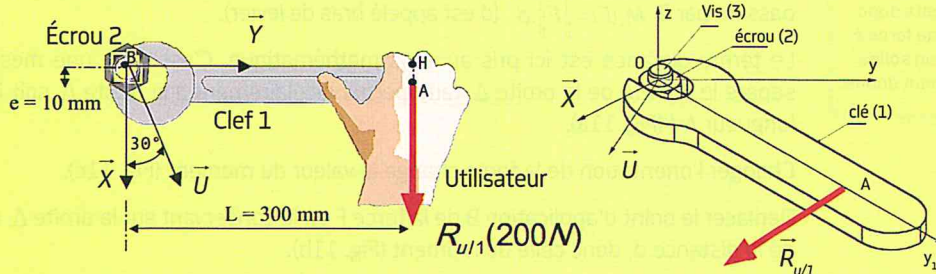
$$\{\mathcal{S}_{1/2}\}_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & M_A(F) \end{pmatrix}_{R(x,y,z)}$$

Il existe deux types de moment (ou couple) :

- ▶ ceux qui comme ci-dessus sont créés par des forces et un bras de levier (la distance d) ;
- ▶ ceux modélisables par un torseur nommé torseur couple qui n'ont que des valeurs sur la deuxième colonne (celle des moments) :

$$\{\mathcal{S}_{1/2}\}_A = \begin{pmatrix} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ 0 & N_A \end{pmatrix}_{R(x,y,z)} \quad \text{où } L, M, N, \text{ sont les composantes du moment sur les trois axes.}$$

ACTIVITÉ 3 Un bricoleur cherche à desserrer un écrou en tirant sur une clé selon la direction.



1. Calculer le moment exercé par l'utilisateur sur l'écrou 2.
2. Que devient ce moment si l'utilisateur tire avec la même force sur la clef selon une direction U .

Le moment d'une force peut avoir un signe positif ou négatif selon le sens de rotation que provoque la force.

Détermination du signe du moment : les études mécaniques ont lieu dans l'espace dans lequel on associe un repère orthonormé direct (par exemple le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) à un solide de référence.

Pour un observateur situé du côté \vec{k} avec ces pieds posés sur le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , la rotation qui applique \vec{i} sur \vec{j} est positive (sens trigonométrique) et il en est de même pour les rotations appliquant \vec{j} sur \vec{k} et \vec{k} sur \vec{i} (conservation par permutation circulaire des vecteurs de la base).

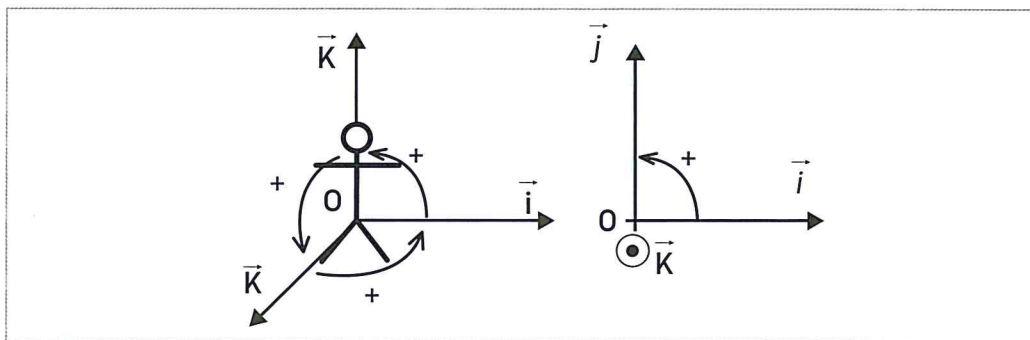
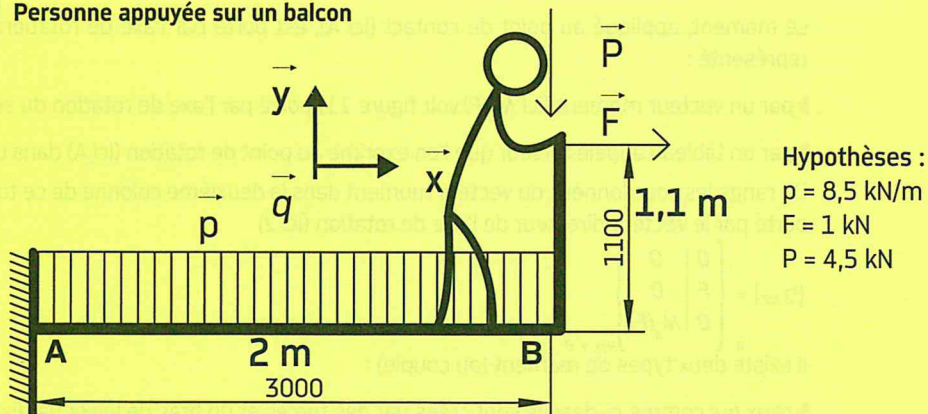


Fig. 14 Base directe

ACTIVITÉ 4 Personne appuyée sur un balcon



1. Déterminer la position du centre de poussée C.
2. Déterminer la norme de la force équivalente Q à la charge linéique q , au moment en A.
3. Déterminer le moment en A des actions exercées par l'utilisateur F et P (les valeurs de ces actions ont été majorées par un coefficient de sécurité).
4. En déduire le moment total au droit de l'encastrement au point A.

4 Hypothèses simplificatrices : cas particulier des problèmes plans

Pour de nombreux systèmes mécaniques étudiés en statique, on peut modéliser le système de la même manière que s'il était plan. Cela est possible si certaines conditions sont respectées.

