

**BTS**

C. SERMONDADE  
A. TOUSSAINT  
sous la direction de  
R. MÉRAT & R. MOREAU

# Régulation

Tome 4

Correcteurs spécifiques,  
régulation en temps discret

NATHAN

# Sommaire

Avant-propos .....	3
1. Correcteurs spécifiques .....	4
2. Causalité .....	8
3. Modèles de référence .....	12
4. Correcteur de Smith 1 : Principe .....	18
5. Correcteur de Smith 2 : Robustesse .....	24
6. Correcteur à modèle interne 1 : Principe .....	30
7. Correcteur à modèle interne 2 : Performances .....	36
8. Représentation d'état .....	42
9. Régulation par retour d'état 1 : Principe .....	48
10. Régulation par retour d'état 2 : Performances .....	54
11. Placement robuste des pôles .....	60
12. Régulateurs autorégulants .....	66
13. Régulateurs auto-adaptatifs .....	72
14. Régulation en temps discret 1 : Systèmes discrets .....	78
15. Régulation en temps discret 2 : Transformée en $z$ .....	84
16. Régulation en temps discret 3 : Étude d'une boucle de régulation ...	90
17. Régulation en temps discret 4 : Correcteurs .....	96
18. Régulation en temps discret 5 : Équations récurrentes .....	102
19. Introduction à la logique floue .....	108
20. Correcteur à logique floue .....	114
21. Correcteurs prédictifs .....	120
<b>Annexes</b>	
Tableau de comparaison des correcteurs .....	126
Principaux symboles utilisés .....	127

Ce livre s'adresse aux techniciens de la régulation qui ont besoin de disposer rapidement d'informations théoriques ou pratiques. Il est plus généralement destiné à tous ceux qui souhaitent se familiariser avec la régulation, sans se limiter aux asservissements. Ce livre est le quatrième et dernier d'une série de Mémentos qui présente l'ensemble de la régulation et du contrôle-commande des installations industrielles.

Utilisant un formalisme mathématique allégé, il regroupe les résultats essentiels de la régulation. À ce titre, il peut constituer un aide-mémoire très utile aux étudiants et aux auditeurs de la formation permanente.

Le technicien ou l'étudiant, qui désire retrouver un résultat ou une explication, est immédiatement dirigé par le sommaire vers le sujet qui l'intéresse. Pour celui qui désire bien maîtriser les lois de la régulation, les difficultés sont réparties entre des chapitres courts, qui constituent une suite d'étapes simples. Après chacune d'elles, les connaissances peuvent être contrôlées et confortées avant de passer à la suivante. Cette démarche qui apporte simultanément progressivité et assurance en soi sera certainement appréciée de tous ceux que l'étude des sciences intéresse.

La présentation retenue doit permettre un accès facile à l'information recherchée et un apprentissage aisé. En effet, à chaque notion importante correspond un chapitre. Le lecteur y trouve un thème accompagné d'exemples. Tous les chapitres sont accompagnés d'exercices avec leurs solutions (proposées pour des échelles de temps réduites pour simplifier).

Le contenu de chaque chapitre reste toujours simple, les auteurs ayant choisi de privilégier l'observation et l'exploitation d'expériences personnelles plutôt que l'exposé de théories et le recours systématique aux mathématiques.

Les connaissances acquises, indépendantes des technologies en perpétuelle évolution, peuvent suffire pour une bonne maîtrise de nombreux équipements de régulation, dans les domaines les plus variés. Elle peuvent permettre aux techniciens de conception, d'installation, de maintenance et de conduite de compléter des connaissances parfois empiriques, que les contraintes modernes de qualité de production imposent de réactualiser.

*L'ouvrage Régulation 3 a permis de montrer que, dans la plupart des cas où l'emploi de simples régulateurs PID n'était plus suffisant, des dispositifs complémentaires permettent de mettre en œuvre des stratégies prolongeant le domaine d'utilisation de ce type de régulateurs.*

*Ces solutions, au fonctionnement éprouvé et maîtrisé par le technicien, sont bien souvent suffisantes malgré les limitations qu'elles entraînent.*

*Néanmoins, les contraintes d'automatisation des installations modernes ne permettent pas toujours de se satisfaire de ces seules améliorations. L'automatisation complète de cycles de fabrication par lots (régulation batch) impose au dispositif de régulation des performances satisfaisantes dans toutes les phases de fonctionnement. La notion de robustesse du dispositif de contrôle-commande devient alors prépondérante.*

*On rappelle qu'un dispositif de régulation est robuste s'il est capable d'assurer des performances satisfaisantes en cas de forte évolution du procédé, c'est-à-dire si les fonctions de transfert réglantes et perturbatrices sont modifiées.*

*Les systèmes numériques de contrôle-commande (SNCC) ont longtemps été utilisés pour réaliser, sous forme discrète, les principales fonctionnalités qu'offrait la régulation analogique.*

*Le niveau d'intervention plus élevé des techniciens formés actuellement leur permet de mettre en œuvre des régulateurs ou des stratégies de régulation que l'on regroupera sous l'appellation générale de correcteurs spécifiques. Ce terme permet de caractériser les dispositifs chargés de régler un problème bien particulier, propre à un dispositif de production. Ceux-ci seront préconisés lorsque les solutions évoquées dans Régulation 3 sont insuffisantes ou trop complexes.*

## 1 Influence d'un temps mort naturel important

Les techniques de réglage des régulateurs PID montrent que la difficulté de réglage, pour un système estimé par le modèle de Broïda, est fonction du coefficient de réglabilité  $\frac{T}{\tau}$  où  $T$  représente le temps mort et  $\tau$  la constante de temps.

Pour les valeurs telles que  $\frac{T}{\tau} > 0,5$  les performances et la robustesse d'une monoboucle PID sont insuffisantes et l'emploi d'un correcteur spécifique s'impose.

De nombreuses installations industrielles où l'on observe un temps mort (de réactivité, de propagation d'énergie ou de matière) nécessitent

l'utilisation de ce type d'algorithme :

- réacteur chimique à faible cinétique de réaction ;
- équipement pour mélanges en ligne ;
- colonnes de distillation.

À titre d'exemple, la figure 1 représente la régulation de la température du plateau sensible d'une colonne de distillation. On rappelle que cette température est une image de la qualité du produit obtenu en tête de la colonne.

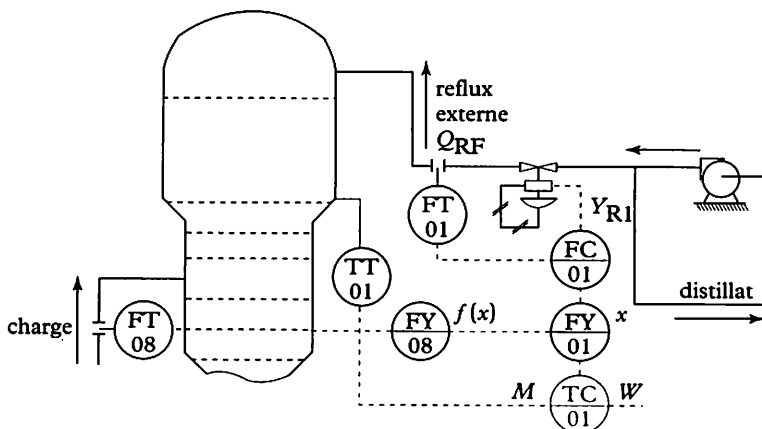


Fig. 1

La stratégie proposée (*Régulation 3*, Chapitres 20 et 21) met en œuvre une régulation maillée dite « à trois éléments », composée d'une boucle cascade (maître TT01, TC01, esclave FT01, FC01) et d'une correction de tendance (FT08, FY08, FY01).

Pour adapter la qualité, un conducteur d'installation modifie la consigne  $W$  du régulateur TC01. Si le plateau sensible n'est pas situé au dernier plateau, la fonction de transfert  $H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)}$  présente

un temps mort important. On peut essayer de le réduire en construisant une colonne aboutissant à un plateau sensible le plus haut possible. En général, il convient plutôt d'employer, pour TC01, un correcteur spécifique.

Parmi les nombreuses possibilités offertes, on citera les différentes formes du correcteur de Smith, les correcteurs à modèle interne et les correcteurs à retour d'état.

Toutes ces réalisations nécessitent une modélisation assez précise de la fonction de transfert réglante, le technicien devant connaître le modèle adopté et les valeurs des paramètres. Ces dispositifs permettent alors des performances temporelles très satisfaisantes et, en même temps, présentent une excellente robustesse.

## 2 Non-linéarité des systèmes

La modélisation d'une fonction de transfert est toujours réalisée autour d'un point de fonctionnement, dans une hypothèse de linéarité locale.

Pour des procédés industriels évoluant en fonction de contraintes de fabrication variables (consigne, débit de charge...), cette hypothèse n'est plus réaliste. Il est parfois relativement aisé de connaître les variations déterministes des paramètres de la fonction de transfert réglante (gain statique, temps mort...) selon les points de fonctionnement envisagés.

Un technicien peut alors concevoir des stratégies de régulation adaptatives.

Lorsque plusieurs perturbations agissent simultanément, il est malheureusement difficile d'évaluer le lien entre les paramètres du modèle et les perturbations.

Il est alors préférable d'employer un régulateur *auto-adaptatif*, dont le réglage peut varier en fonction des évolutions observées de la mesure et(ou) du signal réglant.

Cet auto-ajustement nécessite un laps de temps important et ne convient qu'aux systèmes présentant une évolution lente de la fonction de transfert réglante.

Pour les systèmes rapides, présentant de fortes non-linéarités, les correcteurs utilisant les techniques de *logique floue* permettent des résultats satisfaisants, en particulier du point de vue de la robustesse.

## 3 Correcteur à fonctionnement en temps discret

Lorsque la mesure est effectuée par un appareil à fonctionnement discontinu, le système de correction doit bien évidemment tenir compte du retard imposé entre chaque actualisation du signal, image de la grandeur à régler.

Parmi les appareils de mesure fonctionnant de façon cyclique, on peut citer :

- les analyseurs de point de rosée ;
- les chromatographes.

La figure 2 reprend la stratégie évoquée au premier paragraphe, la modification de consigne de température étant réalisée par un régulateur de qualité AC01.

La mesure de qualité du distillat est assurée par un chromatographe industriel (les moins onéreux fonctionnent de façon discontinue), délivrant une mesure à la fin de chaque cycle d'analyse, souvent appelé *cycle d'échantillonnage*.

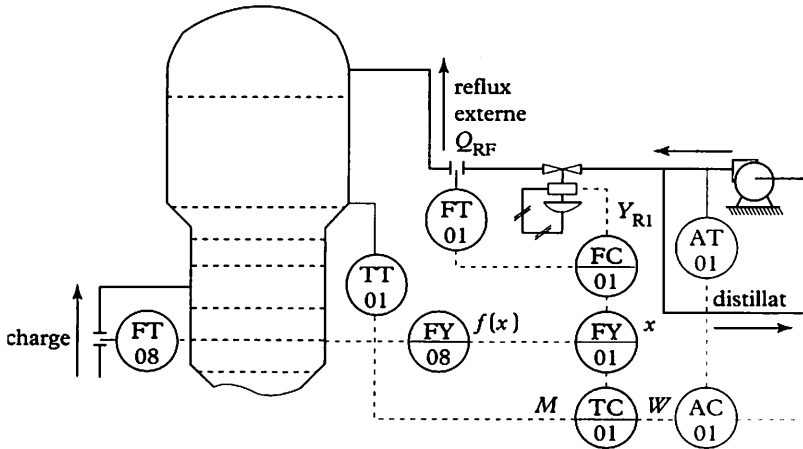


Fig. 2

La durée d'une analyse (30 s à quelques minutes) est fonction principalement de la nature et du nombre de constituants contenus dans l'échantillon. Il faut donc prendre en compte le caractère discontinu du signal de mesure à l'aide de correcteurs fonctionnant eux-mêmes en *temps discret*.

On notera à ce propos qu'il convient d'éviter les termes de « régulation numérique » ou « régulation échantillonnée ». En effet, tous les régulateurs récents (depuis les années 80) sont réalisés au moyen de microprocesseurs et mettent donc en œuvre des techniques numériques utilisant un échantillonnage des signaux. Ils sont cependant conçus pour fonctionner extérieurement comme des régulateurs continus, avec des échantillonnages rapides.

On réservera le terme « correcteur à temps discret » pour des dispositifs où la durée de la période d'échantillonnage intervient dans le calcul du correcteur.

## 4 Conclusion

On retiendra que la régulation industrielle reste attachée à l'emploi des régulateurs PID, mais dans des cas bien particuliers il convient de savoir mettre en œuvre des correcteurs spécifiques.

Souvent réalisables par chaînage des modules disponibles dans les SNCC, ces correcteurs sont encore plus faciles à réaliser si le technicien de conception dispose d'outils logiciels lui permettant de manipuler directement les équations de liaison entre signaux discrets.

## 1 Principe de causalité

C'est un principe fondamental qui s'applique notamment à l'évolution des systèmes. Il peut se formuler simplement de la façon suivante :

« Tout a une cause et, dans les mêmes conditions, les mêmes causes ont les mêmes effets ».

Ce principe de bon sens, qui ne se démontre pas mais se vérifie par ses conséquences, revêt une grande importance en théorie de la commande. Ce chapitre se propose de dégager quelques résultats simples, sans formalisme excessif.

Dans un schéma fonctionnel, représentant l'interaction entre une grandeur d'entrée  $e(t)$  et une grandeur de sortie  $s(t)$  (fig. 1), l'orientation des flèches placées sous les symboles  $e(t)$  et  $s(t)$  traduisent clairement que l'évolution de  $s(t)$  est la conséquence d'une variation préalable de  $e(t)$ , qui est la cause.

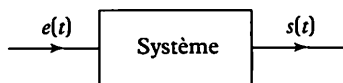


Fig. 1

Par exemple, si la puissance de chauffe  $e(t)$  est la seule grandeur d'influence d'un réacteur, la température  $s(t)$  du contenu de celui-ci commencera à être modifiée après une évolution de  $e(t)$ .

Le principe de causalité, appliqué à la modélisation d'un système physiquement réalisable, implique des conséquences, notamment pour l'expression des fonctions de transfert.

En particulier, il est impératif de pouvoir mettre en évidence la cause (ou les causes), ce qui n'est pas évident comme on va le voir avec un exemple, avant d'entreprendre une généralisation.

## 2 Recherche de causalité

On étudie un dipôle électrique simple, connu de tous, le condensateur idéal (fig. 2).

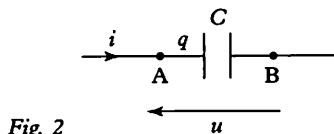


Fig. 2

Un modèle de connaissance peut être établi, liant l'intensité  $i(t)$  du courant et la tension  $u(t)$  aux bornes du composant.

On connaît la relation entre la charge  $q$  de l'armature A et la tension  $u$  avec les conventions de la figure 2 :  $q = Cu$ . Si, de plus,  $i(t)$  est

variable, on peut établir la relation  $i(t) = \frac{dq}{dt}$  ce qui aboutit à l'ex-

pression :  $i(t) = C \frac{du}{dt}$ .

Cette relation différentielle n'indique pas, *a priori*, de relation causale entre  $i(t)$  et  $u(t)$ .



Ce condensateur peut être étudié comme un système élémentaire, liant une grandeur d'entrée  $e(t)$  et une grandeur de sortie  $s(t)$ . Quelles sont ces grandeurs ? Laquelle est la cause et l'autre, l'effet ? En notation de Laplace, la relation différentielle précédente peut s'écrire sous les formes  $I(p) = Cp U(p)$  ou  $U(p) = \frac{1}{Cp} \cdot I(p)$ , relations qui conduisent à deux schémas possibles (fig. 3a et fig. 3b).

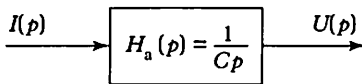


Fig. 3a

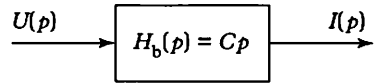


Fig. 3b

Quel schéma peut être qualifié de causal ?

Un électricien sait d'expérience que seule l'existence d'un courant positif non nul, produit par un générateur, peut provoquer une charge du condensateur, donc une variation de  $u(t)$ .

En revanche, une tension non nulle n'implique pas nécessairement l'existence d'un courant électrique (le condensateur peut rester chargé indéfiniment).

La décharge du condensateur dans une résistance  $R$  n'implique pas que  $u(t)$  soit la cause de  $i(t)$  : c'est la possibilité d'évacuer l'énergie emmagasinée dans le condensateur ( $W = C \frac{u^2}{2}$ ) vers l'élément dissipatif qui entraîne l'apparition d'un courant. La circulation de ce courant est la véritable cause de la diminution de  $u(t)$  !

### Conséquences

On dira que la figure 3a traduit la causalité, alors que la figure 3b ne la traduit pas.

On observe que  $H_a(p)$  fait apparaître un intégrateur, tandis que  $H_b(p)$  fait intervenir un dérivateur : on en déduit que l'intégration est causale, tandis que la dérivation ne l'est pas.

### Remarque

Le principe de causalité peut être prolongé en considérant l'aspect énergétique des phénomènes observés. Le condensateur se prête bien à ce raisonnement.

Un électricien sait que la tension  $u(t)$  aux bornes d'un condensateur ne peut subir de discontinuité instantanée. S'il en était autrement, on observerait une discontinuité de l'énergie emmagasinée dans le condensateur  $W = C \frac{u^2}{2}$  ce qui se traduirait par une puissance instantanée infinie (ce qui est physiquement irréalisable).

Par contre, l'étude de la charge et de la décharge de ce même condensateur montre que l'on peut observer des discontinuités de l'intensité  $i(t)$  du courant.

On retiendra donc le résultat suivant : une discontinuité de la grandeur d'entrée  $e(t)$  d'un système causal peut ne pas provoquer de discontinuité pour la grandeur de sortie  $s(t)$ . En revanche, une continuité de l'entrée  $e(t)$  d'un système causal ne peut pas provoquer de discontinuité sur sa sortie  $s(t)$ .

### 3 Conséquences sur les systèmes

L'expérience montre que les fonctions de transfert d'un système peuvent être exprimées au moyen d'équations différentielles plus ou moins complexes. Souvent, on peut les simplifier en reliant entre elles des variations de faible amplitude, qui correspondent à des évolutions autour d'un point de fonctionnement.

La fonction de transfert réglante et la fonction de transfert perturbatrice sont respectivement exprimées par les relations suivantes (fig. 4) :

$$m(t) = H[y_R(t)] \text{ et} \\ m(t) = -H_z[z(t)]$$

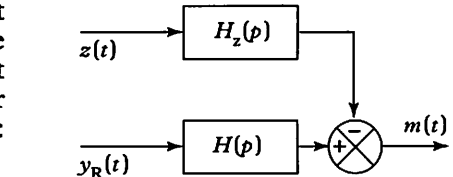


Fig 4

Elles peuvent généralement être décrites par *des équations différentielles linéaires à coefficients constants* de la forme normalisée suivante :

$$\frac{a_n d^n m}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dm}{dt} + m(t) = b_m \frac{d^m y_R}{dt^m} + \dots + b_0 y_R(t)$$

où le deuxième membre est une combinaison linéaire de  $y_R(t)$  et de ses dérivées successives.

Le système est alors dit « d'ordre  $n$  », celui de la dérivée d'ordre le plus grand sur  $m(t)$ .

Sa fonction de transfert isomorphe est alors :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}$$

L'application du principe de causalité conduit à ajouter la condition :  $m \leq n$ .

Cette affirmation peut être vérifiée sur un exemple.

#### Le régulateur PID à structure mixte

Sa forme idéalisée, couramment utilisée, est la suivante :

$$C(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d \cdot p \right)$$

Cette fonction de transfert est-elle physiquement réalisable? La réponse est non.

Par réduction au même dénominateur, on obtient :

$$C(p) = \frac{A(1 + T_i p + T_i T_d p^2)}{T_i p} \quad \text{où : } m = 2 \text{ et } n = 1 \text{ (} m > n \text{)}.$$

La fonction de transfert habituellement réalisée a pour expression :

$$C(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right) \quad \text{où le terme } 1 + \frac{T_d}{N} p \text{ est un terme}$$

dit de « filtrage » de l'action dérivée, rendant possible la réalisation d'un dérivateur approché. La valeur de  $N$  est souvent fixée par le constructeur (ex. : 10), mais  $N$  peut être accessible sous la forme d'un paramètre appelé « gain dynamique ».

En effet, si l'on considère la réponse indicielle du terme

$$\frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p}, \quad \text{on constate que l'amplitude du pic vaut } N.$$

## 4 Conclusion

La recherche de correcteurs spécifiques, abordée dans cet ouvrage, impose que l'on aboutisse à une solution physiquement réalisable et obéissant donc au principe de causalité.

Si l'on obtient une fraction rationnelle en  $p$ , il faut vérifier que la condition  $m \leq n$  est satisfaite. Si l'on aboutit à une expression non algébrique, en particulier si l'expression de  $C(p)$  comporte des termes de retard  $e^{-T_d p}$ , on cherche à réaliser  $C(p)$  sous la forme d'un système bouclé, conforme à la figure 5.

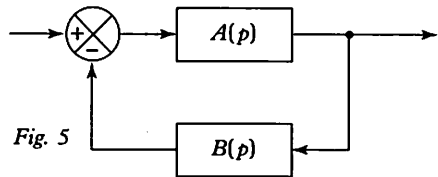


Fig. 5

On vérifie alors que  $A(p)$  et  $B(p)$  sont deux fonctions de transfert réalisables.

Les contraintes précédentes limitent les réalisations analogiques. L'utilisation de correcteurs en temps discret permet plus facilement la réalisation de ces correcteurs.

## 1 Fonctions de transfert d'un système bouclé

Pour la plupart des boucles de régulation, la grandeur réglée  $M(t)$  de la majorité des systèmes dépend de deux grandeurs incidentes : la grandeur réglante, pilotée par le signal  $Y_R(t)$ , et la perturbation principale  $Z(t)$ .

Autour d'un point de fonctionnement, dans une hypothèse linéaire, on est conduit à définir deux fonctions de transfert :

- la fonction de transfert réglante  $H(p) : M(p) = H(p) \cdot Y_R(p)$  ;

- la fonction de transfert perturbatrice  $H_z(p) : M(p) = \pm H_z(p) \cdot Z(p)$ .

Une boucle de régulation peut donc être modélisée par le schéma fonctionnel de la figure 1.

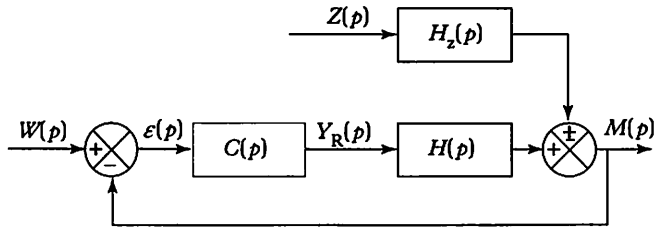


Fig. 1

L'utilisation d'un régulateur à action inverse, réalisant la différence  $\varepsilon(p) = W(p) - M(p)$ , ne nuit pas à la généralité des résultats obtenus.

Les diverses relations utilisables sont donc :

$$M(p) = H(p) \cdot Y_R(p) \pm H_z(p) \cdot Z(p) \quad (1)$$

$$Y_R(p) = C(p) \cdot [W(p) - M(p)] \quad (2)$$

Par substitution de (2) dans (1), puis factorisation de  $M(p)$ , il vient :

$$M(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} W(p) \pm \frac{H_z(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} Z(p) \quad (3)$$

Pour simplifier cette expression, on définit la *fonction de transfert en chaîne ouverte*  $T(p)$  :

$$T(p) = C(p) \cdot H(p).$$

La relation (3) devient alors :

$$M(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} W(p) \pm \frac{H_z(p)}{1 + T(p)} Z(p).$$

On peut donc définir deux fonctions de transfert  $F(p)$  et  $F_z(p)$  par :

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \text{ et } F_z(p) = \pm \frac{H_z(p)}{1 + T(p)}.$$

$$\text{On obtient finalement : } M(p) = F(p) \cdot W(p) + F_z(p) \cdot Z(p) \quad (4)$$

Le premier terme, souvent appelé *terme d'asservissement*, est utile pour étudier la boucle de régulation lorsque la consigne varie, c'est-à-dire en régulation de correspondance.

Le second terme, souvent appelé *terme de régulation*, permet d'étudier la boucle de régulation lorsque la consigne est fixe, c'est-à-dire en régulation de maintien.

La fonction de transfert  $F(p)$  est appelée *fonction de transfert en chaîne fermée*.

## 2 Principe d'un modèle de référence

La conduite optimale des installations industrielles impose, en chaîne fermée, de choisir les correcteurs en fonction de critères d'optimisation : temps de montée, amortissement, stabilité, économie d'énergie... On parle alors de « régulation qualitative optimale (RQO) ».

Ces critères peuvent souvent prendre la forme d'une minimisation d'un critère mathématique. À titre d'exemple, le critère ITAE (*Integral of Time multiplied by Absolute Error*) consiste à minimiser

$$\text{l'intégrale : } I = \int_0^{\infty} t |\varepsilon(t)| dt$$

En régulation industrielle, une technique permettant de globaliser plusieurs critères consiste à adopter un *modèle de comportement* caractéristique en chaîne fermée. Le plus souvent le modèle est une fonction de transfert en chaîne fermée, appelée *modèle de référence*.

On distingue le modèle de référence en asservissement (ou poursuite)  $F^*(p)$  et le modèle de référence en régulation  $F^*_z(p)$  définis par :

$$F^*(p) = \frac{M(p)}{W(p)} \text{ et } F^*_z(p) = \frac{M(p)}{Z(p)}.$$

On distinguera désormais les modèles désirés en plaçant un astérisque en exposant (\*), afin de les distinguer des fonctions réellement obtenues.

## 3 Recherche d'un correcteur spécifique

La méthode, souvent appelée « méthode constructive », permettant la synthèse directe, utilise trois étapes fondamentales :

- Définir un modèle de référence *non utopique*, compatible avec les exigences industrielles.

- Déterminer le correcteur correspondant et le réaliser dans un SNCC.

- Effectuer les pré réglages et les essais de validation de la stratégie.

Cette procédure est visualisée par la figure 2, pour un modèle de référence en asservissement.

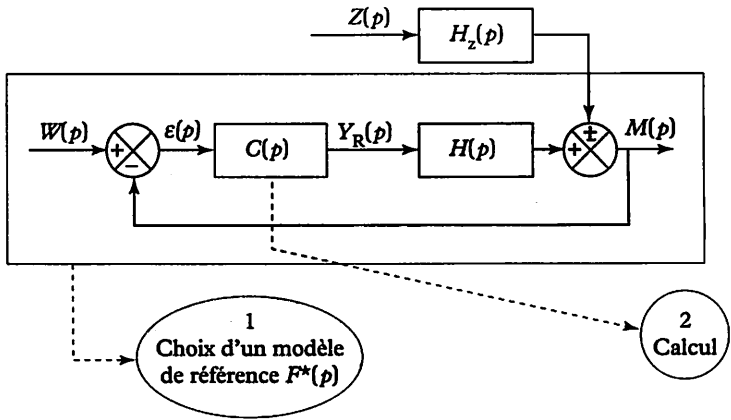


Fig. 2

**Exemple 1**

La fonction de transfert réglante d'une boucle de régulation de débit est modélisée par :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Le modèle de référence  $F^*(p)$  en asservissement consiste à adopter un modèle du 1<sup>er</sup> ordre, assurant une bonne stabilité (marge de phase  $> 90^\circ$ ), pas de dépassement et un temps de réponse ajusté par le choix judicieux de la constante de temps désirée  $\tau_d$ . La précision statique est assurée par un gain statique  $K_d = 1$  en chaîne fermée. La fonction de transfert  $C(p)$  du correcteur est obtenue à partir de la relation tirée de (3).

Si on désire  $F(p) = F^*(p)$ , il vient :

$$C(p) = \frac{1}{H(p)} \cdot \frac{F^*(p)}{1 - F^*(p)} \tag{5}$$

Pour notre exemple,  $F^*(p) = \frac{1}{1 + \tau_d p}$  et on obtient :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{K \cdot \tau_d \cdot p}$$

$C(p)$  peut s'écrire sous la forme d'un correcteur PI mixte

$$C(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) \text{ avec :}$$

$T_i = \tau$  et  $A = \frac{\tau}{K \tau_d}$ . On retrouve le gain de boucle  $AK = \frac{\tau}{\tau_d}$ , qui

caractérise le « facteur d'accélération » en asservissement.

Un réglage réaliste consiste à adopter  $AK \leq 5$ , pour ne pas saturer le signal réglant  $Y_R$  en cas de changement brutal de consigne.

### Exemple 2

Peut-on conserver le même modèle de référence, si le système présente un temps mort  $T$ ?