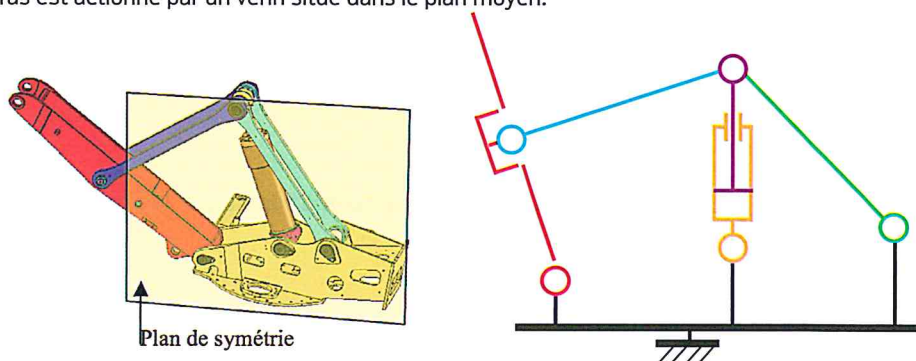
Ces conditions sont :

- ▶ le système mécanique admet un plan de symétrie dans la géométrie du système ;
- ▶ les actions mécaniques de type glisseur sont comprises dans ce plan de symétrie ;
- ▶ les actions mécaniques de type moments (couples) sont perpendiculaires à ce plan de symétrie.

EXEMPLE

La pelleuse 12MXT de la société MECALAC peut être utilisée pour creuser des fossés ou effectuer le chargement ou le déchargement de palettes dans des camions).

Le bras est actionné par un vérin situé dans le plan moyen.



Tous les torseurs sont alors simplifiés de la façon suivante :

Si le plan de symétrie est	La normale est	Composantes non étudiées	Torseur plan
(O, \vec{x}, \vec{y})	\vec{z}	Effort sur \vec{z} Moment autour de \vec{x} Moment autour de \vec{y}	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
(O, \vec{x}, \vec{y})	\vec{y}	Effort sur \vec{y} Moment autour de \vec{x} Moment autour de \vec{z}	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
(O, \vec{x}, \vec{y})	\vec{x}	Effort sur \vec{x} Moment autour de \vec{y} Moment autour de \vec{z}	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$

5 Principe fondamental de la statique (PFS)

a Principe des actions mutuelles

Pour deux solides 0 et 1 en contact, l'action exercée par le solide 0 sur le solide 1 est égale et opposée à l'action exercée par le solide 1 sur le solide 0.

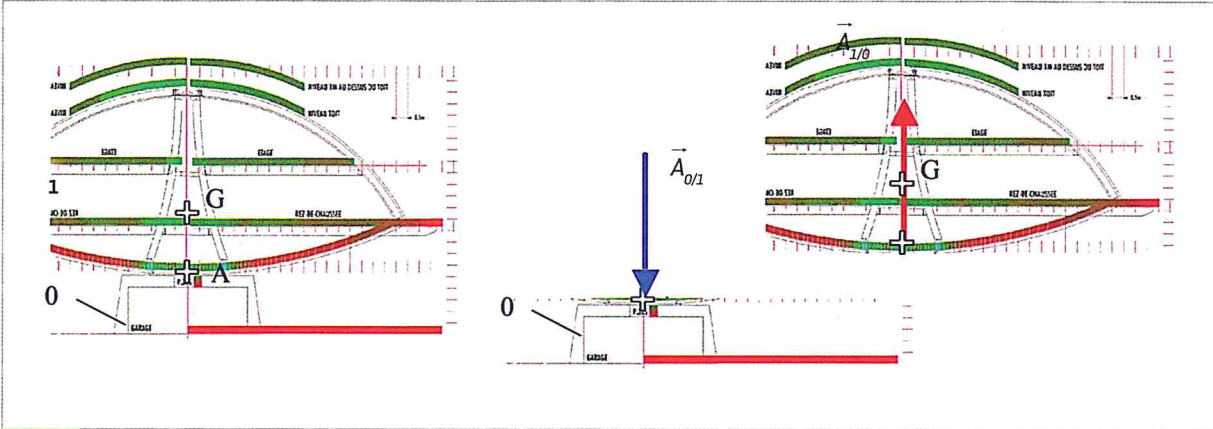


Fig. 15 Exemple d'une maison dôme

$\vec{A}_{0/1} = -\vec{A}_{1/0}$ les deux vecteurs ont le même point d'application, même direction, même norme et sens opposé.

La réciproque est fautive. On peut par exemple obtenir le même résultat en faisant tourner certains types de solides à vitesse constante.

b Énoncé du principe fondamental de la statique

Définition : un solide S est dit en équilibre (immobile) s'il ne fait aucun mouvement de translation ni aucun mouvement de rotation.

Principe fondamental de la statique : si un solide indéformable S est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors la somme des actions mécaniques qui lui sont appliquées est nulle.

c Expressions analytique du PFS

Le PFS se traduit vectoriellement par deux théorèmes :

- ▷ théorème de la résultante : $\sum \vec{F}_{ext/S} = \vec{0}$;
- ▷ théorème du moment résultant : $\sum \vec{M}_{I(F_{ext/S})} = \vec{0}$ avec I point d'intersections des directions des forces.

On peut donc le traduire sous forme d'équations scalaires :

En projetant sur les trois axes le théorème de la résultante on obtient trois équations :	En projetant sur les trois axes le théorème du moment résultant on obtient trois équations :
$\sum \vec{F}_{ext/S} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_{ext/S} = 0 \\ Y_{ext/S} = 0 \\ Z_{ext/S} = 0 \end{cases}$	$\sum \vec{M}_{I(F_{ext/S})} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} L_{I(ext/S)} = 0 \\ M_{I(ext/S)} = 0 \\ N_{I(ext/S)} = 0 \end{cases}$

Il peut être résumé par l'écriture du torseur des actions mécaniques extérieures qui sont appliquées au solide étudié en étant égal au torseur nul. Ce qui s'écrit :

$${}_A \{ \mathcal{T}_{AME/S} \} = \{ 0 \} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \vec{R}_{ext/S} = \vec{0} \\ \vec{M}_{ext/S} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{en A un point quelconque.}$$

d Expressions graphiques du PFS

La traduction graphique d'un problème de statique demande de traiter chaque cas séparément.

Cas d'un solide soumis à l'action de deux forces (deux glisseurs) : un solide soumis à l'action de deux forces reste en équilibre si les deux forces sont égales et opposées (Fig. 16).

Cas d'un solide soumis à l'action de trois forces parallèles : l'application du P.F.S. graphiquement est possible mais laborieuse dans la plupart des cas. Il est conseillé de résoudre ces cas par la méthode analytique.

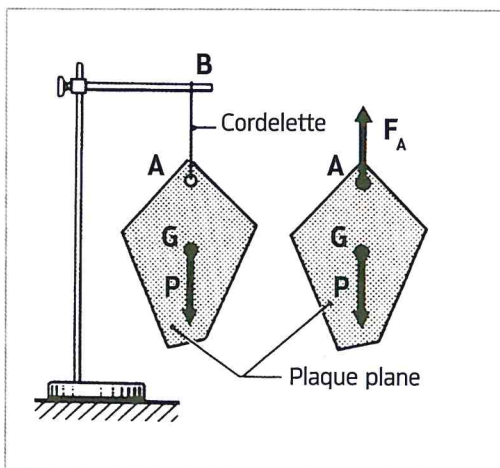


Fig. 16 Solide en équilibre sous l'action de deux forces

Les deux forces sont de même direction, même norme, mais de sens opposés.

EXEMPLE

Solide en équilibre sous l'action de trois forces parallèles.

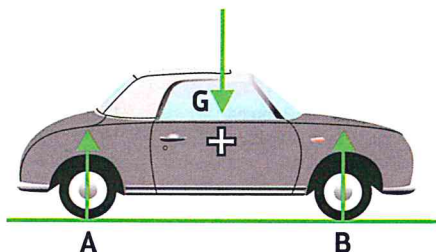


Tableau récapitulatif

Force	Point d'application	Direction	Sens	Intensité
$\vec{A}_{\text{sol}/1}$	A	Verticale	↑	?
$\vec{B}_{\text{sol}/1}$	B	Verticale	↑	?
\vec{P}	G	Verticale	↓	12 000 N

Cas d'un solide soumis à l'action de trois forces non parallèles : dans le cas où S est soumis à l'action de 3 forces coplanaires, l'application du principe fondamental de la statique donne :

Théorème de la résultante

$$\sum \vec{F}_{\text{EXT}/S} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{1/S} + \vec{F}_{2/S} + \vec{F}_{3/S} = \vec{0}$$

Se traduit graphiquement par la construction de la somme des vecteurs forces : La somme vectorielle des 3 forces forme un triangle fermé.

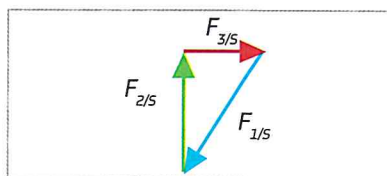


Fig. 17 a

Théorème du moment résultant

$$\sum \vec{M}_{I(\text{FEXT}/S)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{I(1/S)} + \vec{M}_{I(2/S)} + \vec{M}_{I(3/S)} = \vec{0}$$

Se traduit par la construction de la concourante en un même point I des trois forces.

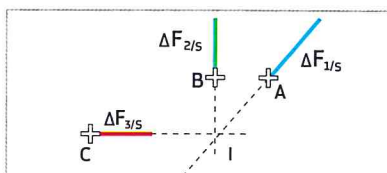


Fig. 17 b

MATIÈRES ET STRUCTURES

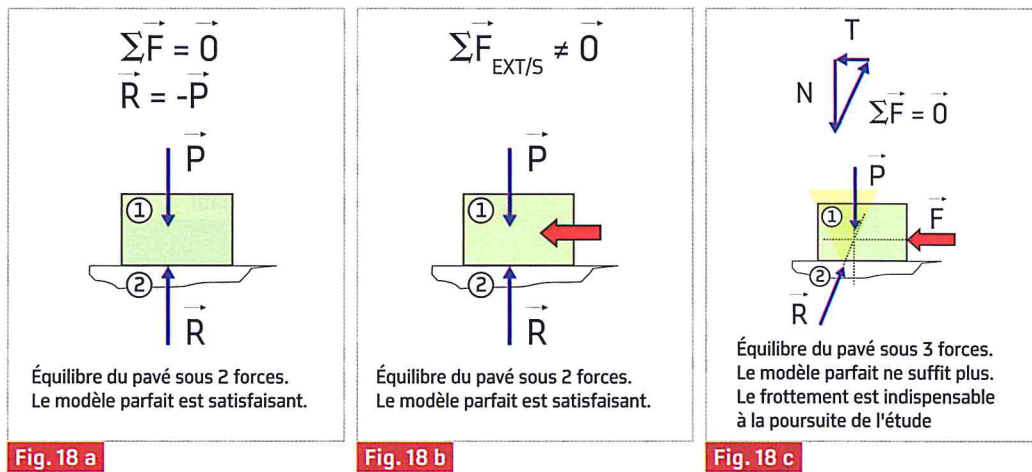
6 Cas des problèmes considérant le frottement

Dans un contact parfait, l'action mécanique transmissible par le contact de deux solides est normale (perpendiculaire) au plan tangent commun du contact. Dans le cas de la figure 18a, le solide est donc en équilibre.

Si l'on cherche à déplacer le solide selon une direction parallèle au plan de contact (Fig. 18b) on remarque qu'il y a résistance au déplacement relatif des deux solides (Fig. 18c).

Pour cela on applique le P.F.S. au solide en équilibre sous l'action de ces trois forces. On constate que l'action du support sur le solide est inclinée par rapport à la normale (ici la verticale).