La fonction de transfert  $H(p) = \frac{Ke^{-Tp}}{1 + \tau p}$  aboutit au correcteur :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{K \cdot \tau_d \cdot p} \cdot e^{+Tp}, \text{ qui est irréalisable, à cause du terme d'avance } e^{+Tp}.$$

On retiendra donc les deux règles suivantes, concernant le choix de modèles réalistes :

Pour une fonction de transfert  $H(p)$  de Broïda, la fonction de transfert  $F^*(p)$  devra comporter un temps mort au moins égal à celui de  $H(p)$ .

Pour une fonction de transfert  $H(p)$  de Strejc, l'ordre  $n$  de  $F^*(p)$  devra être au moins égal à celui de  $H(p)$  (6).

### Remarque

Si le temps mort  $T$  est faible, le terme  $e^{+Tp}$  peut être remplacé par les premiers termes de son développement limité :  $e^{+Tp} \approx 1 + Tp + \dots$   
 Dans ces conditions,  $C(p)$  s'identifie avec un régulateur PID de structure série :

$$C(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) \cdot (1 + T_d p) \text{ avec : } A = \frac{\tau}{K\tau_d}, T_i = \tau \text{ et } T_d = T.$$

## 4 Conclusion

Les exemples précédents ont utilisé uniquement un modèle de référence en asservissement, compte tenu de la généralisation des procédés discontinus (batch). Il est bien sûr possible de se fixer également un modèle de référence en régulation, mais alors le choix de celui-ci est beaucoup plus délicat et la réalisation simultanée des deux modèles n'est possible qu'en régulation en temps discret, par une structure RST.

La justification du choix du modèle de référence, en fonction de la robustesse recherchée, sera étudiée au chapitre 11, intitulé « Placement robuste de pôles ». Cet ouvrage développera essentiellement les modèles de référence en asservissement, la compensation des perturbations évoquées dans *Régulation 3* permettant d'améliorer les performances obtenues en régulation.

# Exercice résolu

La fabrication d'un produit chimique impose une préparation de la charge (mélanges, mise en température) dans un réacteur à double enveloppe appelé « pré-parante ».

La mise en température après mélange est réalisée par une régulation de température conforme au schéma TI proposé figure 3.

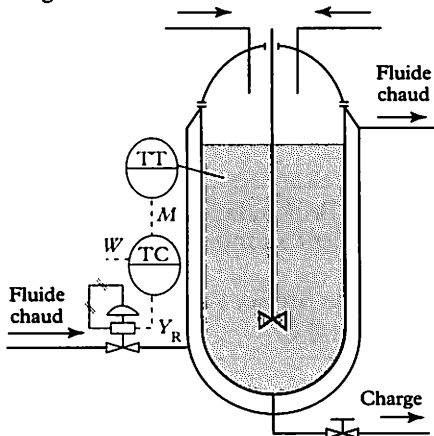


Fig. 3

La fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2}$$

Afin de garantir une qualité correcte, il est indispensable de porter la température de 20 °C à 120 °C sans dépassement de cette valeur, même en cas de variation brutale de la consigne.

Le dispositif devant pouvoir réaliser le maximum de lots en une journée, on se propose de déterminer le correcteur par minimisation du temps de réponse, dans le respect des autres contraintes de production, en particulier la non-saturation du signal réglant  $Y_R$ .

1. Choisir un modèle de référence en asservissement.
2. Déterminer le correcteur correspondant.
3. Régler expérimentalement ce correcteur, dans le respect du cahier des charges. L'échelle du transmetteur est :

0 – 200 °C, et on adopte  $K = 2$  et  $\tau = 10$  s en échelle réduite.

Solution :

## 1. Modèle de référence

La prise en compte des contraintes conduit à proposer le modèle

$$F^*(p) = \frac{1}{(1 + \tau_d p)^2}, \text{ conforme à la règle (6)}$$

et assurant une précision statique parfaite sans dépassement.

## 2. Correcteur

L'application de la formule (5) conduit à :

$$C(p) = \frac{F^*(p)}{H(p)[1 - F^*(p)]}$$

$$= \frac{(1 + \tau p)^2}{K \cdot (2\tau_d p + \tau_d^2 p^2)}$$

On constate que  $C(p)$  peut s'écrire sous la forme d'un PID à structure série, avec dérivée filtrée :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{2K\tau_d p} \cdot \frac{1 + \tau p}{1 + 0,5\tau_d p}$$

Cette fonction de transfert est parfaitement réalisable. Si on ne dispose pas de la structure série, on peut employer un PI à structure mixte en série avec un module avance/retard (fig. 4).

$$A = \frac{\tau}{2K\tau_d}, \quad T_i = \tau, \quad \tau_A = \tau \text{ et } \tau_R = 0,5\tau_d$$

## 3. Réglages

Pour un échelon de consigne d'amplitude 50 % (passage de 20 °C à 120 °C), les performances peuvent être évaluées par les courbes de la figure 5.

- courbes ① :  $\tau_d = \tau = 10$  s aboutissant à  $A = 0,25$  ;

- courbes ② :  $\tau_d = 5$  s aboutissant à  $A = 0,5$ .

Ce dernier réglage ne satisfait pas aux contraintes énoncées, l'augmentation de l'amplification aboutissant à la saturation de  $y_R(t)$ . On constate que le maintien de l'hypothèse linéaire conduit à limiter le facteur d'accélération  $AK$ , donc  $\tau_d$ .



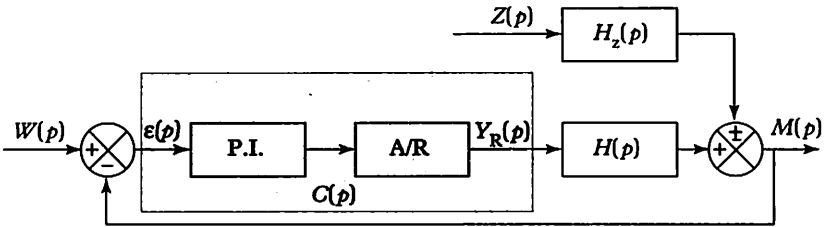


Fig. 4

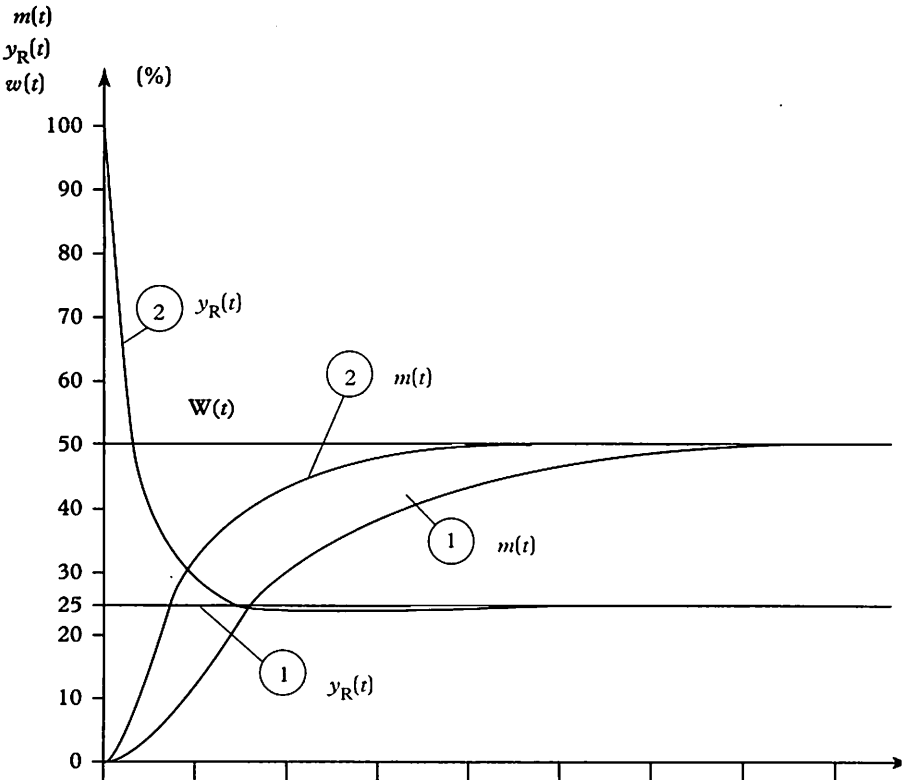


Fig. 5

Le chapitre 3 a dégagé la méthode permettant de définir un correcteur spécifique à partir d'un modèle de comportement recherché en chaîne fermée.

Il a montré que si un système  $H(p) = \frac{Ke^{-Tp}}{1 + \tau p}$  présente un temps mort

$T$  faible, l'adoption du modèle  $F^*(p) = \frac{1}{1 + \tau_d p}$  aboutissait à un régulateur

PID parfaitement réalisable.

Cependant, il est courant d'observer des systèmes pour lesquels un rapport  $\frac{T}{\tau}$  supérieur à 0,5 rend impossible l'emploi d'un régulateur PID.

Peut-on réaliser un correcteur spécifique permettant d'obtenir des performances satisfaisantes quelle que soit la valeur  $T$ ? C'est ce que propose le correcteur de Smith, que l'on nomme également « prédicteur de Smith » ou « PIR » ( $R$  pour retard) ou encore « PIT » ( $T$  pour temps mort).

## 1 Détermination du correcteur $C(p)$

### Choix du modèle de référence

Ce correcteur se conforme à la règle énoncée au chapitre 3 : pour une fonction de transfert  $H(p)$  de Broïda, la fonction de transfert  $F^*(p)$  devra comporter un temps mort au moins égal à celui de  $H(p)$ .

Pour un système :  $H(p) = \frac{Ke^{-Tp}}{1 + \tau p}$ , avec le correcteur de Smith le

modèle devient :  $F^*(p) = \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau_d p}$  garantissant une précision sta-

tique parfaite et des régimes transitoires apériodiques.

### Calcul de $C(p)$

Le calcul du correcteur permet d'établir :

$$C(p) = \frac{F^*(p)}{H(p)[1 - F^*(p)]} = \frac{1 + \tau p}{K(1 + \tau_d p - e^{-Tp})}$$

Ce résultat est appelé la « forme canonique du correcteur de Smith » ; il ne préjuge pas des éventuelles réalisations.

### Réalisation

*A priori*, l'expression de  $C(p)$  ne permet pas d'envisager une réalisation simple. Comme indiqué dans la conclusion du chapitre 2, on va tenter de réaliser  $C(p)$  sous la forme d'un circuit bouclé, conforme

au schéma de la figure 1. On rappelle le résultat :

$$C(p) = \frac{A(p)}{1 \pm A(p)B(p)} \quad (2)$$

le signe  $\pm$  dépendant du comparateur ( $\mp$ ).

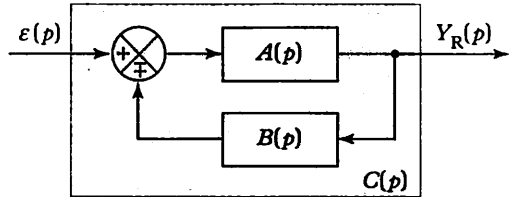


Fig. 1

### Détermination de $A(p)$

La forme de  $C(p)$  permet de choisir arbitrairement plusieurs solutions pour  $A(p)$ . Afin d'obtenir une structure permettant une continuité avec le cas où  $T$  est nul, Smith proposa d'adopter la forme du correcteur PI obtenu lorsque  $T = 0$ . On rappelle le résultat correspondant :

$$A(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) \text{ avec : } T_i = \tau \text{ et } A = \frac{\tau}{K\tau_d} \quad (3).$$

### Détermination de $B(p)$

À partir des expressions (1), (2) et (3), on établit que :

$$B(p) = \frac{K(1 - e^{-Tp})}{1 + \tau p}$$

La figure 2 représente le correcteur obtenu. Cette première réalisation met en œuvre des modules présents sur tous les SNCC.

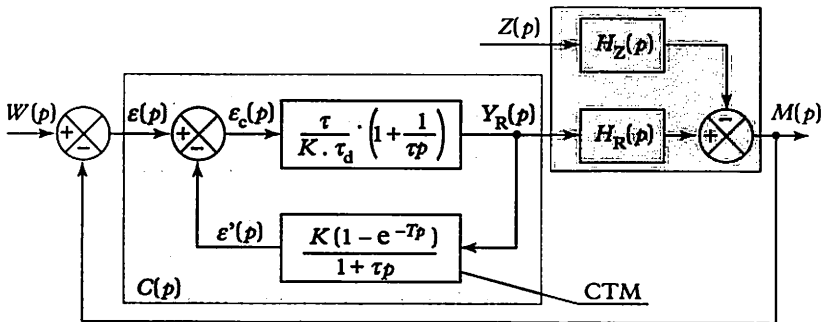


Fig. 2

Le bloc  $B(p)$ , couramment appelé « compensateur de temps mort » (CTM), apparaît donc comme un module permettant, à partir du signal d'écart primaire  $\varepsilon$ , d'obtenir un signal  $\varepsilon_c$  « corrigé » en fonction de la modélisation du système. On va étudier en détail le rôle de  $B(p)$ .

**2 Rôle du bloc CTM**

L'intérêt de la réalisation présentée à la figure 2 est d'envisager le correcteur  $C(p)$  comme un régulateur classique PI « corrigé » par un signal supplémentaire  $\varepsilon'$ , nul si  $T = 0$ .

**Comportement de  $C(p)$  sans le bloc CTM**

Tant en asservissement qu'en régulation, la présence d'un temps mort important aboutit à une intégrale  $y_I = \frac{A}{T_i} \int \varepsilon(t).dt$  trop importante et cela entraîne un régime transitoire pseudo-périodique plus ou moins amorti. Bien sûr, il est toujours possible d'adopter une valeur de  $T_i$  plus grande, mais les performances deviennent insuffisantes.

**Comportement de  $C(p)$  avec le bloc CTM**

Le schéma de la figure 2 peut être modifié et se représenter sous l'aspect de la figure 3, qui fait apparaître deux signaux  $m_1(t)$  et  $m_2(t)$ , internes au correcteur et tels que  $\varepsilon'(t) = m_1(t) - m_2(t)$ .

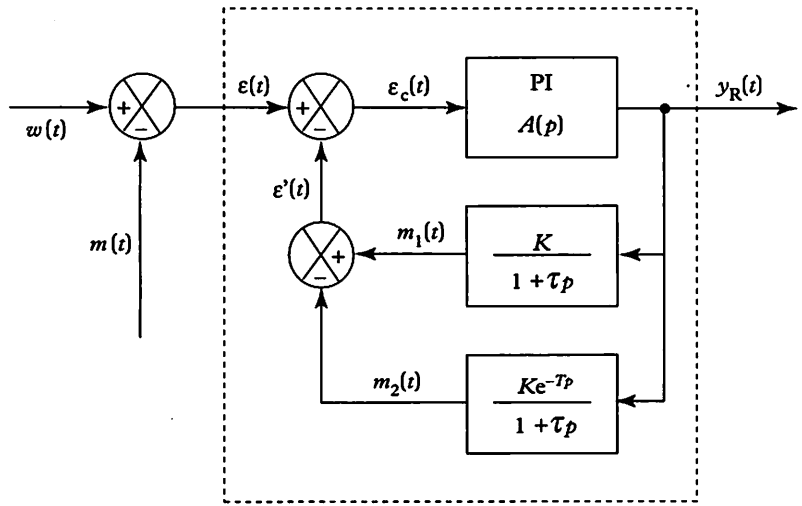


Fig. 3

Pour un saut de consigne puis l'action d'une perturbation, les courbes de la figure 4 montrent que :

- Pendant la phase ① ( $t < T$ ), le correcteur  $C(p)$  travaille en asservissement de  $\varepsilon(t)$  sur le système interne  $\frac{K}{1 + \tau p}$  que « voit » le correcteur  $A(p)$ .

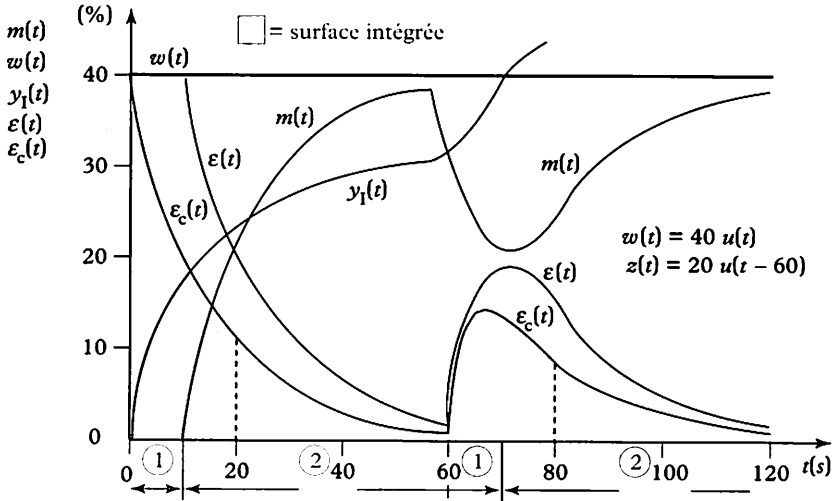


Fig. 4

Compte tenu du réglage adopté, le signal  $\varepsilon'(t) = m_1(t)$  suit la variation de  $\varepsilon(t)$ , mais avec un certain retard. On aboutit donc à un signal  $\varepsilon_c(t)$ , réellement appliqué à l'étage intégrateur, plus faible que  $\varepsilon(t)$ . - Pendant la phase ②, le temps écoulé étant supérieur au temps mort  $T$ , l'action du correcteur  $C(p)$  diminue naturellement  $\varepsilon(t)$ , quelle que soit l'origine de sa variation (changement de consigne ou perturbation).

Le signal  $m_2(t)$  reproduisant les variations de  $m_1(t)$ , mais avec un retard  $T$ , la différence  $\varepsilon'(t) = m_1(t) - m_2(t)$  diminue naturellement progressivement, pour atteindre une valeur nulle en régime permanent. On constate donc que  $B(p)$  n'intervient que pendant les régimes transitoires, pour diminuer artificiellement l'action intégrale et limiter son action déstabilisatrice sur les systèmes à grand temps mort.

### 3 Conclusion

Les résultats précédents sont vrais si le système réel admet une fonction de transfert parfaitement identique à celle utilisée pour les calculs, et dont on retrouve les paramètres  $(K, T, \tau)$  dans le bloc CTM. On peut se poser la question de savoir si le correcteur de Smith

conserve ses performances dans le cas où le modèle  $H(p) = \frac{K e^{-Tp}}{1 + \tau p}$

est relativement éloigné de la fonction de transfert réelle  $H_R(p)$ . Cette étude est conduite dans le chapitre 5.

# Exercice résolu

La réalisation du correcteur de Smith à partir du schéma de la figure 2 se heurte à de nombreuses difficultés. D'une part, la plupart des SNCC offrent divers blocs régulateurs PID, incluant tous le comparateur et le correcteur, sans possibilité de disjoindre les deux fonctions : on ne peut donc pas introduire le soustracteur permettant d'élaborer le signal  $\varepsilon_c$ .

D'autre part, de nombreux SNCC lient automatiquement les éléments de visualisation ( $M$ ,  $W$ ,  $Y_R$ ) aux entrées des blocs PID et la solution consistant à introduire le signal  $\varepsilon'$  au niveau de la mesure  $M$  ne permet plus un renseignement correct des synoptiques. On tiendra compte de ces contraintes pour résoudre le problème suivant :

1. Réaliser un correcteur de Smith à partir des blocs standard présents dans tous les SNCC.
2. Déterminer un modèle de Broïda du système ayant la réponse indicielle réelle fournie à la figure 5.
3. Vérifier au simulateur les performances de la stratégie, appliquée au système réel.
4. Conclure.

## Solution :

### 1. Réalisation du correcteur

Toutes les configurations aboutissant à la même expression de  $\varepsilon_c$  appliquée au correcteur  $A(p)$  sont équivalentes du point de vue de l'évolution des signaux  $Y_R(t)$  et donc  $M(t)$ .

Pour la configuration de la figure 2, on obtient :  $\varepsilon_c = (W - M) - \varepsilon'$ .

La stratégie réalisant  $\varepsilon_c = (W - \varepsilon') - M$ , équivalente, est représentée figure 6. On constate qu'elle nécessite un régulateur standard PI, raccordé au signal mesure  $M$  et à une consigne « corrigée »  $W_c = W - \varepsilon'$ , la véritable consigne étant  $W$ .

On obtient donc un montage en pseudocascade car  $W_c = W - \varepsilon'$  est souvent obtenu par un régulateur P, avec  $X_p = 100\%$ . On rappelle que  $\varepsilon' = 0$  en régime d'équilibre et qu'alors  $W_c = W$ .

### 2. Identification

L'application de la méthode de Broïda (Régulation 2, chapitre 2) conduit à :

$$K = \frac{\Delta M}{\Delta Y_R} = \boxed{1,2};$$

$$T = 2,8 t_1 - 1,8 t_2 + T' = \boxed{29,4 \text{ s}};$$

$$\tau = 5,5 (t_2 - t_1) = \boxed{27,5 \text{ s}}.$$

Ces valeurs sont introduites dans le bloc CTM du correcteur de Smith. On adopte

$$T_i = \tau = \boxed{27,5 \text{ s}} \text{ et } A = \boxed{1,3} \text{ (}\tau_d = 18 \text{ s)}$$

pour  $A(p)$ .

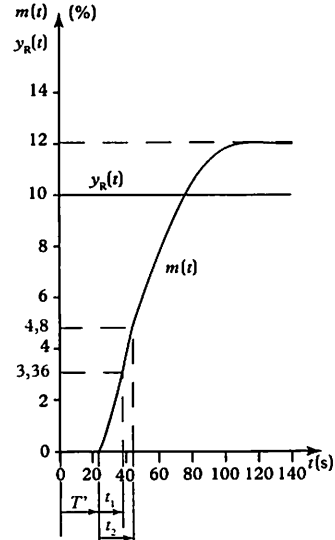


Fig. 5

### 3. Performances temporelles

Les courbes de la figure 7 expliquent le comportement en régulation, pour un échelon  $z(t) = 10 u(t)$  appliqué à la fonction de transfert perturbatrice

$$H_L(p) = \frac{0,5}{1 + 20p}.$$

On constate une stabilisation rapide et aperiodique de la mesure  $m(t)$ .

### 4. Conclusions

En cas de variation de la mesure, on constate que le montage fonctionne en « consigne suivieuse ». Comme pour la réalisation de la figure 2, ceci permet d'intégrer un signal  $\varepsilon_c$  plus faible. On constate également que le maximum de ce signal  $\varepsilon_c$  est obtenu bien avant la fin du temps mort, traduisant un effet anticipateur qui justifie l'appellation « prédicteur de Smith ».

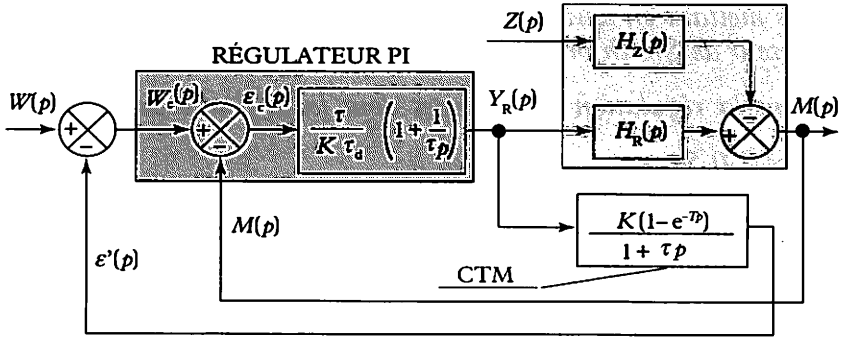


Fig. 6

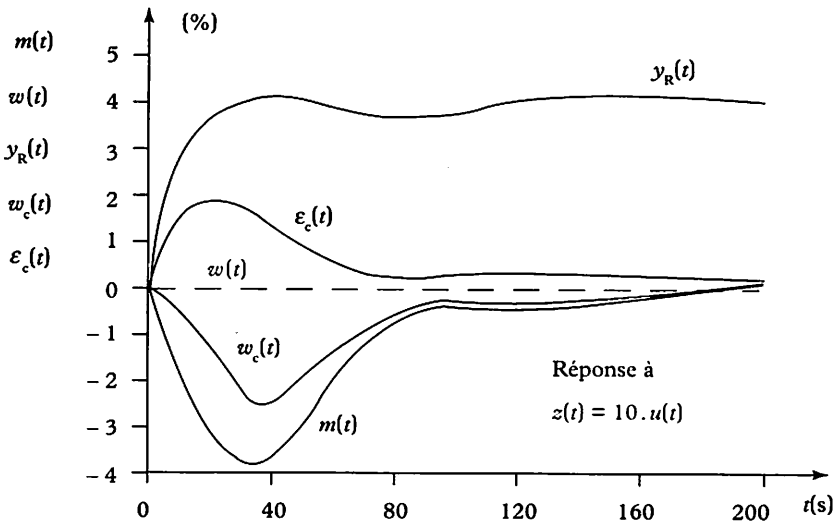


Fig. 7

*La réalisation de correcteurs spécifiques ne trouve sa véritable justification que si l'on apporte des solutions aux problèmes non résolus par des moyens classiques mettant en œuvre des régulateurs PID.*

*Le correcteur de Smith présente un premier avantage : il offre une stratégie permettant la régulation de systèmes dont la difficulté de réglage  $\frac{T}{\tau}$  est supérieure à 0,5.*

*Ce chapitre se propose de montrer qu'il présente un second avantage : la solution proposée offre une grande robustesse et elle peut être utilisée même lorsqu'une solution PID peut apporter des performances acceptables.*

## 1 Robustesse d'une boucle de régulation

Il est difficile de réduire la robustesse à une seule définition et la littérature est très imprécise à ce propos. D'une façon générale, on peut définir la robustesse d'un système bouclé comme son aptitude à garantir des performances acceptables face à une modification de la fonction de transfert du système physique.

On peut compléter cette définition en soulevant deux problèmes.

- La structure réelle du système peut être différente de sa modélisation, issue d'une identification. On parle alors de *distance de structure* et on peut définir une robustesse fonction de cet écart. L'exemple le plus classique est celui d'un système de Strejc pour lequel on adopte un modèle simplifié de Broïda.

- La structure du modèle peut être satisfaisante, mais un ou plusieurs paramètres du modèle peuvent ne plus correspondre à la réalité, du fait d'une erreur d'identification ou d'une évolution du système physique. On parle alors de *distance en intensité de paramètre* et on peut également définir une robustesse fonction de cet écart.

La robustesse est abordée expérimentalement dans ce chapitre. Une étude plus théorique est conduite au chapitre 11, après la présentation de divers correcteurs spécifiques.

## 2 Robustesse en distance de structure

Ce problème général est lié à la nécessité d'adopter des modèles simples pour représenter une réalité complexe.

On peut rappeler les résultats de *Régulation 2*, chapitre 2. Une identification selon le modèle de Broïda est très satisfaisante si elle conduit à un rapport  $\frac{T_{id}}{\tau} < 0,25$  où  $T_{id}$  représente le temps mort



d'identification obtenu à partir du point de décollement de la réponse indicielle.

Pour des valeurs supérieures de ce rapport, il convient d'adopter des modèles plus complexes, comme celui de Strejc.

### Exemple

L'exercice résolu du chapitre 4 est un exemple caractéristique. La

fonction de transfert réelle est  $H_R(p) = \frac{1,2 e^{-20p}}{(1 + 10p)^3}$  et le modèle

adopté  $H(p) = \frac{1,2 e^{-29,4p}}{(1 + 27,5p)}$ .

Le rapport  $\frac{T_{id}}{\tau} = \frac{9,4}{27,5} = 0,34$ . On constate que l'on dépasse la

valeur frontière 0,25, mais les résultats de l'exercice montrent que les performances sont cependant satisfaisantes.

On retiendra une méthode grossière et cependant suffisante pour choisir un modèle de Broïda pour un système de Strejc

$H_R(p) = \frac{K e^{-Tp}}{(1 + \tau_S p)^n}$ . On adopte le modèle  $H(p) = \frac{K e^{-Tp}}{1 + \tau_B p}$  avec

$$\tau_B \approx n \cdot \tau_S.$$

La distance de structure réalisée permet des performances satisfaisantes pour le correcteur de Smith obtenu avec les paramètres de  $H(p)$ .

Pour une meilleure distance de structure, certains constructeurs préconisent :

$$\tau_B \approx \sqrt{n} \cdot \tau_S \text{ et } T_B \approx T_S + (n - \sqrt{n}) \cdot \tau_S.$$

## 3 Robustesse en intensité de paramètre

Ce problème est le plus fréquent. On a déjà vu qu'il entraîne des difficultés importantes en régulation PID, notamment pour les systèmes fortement non linéaires.

On se souvient que les réglages PID de Broïda ou de Ziegler-Nichols offrent une marge de gain de 6 dB : un doublement de la valeur du gain statique  $K$  entraîne alors un pompage du système. On retiendra donc qu'une régulation PID offre une robustesse faible.

Il apparaît intéressant d'aborder le problème de la robustesse sous l'aspect de la *sensibilité* des marges de stabilité à la variation d'un paramètre du système réel, dont la fonction de transfert est désormais notée  $H_R(p)$  (et non de son modèle  $H(p)$  utilisé qui, lui, reste le même).