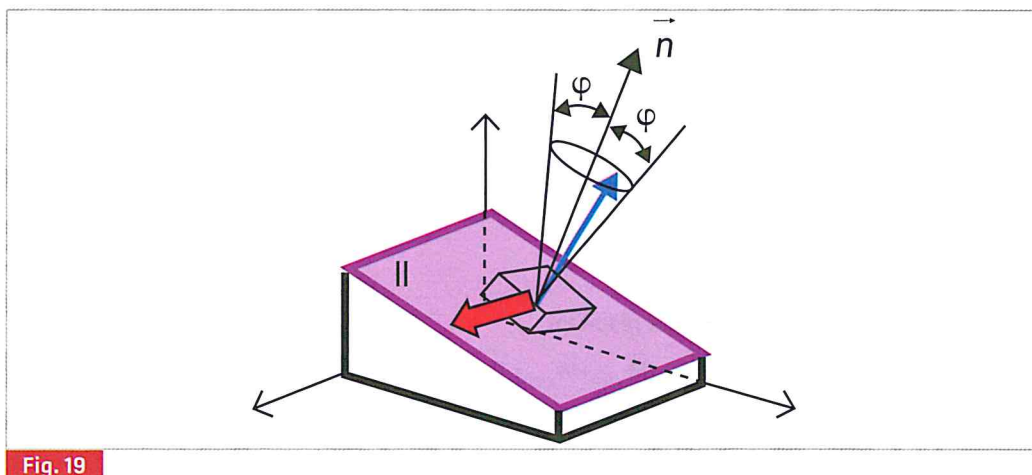
Cette action mécanique peut se décomposer en une composante normale N , appelée effort presseur, et une composante tangentielle T qui sera appelée force de frottement ou d'adhérence.



Différents essais on permet d'établir les propriétés de la force de frottement statique :

1. La force se situe dans le plan tangent de contact et s'oppose à la tendance au déplacement relatif des deux solides.
2. La force est indépendante de la taille et de la forme de la surface de contact (loi d'Amontons).
3. La force est proportionnelle à la charge (cette charge) est une force perpendiculaire au plan de contact (loi de Coulombs) $\mu_0 = T/N$ où μ_0 est appelé coefficient d'adhérence.

En fonction de la direction selon laquelle on cherche à déplacer le solide le support va s'incliner de manière à être opposé à ce déplacement. Il peut donc décrire les bords d'un cône appelé « **cône de frottement d'adhérence** ».



Deux situations se produisent selon que le corps est à l'arrêt ou bien en déplacement :

- ▀ les corps sont immobiles, l'action de contact s'incline au maximum de la valeur de l'angle d'adhérence φ_0 (en rouge) ;
- ▀ les corps se déplacent, l'action de contact s'incline au maximum de la valeur de l'angle de glissement φ (en violet)

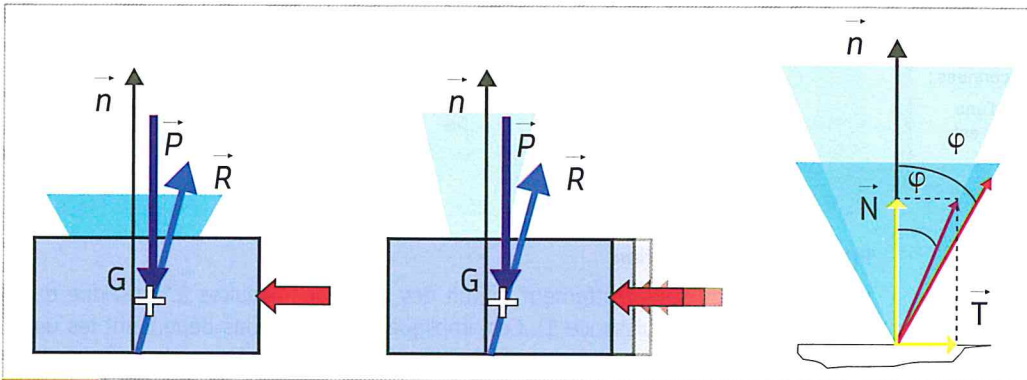


Fig. 20 Solide en contact plan avec frottement

Les mesures montrent qu'il est plus difficile de mettre un objet en mouvement que d'entretenir le mouvement déjà existant. Le cône de glissement est donc plus à l'intérieur du cône d'adhérence. Quand l'équilibre est rompu, le solide se déplace, la résultante sort pas du cône de glissement, elle reste sur le bord. Le cône est toujours centré vers le solide adhérent.

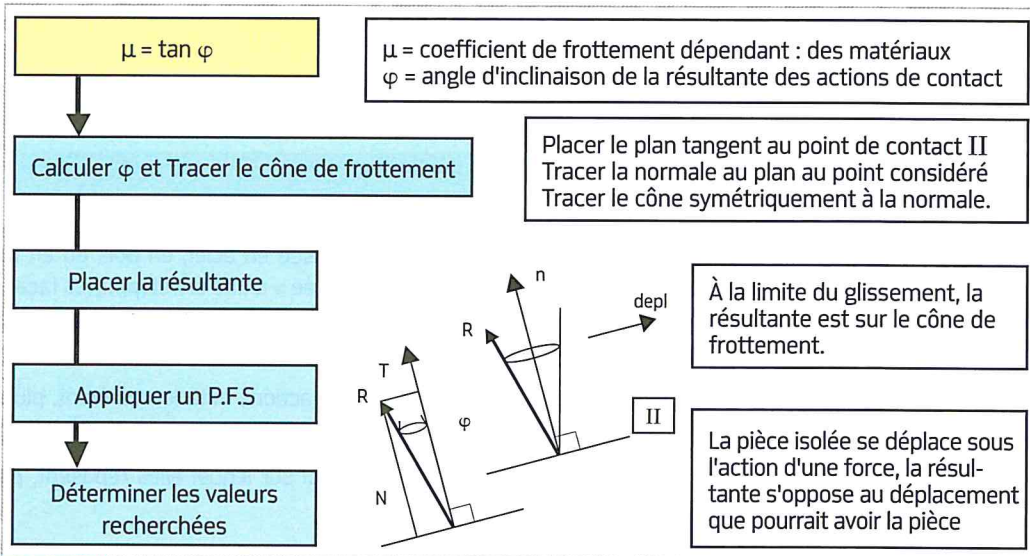


Fig. 21 Démarche pour étudier l'équilibre statique d'un solide en liaison réelle

MATIÈRES ET STRUCTURES

7 Équilibre isostatique ou hyperstatique

Définition : un système matériel est en équilibre hyperstatique si les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées ont plus de composantes inconnues que le nombre d'équations fournies par le principe fondamental de la statique.