Pour une modélisation de Broïda, on peut donc définir trois robustesses fonction de la variation du gain statique ou de la constante de temps ou du temps mort.

On se propose de comparer les robustesses respectives des deux stratégies : PID et correcteur de Smith, pour les valeurs suivantes des paramètres :  $K = 1,2$ ,  $\tau = 20$  s,  $T = 10$  s pour le système physique et son modèle utilisé par le bloc C.T.M.

$A = 1,3$  et  $T_i = \tau = 20$  s pour le régulateur  $A(p)$  présent dans le correcteur de Smith.

$A = 1,3$ ,  $T_i = 20$  s et  $T_d = 5$  s pour le régulateur PID. Ces valeurs permettent une étude comparative de l'amélioration obtenue par une action dérivée et une correction du signal d'écart.

Les figures 1 et 2 représentent les réponses fréquentielles en chaîne ouverte, avec les repères suivants :

- courbes ① :  $H_R(p) = H(p)$  et correcteur  $A(p)$  seul ;
- courbes ② :  $H_R(p) = H(p)$  et correcteur de Smith ou PID ;
- courbes ③ : le gain du système physique augmente  $K_R = 2,4$  ;
- courbes ④ : le temps mort du système physique augmente  $T_R = 15$  s ;
- courbes ⑤ : la constante de temps du système physique diminue  $\tau_R = 10$  s.

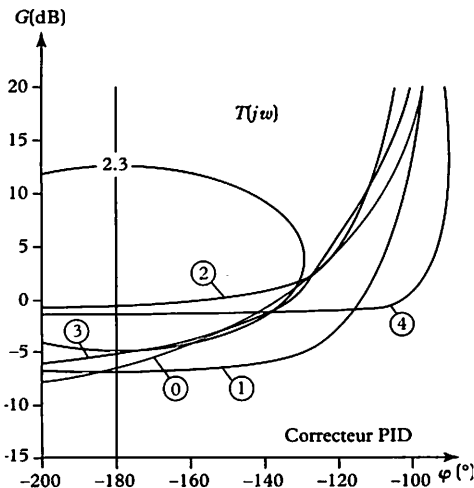


Fig. 1

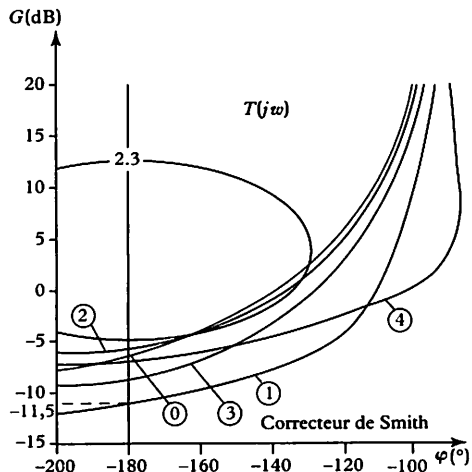


Fig. 2

L'analyse des courbes met en évidence une meilleure robustesse pour le correcteur de Smith. En particulier, on constate qu'un doublement de  $K_R$  décale les courbes 1 de + 6 dB vers le haut pour les deux correcteurs. Cependant, la courbe 1 du correcteur de Smith bénéficie d'une marge de gain initiale plus grande, de l'ordre de 11,5 dB. L'étude théorique du chapitre 11 montrera qu'une diminution de la

constante de temps désirée  $\tau_d$  diminue la robustesse d'un correcteur de Smith. Il convient donc de conserver une valeur raisonnable pour le gain de boucle  $A.K = \frac{\tau}{\tau_d}$  afin d'assurer un bon compromis : performances-robustesse.

#### 4 Conclusion

L'exercice corrigé offre un exemple traditionnel traitant de la robustesse en gain et en temps mort. La robustesse en constante de temps est moins classique, mais elle peut être abordée à propos d'un cas particulier : le réchauffeur à condensation (figure 3).

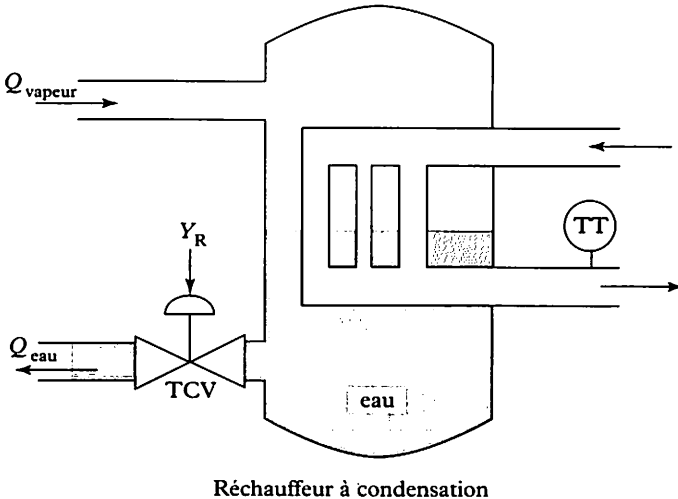


Fig. 3

La température du fluide chauffé n'évolue pas de la même façon, suivant que le ballon se vide ou se remplit. En effet, l'eau s'écoule plus rapidement que la vapeur ne se condense.

Le procédé présente donc deux constantes de temps selon le sens de variation du signal de commande : une à l'ouverture, l'autre à la fermeture. Ce cas se rencontre notamment pour certains bouilleurs de colonnes à distiller.

# Exercice résolu

Un SNCC industriel possède une bibliothèque algorithmique étendue, laquelle comporte un module mixte PID-correcteur de Smith dont le schéma fonctionnel est fourni figure 5.

1. Vérifier que si le commutateur K est fermé, ce correcteur est conforme à l'équation canonique d'un correcteur de Smith.

2. Vérifier que si le commutateur K est ouvert, ce correcteur fonctionne comme un correcteur PID mixte.

3. Le schéma TI de la figure 4 reprend le mélange en ligne étudié dans *Régulation 1* et 3. On rappelle les résultats essentiels : Les fonctions de transfert sont :

$$H(p) = H_z(p) = \frac{K e^{-Tp}}{1 + 20p}$$

avec :  $K = \frac{25}{Q_C}$  et  $T = \frac{1130}{Q_C}$  où  $Q_c$  est

le débit de charge en pourcentage.

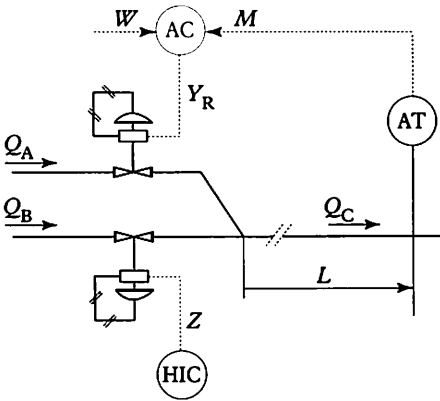


Fig. 4

Ce dispositif physique présente donc de fortes variations de  $K$  et  $T$  en fonction du point de fonctionnement et on désire les réduire par une stratégie robuste.

Déterminer un réglage du correcteur pour le débit nominal  $Q_c = 50\%$ .

4. Visualiser au simulateur les variations de  $\varepsilon(t)$ ,  $\varepsilon'(t)$ ,  $\varepsilon_{c2}(t)$  et  $y_R(t)$  pour une perturbation  $z(t) = 10 u(t)$ . Conclure.

5. Tester la robustesse en régulation pour  $Q_c = 80$  et  $20\%$ . Comment améliorer la robustesse pour ce dernier cas ?

Solution :

## 1. Commutateur K fermé

On retrouve l'expression :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{K(1 + \tau_d p - e^{-Tp})}$$

qui constitue la forme canonique du correcteur de Smith.

## 2. Commutateur K ouvert

Le filtre de Smith est inhibé ( $\varepsilon_{c2} = A \cdot \varepsilon$ ) et l'action dérivée est validée ( $\bar{K}$  fermé). On retrouve donc un régulateur PID de structure mixte.

## 3. Réglages pour $Q_c = 50\%$

En fonction du débit de charge, les paramètres  $K$  et  $T$  sont fournis par le tableau suivant :

$Q_c(\%)$	$K$	$T(s)$
20	1,25	56,5
50	0,5	22,6
80	0,31	14,1

Pour  $Q_c = 50\%$ , une constante de temps désirée  $\tau_d = 10$  s aboutit à  $A = 4$  et on adopte  $K = 0,5$ ,  $T = 22,6$  s et  $\tau = 20$  s pour le filtre de Smith.

## 4. Réponses temporelles

Elles sont fournies figure 6. On constate que le filtre de Smith élabore un signal d'écart  $\varepsilon_{c2}$  en avance temporelle sur l'écart primaire  $\varepsilon$ . Tout se passe donc comme si le filtre de Smith introduisait une action comparable à une action dérivée, avec les avantages suivants :

- pas d'amplification des parasites éventuellement présents sur le signal de mesure ;
- pas de risque de saturation due à un gain transitoire trop grand ;
- réglage « automatique » de l'action dérivée en fonction du système (pas de paramètre  $T_d$ ).

## 5. Étude de la robustesse

Les courbes de la figure 7 montrent une bonne robustesse pour  $Q_c = 80\%$ , mais pas pour  $Q_c = 20\%$ . Une stratégie adaptative sur les paramètres du correcteur de Smith redonne une robustesse correcte pour tous les points de fonctionnement.

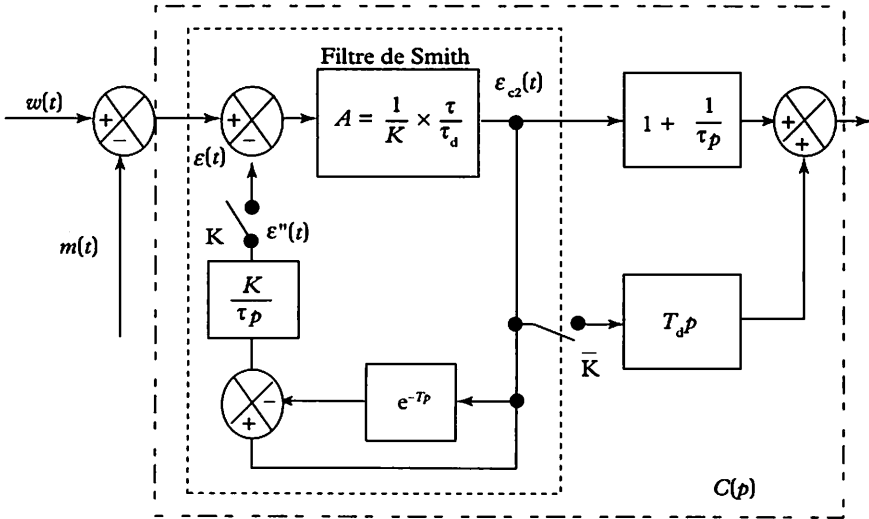


Fig. 5

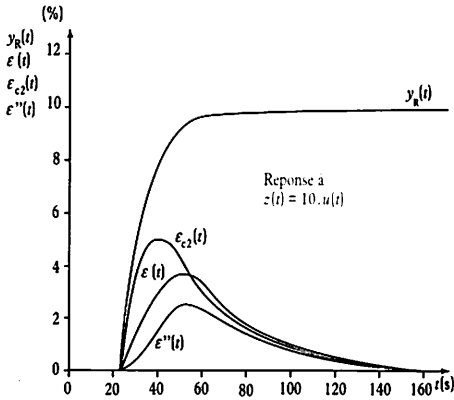


Fig. 6

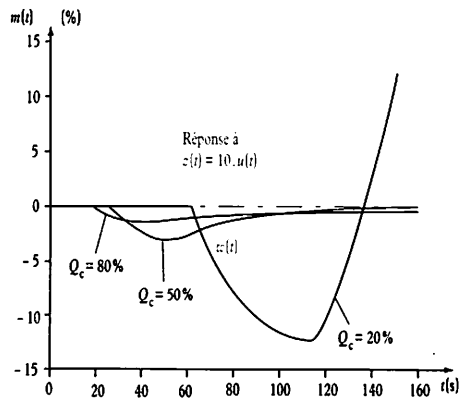


Fig. 7

L'utilisation d'un correcteur de Smith montre qu'il est possible de prolonger l'emploi d'une régulation à base de régulateur PI standard en neutralisant les effets néfastes de l'action intégrale, grâce à une modélisation interne du système. Il n'en demeure pas moins que l'on utilise une régulation en chaîne fermée qui introduit intrinsèquement des problèmes de stabilité.

On peut donc légitimement se poser la question : n'existe-t-il pas un dispositif de régulation en chaîne ouverte permettant de s'affranchir de ces problèmes ? Les stratégies évoquées dans Régulation 3 ont montré qu'il était possible, en chaîne ouverte, de compenser une perturbation dans la mesure où l'on dispose d'un signal image de celle-ci. La principale difficulté demeure l'impossibilité de disposer d'un signal image de toutes les perturbations. La régulation par modèle interne résoud ce problème.

## 1 Principe d'une commande à modèle interne

### Commande en chaîne ouverte

On suppose un système non perturbé, dont la fonction de transfert

$H_R(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)}$  est parfaitement identifiée. Une telle hypothèse implique qu'une régulation en chaîne fermée ne s'impose plus. La stratégie est donc représentée par le schéma de la figure 1.

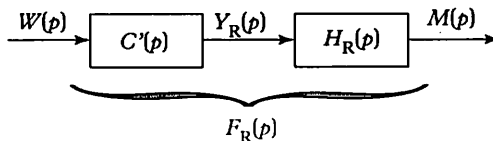


Fig. 1

La fonction de transfert  $F_R(p) = \frac{M(p)}{W(p)}$  s'exprime donc par :

$F_R(p) = C'(p) \cdot H_R(p)$  et la détermination de  $C'(p)$  par modèle de référence est particulièrement simple.

### Inconvénient de la stratégie

Les paramètres de la fonction de transfert réelle  $H_R(p)$  sont éminemment variables selon le point de fonctionnement et le système réel est soumis à des perturbations.

Afin de supprimer le premier type d'inconvénient évoqué ci-dessus, la régulation par modèle interne propose de réaliser une commande d'un modèle  $H(p)$ , de déterminer le correcteur pour ce modèle et

d'appliquer au système réel (de fonction de transfert  $H_R(p)$ ) la commande obtenue pour le modèle.

La stratégie de base est résumée par le schéma fonctionnel de la figure 2.

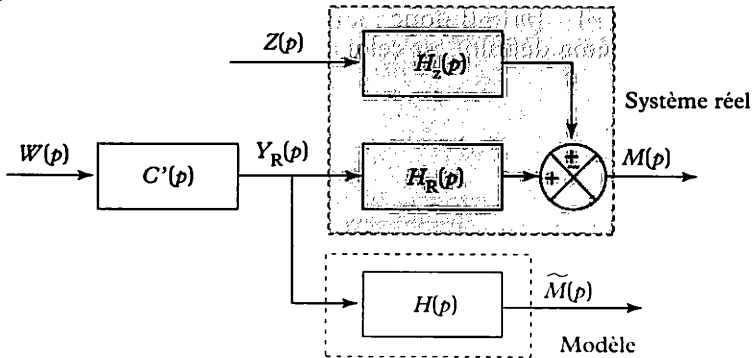


Fig. 2

On appelle *mesure estimée* le signal  $\tilde{m}(t)$  accessible à la sortie du modèle. Si les hypothèses du paragraphe 1 sont vraies, alors  $\tilde{m}(t) = m(t)$ . Dans la pratique  $H(p) \neq H_R(p)$  et donc  $\tilde{m}(t) \neq m(t)$ .

### Rejet asymptotique des perturbations

La stratégie précédente ne permet pas d'assurer des erreurs stationnaires nulles (*Régulation 2*, chapitre 4), en particulier en cas d'échelon de consigne  $w(t)$ . Il faut donc compléter la stratégie par un dispositif assurant une précision statique parfaite ( $m(\infty) = w(\infty)$ ), donc équivalent à l'action intégrale d'un régulateur PI.

### Utilisation d'une action intégrale implicite

On suppose que le correcteur  $C'(p)$  a été déterminé pour obtenir  $\tilde{m}(\infty) = w(\infty)$ . Si le régime permanent est obtenu avec  $m(\infty) \neq w(\infty)$ , on peut ramener asymptotiquement  $m(\infty)$  à  $w(\infty)$  par décalage de consigne.

Le schéma de la figure 3 réalise un décalage de l'écart  $r(t) = m(t) - \tilde{m}(t)$ . On appelle « consigne corrigée » le signal  $w_c(t) = w(t) - r(t)$ .

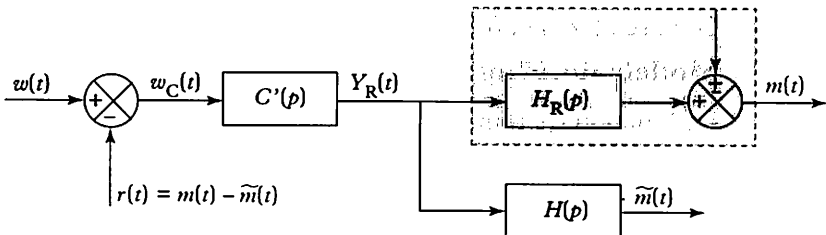


Fig. 3

En régime permanent, on dispose des équations suivantes :

$$\tilde{m}(\infty) = w_c(\infty) \text{ (grâce au choix du correcteur) (1)}$$

$$w_c(\infty) = w(\infty) - r(\infty) \text{ (d'après le schéma).}$$

Donc  $w_c(\infty) = w(\infty) - [m(\infty) - \tilde{m}(\infty)]$ . D'après l'équation (1), il vient :

$$0 = w(\infty) - [m(\infty)] \text{ donc : } w(\infty) = m(\infty).$$

Le schéma définitif est celui de la figure 4.

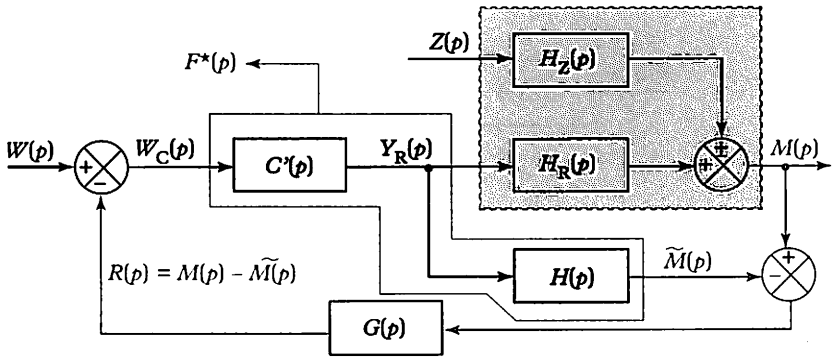


Fig. 4

**Remarque**

$G(p)$  est un filtre passe-bas, dont le rôle sera explicité au chapitre 7 et dont l'existence peut momentanément être omise.

**2 Détermination du correcteur**

Par principe,  $C'(p)$  réalise la commande du modèle constant et non perturbé  $H(p)$ . Compte tenu du décalage de consigne, si  $F^*(p)$  est le modèle de référence désiré en asservissement, cette fonction de transfert lie  $\tilde{M}(p)$  et  $W_c(p)$ , et non  $W(p)$ .

On peut donc écrire :

$$F^*(p) = C'(p) \cdot H(p) \text{ et on obtient alors : } \boxed{C'(p) = \frac{F^*(p)}{H(p)}}$$

Se pose alors le problème habituel de pouvoir réaliser  $C'(p)$ .

**Modèle du 1<sup>er</sup> ordre**

La fonction de transfert du modèle est  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ . Un modèle

de référence en asservissement assurant une précision parfaite est

$$F^*(p) = \frac{1}{1 + \tau p}. \text{ Le correcteur } C'(p) \text{ correspondant est :}$$



$$C'(p) = \frac{F^*(p)}{H(p)} = \frac{1}{1 + \tau p} \cdot \frac{1 + \tau p}{K} \text{ donc : } \boxed{C'(p) = \frac{1}{K}} \text{ où } K \text{ repré-}$$

sente le gain statique estimé du modèle.

### Modèle de Broïda

La fonction de transfert du modèle est  $H(p) = \frac{Ke^{-Tp}}{1 + \tau p}$ .

Si l'on désire une réponse en chaîne fermée plus rapide qu'en chaîne ouverte, le modèle de référence devient habituellement :

$$F^*(p) = \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau_d p}. \text{ Le correcteur est alors :}$$

$\boxed{C'(p) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1 + \tau p}{1 + \tau_d p}}$ , parfaitement réalisable par un module avance/retard.

### Performances de la commande

Elles sont étudiées au chapitre 7, en particulier sous l'aspect robustesse.

## 3 Intérêt de la commande

- Le modèle de référence en asservissement, et donc les performances en chaîne fermée, apparaît explicitement comme la relation liant  $M(p) = W_c(p)$  sur le schéma fonctionnel de la figure 4.
- Si  $H(p) \approx H_R(p)$ , le signal  $r(t) = m(t) - \tilde{m}(t)$  représente une reconstruction de l'ensemble des perturbations (mesurables ou non), permettant une correction en chaîne ouverte de l'effet de celles-ci. C'est d'ailleurs souvent sous cet aspect que ce type de commande est traité.
- La stratégie est très intéressante pour les systèmes ayant un grand temps mort, où une action intégrale explicite conduit à des saturations et des régimes transitoires avec dépassements de consigne. L'utilisation de correcteur sans action intégrale explicite rend plus aisées de nombreuses stratégies complexes telles que :
  - régulation parallèle utilisant deux régulateurs et un sélecteur : le fonctionnement simultané des deux régulateurs sans saturation est possible ;
  - régulation en cascade où l'on veut supprimer la saturation du régulateur maître ;
  - régulation de tendance, pour une perturbation mesurable.
- La réalisation industrielle est particulièrement simple. Le seul problème délicat est la réalisation des commutations manuel/automatique sans à-coup. L'exercice corrigé aborde une réalisation industrielle.

# Exercice résolu

Un constructeur, Control Bailey, a implanté sur un SNCC une stratégie à modèle interne, sous forme d'un bloc nommé CZ. Le schéma fonctionnel est équivalent à celui fourni figure 7.

1. Par modification du schéma, montrer que l'on a une stratégie à modèle interne.
2. Déterminer le correcteur  $C'(p)$  correspondant.
3. En déduire le modèle de référence utilisé en asservissement.
4. Quel est le rôle du filtre ?
5. Comment résoudre le problème d'équilibrage M/A ?

**Solution :**

## 1. Modèle interne

La chaîne de retour peut être modifiée pour faire apparaître le terme  $K$ , compensé par  $\frac{1}{K}$  en série (fig. 5).

L'application des règles de Mason (factorisation du terme  $\frac{1}{K}$  dans la chaîne directe) permet d'aboutir au schéma de la figure 8, qui fait apparaître un modèle de Broïda dans la chaîne de retour. En calculant l'expression de  $S(p)$  pour ce schéma, on trouve :  $S(p) = \varepsilon(p) - \tilde{M}(p)$  soit  $[W(p) - M(p)] + \tilde{M}(p)$ .

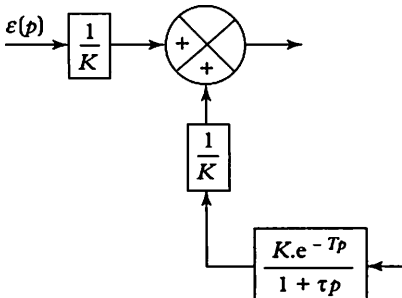


Fig. 5

Le schéma de la figure 6 est équivalent au précédent, dans la mesure où il aboutit à la même expression du signal  $S(p)$ , à savoir :  $S(p) = W(p) - [M(p) - \tilde{M}(p)]$ .

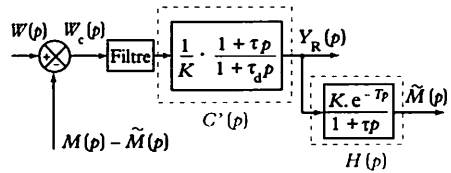


Fig. 6

On retrouve bien une structure de correcteur à modèle interne avec  $S(p) = W_c(p)$ .

## 2. Correcteur

Par identification, on obtient :

$$C'(p) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1 + \tau p}{1 + \tau_d p}$$

## 3. Modèle de référence

Ce modèle  $F^*(p) = C'(p) \cdot H(p)$

s'exprime par : 
$$F^*(p) = \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau_d p}$$

Le correcteur CZ permet donc la correction d'un système modélisable sous forme de Broïda, abordée au paragraphe 2.

## 4. Rôle du filtre

C'est un filtre de robustesse (voir chapitre 7) présentant l'intérêt, compte tenu de sa localisation, de filtrer également les variations brutales de consigne.

## 5. Équilibrage M/A

En mode manuel, le signal réglant  $Y_R(t)$  est forcé à l'entrée du modèle. Compte tenu du rejet du gain statique  $K$  de la boucle interne, on obtient donc automatiquement  $Y(t) = Y_R(t)$ , assurant automatiquement une commutation sans à-coup. Ce résultat est vrai, à condition que  $\varepsilon(t)$  soit nul pendant le fonctionnement en mode manuel. Cette condition est réalisée en intercalant un bloc générateur de rampe, forcé à  $\varepsilon_c(t) = 0$  en mode manuel. Lors de la commutation en mode automatique, la sortie  $\varepsilon_c(t)$  rejoint la valeur finale  $\varepsilon(t)$  selon une rampe de pente programmable (figure 9).

On peut également utiliser un bloc comparateur fonctionnant en mode consigne suivieuse.

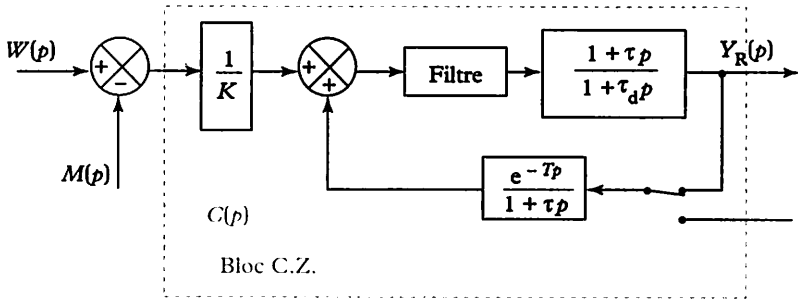


Fig. 7

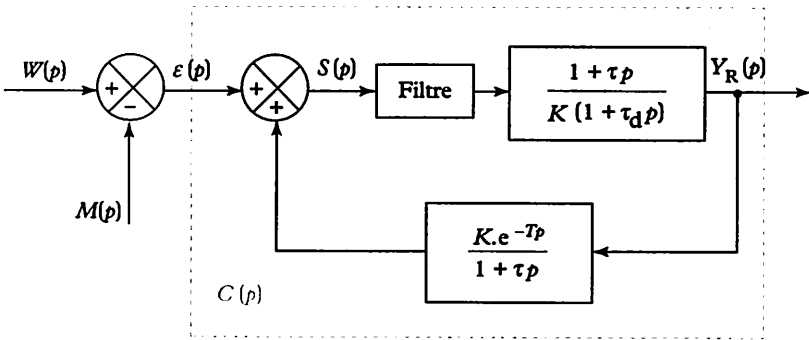


Fig. 8

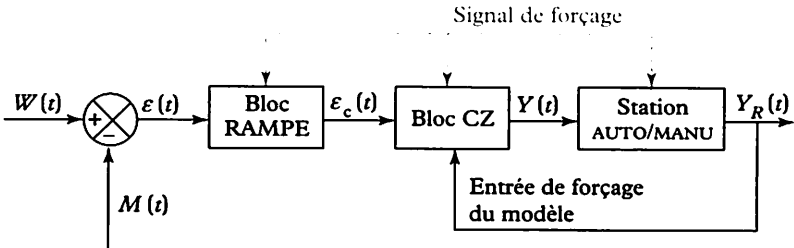


Fig. 9

L'utilisation d'un correcteur à modèle interne apparaît comme une stratégie particulièrement intéressante et on peut légitimement se poser la question : pourquoi n'existe-t-il que peu de constructeurs proposant cette technique dans leur bibliothèque algorithmique ?

La réponse est très simple : comme on le verra dans ce chapitre, cette stratégie n'est qu'une forme équivalente des régulateurs classiques (PI et PID) ou du correcteur de Smith. Cependant, on peut montrer que cette alternative présente un intérêt supplémentaire, grâce au filtre  $G(p)$  évoqué au chapitre 6 (fig. 4).

### 1 Équivalence avec un régulateur PI

Soit un système modélisé par  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ . L'adoption d'un modèle de référence identique en asservissement, avec accélération, conduit au schéma de la figure 1, avec :

$$C'(p) = \frac{1 + \tau p}{K(1 + \tau_d p)}$$

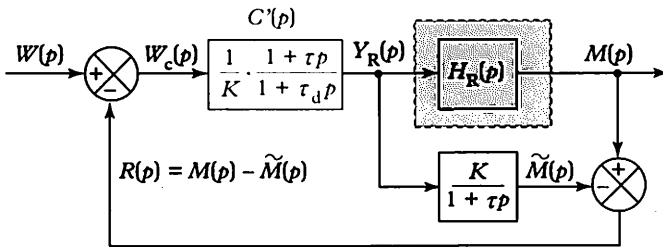


Fig. 1

L'utilisation des règles de transformation des schémas fonctionnels montre que le schéma de la figure 2 est totalement équivalent à celui de la figure 1 (voir *Exercice résolu*, chapitre 6).

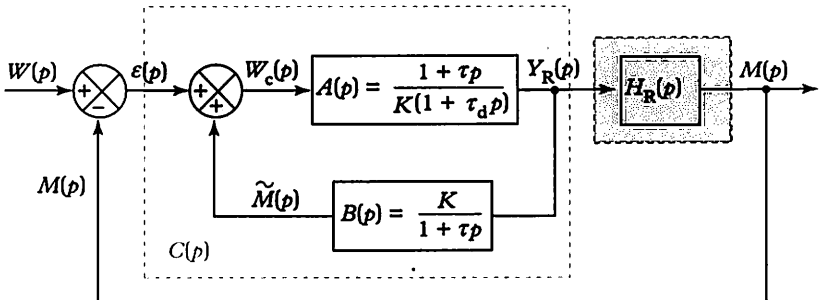


Fig. 2

Le correcteur  $C(p)$  apparaît comme un système bouclé et peut donc s'écrire :  $C(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p) \cdot B(p)}$ . On prendra garde au signe moins introduit par le sommateur.

Après simplification des calculs il vient :  $C(p) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1 + \tau p}{\tau_d p}$  que

l'on identifie immédiatement avec un PI mixte (cf. chap. 3) avec le réglage classique :  $T_i = \tau$  et  $AK = \frac{\tau}{\tau_d}$ .

Pour un procédé du 1<sup>er</sup> ordre, on obtiendra donc les performances d'un régulateur PI, ni plus, ni moins.

L'exercice résolu se propose d'établir l'équivalence avec un régulateur PID, pour un procédé du second ordre.

## 2 Équivalence avec un correcteur de Smith

Pour un système modélisé par  $H(p) = \frac{K e^{-T_p}}{1 + \tau p}$ , l'adoption d'un modèle de référence de type Broïda, avec accélération, conduit au régulateur équivalent de la figure 3.

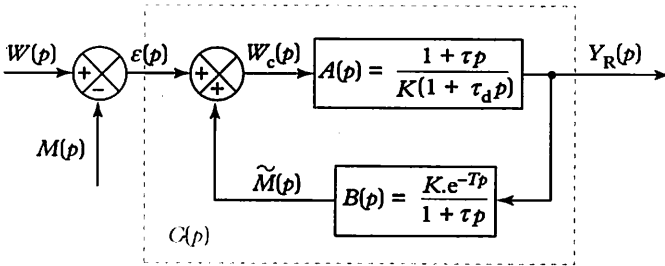


Fig. 3

L'application de la formule :  $C(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p) \cdot B(p)}$  conduit à :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{K(1 + \tau_d p - e^{-T_p})}$$

qui est la forme canonique du correcteur de Smith. Bien sûr, cette équivalence n'est vraie que dans une hypothèse de fonctionnement linéaire.

Quel est donc l'intérêt de la stratégie à modèle interne? Essentiellement dans l'existence du filtre  $G(p)$ .

### 3 Rôle du filtre $G(p)$

#### Principe

C'est un filtre passe-bas, pouvant être réalisé par la fonction suivante

$G(p) = \frac{1}{1 + \tau_F p}$  ou, en technique numérique, par un filtre calculant

la moyenne des  $n$  derniers échantillons de la mesure.

- Il est chargé de filtrer les parasites sur le signal  $m(t)$ , qui se répercutent sur  $r(t)$ . Un fort filtrage atténue donc les bruits sur la mesure.

- De par sa position (conforme à la figure 4 du chapitre 6), il filtre également les variations des paramètres de  $H(p)$  par rapport au modèle interne et augmente donc la robustesse de la stratégie. On parle donc souvent de *filtre de robustesse*.

- Agissant sur le signal reconstruisant l'ensemble des perturbations, il règle les performances temporelles en régulation. Tout se passe comme si, grâce à ce filtre, on introduisait un modèle de référence en régulation. Les courbes de la figure 4 sont obtenues avec  $K = 2$ ,  $\tau = 10$  s,  $T = 10$  s pour  $H_R(p)$  et  $H(p)$  ainsi que  $Kp = 1$ ,  $\tau_p = 10$  sous  $H_z(p)$ . On adapte  $\tau_d = 5$  s pour  $F^*(p)$ .

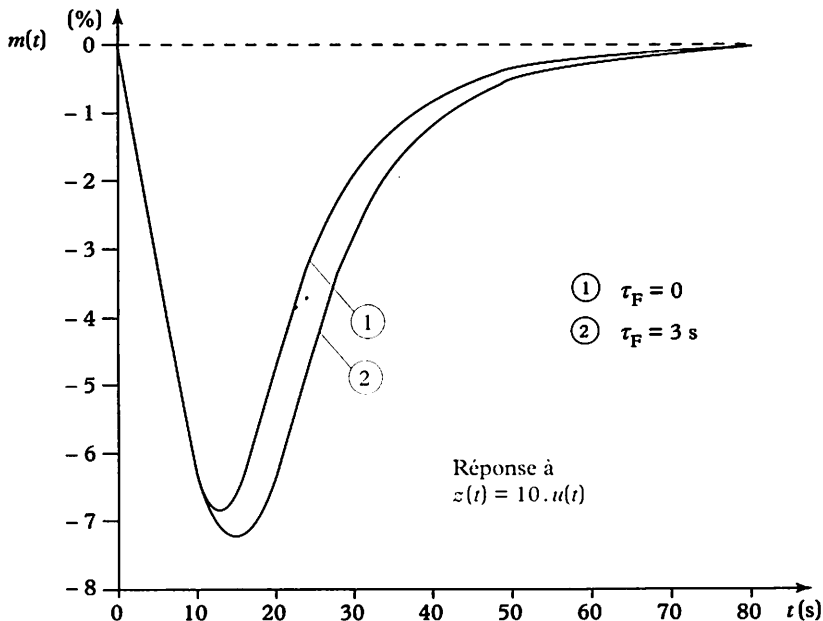


Fig. 4

Elles montrent, pour  $z(t) = 10 u(t)$ , que la valeur de  $\tau_F$  permet de « modeler » l'allure de la réponse à cette sorte d'évolution de la perturbation.

### Cas particulier du correcteur CZ

Le filtre moyennneur intervient en filtre de robustesse ET en filtre des variations  $w(t)$  de la consigne  $W(t)$ . Sans ce filtre, les variations  $y_R(t)$  du signal réglant sont brutales et peuvent conduire à des saturations de  $Y_R(t)$  à 100 %.

Le filtrage de la consigne revient à réaliser un équilibrage de consigne en rampe, adoucissant les variations de commande appliquées à l'organe réglant (fig. 5).

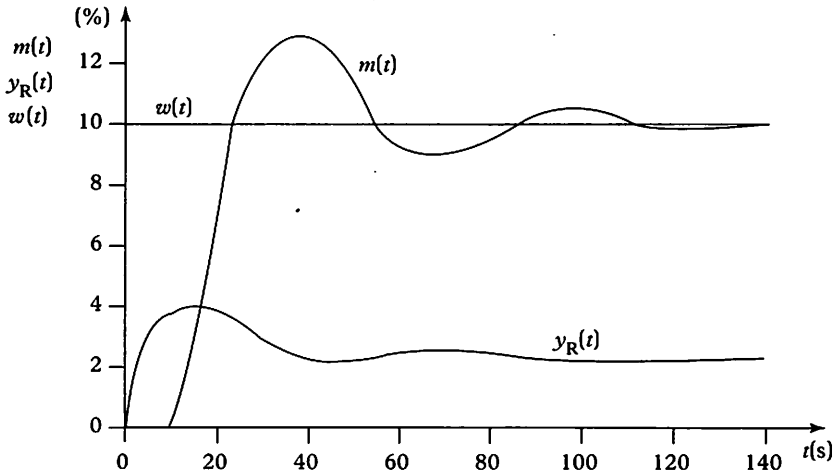


Fig. 5

## 4 Conclusions

On vient de montrer que le correcteur à modèle interne constitue une forme équivalente au correcteur de Smith. Le seul intérêt supplémentaire réside essentiellement dans l'absence d'action intégrale, supprimant les saturations inhérentes à cette action.

On doit cependant signaler que les régulateurs PID modernes disposent tous de la possibilité de rendre intermittente l'action intégrale, par adaptation du coefficient d'action intégrale  $K_i$ , ce qui procure les mêmes performances. Le principal intérêt réside essentiellement dans la possibilité de prendre en compte un modèle de référence en régulation.

Par contre, la connaissance du principe de la correction à modèle interne est essentielle pour comprendre les correcteurs à retour d'état, qui sont abordés dans les chapitres suivants.

# Exercice résolu

Un système admet un modèle du second ordre de Strejc :  $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2}$ .

On désire réaliser une stratégie IMC (Internal Model Control en anglais) avec le modèle de référence :

$$F^*(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1}$$

$$= \frac{1}{\tau_d^2 p^2 + 2\lambda \tau_d p + 1} \quad \text{avec } \tau_d = \frac{1}{\omega_0}$$

1. Existe-t-il un correcteur  $C'(p)$  causal ?
2. Montrer que la stratégie IMC est équivalente au régulateur PID mixte :

$$C(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right)$$

3. Déterminer le réglage de ce régulateur PID pour :  $K = 2$ ,  $\tau = 10$  s,  $\tau_d = 3$  s,  $\lambda = 0,43$ .
4. Vérifier au simulateur que les deux stratégies ont la même réponse indicielle.
5. Vérifier au simulateur qu'une stratégie IMC permet d'obtenir une réponse apériodique en régulation. On adoptera  $\tau_p = 3$  s pour la perturbation.

**Solution :**

## 1. Modèle de référence

$$C'(p) = \frac{F^*(p)}{H(p)}$$

$$= \frac{1}{K} \cdot \frac{\tau^2 p^2 + 2\tau p + 1}{K (\tau_d^2 p^2 + 2\lambda \tau_d p + 1)}$$

Il est

parfaitement réalisable puisque  $m = n = 2$ .

## 2. Correcteur PID équivalent

L'équivalence des schémas évoquée au paragraphe 1 permet d'écrire :

$$C(p) = \frac{C'(p)}{1 - C'(p)H(p)} = \frac{C'(p)}{1 - F^*(p)}$$

Après simplification de cette expression, il vient :

$$C(p) = \frac{1}{2K\lambda\tau_d} \cdot \frac{\tau^2 p^2 + 2\tau p + 1}{p \left( 1 + \frac{\tau_d p}{2\lambda} \right)}$$

Par identification directe avec  $C(p)$  écrit sous la forme :

$$C(p) = \frac{A \left[ 1 + p \left( T_i + \frac{T_d}{N} \right) + p^2 \left( T_i T_d + \frac{T_i T_d}{N} \right) \right]}{T_i p \left( 1 + \frac{T_d}{N} p \right)}$$

il vient :  $\frac{A}{T_i} = \frac{1}{2K\lambda\tau_d}$  (1);  $\frac{T_d}{N} = \frac{\tau_d}{2\lambda}$  (2);

$$T_i + \frac{T_d}{N} = 2\tau$$
 (3)  $T_i T_d + \frac{T_i T_d}{N} = \tau^2$  (4).

## 3. Détermination du réglage PID

(3) donne :  $T_i = 2\tau - \frac{T_d}{N} = 2\tau - \frac{\tau_d}{2\lambda}$

$$T_i = \boxed{16,5 \text{ s}}$$

(4) permet d'écrire :  $N + 1 = \frac{2\lambda\tau^2}{T_i\tau_d} = 1,74$

donc :  $N = \boxed{0,74}$

En reportant dans (2), il vient :

$$T_d = \frac{N\tau_d}{2\lambda} = \boxed{2,58 \text{ s}}$$

Enfin, (1) détermine  $A$  par :  $A = \frac{T_i}{2K\lambda\tau_d}$

$$A = \boxed{3,19}$$

## 4. Comparaison en asservissement

Les courbes de la figure 6 attestent de la similitude des deux méthodes : courbes ① : régulation IMC ; courbes ② : régulation PID.

## 5. Comparaison en régulation

Les courbes de la figure 7 montrent que le filtrage  $\tau_F = \boxed{6 \text{ s}}$ , déterminé expérimentalement, permet bien d'obtenir la réponse souhaitée.



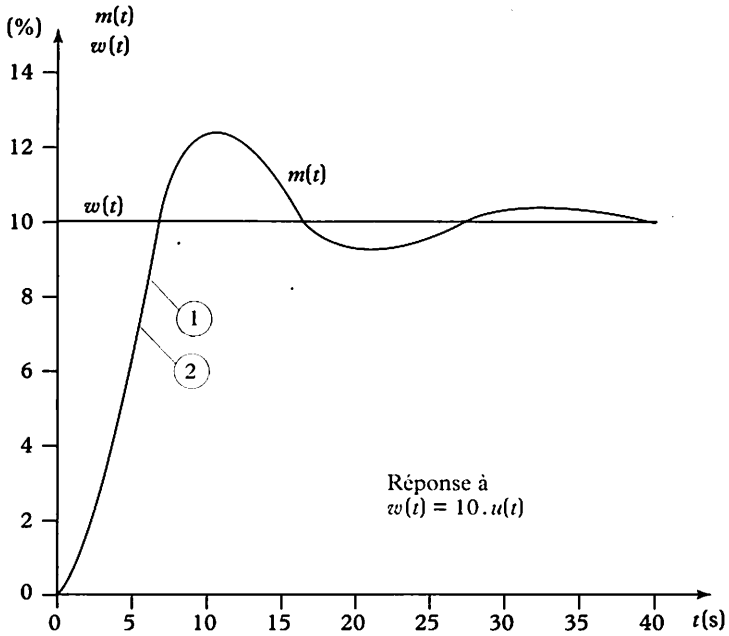


Fig. 6

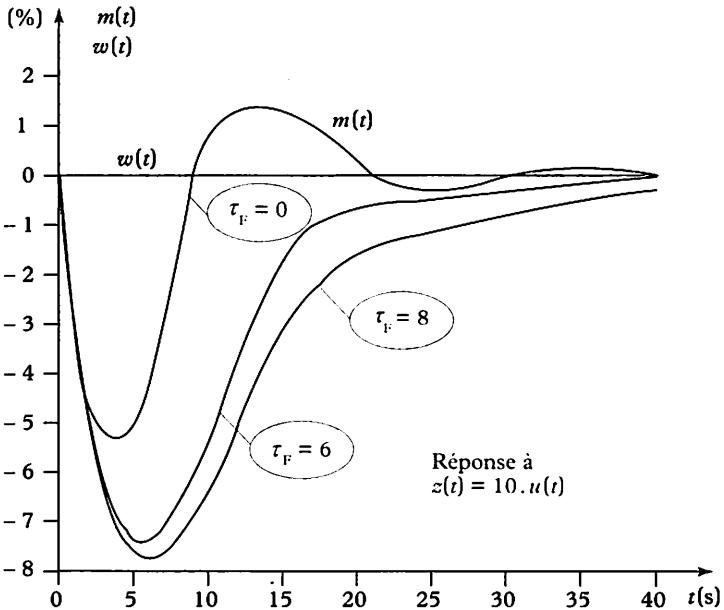


Fig. 7

*Dans les chapitres précédents, traitant des correcteurs spécifiques, on a supposé que le système à commander était caractérisé par une fonction de transfert réglante  $H(p)$  qui définissait la relation dynamique entre le signal de mesure  $m(t)$  et le signal réglant  $y_R(t)$ . Pour les stratégies évoquées, la seule information véritablement fournie par le dispositif physique au dispositif de régulation est le signal de mesure  $m(t)$ .*

*Cependant, le correcteur de Smith (chapitre 4) montre que le bloc CTM élabore une information virtuelle qui est utilisée pour « corriger » le signal d'écart primaire  $\varepsilon$ . On verra plus loin que ce dispositif équivaut à construire des informations supplémentaires sur l'évolution du système physique.*

*La théorie générale de ce type de dispositif ne peut être abordée qu'en utilisant une autre représentation mathématique des systèmes, appelée « représentation d'état ».*

## 1 Notion d'état d'un système

L'exercice résolu du chapitre 3 a montré que, pour un système du second ordre, la seule information  $m(t)$  était insuffisante pour permettre d'obtenir le modèle de référence désiré. L'utilisation d'une action dérivée (fournissant l'information supplémentaire  $\frac{dm}{dt}$ ) permet d'obtenir le résultat attendu.

On en conclut donc que plus on dispose d'informations (au sens large) sur un système, plus il est facile de le commander. La régulation en cascade est une illustration simple de ce postulat.

La notion d'état d'un système est difficile à définir simplement. On peut considérer que c'est le minimum d'informations nécessaires pour caractériser l'énergie emmagasinée dans un système, énergie qui conditionne l'évolution future de la mesure (par augmentation ou diminution de cette énergie) (définition (1)).

L'état d'un système, à un instant  $t$ , résume le résultat des actions antérieures sur ce dernier et permet de déterminer son évolution future sous l'action d'une sollicitation.

La notion d'état ne nous est pas étrangère : ce terme a été employé à propos de la résolution des équations différentielles d'ordre 1 ou 2 (*Régulation 1*). Pour une équation du 1<sup>er</sup> ordre, l'évolution du signal de sortie  $y(t)$  dépend de l'état initial  $y_0$ , sous forme d'UNE constante

d'intégration. Pour une équation du 2<sup>e</sup> ordre, l'état initial  $\left[ y_0, \left( \frac{dy}{dt} \right)_0 \right]$

intervient pour déterminer DEUX constantes d'intégration.

Plus généralement, on peut montrer que l'état d'un système est

directement lié à l'ordre de ce dernier. Par définition, l'état d'un système d'ordre  $n$  est caractérisé par  $n$  composantes, que l'on peut associer comme des composantes d'un vecteur appelé vecteur d'état.

## 2 Exemples simples

### Circuit série RC

On étudie le système électrique simple, représenté figure 1.

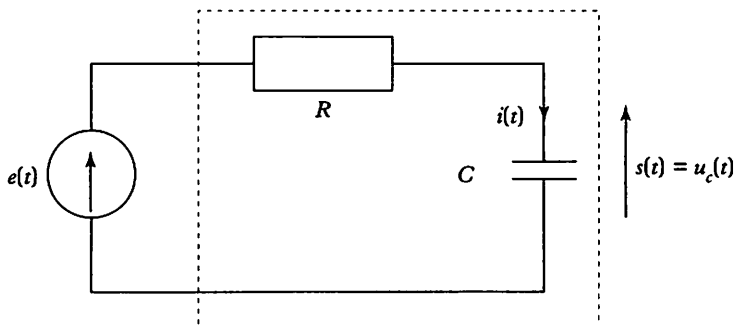


Fig. 1

Par modèle de connaissance, on a élaboré la relation différentielle :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t) \quad (2)$$

avec  $\tau = RC$  et  $K = 1$ .

Cette équation étant du premier ordre, l'état du système ne comporte qu'une composante. D'après la définition énergétique (1) de l'état, la tension  $u_c(t) = s(t)$  constitue le vecteur d'état représentant

l'énergie  $W = C \frac{u_c^2}{2}$  emmagasinée dans le condensateur.

### Circuit série RLC

Cet exemple permet facilement, par modèle de connaissance, de mettre en évidence l'aspect énergétique de la notion d'état.

À chaque instant, l'énergie emmagasinée dans l'inductance  $L$  et le condensateur de capacité  $C$  est donnée par la relation :

$$W = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2$$

ce qui suggère que  $u_c$  et  $i$  constituent les deux composantes d'un vecteur d'état.

### 3 Détermination d'un vecteur d'état

L'étude d'un système par modèle de connaissance permet facilement d'accéder à un vecteur d'état (voir *Exercice résolu*). Malheureusement, en régulation industrielle, des essais ne peuvent fournir qu'un modèle de comportement, sous forme d'une fonction de transfert (Broïda, Strejc...). Il est donc important, dans la mesure où le modèle représente bien le procédé réel, de dégager une méthode permettant d'accéder à un vecteur d'état à partir de l'équation différentielle issue de la fonction de transfert.

#### Principe de la méthode

À partir de l'équation différentielle, on réalise un *schéma fonctionnel* permettant de faire apparaître des grandeurs énergétiques, dans une *représentation causale*. Le chapitre 2 ayant fait apparaître que la dérivation n'était pas causale, le schéma fonctionnel doit donc traduire la relation différentielle sous forme d'intégrateurs (fig. 2a) représentés sous un aspect équivalent (fig. 2.b).

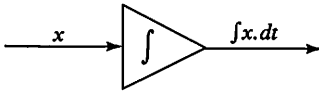


Fig. 2a

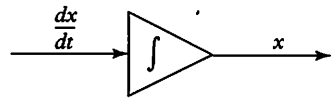


Fig. 2b

#### Exemple

Un système dont l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre peut se mettre sous la forme (2) peut également s'écrire :  $\frac{ds(t)}{dt} = \frac{K}{\tau} \cdot e(t) - \frac{1}{\tau} \cdot s(t)$ .

Il peut donc être représenté par le schéma de la figure 3. On constate sur cet exemple que le vecteur d'état (réduit ici à une seule composante  $u_c(t) = s(t)$ ) est accessible en sortie de l'intégrateur.

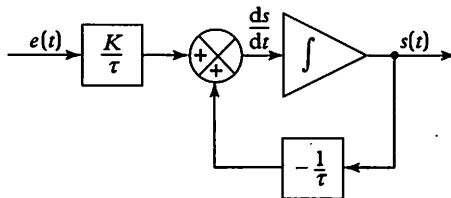


Fig. 3

#### Généralisation

Pour un système d'ordre  $n$ , un vecteur d'état est accessible aux  $n$  sorties des  $n$  intégrateurs représentés en série, dans un schéma fonctionnel causal, traduisant l'équation différentielle liant l'entrée et la sortie du système.

Il peut exister plusieurs représentations d'état d'un système. Si le vecteur d'état est constitué de la grandeur réglée et de ses  $n - 1$  dérivées successives, on parle de « vecteur de phase » constitué des différentes variables de phase.

4 Vecteurs d'états utiles

**Modèle du 1<sup>er</sup> ordre**

Le vecteur d'état se réduit à une composante  $x_1$ , accessible en sortie du bloc représentant un premier ordre (fig. 4.a).

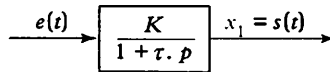


Fig. 4a

**Modèle de Broïda**

Le vecteur d'état se réduit toujours à une composante  $x_1$ , accessible en sortie du bloc du premier ordre, le bloc retard  $e^{-Tp}$  ne faisant pas intervenir d'accumulation d'énergie (fig. 4.b).

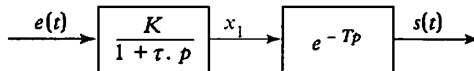


Fig. 4b

**Modèle de Strejc**

La fonction de transfert  $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$  peut être représentée par

la mise en série de  $n$  blocs du premier ordre en série. On peut montrer qu'un vecteur d'état possible est accessible aux sorties  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  des  $n$  blocs (fig. 5).

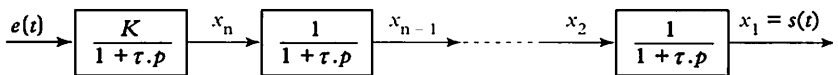


Fig. 5

5 Accès à un vecteur d'état

Physiquement accessible sur certains systèmes (voir *Exercice résolu*), un vecteur d'état est souvent reconstruit à partir d'une simulation du système. On parle alors d'« observateur d'état reconstruit ». Les possibilités de simulation offertes par les SNCC permettent d'appréhender de nouvelles stratégies de régulation, établies sur l'observabilité d'un vecteur d'état d'un système.

# Exercice résolu

Un moteur d'asservissement, à courant continu et excitation indépendante, peut être représenté par le schéma de la figure 6. Le moteur entraîne une charge exerçant un couple résistant, de moment  $C_R$ . On désigne par  $\mathcal{J}$  le moment d'inertie de l'ensemble du groupe, tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  (rad.s<sup>-1</sup>).

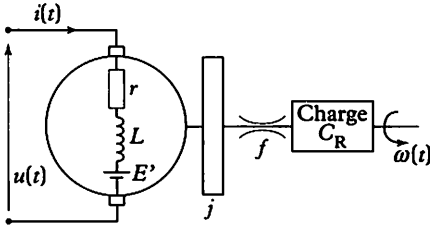


Fig. 6

On rappelle que les frottements visqueux sont responsables d'un couple résistant, dont le moment s'exprime par  $C_F = -f \cdot \omega$ .  
 1. Rappeler les équations électromécaniques régissant le fonctionnement du groupe tournant.

2. En déduire la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$$

3. Montrer qu'il est possible d'aboutir à une représentation d'état directement à partir des équations électromécaniques. Quel est alors le vecteur d'état ?

4. On désire utiliser le moteur pour un asservissement de position. Comment doit-on modifier le schéma précédent ? Quel est le nouveau vecteur d'état ?

5. Conclusions ?

## Solution

### 1. Équations électromécaniques

Lois du moteur :  $E' = k \cdot \omega$  (5) et  $C_M = k \cdot i$  (6) où  $E'$  représente la force électromotrice de la machine et où  $C_M$  désigne le moment du couple moteur,  $k$  étant une constante caractéristique de la machine.

L'induit constitue un circuit électrique où la loi d'Ohm se traduit par :

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + E' \quad (7), \text{ avec :}$$

$r$  = résistance interne

$L$  = inductance du bobinage d'induit.

Le principe fondamental de la mécanique de rotation se traduit par :

$$\mathcal{J} \frac{d\omega}{dt} = C_M - C_F - C_R \quad (8)$$

### 2. Fonction de transfert

En notation de Laplace, les quatre équations précédentes deviennent :

$$E'(p) = k \cdot \Omega(p) \quad (5')$$

$$C_M(p) = k \cdot I(p) \quad (6')$$

$$U(p) - E'(p) = I(p) \cdot [r + Lp] \quad (7')$$

$$C_M(p) - C_R(p) = \Omega(p) \cdot [f + \mathcal{J}p] \quad (8')$$

Par substitutions successives, regroupement des termes en  $\Omega(p)$  et en supposant  $C_R = 0$  il vient :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{k}{L\mathcal{J}p^2 + p(r\mathcal{J} + Lf) + rf + k^2}$$

A priori, cette forme n'est pas intéressante pour retrouver une représentation d'état, sauf sous la forme du vecteur de phase.

### 3. Représentation d'état

On peut directement traduire graphiquement l'équation (8') par la figure 8.a et l'équation (6') en complétant le schéma précédent par la portion 8.b. L'élément 8.c représente l'équation (7'). Le retour 8.d traduit enfin l'équation (5').

La transformation des termes du 1<sup>er</sup> ordre par des intégrateurs bouclés aboutit à la figure 9. Le vecteur d'état correspondant est donc  $[\omega, i]$ .

### 4. Cas d'un asservissement de position

Le schéma de la figure 9 est complété par le schéma de la figure 7. Le vecteur d'état devient alors :

$$[\theta, \omega, i]$$

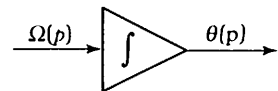


Fig. 7

### 5. Conclusions

L'étude d'un procédé par ses équations de connaissance fournit beaucoup plus d'informations que celle résultant d'une approche comportementale externe. Cette remarque sera exploitée au chapitre 9.

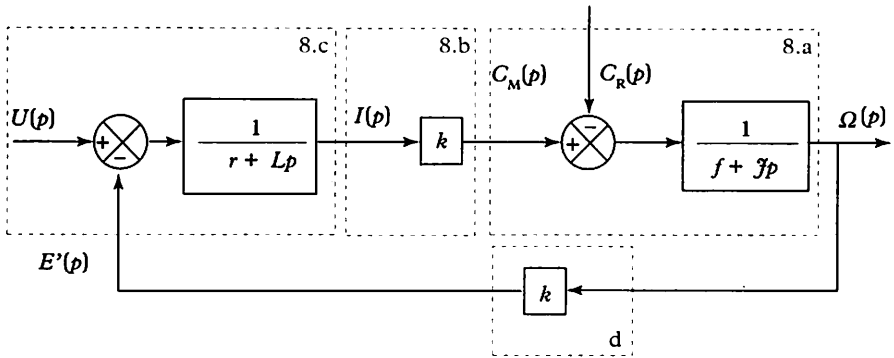


Fig. 8

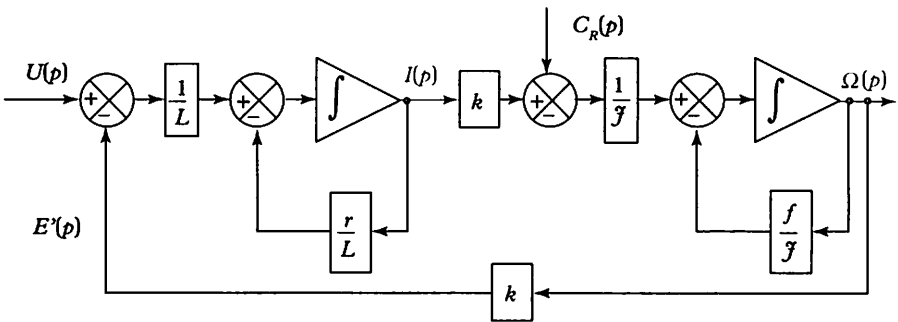


Fig. 9

## 1 Intérêt de la représentation d'état

### En régulation

Le système représentable par le schéma de la figure 1 fait apparaître le vecteur d'état  $[x_1, x_2, x_3]$ . On rappelle que, mathématiquement, la variation  $\frac{ds}{dt}$  de la sortie d'un intégrateur est proportionnelle à son entrée  $e(t)$ . La connaissance de la valeur  $e(t)$  permet donc d'anticiper les variations de la sortie  $s(t)$  de l'intégrateur. Compte tenu des remarques précédentes et de la représentation causale employant des intégrateurs, on dit que chaque composante  $x_i$  du vecteur d'état est une grandeur d'état de la composante  $x_{i-1}$  dans la mesure où sa valeur indique le sens de variation ultérieur de  $x_{i-1}$ .