Donc en statique plane, le problème est hyperstatique s'il y a plus de 3 composantes inconnues. En statique spatiale, le problème est hyperstatique s'il y a plus de 6 composantes inconnues.

Comment résoudre un problème hyperstatique ?

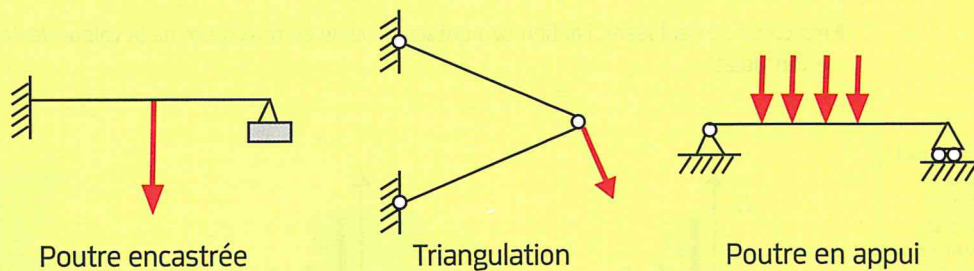
- ▀ En formulant des hypothèses simplificatrices. Ex. : pour une voiture on fait l'hypothèse que les A.M. sur les roues sont identiques de chaque côté (hypothèse de symétrie).
- ▀ En faisant appel à des calculs d'élasticité des matériaux (hors programme).

ACTIVITÉ 5 Conclure sur l'hyperstaticité des montages plans ci-contre.

En statique graphique, la résolution est possible si :

- ▶ les 3 points d'application sont connus ;
- ▶ et deux directions au moins sont connues ;
- ▶ et l'intensité d'une force au moins est connue.

Structures élémentaires ISO



Principe de superposition

Le P.F.S. avec ou sans frottement fournit des équations linéaires (c'est-à-dire que les efforts et les moments sont à la puissance 1). Ceci implique que les actions dépendent les unes des autres à un coefficient près. L'action mécanique résultante est déterminée en ajoutant les actions calculées sur la même géométrie sur laquelle agissent les actions connues prises séparément.

Ex. : doubler le poids du véhicule double les actions de contact sur les pneus.

ACTIVITÉ 6 Appliquer le principe de superposition au problème du balcon déjà présenté.

8 Structures

La structure des bâtiments, sorte d'ossature, est réalisée en acier, en bois ou en béton, à partir de poutres, de poteaux et de parois. Elle est ensuite « habillée » d'une enveloppe, les façades, et aménagée pour recevoir des cloisons, des planchers, des canalisations et divers appareillages destinés au confort des occupants (chauffage, eau courante, ascenseur...).

Structure et enveloppe participent à la résistance aux actions extérieures (vent, pluie, neige, mouvement du sol...) et intérieures (leur propre poids, celui des aménagements et celui des occupants).

Elles transmettent les actions qu'elles subissent au sol sur lequel elles reposent, par l'intermédiaire des fondations.

a Notions de descente de charges

Lorsqu'on construit un bâtiment, on prévoit que chaque étage va transmettre au niveau inférieur une charge qui correspond à son propre poids additionné à celui des étages supérieurs et ce jusqu'au rez-de-chaussée puis aux fondations.

EXEMPLE

Une éolienne off-shore doit supporter son propre poids, ainsi que les vents et la houle.

Ses fondations sont très surveillées pour éviter qu'elle ne bascule ou ne s'enfonce dans le sable.



Un ouvrage, ou un élément d'ouvrage, est de plus soumis à des actions extérieures auxquelles il doit résister en conservant sa stabilité.

Définition : on appelle descente de charges, le principe d'analyser la manière dont les efforts sont distribués sur les différents éléments qui composent la structure d'un bâtiment.

La descente de charge prend en compte les actions verticales et horizontales s'appliquant sur le bâtiment.

Principes de calcul

- ▶ Commencer par le niveau le plus haut (charpente ou toiture terrasse) et descendre jusqu'au niveau le plus bas (les fondations).
- ▶ Établir un schéma mécanique de structure niveau par niveau avec le sens de portée de la charpente et des planchers, les balcons, les poteaux, les poutres, etc.
- ▶ Déterminer les charges occasionnelles : vibrations dues à des travaux voisins, séismes, etc., qui se traduisent par des accélérations des masses créant des efforts horizontaux.
- ▶ Déterminer les charges permanentes (en daN/m ou daN/m²) : type de plancher, revêtement de sol (épaisseur et nature), type de toiture (tuile, ardoise, possibilité de neige...), cloisons, type et épaisseur de murs (briques, parpaing, béton).
- ▶ Déterminer les charges climatiques (liées au vent, à la neige).
- ▶ Définir le type d'utilisation des pièces (logements, circulation, bureaux...) pour choisir les surcharges d'exploitation à appliquer au plancher (en daN/m ou daN/m²). Ce sont des charges qui prennent en compte les mobiliers, des personnes et autres objets. On peut y inclure des cloisons qui peuvent être enlevées ou déplacées.
- ▶ Une fois un niveau étudié, on applique un coefficient aux charges appliquées aux pieds des verticaux (murs, poteaux...).
- ▶ Dimensionner les fondations et procéder au prédimensionnement des éléments porteurs (le dimensionnement définitif étant lié au choix exact des matériaux et procédés).

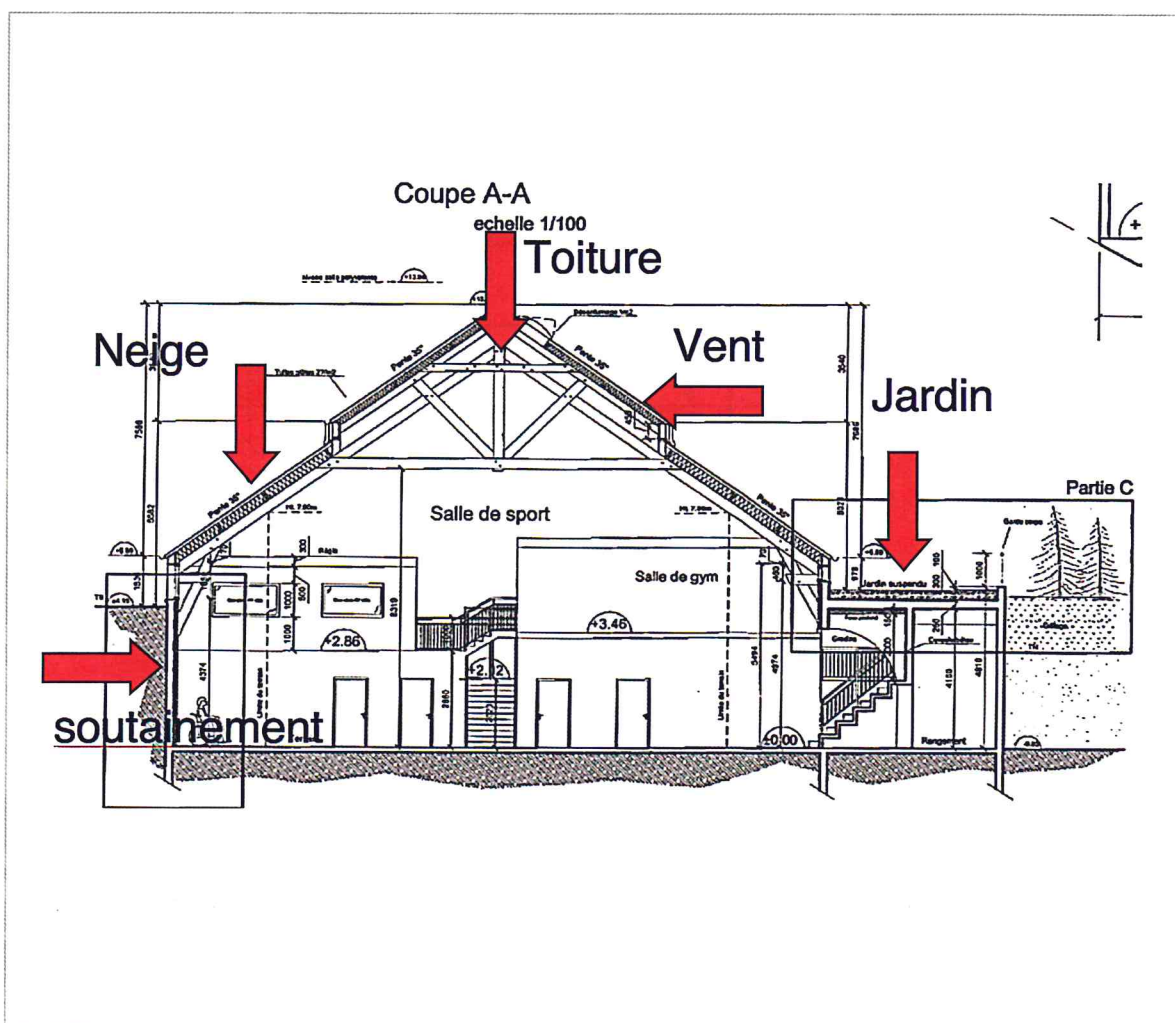


Fig. 21 Différentes charges sur un bâtiment

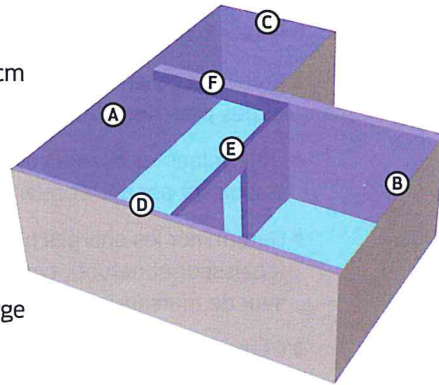
EXEMPLE

Étage courant de bâtiment logement individuel

Composition :

- ▶ le plancher béton est de 20 cm avec une chape de 6 cm et du carrelage ;
- ▶ les murs A, B, C, D sont en parpaing de 20 cm ;
- ▶ le mur E est en béton banché 18 cm ;
- ▶ la poutre P est en béton armé ;
- ▶ la surface bleu ciel représente le plancher.

Le logement étant individuel, on applique une surcharge d'exploitation de 150 daN/m².



Pour les bâtiments ayant un grand nombre d'étages répétitifs, on applique un coefficient de dégression de charge (voir courbe de dégression des charges où l'on peut considérer comme indépendants les étages dont la charge d'occupation est différente).