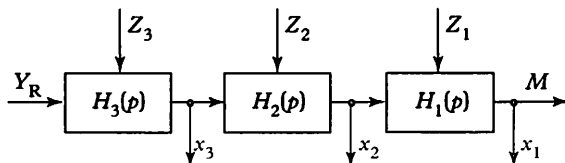


Fig. 1

On distingue parfois les notions de grandeurs d'état totale ou partielle. Ce point de vue peut être étudié sur l'exemple du moteur d'asservissement, de l'exercice corrigé du chapitre 8.

L'intensité  $i(t)$  dans l'induit est une grandeur d'état partielle de  $\omega(t)$  dans la mesure où la perturbation  $C_R$  peut contrarier la loi d'évolution de  $\omega(t)$  en fonction des variations de  $i(t)$ . En régulation, on retiendra qu'une composante d'état est intéressante dans la mesure où ses variations sont sensibles à une perturbation importante du système, perturbation que l'on peut donc détecter plus tôt et dont on peut limiter les conséquences plus efficacement.

### En asservissement

Même si l'on n'a pas directement accès au vecteur de phase  $[x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots]$  toute information sur le vecteur d'état est liée aux dérivées successives de la grandeur réglée et donc utilisable pour stabiliser une boucle de régulation.

Les deux exemples qui suivent exploitent ces remarques.

## 2 Régulation par retour d'état

On parle de « régulation par retour d'état » pour tout dispositif où le signal réglant  $Y_R$  obéit à la définition :  $Y_R = F(W, M, x_1, x_2, \dots, x_n)$



où les  $x_i$  sont les composantes d'un vecteur d'état. Dans la majorité des cas, on peut supposer que  $M = x_1$ .

### Régulation en cascade

Abordée dans *Régulation 3*, cette sorte de régulation peut s'étudier avec le formalisme d'état. Si une composante  $x_i$  est sensible à la perturbation principale  $Z(t)$ , une régulation en cascade (fig. 2) permet d'améliorer la compensation de cette perturbation. Dans l'exemple du servomoteur, l'information  $i(t)$  n'est pas intéressante vis-à-vis du couple résistant  $C_R$ , mais elle peut permettre de combattre les perturbations agissant sur l'alimentation électrique de l'induit. La boucle de courant permet surtout de limiter l'appel de courant pendant certains régimes transitoires, de façon à travailler à couple moteur constant. Un tel dispositif empêche par exemple une rupture dans le cas d'enroulement de papier ou de film. Une telle boucle est systématiquement intégrée dans les blocs de commande de moteurs.

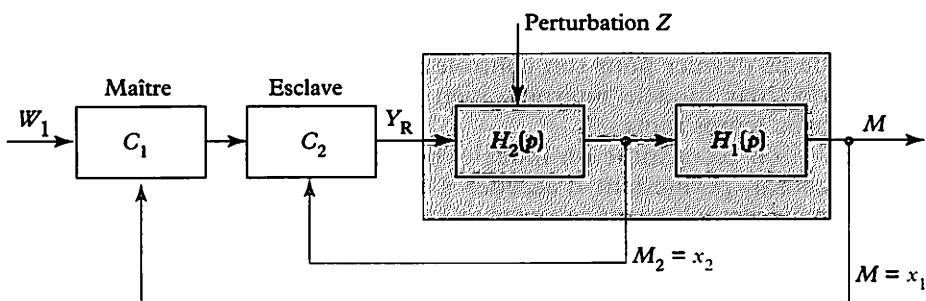


Fig. 2

On voit donc que l'on peut généraliser le concept de la cascade à plus de deux boucles imbriquées. Malheureusement, la stabilité de l'ensemble devient problématique et il faut surtout signaler que, le plus souvent, on ne peut accéder qu'à une partie du vecteur d'état !

### Régulation par retour d'état partiel

Même si le vecteur d'état n'est pas totalement observable, l'usage d'une seule composante peut favoriser la stabilisation et la rapidité d'une boucle d'asservissement. L'exemple le plus simple est la correction tachymétrique utilisée dans un asservissement de position (fig. 3). La boucle interne introduit une action dérivée parfaite (car  $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ ) impossible à reconstruire parfaitement à partir de  $\theta(t)$ .

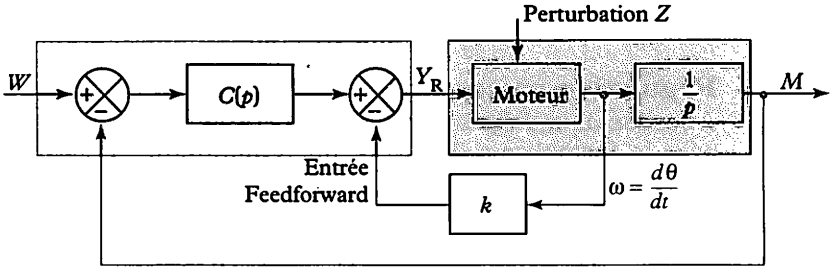


Fig 3

### 3 Régulation par retour d'état reconstruit

#### Principe

Ce type de stratégie obéit à la définition évoquée en début de paragraphe. On utilise simplement deux remarques essentielles pour la compréhension :

- si un système est parfaitement identifié, on peut utiliser un modèle de ce dernier pour son contrôle : c'est la philosophie de la « régulation par modèle interne », bien adaptée au contrôle d'un système avec temps mort ;
- si on reconstitue un modèle, pourquoi ne pas adopter un modèle causal, permettant d'accéder à un vecteur d'état, certes non réel, mais virtuellement reconstruit ?

On retiendra donc que la régulation par retour d'état reconstruit est une régulation par modèle interne, un peu plus élaborée, mais plus performante. En effet, cette stratégie peut être employée pour TOUS les systèmes naturellement stables (avec ou sans temps mort).

#### Schéma fonctionnel du régulateur

Tous les résultats du chapitre 6 restent vrais. On utilise donc une action intégrale implicite, comme indiquée figure 4. La seule nouveauté est que le correcteur  $C''(p)$  utilise davantage d'informations concernant le modèle « observé » puisqu'il accède à tout le vecteur d'état.

On appelle « dispositif reconstituteur » l'ensemble formé par un observateur et l'action intégrale implicite.

Conformément aux notations employées pour la régulation à modèle interne, on rappelle que  $W_c$  est une consigne corrigée, telle que  $F^*(p) = f[C''(p), H(p)]$  où  $H(p)$  est un modèle de la fonction de transfert et  $F^*(p)$  est le modèle de référence pour le comportement désiré en chaîne fermée.

Pour la régulation par retour d'état, le correcteur  $C''(p)$  est défini par :

$$Y_R(t) = \mu_0 W_c - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 \dots - \mu_n x_n = \mu_0 W_c - \sum \mu_i x_i \quad (1)$$

où les termes  $\mu_i$  sont des constantes appelées gains. On constate que le régulateur ne fait donc pas intervenir d'opérateur de dérivation ou d'intégration.

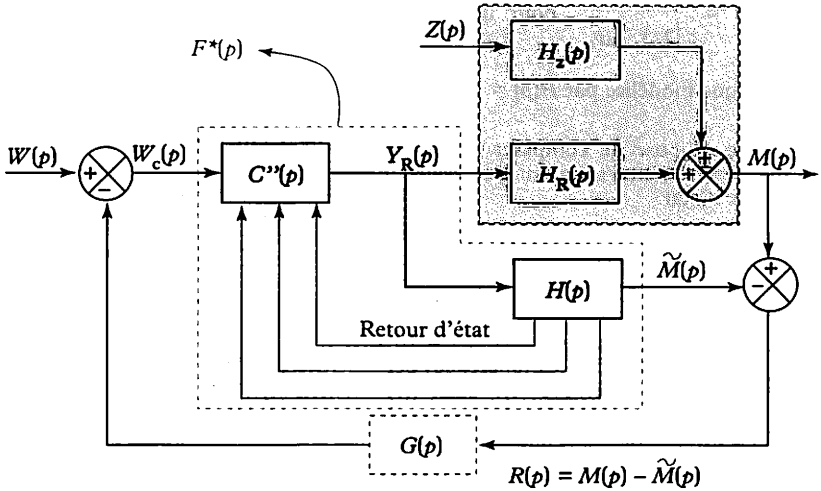


Fig. 4

#### 4 Détermination d'un correcteur

Pour un système de modèle de Strejc  $H(p) = \frac{\tilde{M}(p)}{Y_R(p)} = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$ ,

reconstitué sous la forme série de la figure 5, du chapitre 8, on désire généralement obtenir en asservissement le modèle de référence suivant

$$F^*(p) = \frac{M(p)}{W_c(p)} = \frac{1}{(1 + \tau_d p)^n} \text{ avec } \tau_d \leq \tau.$$

Le chapitre 10 fournit les formules permettant le calcul des coefficients  $\mu_i$ .

#### 5 Conclusions

On retiendra que la théorie générale du retour d'état utilise une notation matricielle, non employée dans cet ouvrage, et que les réalisations concrètes mettent en œuvre plutôt des solutions numériques.

# Exercice résolu

L'exercice résolu du chapitre 3 a permis de montrer qu'il était possible d'obtenir en asservissement le modèle de référence

$$F^*(p) = \frac{1}{(1 + \tau_d p)^2} \text{ pour un système}$$

$$\text{physique modélisé par } H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2}.$$

On se propose de comparer les performances de cette solution avec celle du retour d'état.

1. Proposer une réalisation de la régulation par retour d'état, permettant d'utiliser les modules habituellement disponibles dans un SNCC.

2. On adopte les valeurs  $K = 2$ ,  $\tau = 10$  s et on désire  $\tau_d = 5$  s. Comparer les performances obtenues avec les deux stratégies, pour un échelon de consigne de 50 %. Interpréter les résultats obtenus.

3. Pour les mêmes valeurs comparer les performances en régulation. Conclusions ?

**Solution :**

## 1. Réalisation pratique

L'application des formules du chapitre 10 aboutit à :

$$\mu_0 = \frac{1}{K} \left( \frac{\tau}{\tau_d} \right)^2 ; \mu_1 = \mu_0 \left( \frac{\tau_d}{\tau} - 1 \right)^2 ;$$

$$\mu_2 = \mu_0 2 \frac{\tau_d}{\tau} \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right)$$

Ces expressions suggèrent de mettre  $\mu_0$  en facteur et d'opérer le changement de variables :

$$A = \mu_0 \text{ et } \lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}.$$

On obtient alors la forme de la figure 5, qui a l'avantage de permettre de retrouver le modèle interne si l'on choisit  $\tau_d = \tau$ . Cependant se posent les mêmes problèmes de réalisation industrielle que pour la stratégie à modèle interne. On doit ramener  $M(t)$  sur le comparateur (pour les synoptiques) et il faut donc utiliser :

- soit une pseudo-cascade (voir *Exercice résolu* du chapitre 4) ;

- soit un régulateur dit *feedforward*.

L'équation (1) permet d'écrire :

$$Y_R = \mu_0 W_c - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2.$$

Or  $W_c = W - (M - \tilde{M})$  et on suppose  $\tilde{M} = x_1$ .

Par substitution, il vient :

$$Y_R = \mu_0 (W - M) - (\mu_1 - \mu_0) \cdot x_1 - \mu_2 \cdot x_2.$$

Cette dernière solution est présentée figure 6. Elle présente l'avantage d'utiliser un régulateur P classique.

On obtient numériquement :

$$\boxed{\mu_0 = 2}, \quad \mu_1 = 0,5, \quad \boxed{\mu_2 = 1}$$

$$\text{et } \boxed{\mu_1 - \mu_0 = -1,5}.$$

## 2. Performances en asservissement

Les courbes obtenues figure 7 se superposent. Cela n'est pas surprenant, dans la mesure où les deux stratégies réalisent exactement le même modèle de référence. On rappelle qu'un régulateur PID est limité à la réalisation exacte du seul second ordre, alors que la technique du retour d'état est utilisable pour un ordre  $n$  quelconque.

Cette remarque est exploitée au chapitre 10.

## 3. Performances en régulation

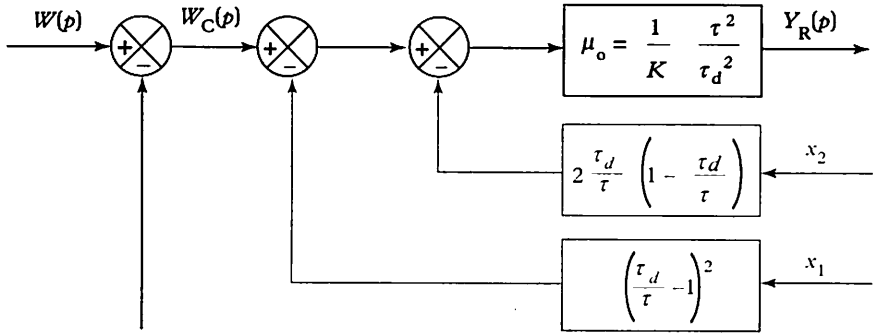
Pour  $z(t) = 10 \cdot u(t)$  et  $H_z(p) = \frac{1}{1 + 5p}$ , la

figure 8 indique que les performances sont identiques.

On retiendra donc un nouveau critère de choix de régulateurs : si l'identification de Strejc permet d'obtenir un modèle d'ordre  $n \leq 3$ , le choix d'un régulateur PID permet de réaliser assez fidèlement un modèle de référence du même ordre.

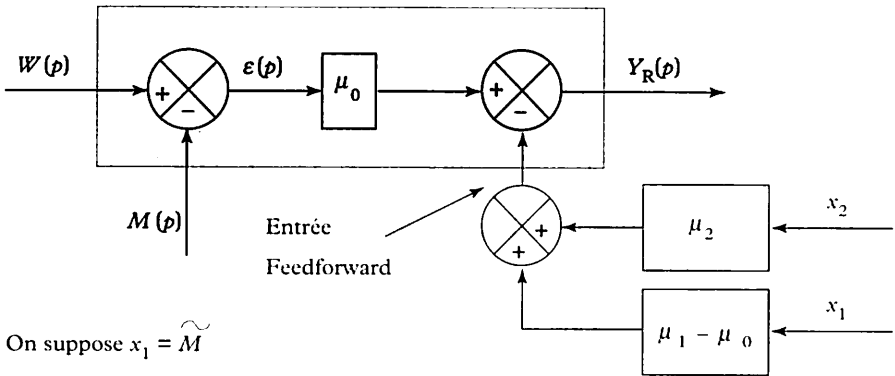
En revanche, si l'identification de Strejc aboutit à un modèle d'ordre  $n > 3$ , l'emploi d'un correcteur à retour d'état permet de réaliser exactement un modèle de référence du même ordre.

Il faut signaler que, comme pour tout schéma à modèle interne, il est possible d'utiliser un filtre de robustesse  $G(p)$  permettant d'obtenir un modèle de référence en régulation plus amorti.



$$R(p) = M(p) - \tilde{M}(p)$$

Fig. 5



On suppose  $x_1 = \tilde{M}$

Fig. 6

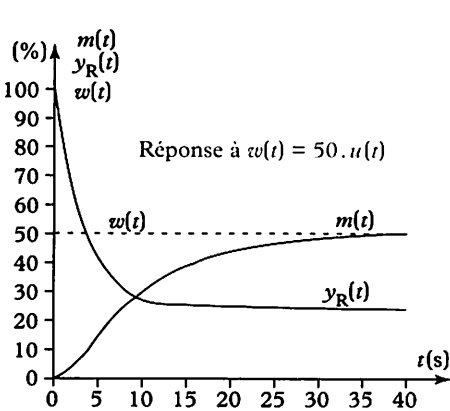


Fig. 7

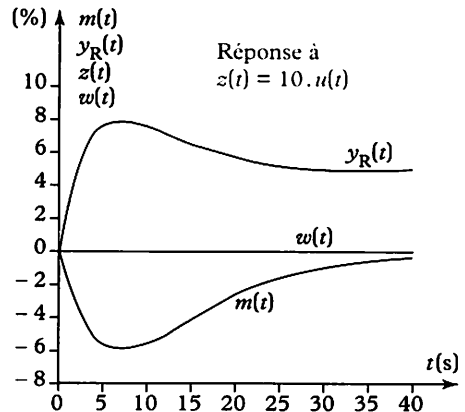


Fig. 8

Le chapitre 9 a permis de mettre en évidence, sur un procédé du second ordre, qu'une régulation par retour d'état permet de reconstituer une action dérivée parfaite, à partir d'un modèle d'état de la fonction de transfert estimée  $H(p)$ .

On se propose de généraliser ce résultat à un système d'ordre  $n$  quelconque, écrit sous la forme de Strejc, qui est la forme la plus intéressante.

### 1 Structure générale du correcteur

Les calculs ont été faits au chapitre 9, pour  $n = 2$ .

On peut montrer que, pour  $n$  quelconque, les résultats peuvent être fournis par les expressions suivantes :

$$A = \mu_0 = \frac{1}{K} \left( \frac{\tau}{\tau_d} \right)^n$$

$$\text{et } \lambda_i + 1 = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_0} = C_n^i \left( \frac{\tau_d}{\tau} \right)^i \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right)^{n-i} \text{ avec } i \in [0, n-1].$$

On rappelle que  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  avec  $x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \dots 1$ .

Pour  $n = 2$ , on trouve donc les résultats suivants :

$$A = \frac{1}{K} \left( \frac{\tau}{\tau_d} \right)^2 ; \lambda_1 = \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right)^2 ; \lambda_2 = 2 \frac{\tau_d}{\tau} \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right).$$

Pour  $n = 3$ , on trouve de même :

$$A = \frac{1}{K} \left( \frac{\tau}{\tau_d} \right)^3 ; \lambda_1 = \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right)^3 ; \lambda_2 = 3 \frac{\tau_d}{\tau} \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right)^2 ; \lambda_3 = 3 \left( \frac{\tau_d}{\tau} \right)^2 \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right).$$

Une méthode mnémotechnique utilise le triangle de Pascal pour retrouver les coefficients :

On développe l'expression  $1^n = \left[ \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right) + \frac{\tau_d}{\tau} \right]^n$  qui est de la forme  $[a + b]^n$ .

On obtient alors le tableau fourni en fin de chapitre.

### 2 Robustesse du retour d'état

L'exercice résolu du chapitre 9 a montré que pour un système du second ordre, un correcteur à modèle de référence était équivalent à un simple correcteur PID. La seule différence provient du fait que le retour  $x_2$  permet d'introduire une action dérivée parfaite et non calculée à partir des variations de  $m(t)$ .

On comprend donc que les avantages de la technique du retour d'état n'apparaissent que pour un ordre  $n$  supérieur à 2, ou dans le cas d'un temps mort naturel  $T$  (voir *Exercice résolu*).

On adopte donc un système modélisé par  $H(p) = \frac{1,2}{(1 + 10p)^3}$ .

### Robustesse du retour d'état

On rappelle que le cas  $\tau_d = \tau$  annule tous les coefficients  $\lambda_i$  et ne présente donc pas d'intérêt. Pour  $\tau_d = 0,6 \tau$  les formules du paragraphe 1 fournissent :

$$A = 3,85 ; \lambda_1 = 0,064 ; \lambda_2 = 0,288 ; \lambda_3 = 0,432$$

La figure 1 représente les réponses fréquentielles en chaîne ouverte, avec les repères suivants :

courbe ① :  $H_R(p) = H(p)$  et correcteur calculé ci-dessus ;

courbe ② : le gain du système physique passe à  $K_R = 2,4$  ;

courbe ③ : la constante de temps du système physique augmente  $\tau_R = 20$  s ;

courbe ④ :  $H_R(p) = H(p)$  et correcteur à retour d'état avec  $\tau_d = \tau$ .

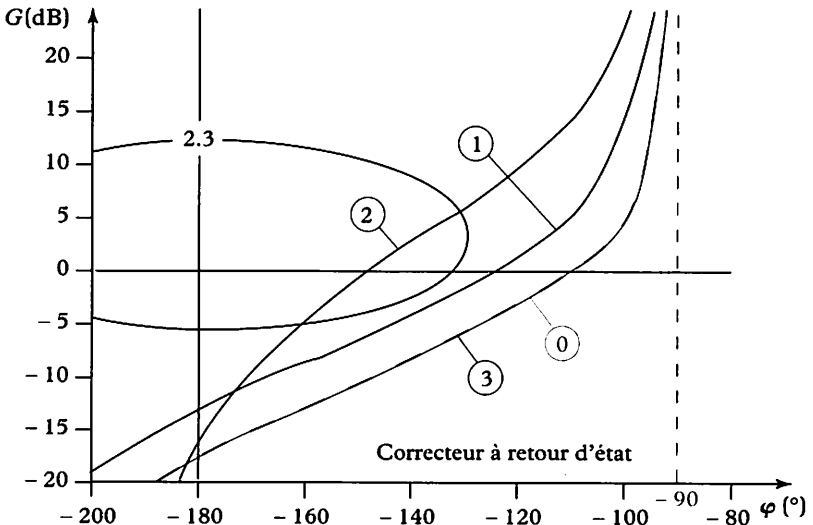
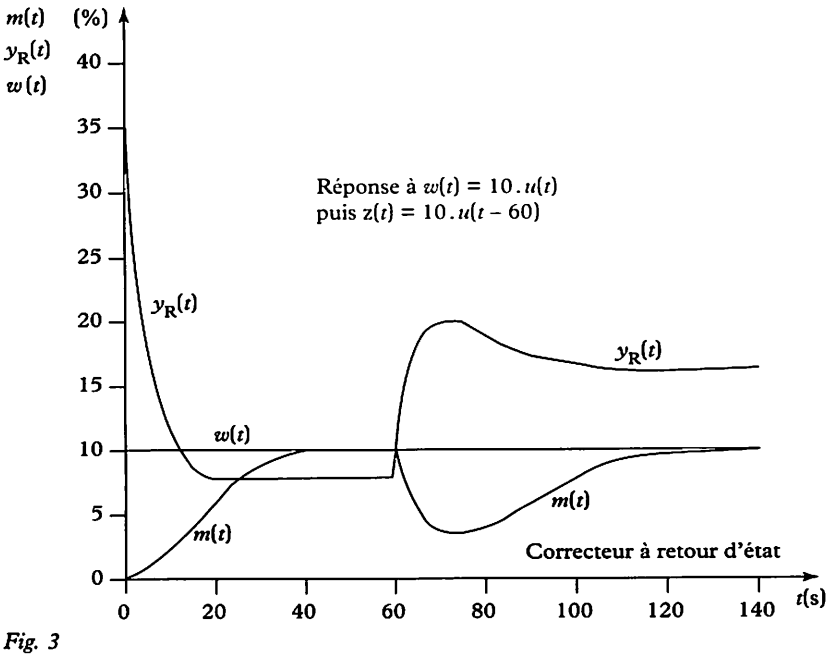
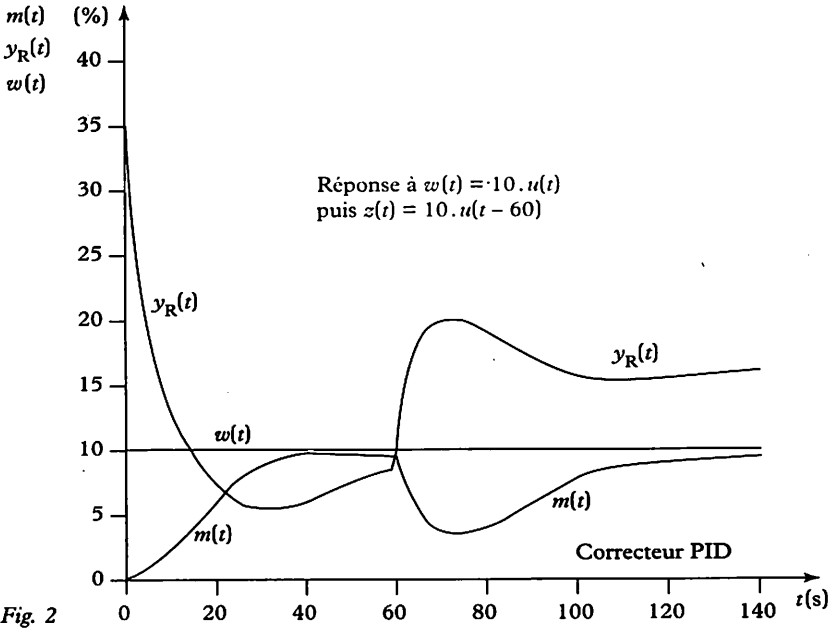


Fig. 1

Les marges de gain sont nettement améliorées. Ces résultats sont confirmés par les réponses temporelles des figures 2 et 3.

Les courbes ① et ③ sont identiques puisqu'elles correspondent au même modèle de référence  $F^*(p)$ . Elles sont cependant obtenues pour des pulsations différentes puisque la constante de temps  $\tau_d$  n'a pas la même valeur.





### Influence du modèle de référence

Le chapitre 11 montrera qu'un bon compromis robustesse-performances limite  $\tau_d$  à une fraction raisonnable de  $\tau$ . La valeur  $\tau_d = 0,6 \tau$  adoptée ci-dessus apparaît comme une limite raisonnable.

### 3 Conclusions

L'exercice résolu permettra de montrer que le correcteur de Smith et le correcteur à modèle interne ne sont que des cas particuliers du correcteur à retour d'état, dans le cas où le procédé présente un temps mort.

Cette sorte de correcteur apparaît donc potentiellement comme le correcteur fédérateur de l'avenir, sous les réserves suivantes :

- comment définir simplement le système  $H(p)$  ?
- comment choisir le modèle de référence  $F^*(p)$ , afin d'obtenir une bonne robustesse ?
- comment obtenir des commutations manuel/automatique sans-à-coup ?
- comment aboutir à une mise en œuvre facile pour un technicien d'instrumentation ?

Le chapitre 11 apportera quelques réponses à ces questions.

On retiendra cependant qu'il paraît difficile d'éliminer le correcteur PID sans un effort de formation des techniciens de mise en œuvre.

$1^1$	$1 \left(1 - \frac{\tau_d}{\tau}\right)^1$ $\lambda_1$	$1 \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)$ $\frac{1}{AK}$		
$1^2$	$1 \left(1 - \frac{\tau_d}{\tau}\right)^2$ $\lambda_1$	$2 \left(1 - \frac{\tau_d}{\tau}\right) \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)$ $\lambda_2$	$1 \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)^2$ $\frac{1}{AK}$	
$1^3$	$1 \left(1 - \frac{\tau_d}{\tau}\right)^3$ $\lambda_1$	$3 \left(1 - \frac{\tau_d}{\tau}\right)^2 \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)$ $\lambda_2$	$3 \left(1 - \frac{\tau_d}{\tau}\right) \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)^2$ $\lambda_3$	$1 \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)^3$ $\frac{1}{AK}$

D'après le tableau ci-dessus, la correspondance est immédiate.

# Exercice résolu

On désire utiliser une stratégie à retour d'état, pour un système présentant un temps mort naturel important, modélisé

$$\text{par : } H(p) = \frac{K e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

1. Proposer un modèle de référence  $F^*(p)$  permettant d'obtenir un correcteur causal.
2. Représenter le schéma du correcteur obtenu.
3. Déterminer les coefficients  $A$  et  $\lambda_1$  de la stratégie. Que retrouve-t-on si  $\tau_d = \tau$ ?
4. Vérifier au simulateur les performances en asservissement et en régulation, pour  $\tau_d = 0,6 \tau$ .
5. Montrer que si  $\tau_d \neq \tau$ , la stratégie à retour d'état est équivalente au correcteur de Smith.

**Solution :**

## 1. Modèle de référence

On applique la règle donnée au chapitre 3 : pour une fonction de transfert  $H(p)$  de Broïda, la fonction de transfert  $F^*(p)$  doit comporter un temps mort au moins égal à celui de  $H(p)$ . On adopte :

$$F^*(p) = \frac{e^{-T_p}}{1 + \tau_d p}, \text{ présentant le même}$$

temps mort  $T$ .