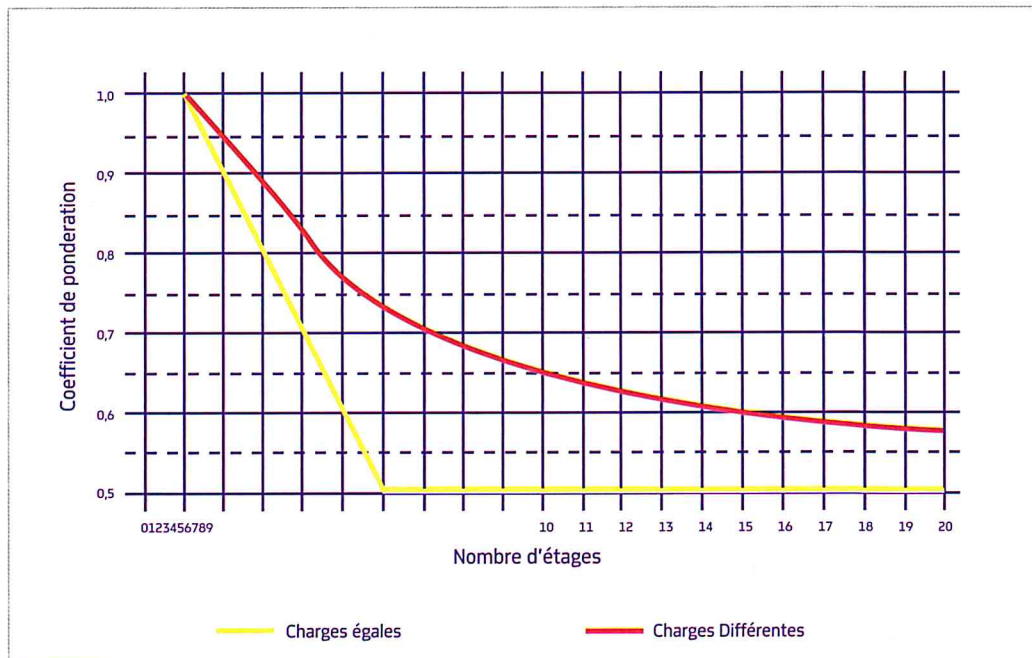


Fig. 22 Courbe d'évolution du coefficient de dégression de charge

b Structures en treillis

Définition : un treillis est un ensemble de barres rectilignes assemblées par des nœuds.

Hypothèses :

- ▶ les barres sollicitées en traction ou en compression ne se déforment pas ;
- ▶ les problèmes sont plans ;
- ▶ le poids propre des barres est négligé devant l'importance des efforts extérieurs ;
- ▶ les points de contact sont les nœuds ;
- ▶ les nœuds sont équivalents à des liaisons pivot.

Équations aux nœuds : on cherche à déterminer les actions dans toutes les barres en isolant successivement tous les nœuds du treillis en équilibre et en leur appliquant les P.F.S.

Quelques résultats courants sont à connaître :

- ▷ lorsqu'il n'y a pas de charge extérieure sur un nœud à trois barres, si deux barres sont colinéaires (ici 1 et 3), les actions dans ces deux barres sont égales et opposées et il n'y a pas d'action dans la barre centrale (ici 2) ;
- ▷ lorsqu'il n'y a pas de charge extérieure sur un nœud à quatre barres, si les barres sont colinéaires deux à deux, les actions dans les barres opposées (ici 1/3 et 2/4) sont égales et opposées.