## 2. Schéma fonctionnel

Le chapitre 8 a mis en évidence que, pour un système de Broïda, le vecteur d'état ne comporte qu'une composante  $x_1$  (chapitre 8, fig. 4). Le terme  $e^{-Tp}$ , souvent appelé « terme non compensable », est présent dans  $F^*(p)$  et dans  $H(p)$ .

Ces fonctions présentant ce terme  $e^{-Tp}$ , on détermine le correcteur pour les fonctions  $H^*(p)/e^{-Tp}$  et  $H(p)/e^{-Tp}$ . On constate que l'on est ramené au cas général (voir paragraphe 1), avec  $n = 1$ . Le schéma est celui de la figure 5, valable pour un premier ordre.

## 3. Détermination des gains

On obtient donc  $A = \frac{1}{K} \left( \frac{\tau}{\tau_d} \right)^1$  et

$$\lambda_1 = \left( 1 - \frac{\tau_d}{\tau} \right)^1$$

On constate que  $\tau_d = \tau$  aboutit à  $\lambda_1 = 0$  et on retrouve le schéma d'une stratégie à modèle interne, sans accélération.

## 4. Performances

Les courbes de la figure 4 sont conformes à l'objectif attendu pour :  $H_R(p) = H(p) =$

$$\frac{1,2 e^{-10p}}{1 + 20p}$$

recteur de Smith.

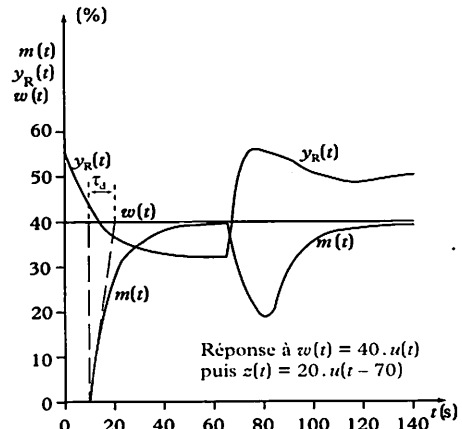


Fig. 4

## 5. Correcteur équivalent

L'application des règles de Mason, concernant la modification des schémas, permet d'obtenir le schéma de la figure 6. Le calcul du bloc  $C(p)$  conduit à :

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{K (1 + \tau_d p - e^{-Tp})} \text{ forme cano-}$$

nique du correcteur de Smith.

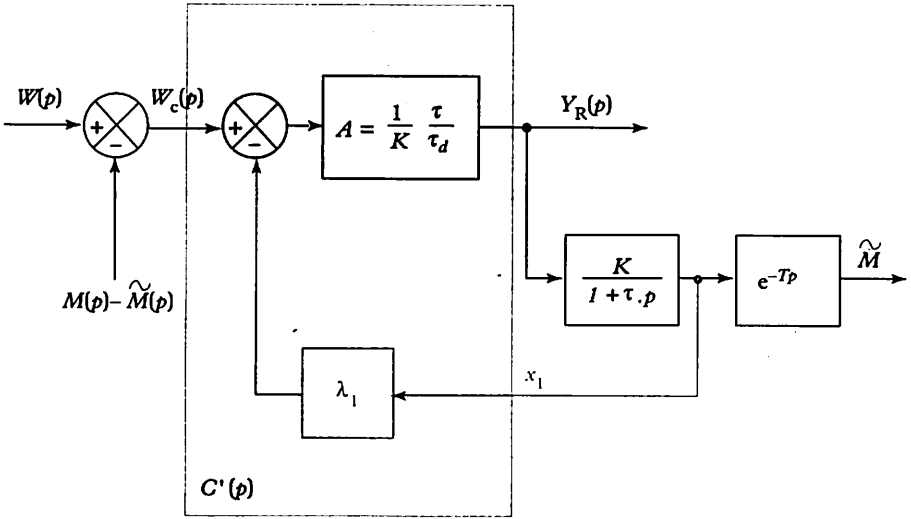


Fig. 5

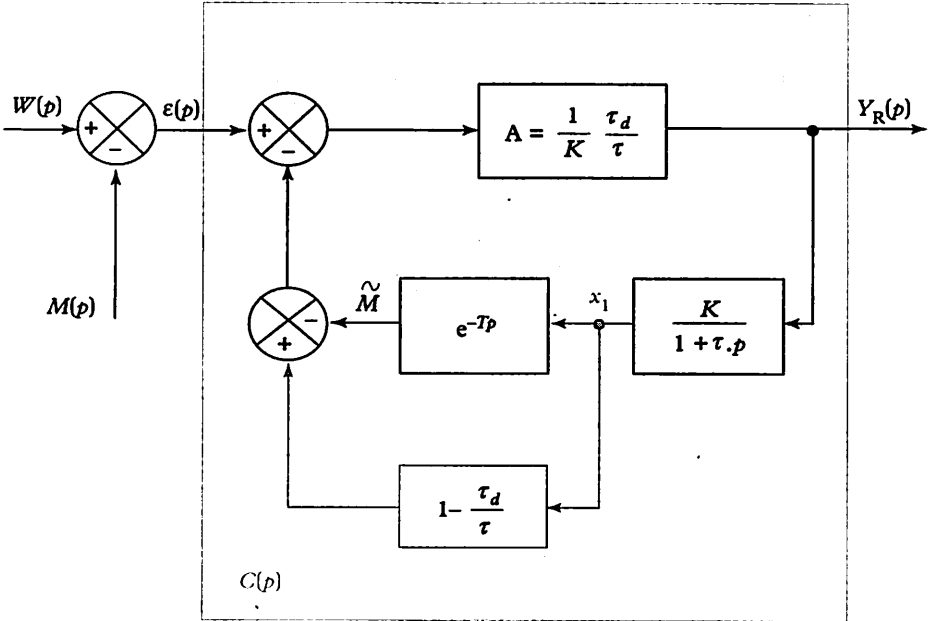


Fig. 6

## 1 Limites des fonctions de transfert

L'usage des fonctions de transfert s'impose lorsqu'on se propose d'utiliser un correcteur selon la structure classique de la figure 1. Le correcteur, en série (ou cascade) avec le système (décrit par une fonction de transfert), exploite l'information  $\varepsilon(p) = W(p) - M(p)$  pour élaborer le signal réglant  $Y_R(p)$ . Il est parfaitement défini

par sa fonction de transfert  $C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)}$ .

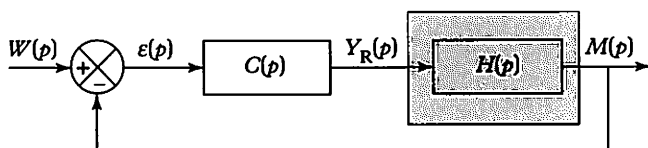


Fig. 1

Sa détermination par une méthode constructive utilise un modèle de référence qu'il est commode de spécifier sous forme d'une fonction de transfert  $F^*(p)$ .

On obtient alors : 
$$C(p) = \frac{F^*(p)}{H(p)[1 - F^*(p)]}$$

Malheureusement, cette notation montre rapidement ses limites. Certes, il est possible de trouver une réalisation du correcteur de Smith, sous forme d'associations de fonctions de transfert, mais cela est obtenu au prix d'un schéma relativement complexe.

La régulation par retour d'état ne permet plus de déterminer une fonction de transfert d'un correcteur  $C^*(p)$  car  $Y_R(p)$  est la composition de  $\varepsilon(p)$  mais aussi des composantes du vecteur d'état :  $Y_R = F(W, M, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . De plus, la forme série du modèle interne, faisant apparaître un vecteur d'état, n'est pas toujours la notation la plus intéressante.

Comment doit-on spécifier un modèle de référence, pour exploiter au mieux la technique du retour d'état ?

## 2 Spécification des pôles

On sait que se donner un modèle transfert de la forme 
$$F^*(p) = \frac{1}{(1 + \tau_d p)^n}$$
 revient implicitement à se fixer une réponse indi-

cielle apériodique, de la forme indiquée figure 2, dont le temps de réponse est réglé par la valeur de  $\tau_d$ .

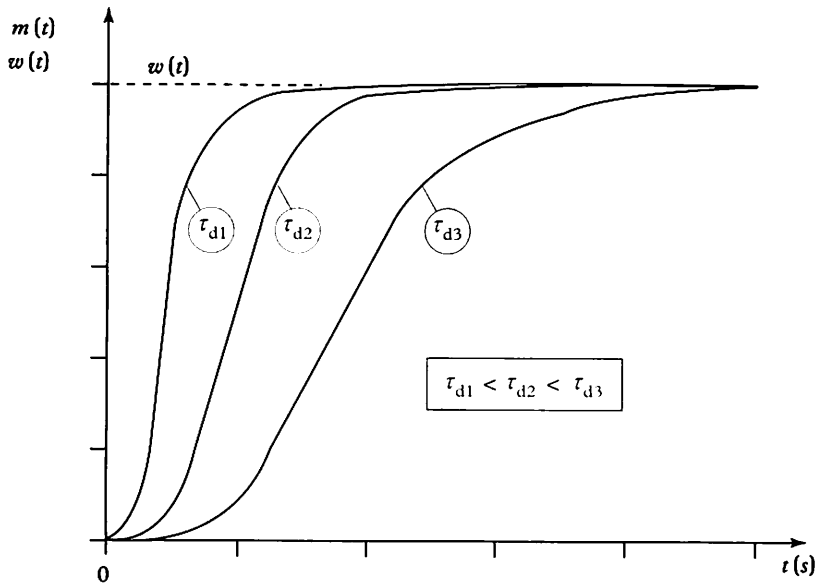


Fig. 2

Dans la pratique, cette réponse indicielle  $m(t)$  est la somme de multiples réponses temporelles, issues de la décomposition en éléments simples de :

$$M(p) = F^*(p) \cdot U(p) = \frac{1}{(1 + \tau_d p)^n \cdot p} = \frac{1}{\tau_d^n} \times \frac{1}{p \left( p + \frac{1}{\tau_d} \right)^n}$$

Compte tenu du pôle multiple  $\frac{-1}{\tau_d}$ ,  $m(t)$  est de la forme :

$$m(t) = [A_0 + A_1(t) e^{-\frac{t}{\tau_d}} + \dots + A_n(t) e^{-\frac{t}{\tau_d}}] \cdot u(t).$$

D'une façon plus générale, on sait que  $m(t)$  résultera de la superposition de termes d'amortissement (ou modes) de la forme  $e^{-\frac{t}{\tau_i}}$ , où  $\frac{-1}{\tau_i}$  correspond aux parties réelles des pôles de  $F^*(p)$ .

On retiendra donc qu'il est équivalent de se donner une fonction de transfert  $F^*(p)$  ou de spécifier ses pôles (et éventuellement ses zéros). On parle alors de *commande par placement de pôles* ou de *commande modale*.

La spécification de  $F^*(p)$  par ses pôles est beaucoup plus performante, dans la mesure où on dispose de beaucoup plus de degrés de liberté.  $F^*(p) = \frac{1}{(1 + \tau_d p)^n}$  aboutit à un SEUL pôle  $\frac{-1}{\tau_d}$  et l'allure de  $m(t)$  ne peut pas être « modelée » aussi librement. L'influence du placement des pôles est mis en évidence aux figures 3 : pour deux distributions de 4 pôles (\*), représentées figure 3 a, les réponses indicielles sont fournies figure 3 b.

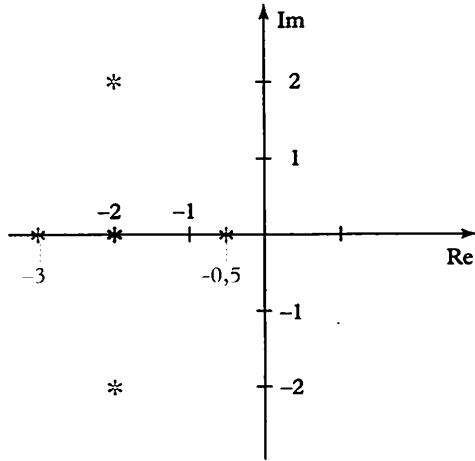
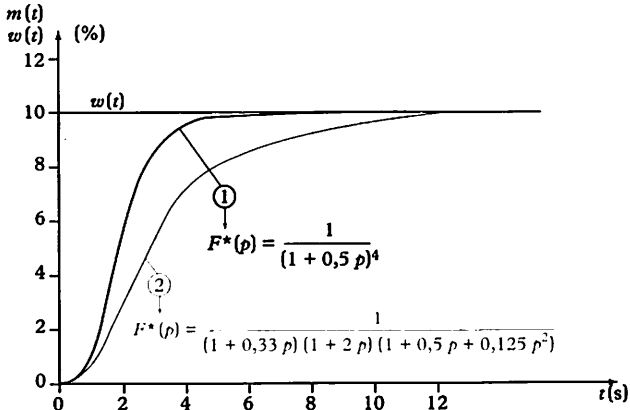
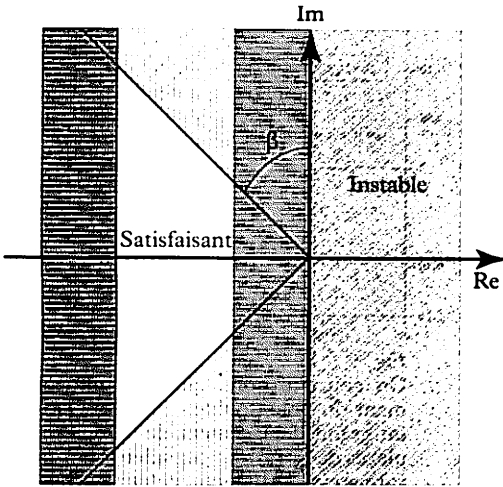


Fig. 3a



Réponses indicielles correspondant aux placements de pôles de la figure 3.a.

Fig. 3b



**Fig. 4** BUSTESSE, vis-à-vis d'une variation des paramètres du système? Lorsque ce problème est résolu, on dit que la commande réalisant le placement de pôles est « robuste ».

Bien évidemment, tous les résultats mis en évidence dans *Régulation 2*, chapitres 6 et 7, et concernant l'amortissement et la stabilité, restent vrais.

On rappelle que les pôles de  $F^*(p)$  doivent appartenir à une zone (non hachurée figure 4) garantissant un amortissement satisfaisant de la réponse indicielle.

Le problème est alors le suivant : Comment choisir les pôles de  $F^*(p)$  pour être certain d'obtenir des réponses temporelles satisfaisantes ET UNE GRANDE RO-

### 3 Spécification robuste de pôles

Le problème n'est pas trivial. Il concerne toutes les formes de régulateurs, mais seule la commande par retour d'état permet la réalisation sans problème du correcteur correspondant au modèle de référence choisi.

L'étude de robustesse du paragraphe 3 du chapitre précédent permet d'énoncer un résultat partiel, concernant un modèle de Strejc pour  $H(p)$  et  $F^*(p)$ ;

Les courbes ② et ③ de la figure 1 du chapitre 10 montrent clairement que les 2 cas  $\tau_d = \tau$  et  $\tau_d < \tau$  procurent des marges de stabilité identiques. La robustesse est-elle la même lorsque les paramètres du système réel évoluent ?

Une étude expérimentale montre que le cas  $\tau_d < \tau$  aboutit à une régulation moins robuste.

On admettra la règle de commande robuste suivante :

La stabilité d'une commande est d'autant plus robuste que les modes de la boucle fermée (donc les pôles) sont proches des modes naturels présents dans la fonction de transfert  $H(p)$  du système en boucle ouverte.

# Exercices résolus

1 De nombreux logiciels permettent, connaissant les pôles de  $H(p)$  et la structure du correcteur, de placer les pôles de la fonction de transfert en chaîne fermée  $F_R(p)$  réellement obtenue. La plupart permettent, en plus, d'observer leurs déplacements dans le plan complexe lorsque les paramètres de  $H(p)$  évoluent. Ces déplacements sont alors une bonne image de la robustesse de la commande. On se propose d'étudier la robustesse de la régulation PID du système

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_p)^3} \text{ associé au régulateur}$$

PID suivant :  $X_p = 145\%$ ,  $T_i = 15$  s,  $T_d = 5$ ,  $\frac{T_d}{N} = 0,6$  s.

1. Étudier le déplacement des pôles de  $F_R(p)$  lorsque le gain statique  $K$  passe de 1,2 à 10.
2. Réaliser la même étude pour une augmentation de  $\tau$  de 10 s à 50 s.

**Solution :**

## 1. Robustesse en gain

Pour une variation de  $K$  de 1,2 à 10 les déplacements des pôles de  $F_R(p)$  sont représentés figure 5. On constate l'apparition de 2 pôles complexes, qui se rapprochent de l'axe imaginaire, en franchissant la zone d'amortissement insuffisant ( $\lambda = 0,7$ ).

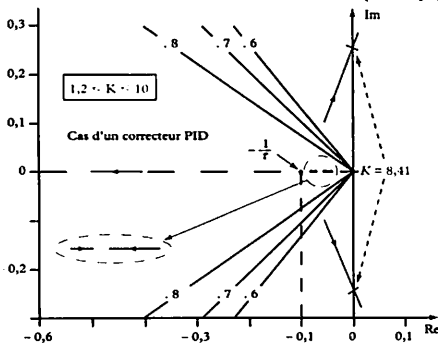


Fig. 5  
Pour  $K = 8,4$ , on obtient l'instabilité de la boucle.

## 2. Robustesse en constante de temps

De même, une augmentation de  $\tau$  de 10 s à 50 s aboutit aux déplacements de la figure 6.

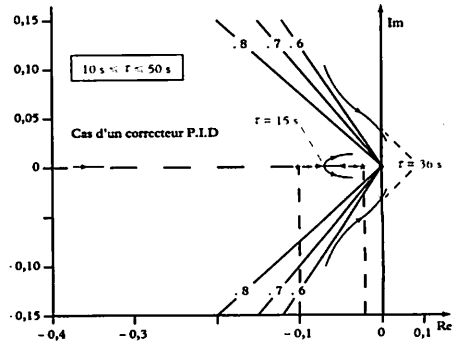


Fig. 6

On constate donc qu'un petit déplacement du pôle double de  $H_R(p)$  aboutit à un grand déplacement des 2 pôles complexes de  $F_R(p)$  : on considère donc que la robustesse du correcteur PID est moyenne.

La même étude, pour la commande par retour d'état, est conduite dans l'exercice 2. Elle aboutit à confirmer la robustesse de cette solution, si  $\tau_d$  est choisie correctement.

## 3. Conclusions

De nombreux logiciels permettent une commande par placement robuste de pôles, essentiellement dans la bibliothèque de SNCC. Tous essaient de simplifier la mise en œuvre en masquant l'étape de choix des pôles des modèles de référence, en faisant manipuler au technicien des paramètres physiques qu'il connaît mieux :

- temps de réponse à 5 %, constante de temps principale ou horizon de commande, ... pour  $F^*(p)$  ;
- coefficient d'amortissement, constante de temps de filtrage  $\tau_f$  ou horizon de filtrage, ... pour  $F_Z(p)$ .

Même si le logiciel détermine lui-même la structure du correcteur à retour d'état, il n'en demeure pas moins que le technicien de mise en œuvre doit spécifier son système, essentiellement par ses pôles, ses zéros et son éventuel temps mort.

L'usage de ce type d'outils de CAO en régulation impose des logiciels prévus pour conduire simultanément une identification auto-adaptative en temps réel. Cet aspect est abordé dans les chapitres qui suivent.



2 On désire évaluer la robustesse de la commande par retour d'état étudié au paragraphe 3 du précédent chapitre. Les courbes sont tracées pour  $\tau = 10$  s et donc  $\frac{-1}{\tau} = 0,1$ .

1. Pour  $\tau_d = 0,6 \tau$ , étudier le déplacement des pôles de  $F_R(p)$  lorsque le gain statique  $K$  passe de 1,2 à 10. Comparer la robustesse obtenue à celle d'un PID?

2. Réaliser la même étude pour une augmentation de la constante de temps  $\tau$ , de 10 s à 50 s. La robustesse obtenue est-elle meilleure?

3. Reprendre l'étude pour  $\tau_d = \tau$ . Que constate-t-on?

4. Conclusions.

Solution :

1. Robustesse en gain pour  $\tau_d = 0,6 \tau$

On constate (fig.7) que l'instabilité est obtenue pour  $K = 10,8$ , ce qui constitue une légère amélioration. Le plus intéressant réside surtout dans une apparition progressive des modes associés aux 2 pôles complexes. Pour un régulateur PID, les courbes de la figure 5 montrent une discontinuité des pôles, avec une apparition brutale de pôles complexes sous-amortis. Ce phénomène peut surprendre un conducteur d'installation et entraîner une réaction intertempête de sa part.

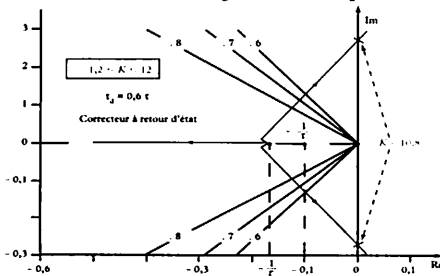


Fig. 7

2. Robustesse en constante de temps pour  $\tau_d = 0,6 \tau$

Les courbes de la figure 8 permettent de tirer le même type de conclusions que ci-dessus. Globalement, on peut considérer que le choix  $\tau_d = 0,6 \tau$  n'apporte pas significativement plus de robustesse, car la constante de temps désirée est trop éloignée de la constante de temps naturelle.

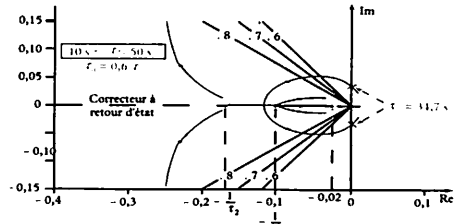


Fig. 8

3. Influence de  $\tau_d$

Les courbes des figures 9 et 10 permettent au contraire de conclure à un accroissement de la robustesse, justifié par une constante de temps désirée plus réaliste.

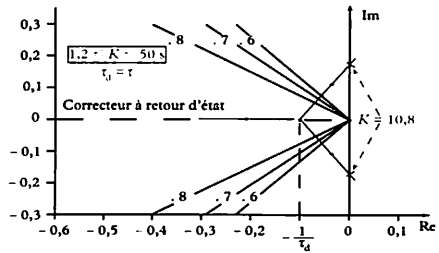


Fig. 9

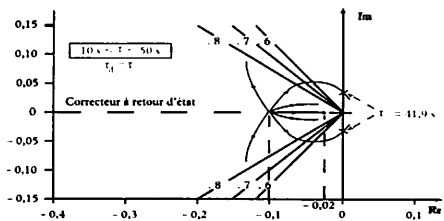


Fig. 10

4. Conclusions

Le concept de placement de pôles est généralisable à l'obtention de modèles de références en régulation. La théorie dépasse le cadre du présent ouvrage. Cependant, le lecteur doit se persuader que des régulateurs permettant de spécifier des comportements en régulation et en asservissement seront bientôt disponibles en standard chez certains constructeurs innovants.

*Les chapitres précédents montrent que les correcteurs spécifiques constituent une solution éprouvée pour aboutir à une bonne robustesse. L'offre des divers constructeurs atteste cependant qu'ils continuent d'être supplantés par des régulateurs PID sans cesse plus performants, en particulier au niveau de l'adaptation automatique du réglage en cours de fonctionnement. Dans ce domaine, il convient d'être très précis et le technicien ne doit pas trop se fier aux termes publicitaires qui recouvrent souvent des réalités différentes. On distinguera donc :*

- *Les régulateurs adaptatifs : ce sont des régulateurs où les paramètres classiques de réglage peuvent être élaborés par un bloc de calcul, en fonction de diverses informations sur le système. Tous les blocs PID des SNCC sont adaptatifs.*
- *Les régulateurs auto-adaptatifs : ce sont des régulateurs où un système expert détermine automatiquement un ajustement du réglage en fonction d'informations en provenance du dispositif physique. Les termes anglo-saxons utilisés pour les désignations sont souvent : « autotuning » ou « continuous adaptive tuning ».*
- *Les régulateurs autoréglants : ce sont des régulateurs disposant d'une procédure permettant d'obtenir un réglage lors de la phase de mise en service du régulateur. En anglais, pour les désigner, on utilise les termes de : « self tuning » ou « one-shot self-tuning ».*

*La confusion est souvent entretenue par le fait que de nombreux régulateurs autoréglants sont également auto-adaptatifs. Les premiers sont abordés dans ce chapitre, les seconds le sont dans le chapitre suivant.*

## 1 Méthode des oscillations TOR

### Mise en œuvre

On commence par obtenir manuellement un point de fonctionnement stable proche de la consigne  $W$  désirée. On place ensuite le régulateur en position automatique, avec le réglage  $X_p = 0\%$ ,  $T_i = 0$  et  $T_d = 0$ . La mesure présente alors des oscillations autour de  $W$ .

La détermination de l'amplitude crête à crête  $O_{cc}$  (exprimée en pourcentage de l'échelle du transmetteur) et de la période  $T_0$  des oscillations permet d'élaborer un réglage PID qui est alors appliqué au régulateur. Celui-ci est souvent proche du réglage de Ziegler et Nichols fourni au chapitre 17 de *Régulation Tome 2*.

### Remarques

Les oscillations étant susceptibles de faire évoluer la mesure au-dessus d'une alarme haute, l'algorithme opère avec une consigne de

substitution inférieure à  $W$ . De plus, des paramètres d'antisaturation de l'action intégrale peuvent être calculés.

### **Inconvénients**

Le fonctionnement TOR d'une vanne non linéaire de réglage peut fausser l'évaluation du calcul de  $X_p$ , les formules étant déterminées dans une hypothèse linéaire.

### **Avantages**

Cette méthode est valable aussi bien pour les systèmes naturellement stables que pour les systèmes intégrateurs et le réglage est bien adapté au point de fonctionnement utilisé pour l'essai.

### **Variante**

De nombreux procédés physiques ne supportent pas un usage TOR de l'organe de commande et les oscillations obtenues peuvent être d'amplitude trop grande pour la qualité de la production. Une variante consiste donc à réduire l'amplitude  $2h$  de la commande. On utilise pour cela les paramètres de limite de  $Y_R$ , prévus sur de nombreux régulateurs.

On utilise alors une formule correctrice :  $X_p = O_{cc} K_c$  avec une cor-

rection  $K_c = \frac{100}{2h}$  où l'amplitude  $2h$  est exprimée en pourcentage de

la commande. Les algorithmes peuvent réaliser eux-mêmes la correction. En utilisant deux niveaux successifs d'hystérésis  $h$ , on peut améliorer la fiabilité du réglage.

## **2 Méthode de l'échelon limité de commande**

### **Mise en œuvre**

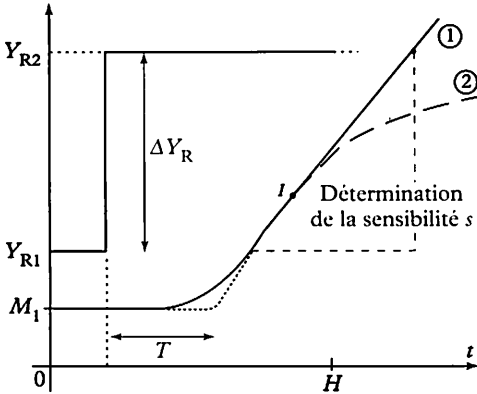
Elle réalise automatiquement, autour d'un point de fonctionnement stable, une identification par réponse indicelle, suivie d'un calcul de réglage. Celui-ci est souvent proche de celui de Ziegler et Nichols (*Régulation Tome 2*, chapitre 17).

### **Inconvénients**

Il est difficile de choisir *a priori* un horizon adéquat (en principe  $H > 3 \tau + T$ ) et l'amplitude du saut  $\Delta Y_R$  doit être compatible avec les contraintes de sécurité de l'installation. Il est de plus illusoire de penser obtenir une courbe non perturbée sur un horizon dépassant quelques minutes. Enfin, la méthode n'est applicable qu'à un système naturellement stable.

3 Méthode de l'échelon de commande à 100 %

Principe



- ① Système intégrateur
- ② Système naturellement stable

Fig. 1

Il consiste à déterminer une signature caractéristique permettant d'aboutir à un réglage, quelle que soit la classe du système. Cette théorie est évoquée dans *Régulation 2*, chapitre 17.

On rappelle les résultats essentiels : Pour un horizon temporel  $H$  limité, le début de la réponse indicielle d'un système naturellement stable peut être confondu (jusqu'au point d'inflexion) avec celui d'un système intégrateur (figure 1). Si on

utilise le modèle  $H(p) = \frac{k e^{-Tp}}{p}$ , pour ce dernier, la détermination de  $k$  et  $T$  est facile à partir de l'enregistrement sur une durée limitée. La détermination de  $X_p$  utilise le produit  $kT$ ,  $T_i$  et  $T_d$  étant déterminés à partir de  $T$ .