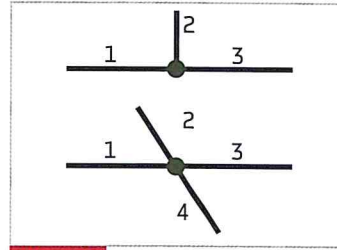


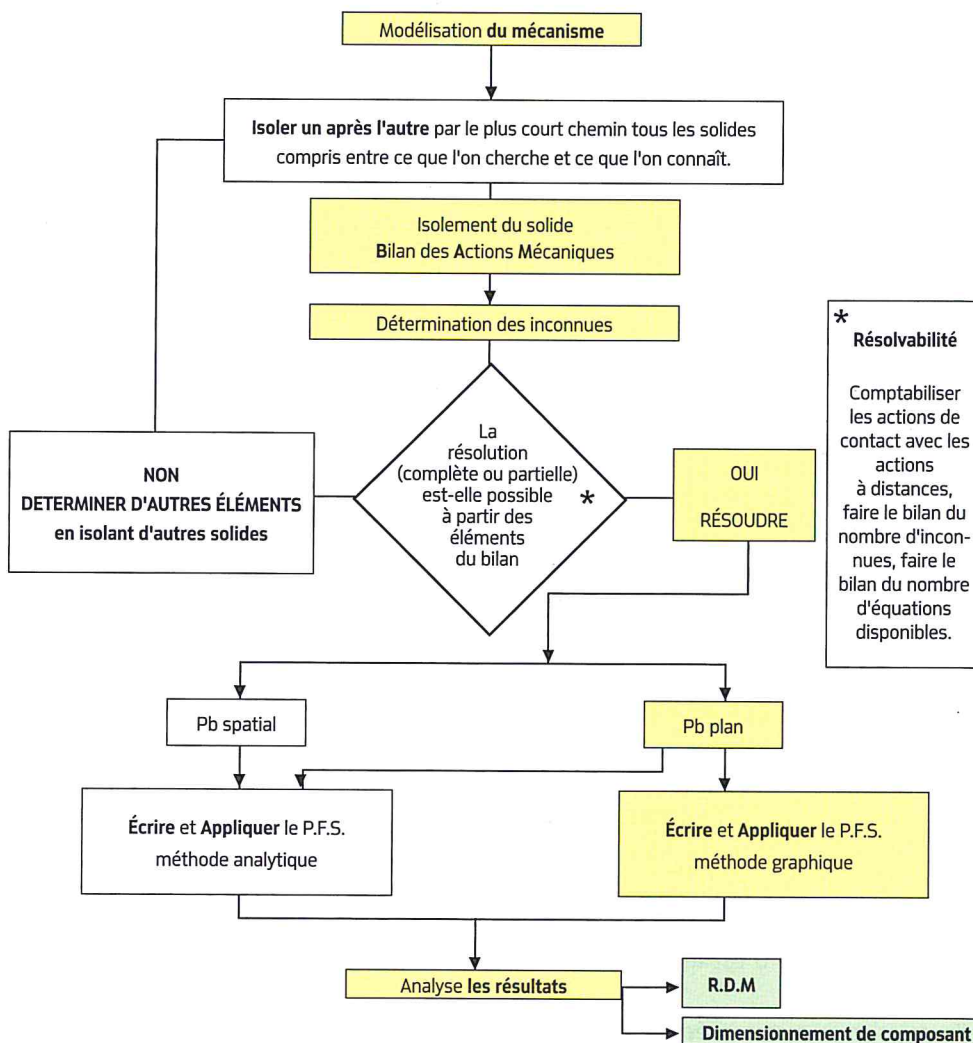
Fig. 23

Équations aux sections : on cherche à déterminer les actions dans quelques barres en réalisant des coupures du treillis. Le treillis étant en équilibre, chaque sous-partie est elle-même en équilibre puisque l'ensemble est immobile. On peut donc isoler une sous-partie du treillis et lui appliquer le P.F.S.

SYNTHÈSE

Démarche de résolution d'un problème de statique

Remarque : lorsqu'un système comporte beaucoup de pièces à isoler, il est conseillé de commencer par isoler les solides soumis à 2 forces.



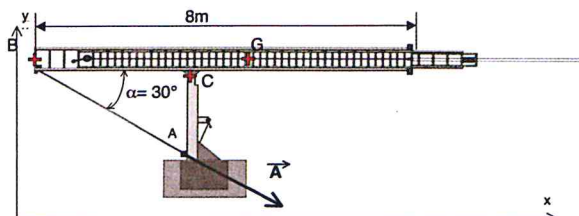
*** Résolvabilité**
Comptabiliser les actions de contact avec les actions à distances, faire le bilan du nombre d'inconnues, faire le bilan du nombre d'équations disponibles.

Exercices

POUR S'ENTRAÎNER

1 Pylône télescopique basculant

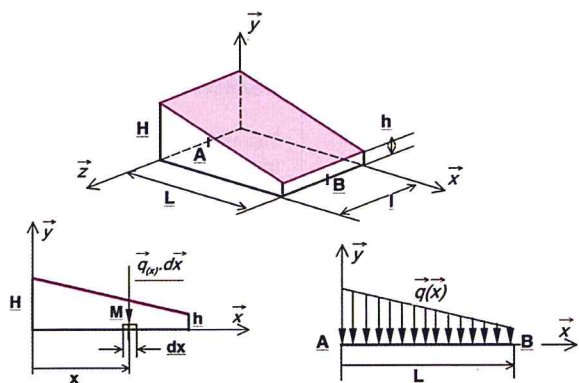
Le pylône est en alliage d'aluminium, d'une masse de 450 kg appliquée en G, milieu du premier tronçon, d'une longueur dépliée de 20 m.



1. Déterminer l'expression du moment en C de la force \vec{A} .
2. Calculer le moment $\vec{M}_C(\vec{P})$ du poids \vec{P} .
3. Déterminer la valeur de l'intensité de la force \vec{A} qu'il est nécessaire de fournir pour espérer lever le pylône.

2 Dalle en béton rectangulaire

D'épaisseur non constante, elle est soumise à son propre poids. Dans le cas où cette dalle est posée sur le sol, on cherche à déterminer l'action exercée par la dalle sur le sol. On se ramène à un problème plan dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , la masse volumique du béton est $\rho = \text{kg/m}^3$. La dalle est modélisée comme une poutre droite AB. $\vec{q}(x)$ est la densité de force.



1. À partir de l'équation de la droite (CD), exprimer $h(x)$ hauteur d'un point quelconque situé sur le plan incliné à une abscisse x en fonction des grandeurs H et h.
2. Quelle est l'unité de la densité de force $\vec{q}(x)$?
3. Donner l'expression de $\vec{q}(x)$ en fonction de la masse volumique ρ .
4. Déterminer l'expression de la résultante \vec{R} en fonction de ρ, g, l, L, H et h.

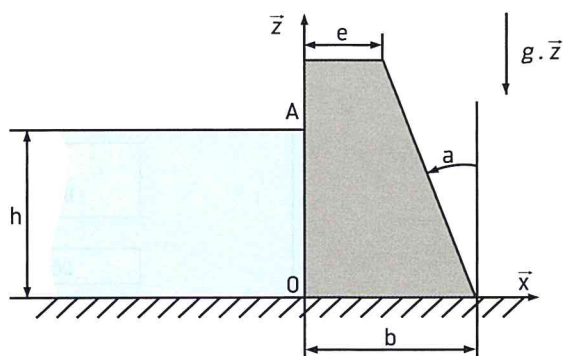
La position du centre de gravité G est tel qu'en G nous avons : $\vec{AG} =$

5. Déterminer l'expression du moment résultant $\vec{M}_A(\vec{R})$ en fonction de ρ, g, l, L, H et h.

3 Mur de soutènement ou portion de barrage



La coupe transversale d'un mur de soutènement est représentée ci-dessous. Ce barrage est soumis à l'action de l'eau (pression hydrostatique) et à l'action de la pesanteur. On étudie le système en pression relative, c'est-à-dire sans tenir de l'action de la pression atmosphérique. On s'intéresse à un élément de barrage de longueur unitaire (soit 1 m suivant la direction \vec{Y}) avec $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ comme masse volumique de l'eau. On se ramène à un problème plan dans le plan (O, \vec{x}, \vec{z}) .



1. Déterminer la valeur de la pression minimale p_{mini} et de la pression maximale p_{maxi} .
2. Déterminer la résultante \vec{R} des forces de pression de l'eau sur le barrage.
3. Exprimer le torseur des actions de pression sur le barrage centre de poussée G.
4. Déterminer la position du centre de poussée défini par $\vec{OG} \cdot \vec{z} = z_G$.