Mise en œuvre

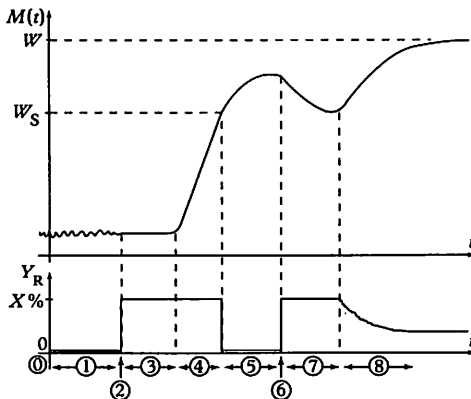


Fig. 2

- Phase ⑥ : régulateur en position « manuel », avec  $Y_R = 0\%$ .
- Phase ① : phase d'analyse du bruit sur la mesure, de façon à déterminer un filtrage adapté pour la mémorisation ultérieure de la mesure.
- Phase ② : application d'un échelon  $\Delta Y_R = X\%$  sur  $Y_R$  (très souvent 100 %).
- Phase ③ : enregistrement du début d'évolution de la mesure  $M(t)$ , pour une première évaluation du temps mort  $T$ .
- Phase ④ : évaluation de la sensibilité maximale  $s$  ( $\% s^{-1}$ ), pour une commande  $\Delta Y_R$ .

Le gain dynamique est alors calculé par :  $k = \frac{s}{\Delta Y_R}$ .

- Phase ⑤ : pour une consigne de substitution  $W_s$  inférieure à  $W$  (souvent  $\frac{W}{2}$ ), suppression de la commande et retour à  $Y_R = 0\%$ . On détermine alors précisément  $T$  par détection de l'extremum supérieur de la mesure.

- Phase ⑥ : optionnelle (voir plus loin).
- Phase ⑦ : on réapplique une commande  $\Delta Y_R = X\%$ . L'extremum inférieur de  $M(t)$  confirme la valeur de  $T$ .
- Phase ⑧ : un réglage PI ou PID est déterminé et le régulateur est placé en mode automatique avec les paramètres issus du réglage automatique.

### Variante

Pour les régulations *split-range* (chaud-froid, par exemple) l'essai démarre au partage d'échelle (souvent  $Y_R = 50\%$ ). On commence par appliquer un échelon de chauffe (passage de  $Y_R$  à 100 %). On ajoute alors une phase 6 pendant laquelle on applique un échelon de froid (passage de  $Y_R$  à 0 %). On peut donc ainsi déterminer une sensibilité et un temps mort pour l'action froide et obtenir DEUX réglages adaptés. Ceci est rendu nécessaire par un dimensionnement très différent des deux actions.

## 4 Conclusion

Les techniques employées deviennent de plus en plus sophistiquées. Sur la plupart des régulateurs, après une phase d'auto-réglage, l'utilisateur peut activer un algorithme d'auto-adaptation qui affinera en temps réel le réglage obtenu .

Les régulateurs les plus performants utilisent une méthode d'échelon à 100 %, prolongée par une méthode d'oscillations TOR au voisinage du point de consigne.

# Exercice résolu

Le SNCC PC 3000 de la société Eurotherm dispose de la fonction d'autoréglage. En phase de démarrage, à partir d'un point de fonctionnement stable, un technicien active cette fonction et enregistre l'évolution de la mesure  $M(t)$  et du signal réglant  $Y_R(t)$  (fig. 3).

Les valeurs des paramètres calculés en fin de test sont, pour une structure mixte :  $X_p = 33\%$  ;  $T_i = 30$  s ;  $T_d = 5$  s.

En outre, le temps mort  $T$  est estimé à 7 s. Ce paramètre interne est utilisé par l'algorithme d'auto-adaptation. À partir des enregistrements, on demande :

1. d'identifier la méthode d'autoréglage employée ;
2. de déterminer les relations liant le réglage aux valeurs  $O_{cc}$  et  $T_0$  mesurées et de comparer ces relations à celles préconisées par Ziegler et Nichols ;
3. de calculer les paramètres  $k$  et  $T$  de la signature  $kT$ , à partir des enregistrements ;
4. d'en déduire un réglage optimal utilisant la signature  $kT$  ;
5. de confirmer les relations établies à la question 2, à partir d'un essai réalisé pour un second point de fonctionnement (fig. 5) et qui aboutit au réglage suivant :  $X_p = 28\%$  ;  $T_i = 1$  min 27 s ;  $T_d = 15$  s.

**Solution :**

## 1. Méthode d'autoréglage

L'allure des courbes obtenues évoque la méthode des oscillations TOR, réalisée pour une consigne de substitution  $W = 40\%$ , puisque les commutations de  $Y_R(t)$  ont lieu pour cette valeur de  $M(t)$ . Le fait que  $Y_R(t)$  débute à 16,6 % et non à 0 % suggère une méthode préalable d'analyse de signature par échelon de commande à 100 %.

## 2. Formules de réglage

On relève expérimentalement sur la figure 4 les valeurs  $O_{cc} = 25,3\%$  et  $T_0 = 42$  s. En comparant ces valeurs au réglage obtenu, on obtient :

$$X_p = 33\% = 1,26 O_{cc} ; T_i = 30 \text{ s} = 0,7 T_0 ;$$

$$T_d = 5 \text{ s} = 0,12 T_0 .$$

Cette proposition de réglage apparaît moins « dure » que le réglage PID de Ziegler et Nichols.

## 3. Signature $kT$

On détermine la sensibilité maximale  $s$  à partir de la tangente au point de commutation obtenu pour la consigne de substitution  $W = 40\%$ . Graphiquement

$$T = 10,5 \text{ s} \text{ et } T_1 = 16 \text{ s} .$$

On obtient  $s = \frac{40}{16} = 2,5\% \text{ s}^{-1}$ . La variation

$\Delta Y_R$  correspondante étant  $\Delta Y_R = 83,3\%$ , le gain dynamique vaut :

$$k = \frac{s}{\Delta Y_R} = 0,03 \text{ s}^{-1} .$$

## 4. Réglage optimal

La signature vaut :  $kT = 0,03 \times 10,5 = 0,315$  et nécessite un réglage PID.

Le tableau (*Régulation 2*, chapitre 17) de la méthode de Ziegler et Nichols suggère le réglage :

$$X_p = 80 kT = 25\% ; T_i = 2 T = 21 \text{ s} ;$$

$$T_d = 0,4 T = 4,2 \text{ s} .$$

Ces valeurs confirment que le réglage proposé est plus « mou » que le réglage PID de Ziegler et Nichols.

## 5. Second point de fonctionnement

Sur la figure 5, on détermine graphiquement les valeurs  $O_{cc} = 21,3\%$  et

$$T_0 = 122 \text{ s} .$$

Les formules de la question 2 fournissent :

$$X_p = 1,26 O_{cc} = 26,8\% ;$$

$$T_i = 0,7 T_0 = 85 \text{ s} = 1 \text{ min } 25 \text{ s} ;$$

$$T_d = 0,12 T_0 = 14,6 \text{ s} .$$

Ces valeurs sont bien celles proposées par l'autoréglage.

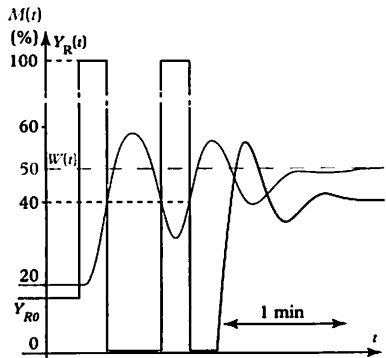


Fig. 3

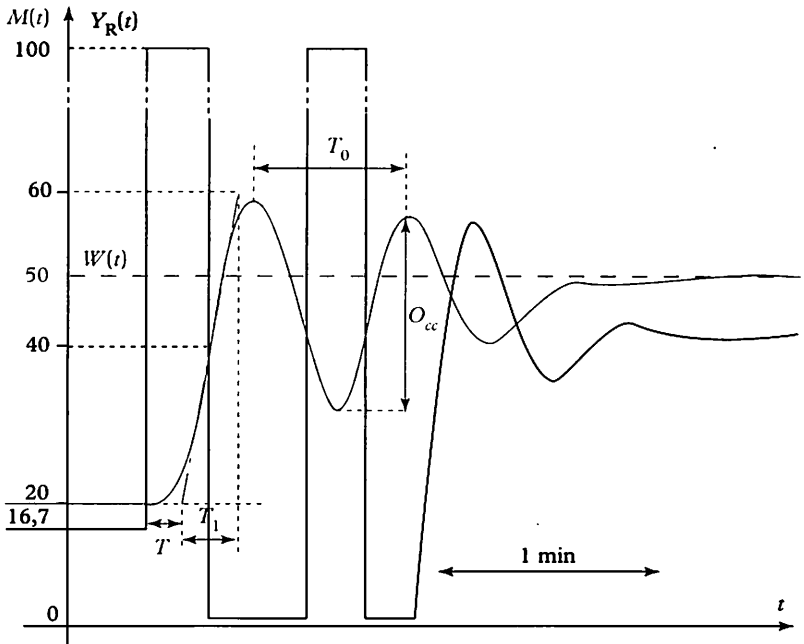


Fig. 4

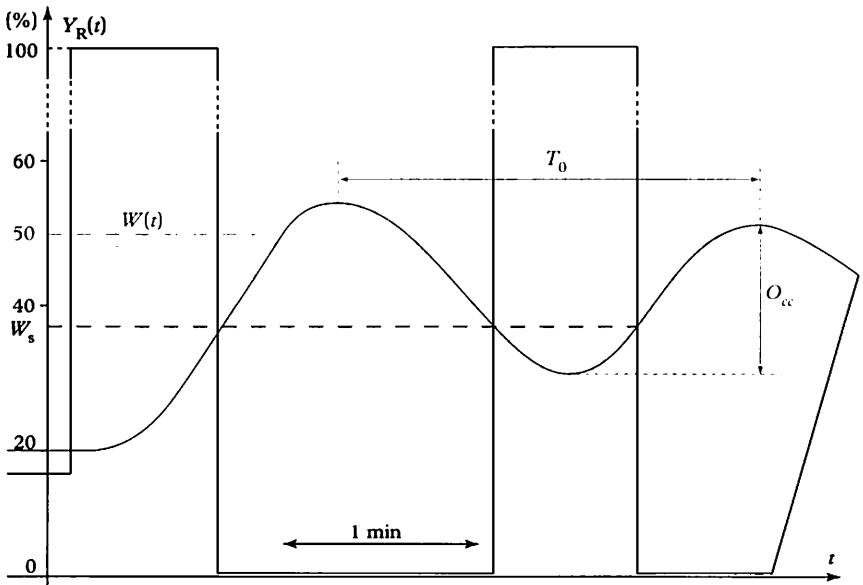


Fig. 5

Complément désormais classique de la fonction d'autorégulation, la fonction d'auto-adaptation est implantée dans de nombreux régulateurs, avec des capacités parfois controversées d'ailleurs. Le développement de la micro-informatique permet désormais d'exploiter des logiciels performants, destinés à améliorer la robustesse des régulateurs.

Il existe de nombreuses solutions d'identification en ligne mettant en œuvre soit des séquences binaires pseudo-aléatoires, soit la transformée de Fourier rapide (FFT en anglais). Ces techniques sont dites actives, dans la mesure où un stimulus doit être appliqué au système, comme pour une séquence d'autorégulation.

Si cette dernière est une fonction que l'on active avant d'entrer en production, la fonction d'auto-adaptation pose un problème plus sérieux dans la mesure où sa mise en œuvre ne doit pas perturber le fonctionnement normal du régulateur en cours de production.

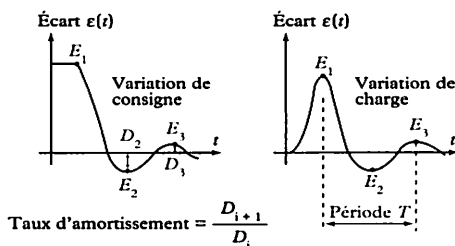
Les méthodes modernes d'auto-adaptation se doivent donc d'être des méthodes passives, ne nécessitant que des signaux habituellement disponibles sur une boucle de régulation.

## 1 Méthode de l'analyse de réponse

C'est la méthode la plus ancienne. Fondée sur le principe d'un système expert, elle reproduit ce que ferait un opérateur humain très expérimenté (ou expert, d'où le nom). En cas de perturbation ou de changement de consigne, l'analyse des courbes  $M(t)$  ou  $\varepsilon(t)$  enregistrées permet, en fonction de l'amortissement obtenu, d'en déduire une modification du réglage.

### Principe de la méthode DRA (Disturbance Response Analysis)

À partir de la pseudo-période des oscillations obtenues (à la suite d'une variation de consigne ou de charge), de leur amortissement, le système expert applique les règles définies par un spécialiste de la régulation (fig. 1).





Cette méthode est longue et nécessite un enregistrement de l'ordre de 5 à 6 fois la valeur de  $T_i$  avant d'apporter un ajustement au réglage. Elle est donc mal adaptée à des variations rapides ou périodiques de la consigne ou de la mesure.

### Inconvénients

- Si l'algorithme connaît nécessairement la forme de variation de la consigne, a priori le logiciel possède peu d'information pour la prise en compte d'une éventuelle perturbation (en général, une variation de la charge de l'installation) imprévisible tant en amplitude qu'en dynamique.
- Le logiciel doit également tenir compte du bruit inhérent à l'installation. Ce dernier est en général évalué dans une phase d'initialisation de la fonction d'auto-adaptation.
- Les règles définies sont générales, incapables de prendre en compte les spécificités d'une installation particulière, et ne sont fondées que sur une analyse de comportement.
- Le système expert manque donc d'information, en particulier sur une éventuelle perturbation. L'utilisation d'une entrée *feed-forward* (*Régulation 3*, chapitre 7) pour un signal de perturbation améliore fortement les performances de cette technique.
- Les variations lentes et non pseudo-périodiques de  $M(t)$  ne sont pas interprétées.

Cette technique est désormais souvent utilisée en complément d'une seconde technique.

## 2 Méthode du modèle interne

Les algorithmes utilisant cette technique sont souvent appelés à modèle interne prédictif. Cette dénomination est souvent le fait d'une traduction particulière du terme anglais *predictor*. On devrait plutôt utiliser le vocable de modèle estimé : on reviendra sur ce terme un peu plus loin.

On veillera à ne pas confondre cette technique d'auto-adaptation avec les correcteurs spécifiques utilisant un modèle interne (chapitres 6 et 7) et les régulateurs prédictifs (chapitre 21). La confusion est d'autant plus facile que ces deux dernières solutions peuvent disposer également d'une capacité d'auto-adaptation à modèle. On retiendra que la différence provient de l'usage que l'on fait du modèle interne.

### Principe

Les régulateurs utilisent un modèle mathématique interne de la fonc-

tion de transfert réglante  $H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)}$ . Ce modèle paramétrique

peut être explicité sous une forme continue (exemple :  $K$ ,  $T$ ,  $\tau$  pour un modèle de Broïda), mais habituellement, il s'agit d'une équation d'état, sous forme d'une équation récurrente numérique (voir chapitres ultérieurs).

En cours de fonctionnement, le signal  $Y_R(z)$  est appliqué au modèle estimé  $H^*(p)$  et le signal  $M^*(z)$  issu de ce modèle sert à élaborer un signal  $\varepsilon^*(z)$ , conformément au schéma de la figure 2.

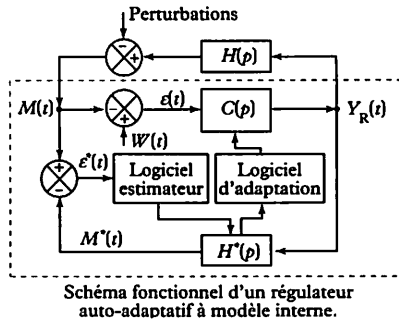


Fig. 2

À un instant d'échantillonnage, le modèle prévoit une mesure estimée en fonction des paramètres du modèle et des échantillonnages précédents : cette mesure estimée étant une prédiction de la mesure  $M(t)$  que l'on va obtenir, on utilise le terme de modèle prédictif.

Le signal  $\varepsilon^*(z)$  est analysé par un logiciel de façon à être minimisé selon un critère mathématique. Cette minimisation est obtenue en retouchant régulièrement les paramètres du modèle  $H^*(p)$ .

On constate que le régulateur est donc auto-identifiant en temps réel. Cette technique est très prometteuse dans la mesure où elle peut s'employer sur des régulateurs PID, mais également sur des régulateurs spécifiques, nécessitant une connaissance d'un modèle  $H^*(p)$  de la fonction de transfert glangte.

### Inconvénients

De façon à optimiser la charge de calcul du logiciel, le technicien de mise en œuvre doit souvent fournir des informations préalables sur la fonction  $H^*(p)$  : ordre du système, temps mort naturel... En effet, il est plus facile d'ajuster les paramètres d'un modèle à structure connue que de déterminer une structure inconnue.

À ce propos, certains logiciels utilisent les informations recueillies lors d'une phase d'auto-réglage. Il est donc toujours conseillé de réaliser une telle phase avant d'activer la fonction d'auto-adaptation.

### Méthode

L'explication des techniques de minimisation mises en œuvre dépasse le cadre de cet ouvrage. On peut cependant signaler que

nombre d'entre elles fonctionnent selon la technique récursive des moindres carrés (*Recursive Least Squares* ou *RLS* en anglais). De plus, les échantillons les plus anciens ont souvent une pondération moindre pour favoriser les ajustements du modèle en fonction des événements les plus récents.

### Adaptation du réglage

Pour les régulateurs PID, l'adaptation des paramètres de réglage  $X_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  est réalisée selon deux critères :

- soit on cherche à obtenir des marges de stabilité spécifiées, à partir d'une évaluation de  $T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H^*(j\omega)$  ;
- soit on utilise un modèle de référence en asservissement, spécifié par l'utilisateur, qui définit le comportement souhaité en chaîne fermée.

Les capacités de mémorisation étant parfois faibles dans un régulateur local, on retiendra que l'échantillonnage pour l'élaboration du modèle doit être choisi en adéquation avec la dynamique du procédé. Enfin, le logiciel de modification du réglage n'est souvent activé que pour un écart  $\varepsilon(t)$  supérieur à un certain seuil ajustable (souvent 1 % de l'échelle du transmetteur).

### Avantage

Si l'identification fonctionne en continu, un ajustement du réglage peut être obtenu en quelques secondes.

## 3 Conclusions

Les techniques les plus efficaces sont désormais à multi-critères et utilisent les deux méthodes de façon à réaliser un test de vraisemblance entre les deux méthodes.

On retiendra cependant que l'auto-adaptation n'est pas une panacée et que des solutions adaptatives déterministes doivent être recherchées en priorité.

Le technicien de mise en œuvre se gardera de rechercher une solution de facilité en activant systématiquement l'auto-adaptation : une bonne connaissance de l'installation le conduira souvent à se contenter d'un auto-réglage, prolongé par une analyse personnelle critique des valeurs obtenues.

On retiendra que la fonction d'auto-adaptation est une solution palliative pour un régulateur PID et que les régulateurs spécifiques utilisant un modèle interne et une identification en temps réel constituent une solution d'avenir.

Le système PC 3 000 est un SNCC disposant d'un bloc spécifique pour l'autoréglage et la régulation auto-adaptative, appelé bloc PID-AUTO.

### Fonctionnement des blocs régulateurs PID-AUTO

Le bloc régulateur composite développé par Eurotherm associe trois fonctionnalités :

- une fonction d'auto-réglage ;
- une fonction d'auto-adaptation approchée (DRA) ;
- une fonction d'auto-adaptation fine (LSTA).

La prise en compte de ces trois dispositifs est représenté figure 3.

Le contrôleur de régulateur est conçu pour permettre les performances optimales en utilisant les possibilités des trois algorithmes, dans les conditions d'utilisation les plus variées.

### Algorithme d'analyse de réponse DRA

C'est un système expert élémentaire qui agit en comparant les variations du signal d'écart  $\varepsilon = W - M$  à des modèles en mémoire. Il ajuste les paramètres de réglages pour compenser les réponses trop lentes ou avec oscillations.

La fonction DRA est déclenchée lorsque l'écart absolu dépasse le niveau de bruit estimé lors de la phase d'autoréglage. Elle enregistre jusqu'à deux cycles d'oscillations de l'écart avant de décider quelle modification apporter aux paramètres de commande. Le rapport des maximums de l'écart (taux d'amortissement) est le principal critère utilisé pour décider si un nouveau réglage est nécessaire.

Lors de la mise en œuvre du bloc PID-AUTO, la fonction DRA ajuste les paramètres du modèle interne utilisé ultérieurement par la fonction LSAT. Ce modèle est initialisé par la fonction d'autoréglage.

### Algorithme du réglage LSAT

Cet algorithme (*Least Squares Adaptive Tuning*) est un algorithme qui modifie les paramètres de commande PID. Il est constitué de deux éléments principaux :

- un identificateur de modèle de procédé ;
- un configurateur de commande.

L'algorithme LSAT surveille le signal de commande et la mesure. Il envoie en permanence le signal de sortie à un modèle interne et compare la mesure réelle et la mesure prédite par le modèle.

Le module LSAT ajuste les paramètres du modèle, de telle sorte que la mesure prédite corresponde à la mesure réelle. Le modèle est ensuite utilisé pour optimiser le réglage PID.

Le schéma fonctionnel de l'algorithme LSAT est représenté figure 4.

Contrairement à la fonction DRA, la fonction LSAT présente l'avantage de ne pas nécessiter de fortes perturbations pour pouvoir agir. Elle peut effectuer un réglage fin de la commande en temps réel, puisqu'elle est en mesure de discriminer la mesure du bruit environnant.

L'utilisation de l'ensemble des trois fonctions du bloc régulateur composite permet d'obtenir des performances optimales.

En effet, la validation de l'autoréglage permet d'estimer un réglage PID mais aussi d'approcher certaines caractéristiques du procédé (bruits, constante de temps...), préparant ainsi l'optimisation de la fonction d'autoadaptation.

La figure 5 représente la séquence préconisée pour une adaptation optimale.

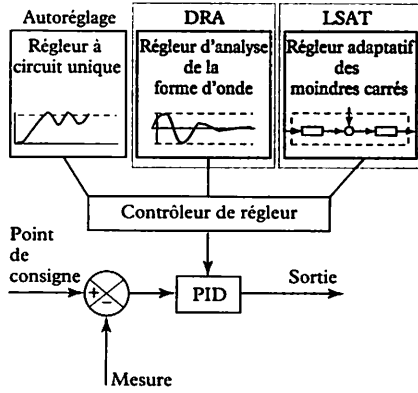


Fig. 3

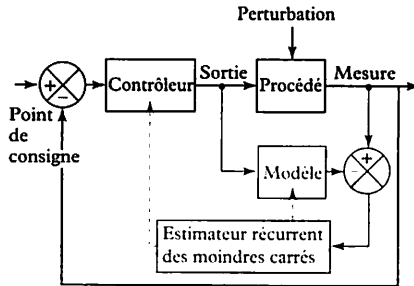


Fig. 4

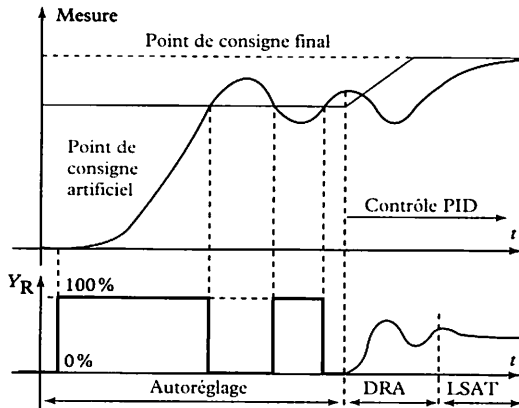


Fig. 5

## 1 Rappels sur les systèmes à temps continu

### Signal à temps continu

Un signal est dit à temps continu s'il s'exprime par une fonction  $S(t)$  du temps  $t$ , définie quel que soit  $t$ . En abrégé on utilise souvent le terme « signal continu ». On prendra garde de se souvenir que c'est le temps qui est continu, et non le signal.

### Système continu

Un système est qualifié de continu s'il établit une relation entre deux signaux à temps continu (fig. 1).

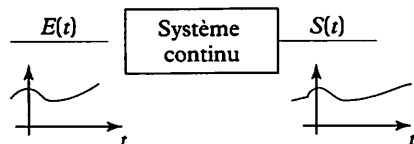


Fig. 1

### Relation entrée-sortie d'un système continu

La relation liant  $S(t)$  et  $E(t)$  est habituellement une équation différentielle plus ou moins compliquée. Si on s'intéresse aux variations  $e(t)$  et  $s(t)$  des signaux autour d'un point de fonctionnement ( $E_0, S_0$ ), l'équation différentielle entre  $e(t)$  et  $s(t)$  est linéaire à coefficients constants : on peut alors la représenter par une fonction de transfert isomorphe  $H(p)$ .

### Les deux systèmes d'une boucle de régulation

Le schéma de la figure 2 fait apparaître deux systèmes continus :

- le système « procédé » qui correspond à la relation entre le signal réglant  $Y_R(t)$  et le signal de mesure  $M(t)$ ;
- le système « régulateur », liant  $Y_R(t)$  à  $M(t)$  et  $W(t)$ .

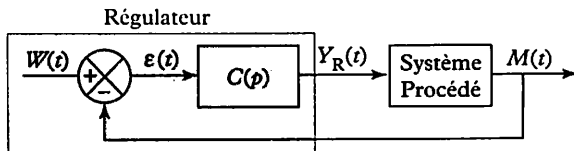


Fig. 2

En régulation analogique, le correcteur  $C(p)$  réalise un traitement analogique, au moyen de circuits électroniques à base d'amplificateurs opérationnels.

L'avènement des microprocesseurs, dans les années 1980, a permis de réaliser des correcteurs numériques, au sens où les signaux d'entrée et de sortie du correcteur sont des signaux numériques, c'est-à-dire des nombres codés sous forme de 0 et de 1.

Quelle en est la conséquence en régulation ? Dans la pratique, la plupart d'entre eux se comportent extérieurement comme des régulateurs « analogiques ».

Toutefois, on emploiera le mot de *régulateur à temps discret* lorsque certains signaux perdent leur caractère continu, pour devenir des signaux discrets.

On notera, premièrement que le système « procédé » reste toujours continu et, deuxièmement qu'il est inutile de spécifier que les régulateurs sont numériques puisqu'ils le sont tous.

## 2 Systèmes discrets

### Signal à temps discret

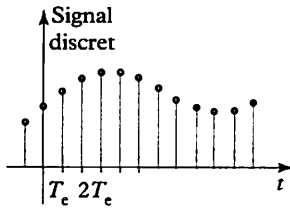


Fig. 3

Un signal  $\{S\}$  est à temps discret s'il n'est pas disponible de façon continue. Généralement, il n'est disponible qu'à des instants régulièrement espacés, séparés par une durée fixe, appelée période d'échantillonnage  $T_c$ , caractéristique d'un système discret (fig. 3).

On retiendra qu'un signal (à temps) discret est constitué d'une suite de valeurs numériques appelées échantillons.

### Système discret

Un système est discret (fig. 4) si ses signaux d'entrée et de sortie sont des signaux à temps discret ; ils seront notés  $\{E\}$  et  $\{S\}$ .

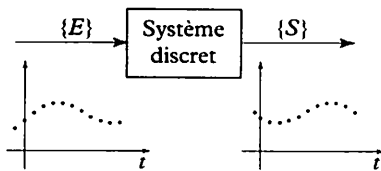


Fig. 4

Pour un régulateur à temps discret, le signal noté  $\{M\}$  est obtenu par échantillonnage d'un signal continu. On confond donc alors souvent les appellations « signal discret » et « signal échantillonné ».

En revanche, le signal  $\{Y_R\}$  est obtenu après un traitement informatique et ne provient donc pas d'un échantillonnage. Si ce traitement est suffisamment rapide, on peut admettre que les signaux sont disponibles aux mêmes instants d'échantillonnage  $T_c, 2T_c, nT_c \dots$

### Relation entrée-sortie d'un système discret

D'une façon générale, à un instant d'échantillonnage  $nT_c$  donné, un système discret fournit un échantillon de sortie  $S(nT_c)$  fonction de l'entrée  $E(nT_c)$  et des échantillons antérieurs sur l'entrée et la sortie. On utilise habituellement la notation simplifiée :  $S(nT_c) = S(n)$  ou même  $S_n$ .

On obtient donc une équation récurrente de la forme :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{k=p} a_k S(n-k) + \sum_{k=0}^{k=p} b_k E(n-k)$$

valable pour tout  $n$  et où les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  sont des réels. Selon ses capacités de mémorisation, un système discret peut prendre en compte des échantillons plus ou moins lointains dans le passé.

**Notations**

La suite des échantillons de sortie  $S(1), S(2), S(n)$ , sera noté  $\{S(n)\}$ . Cette suite représente le signal discret noté  $\{S\}$ .

**3 Régulation en temps discret**

L'association du système « procédé » continu et du système « régulateur » discret nécessite deux dispositifs d'interface (fig. 5).

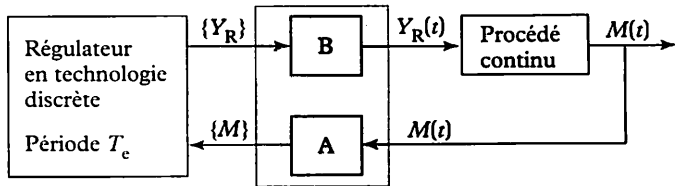


Fig 5

**L'interface A**

Son rôle est triple :

- il doit prélever régulièrement des échantillons analogiques du signal  $M(t)$ , à l'aide d'un dispositif appelé échantillonneur, étudié dans l'exercice corrigé ;
- il doit convertir en nombre binaire ces échantillons, à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (CAN) ;
- il doit en élaborer une image numérique réelle, tenant compte de l'échelle physique du transmetteur.

Compte tenu des fonctions réalisées, l'interface A est appelée *échantillonneur-codeur*.

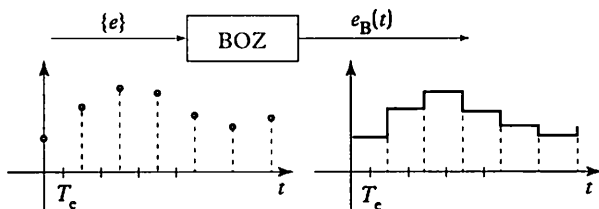
**L'interface B**

Il réalise également trois fonctions :

- il élabore un signal binaire à partir des limites programmées du signal de sortie (souvent 0 et 100) ;
- il réalise un signal permanent à partir d'un signal discret, qui lui n'est disponible qu'aux instants d'échantillonnage. Ceci est habi-



tuellement obtenu à partir d'un dispositif appelé BLOQUEUR d'ordre zéro (ou BOZ). Son fonctionnement est représenté figure 6 ;



Le signal discret  $\{e\}$  peut être analogique ou numérique

Fig 6

- il doit convertir sous forme analogique le signal numérique « bloqué ». Cette fonction est réalisée à l'aide d'un convertisseur numérique analogique (CNA).

Cette interface est appelée *bloqueur-décodeur*.

#### 4 Conclusions

On constate que les dispositifs numériques modernes manipulent une image numérique réelle discrète  $\{M\}$  du signal de mesure continu  $M(t)$ . Afin de simplifier les schémas fonctionnels, il est souvent convenu d'omettre de représenter les fonctions codage puis décodage, supposées implicites.

On aboutit donc au schéma fonctionnel de la figure 7.

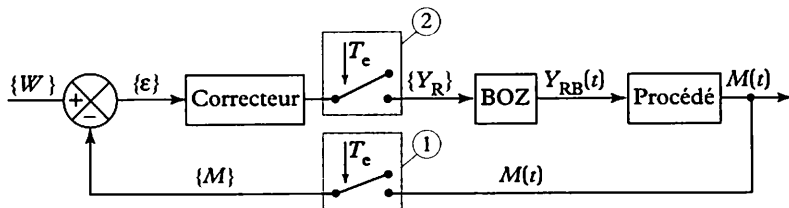


Fig. 7

Le dispositif ① est une représentation fonctionnelle d'un échantillonneur de tâche informatique, indiquant qu'on dispose à sa sortie d'un signal discret avec la périodicité  $T_c$ .

Le dispositif ② n'est pas toujours représenté. Il permet cependant de préciser que sa sortie est un signal discret, avec des échantillons synchronisés sur ceux de  $\{M\}$ , si la durée d'exécution du traitement informatique est négligeable devant  $T_c$ . Pour une meilleure compréhension, il sera toujours représenté dans cet ouvrage.

# Exercices résolus

On désire étudier une chaîne d'acquisition et de restitution d'un signal continu. On utilise le dispositif représenté figure 8, où K est un interrupteur électronique dont la fermeture est pilotée par un signal d'horloge  $h(t)$  de période  $T_c$ . L'état de K est indiqué figure 9.

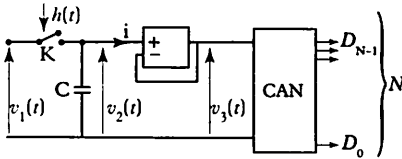


Fig. 8

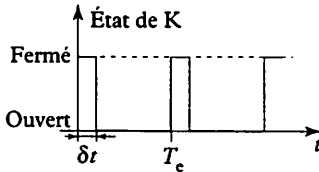


Fig. 9

1. Expliquer le principe du montage.
2. Quel est le rôle du montage suiveur ? Quel est donc la fonction d'un tel dispositif ?
3. Expliquer pourquoi K doit rester fermé pendant une durée  $\delta t$  non négligeable.
4. À partir de variations continues de  $v_1(t)$ , issues d'une source idéale de tension, fournir l'allure du signal  $v_2(t)$ .
5. Quelles propriétés le CAN doit-il posséder ?
6. On complète le dispositif comme indiqué à la figure 10. Représenter les chronogrammes des principaux signaux de la chaîne :

  - pour un signal  $v_1(t)$  de période  $T \gg T_c$  ;
  - pour un signal  $v_1(t)$  de période  $T \approx T_c$

7. Comment peut-on être certain de pouvoir reconstituer le signal  $v_1(t)$  ?

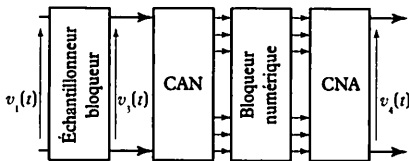


Fig. 10

## Solution :

### 1. Principe du montage

On stocke analogiquement la valeur de la tension  $v_1(t)$  aux bornes d'un condensateur. Entre deux instants d'échantillonnage, la tension  $v_2(t)$  reste constante si aucun courant  $i$  n'est débité par le condensateur.

### 2. Rôle du montage suiveur

Le suiveur présente une résistance d'entrée quasi infinie, réalisant ainsi  $i = 0$ . On obtient donc une image permanente  $v_3(t) = v_2(t)$ . L'ensemble du dispositif s'appelle donc échantillonneur-bloqueur.

### 3. Influence de $\delta t$

La durée de fermeture doit permettre au condensateur de prendre la charge maximale correspondant à la nouvelle valeur de  $v_1(t)$ . Si le générateur qui fournit la tension  $v_1(t)$  à ses bornes présente une résistance  $r$ , la charge du condensateur s'effectue avec une constante de temps  $\tau = rC$ . Celle-ci doit être suffisamment faible devant  $\delta t$  pour que  $v_2(t)$  ait rejoint  $v_1(t)$  aux instants  $n(T_c + \delta t)$ .

### 4. Allure de $v_2(t)$

On obtient la courbe de la figure 11.

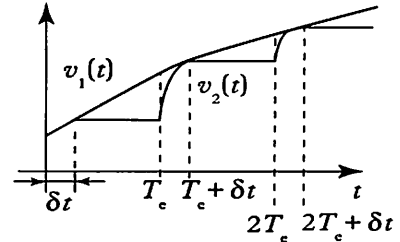


Fig. 11

### 5. Propriétés du CAN

Indépendamment de sa technologie, le codage binaire doit se faire avec une erreur de quantification négligeable. Les dispositifs de classe 0,1 utilisent un codage sur 16 bits. De plus, la conversion doit débiter aux instants  $n(T_c + \delta t)$  et être de durée inférieure à  $T_c$ .

### 6. Restitution analogique du signal (figures 12 et 13)

Pour le cas a), on constate que la période  $T_c$  est suffisamment basse pour que l'enveloppe de  $v_4(t)$  reconstitue correctement

le signal initial. Dans le cas b), la fréquence du signal  $v_1(t)$  est trop grande. Ce résultat découle du théorème d'échantillonnage de Shannon :

Pour échantillonner sans perte d'information un signal de fréquence  $F$ , il faut choisir une fréquence d'échantillonnage  $F_c$  au moins égale à  $2F$ .

### 7. Modification du montage

L'échantillonnage ayant habituellement lieu à une fréquence  $F_c$  donnée, on place avant l'échantillonneur-bloqueur un filtre analogique passe-bas de fréquence de coupure  $\frac{F_c}{2}$ . Ce filtre porte le nom de

filtre anti-repliement.

Les signaux de mesure en régulation sont rarement sinusoïdaux. On notera cependant que les entrées de mesure comportent ce dispositif. On notera également que la période d'échantillonnage physique

est souvent  $\frac{T_c}{N}$ , où  $T_c$  est la période de

traitement de régulation (variant habituellement de 0,1 seconde à quelques secondes). Cette caractéristique permet d'intercaler un filtre numérique éliminant efficacement les parasites présents sur le signal de mesure.

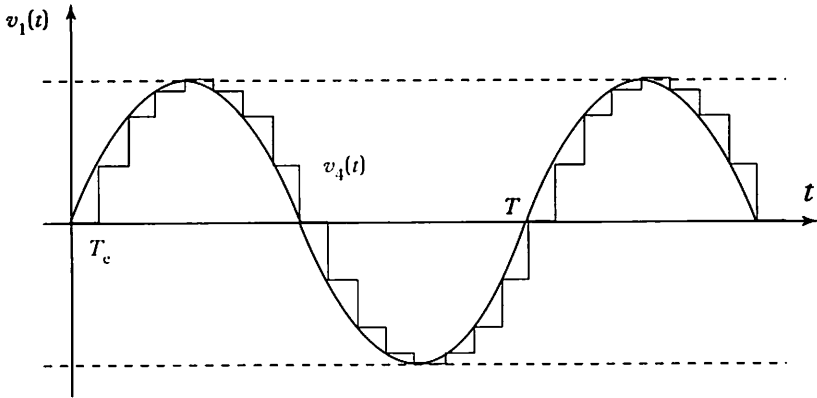


Fig. 12

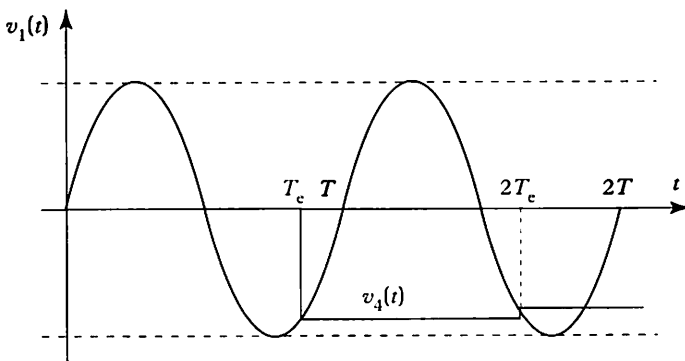


Fig. 13

La transformation de Laplace (Régulation 1, chapitre 24) constitue un outil mathématique puissant pour l'étude d'un système bouclé. Cette transformation n'a été, pour l'instant, envisagée que pour des signaux à temps continu et causaux, c'est-à-dire définis pour  $t \geq 0$ . Une question se pose donc à présent : peut-on définir une transformée de Laplace pour un signal discret  $\{s\}$ , défini par ses échantillons successifs ? La réponse est oui, dans la mesure où l'on peut trouver, pour ce signal, une représentation temporelle permettant le calcul de l'intégrale de définition.

À ce niveau, l'impulsion de Dirac (Régulation 1, chapitre 8) joue un rôle fondamental.

## 1 Représentation temporelle d'un signal discret

### Hypothèse

On suppose, ce qui est toujours possible, que le signal discret étudié  $\{s\}$  provient de l'échantillonnage d'un signal à temps continu, déterministe, c'est-à-dire dont on connaît l'équation temporelle  $s(t)$  (fig. 1).

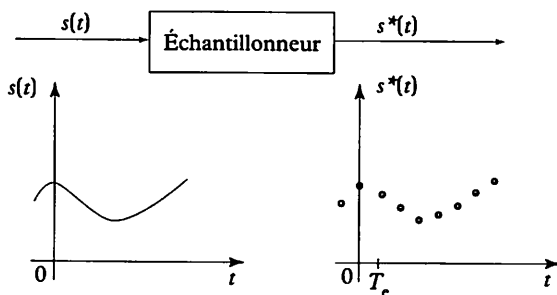


Fig. 1

Un tel signal discret est appelé signal d'échantillonnage et noté  $s^*(t)$ . La notation  $\{s\}$  demeure la notation générale pour tout signal discret, même s'il ne provient pas d'un échantillonnage. Pour une représentation mathématique de  $s^*(t)$ , il faut pouvoir indiquer :

- que l'échantillon  $s^*(nT_c)$ , obtenu à l'instant  $t = nT_c$ , n'existe qu'à cet instant, ni avant ni après ;
- que la valeur de l'échantillon  $s^*(nT_c)$  vaut  $s(nT_c)$  ;
- que  $s^*(t)$  est constitué de la suite de ses échantillons successifs :  
 $s^*(t) = [s^*(0), s^*(T_c), s^*(2T_c), \dots, s^*(nT_c), \dots]$ .

### Notation d'un seul échantillon

On admettra le théorème d'échantillonnage suivant :

$s^*(0) = s(0) \cdot \delta(t)$  où  $\delta(t)$  représente l'impulsion de Dirac. Puisque

$\delta(t)$  n'est non nul qu'à  $t = 0$ , on peut aussi écrire  $s^*(0) = s(t) \cdot \delta(t)$ . On admet la validité de l'expression mathématique (on sait que  $\delta(t)$  est d'amplitude infinie pour  $t = 0$ ) : on rappellera simplement que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ , et que l'on parle souvent d'impulsion d'énergie 1 ou

tout simplement d'impulsion 1.

La notation utilisée permet simplement d'indiquer que  $s^*(0)$  possède une énergie non nulle.

En utilisant le théorème du retard, on peut écrire :

$$s^*(nT_e) = s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \quad (1) \quad \text{ou} \quad s^*(nT_e) = s(t) \cdot \delta(t - nT_e) \quad (2).$$

### Notation du signal complet $s^*(t)$

Deux notations sont possibles :

$$s^*(t) = s(t) \delta(t) + s(t) \delta(t - T_e) + s(t) \delta(t - 2T_e) + \dots + s(t) \delta(t - nT_e) + \dots$$

à l'aide de la notation (2)

$$\text{soit : } s^*(t) = s(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$

où  $s^*(t)$  apparaît comme le produit de  $s(t)$  par un peigne de Dirac

$$\delta_{\text{re}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e).$$

La notation (1) permet aussi d'écrire :

$$s^*(t) = s(0)\delta(t) + s(T_e)\delta(t - T_e) + s(2T_e)\delta(t - 2T_e) + \dots + s(nT_e)\delta(t - nT_e) + \dots$$

$$\text{soit : } s^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

forme beaucoup plus intéressante pour le calcul de la transformée de Laplace de  $s^*(t)$ .

Cette notation est générale, même pour un signal discret  $\{s\}$  ne provenant pas d'un échantillonnage : il suffit de connaître la suite des échantillons  $s(n)$ .

## 2 Transformée de Laplace d'un signal discret

### Rappel

Pour un signal  $x(t)$ , sa transformée de Laplace  $X(p)$  est la fonction suivante :

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

### Cas d'un signal discret

La définition est la même :

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = X^*(p) = \int_0^{\infty} [\sum_0^{\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)] e^{-pt} dt.$$

L'intégrale d'une somme étant égale à la somme des intégrales, et le terme  $x(nT_e)$  étant une constante qui peut être mise en facteur, on peut écrire :

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = X^*(p) = \sum_0^{\infty} [x(nT_e) \cdot \int_0^{\infty} \delta(t - nT_e)] e^{-pt} dt$$

$$\text{Or : } \mathcal{L}[\delta(t)] = \Delta(p) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

Par application du théorème du retard, on peut écrire :

$$\mathcal{L}[\delta(t - nT_e)] = e^{-nT_e p} \cdot \mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-nT_e p}.$$

$$\text{Il vient donc : } X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e) \cdot e^{-nT_e p} \quad (3).$$

### Transformée en $z$

On réalise le changement de variable  $z = e^{T_e p}$  ou  $z^{-1} = e^{-T_e p}$ .

$$\text{L'équation (3) peut alors s'écrire : } X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e) \cdot z^{-n}$$

Par définition, on appelle transformée en  $z$  d'un signal échantillonné  $x^*(t)$  la transformée de Laplace de ce signal. Plus généralement, on peut appliquer la formule (3) à tout signal discret  $\{s\}$  défini par la suite de ses échantillons  $s(n)$ .

Cette transformée est notée indifféremment :

$\mathcal{L}[x^*(t)]$  (dans le cas d'un signal  $x(t)$  échantillonné) ou  $\mathcal{L}[x(n)]$  (dans le cas d'un signal discret quelconque) ou enfin  $X(z)$ . C'est cette dernière notation générique qu'on utilisera le plus souvent dans

$$\text{cet ouvrage : } X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e) \cdot z^{-n}$$

On constate que cette fonction de la variable complexe  $z$  se définit comme une série entière, c'est-à-dire la somme des termes d'une suite infinie.

## 3 Principales transformées en $z$

Pour les signaux déterministes causaux les plus courants, on utilise des tables dont l'usage est identique à celui des tables de transformées de Laplace (voir page 89). Pour des raisons de commodité, les transformées peuvent être fournies en  $z$  ou en  $z^{-1}$ .

Pour bien comprendre qu'on peut passer de la transformée de Laplace  $X(p)$  d'un signal continu à la transformée  $X(z)$  du signal discrétisé, on note souvent :  $X(z) = Z[X(p)]$  ou, si on dispose des échan-

tillons :  $X(z) = Z[x(n)]$ . Les propriétés de la transformée en  $z$  sont celles de la transformée de Laplace. En particulier pour une séquence d'échantillons, retardée de  $kT_c$  :  $\mathcal{L}[x^*(t - kT_c)] = \mathcal{L}[x^*(t)] \cdot e^{-kTs p}$  car l'exponentielle se factorise dans la somme  $\mathcal{L}[x^*(t - kT_c)] = \mathcal{L}[x^*(t)] \cdot (z^{-1})^k$  soit :  $Z[x(n - k)] = z^{-k} Z[x(n)]$

La multiplication par  $z^{-1}$  correspond à un retard d'une période  $T_c$ .

#### 4 Fonctions de transfert en $z$

Si un système discret admet des signaux d'entrée et de sortie représentés par les séquences  $\{x\}$  et  $\{y\}$ , par définition la fonction de transfert en  $z$  notée  $F(z)$  est le rapport :  $F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  où  $Y(z)$  et  $X(z)$  sont les transformées en  $z$  des séquences.

#### Remarque très importante

Si un système *continu* de fonction de transfert  $F(p)$  admet pour signal d'entrée la séquence  $\{x\}$ , la séquence de sortie  $\{y\}$  peut être obtenue par sa transformée  $Y(z) = F(z) \cdot X(z)$  où  $F(z)$  est définie par :  $F(z) = Z[F(p)]$ . Les tables précédentes peuvent être utilisées, la colonne  $X(p)$  étant alors interprété comme une fonction de transfert. On notera qu'en régulation le problème est différent (voir chapitre 16) puisque l'entrée du système continu est la sortie du bloqueur recevant les échantillons de commande.

#### 5 Transformation inverse

L'utilisation des tables de transformées permet de retrouver, à partir de la transformée  $Y(z)$  d'un signal discret, la suite des échantillons temporels. Plus exactement, elles fournissent des signaux  $y(t)$  qui coïncident, aux instants d'échantillonnage, avec les échantillons  $y(n)$ . Il faut bien comprendre que la discrétisation d'un signal à temps continu correspond à une perte d'information et qu'il est illusoire de penser retrouver  $x(t)$  à partir de ses échantillons  $x(n)$ . Un choix judicieux de la période d'échantillonnage permettra d'affirmer que  $x(t)$  est très proche du signal obtenu par interpolation linéaire entre les échantillons. Dans la pratique, on cherche souvent uniquement les échantillons  $y(n)$ . L'exercice corrigé développe une méthode simple permettant de calculer, pour un horizon temporel limité, les premiers échantillons d'un signal discret dont on connaît la transformée  $Y(z)$ .

# Exercice résolu

Un système discret est défini par sa transformée en  $z$  :

$$F(z) = \frac{0,1 z^{-1}}{1 - 0,9 z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Son signal d'entrée est la séquence correspondant à l'échelon unité échantillonné (fig. 2) définie par :

$u(n) = 1$  pour  $n \geq 0$  et  $u(n) = 0$  pour  $n < 0$ .

La transformée en  $z$  de cette séquence

$$\text{vaut : } X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

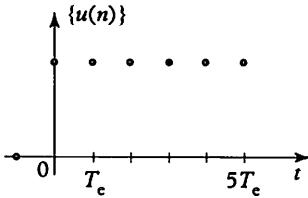


Fig. 2

1. Déterminer l'expression de  $Y(z)$  sous forme d'une fraction rationnelle en  $z^{-1}$ .

2. On désire écrire  $Y(z)$  sous la forme

$$\text{d'une série : } Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot z^{-n}$$

Montrer que la division suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$  permet d'obtenir les premiers échantillons  $y(n)$ . Calculer ces valeurs pour  $n$  variant de 0 à 4.

3. Tracer graphiquement ces valeurs et conclure.

$$\begin{array}{r} 0,1 z^{-1} \\ -0,1 z^{-1} + 0,19 z^{-2} - 0,09 z^{-3} \\ \hline + 0,19 z^{-2} - 0,09 z^{-3} \\ -0,19 z^{-2} + 0,361 z^{-3} - 0,171 z^{-4} \\ \hline 0,271 z^{-3} - 0,171 z^{-4} \\ -0,271 z^{-3} + 0,515 z^{-4} - 0,244 z^{-5} \\ \hline 0,344 z^{-4} - 0,244 z^{-5} \end{array}$$

**Solution :**

## 1. Expression de $Y(z)$

Par définition  $Y(z) = F(z) \cdot X(z)$  donc

$$Y(z) = \frac{0,1 z^{-1}}{1 - 1,9 z^{-1} + 0,9 z^{-2}}$$

## 2. Division suivant les puissances croissantes

La division se pose comme indiqué ci-dessous :

## 3. Graph

La courbe de la figure 3 reproduit les premiers échantillons. On constate que les valeurs obtenues coïncident avec la réponse indicielle d'un système continu du 1<sup>er</sup> ordre.

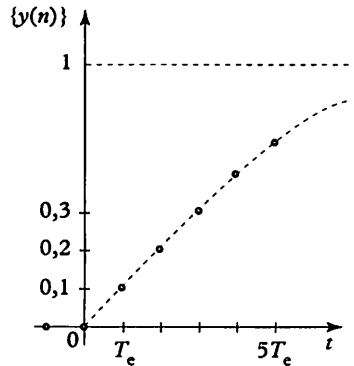
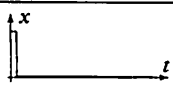

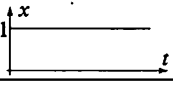
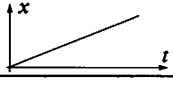

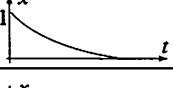
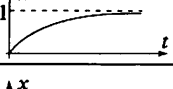
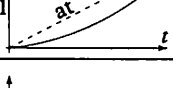

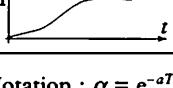


Fig. 3

Le chapitre 18 met en évidence une technique plus simple de calculs des échantillons, basée sur l'emploi d'équations aux différences.



## Transformées en $z$

Variation temporelle	$x(t)$	$X(p)$	$X(z)$
	$\delta(t)$	1	1
	$\delta(t - kT_c)$	$e^{-kT_c p}$	$z^{-k}$
	$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_c \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
	$t^2 \cdot u(t)$	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{T_c^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$
	$(1 - e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a}{p(p + a)}$	$\frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$(at - 1 + e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a^2}{p^2(p + a)}$	$\frac{aT_c z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$te^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$\frac{T_c \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$
	$[1 - (1 + at)e^{-at}] \cdot u(t)$	$\frac{a^2}{p(p + a)^2}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{aT_c \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$

Notation :  $\alpha = e^{-aT_c}$  où  $T_c$  est la période d'échantillonnage.

Une boucle de régulation en temps discret peut être représentée par le schéma fonctionnel de la figure 1 (voir chapitre 14, fig. 7).

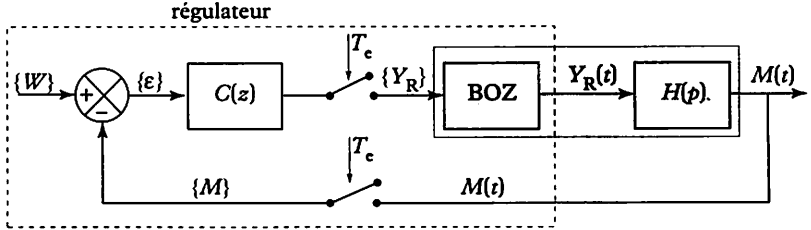


Fig. 1

On appelle  $C(z)$  la transformée en  $z$  du correcteur, établissant la relation entre les transformées  $\varepsilon(z)$  et  $Y_R(z)$  des séquences  $\{\varepsilon\}$  et  $\{Y_R\}$ , telle que :  $Y_R(z) = C(z) \cdot \varepsilon(z)$ .

Deux problèmes se posent :

- connaissant la fonction de transfert  $H(p)$  du système, définie en temps continu, quelle relation lie  $M(z)$  et  $Y_R(z)$  ?
- pour une consigne  $W(z)$ , comment évolue  $M(t)$  entre les instants d'échantillonnage ?

Le premier problème est aisé à résoudre. Le second, abordé au chapitre 17, soulève la question du choix de la période d'échantillonnage  $T_e$ .

### 1 Équations d'une régulation en temps discret

Si l'on ne s'intéresse qu'aux signaux discrets, seules deux relations sont utiles :

- la relation établie par le régulateur :  $Y_R(z) = C(z) \cdot [W(z) - M(z)]$  ;
- la relation liant  $M(z)$  et  $Y_R(z)$  par l'intermédiaire du système, le BOZ étant désormais considéré comme associé à  $H(p)$ .

#### Relation entre $M(z)$ et $Y_R(z)$

On est ramené au problème décrit par la figure 2 : trouver la fonction de transfert  $H_B(z)$  de l'association en série d'un bloqueur d'ordre zéro et d'une fonction de transfert  $H(p)$ .

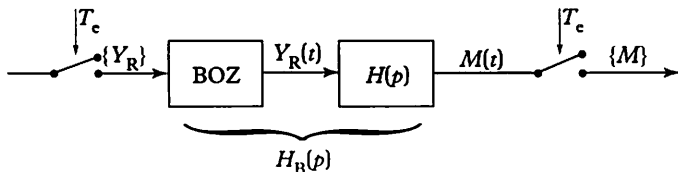


Fig. 2

Il suffit de déterminer la fonction de transfert  $B_0(p)$  du bloqueur, puis d'appliquer la transformation en  $z$  à la fonction de transfert  $H_B(p) = B_0(p) \cdot H(p)$ .

### Détermination de $B_0(p)$

On utilise pour cela la réponse impulsionnelle d'un BOZ, indiquée figure 3.

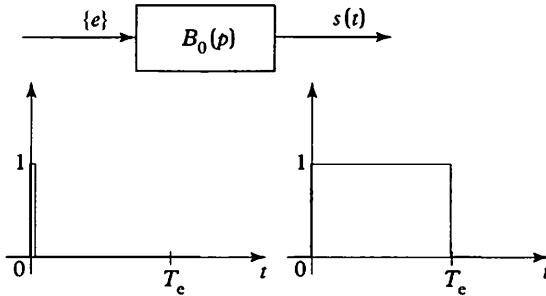


Fig. 3

Si le signal d'entrée est la séquence  $\{e\}$  définie par  $e(0) = 1$  et  $e(n) = 0 \forall n > 0$ ,  $\{e\}$  peut être considérée comme résultant de l'échantillonnage de  $e(t) = 1 \cdot \delta(t) = \delta(t)$ .

Par définition du bloqueur, la valeur 1 va être bloquée pendant  $T_c$ . Le signal de sortie  $s(t)$  peut être noté :  $s(t) = u(t) - u(t - T_c)$ .

Sa transformée de Laplace est donc :

$$S(p) = \mathcal{L} [s(t)] = \frac{1}{p} (1 - e^{-T_c p}).$$

$$\text{Or } E(p) = \mathcal{L} [e(t)] = \mathcal{L} [\delta(t)] = 1$$

$$\text{donc } B_0(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p} (1 - e^{-T_c p}).$$

$$\text{On obtient donc : } H_B(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-T_c p}) \cdot H(p).$$

La transformée en  $z$  vaut donc :

$$H_B(z) = Z [H_B(p)] = Z \left[ \frac{H(p)}{p} \right] - Z \left[ \frac{H(p)}{p} \cdot e^{-T_c p} \right].$$

En utilisant la propriété des séquences retardées (chapitre 15, paragraphe 3), on peut écrire :

$$Z \left[ \frac{H(p)}{p} \cdot e^{-T_c p} \right] = Z \left[ \frac{H(p)}{p} \right] \cdot z^{-1}$$

et donc finalement :  $H_B(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{H(p)}{p} \right]$ .

**Exemple**

Pour un système du 1<sup>er</sup> ordre de fonction de transfert  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ , la fonction  $H_B(z)$  vaut donc :

$$H_B(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{K}{p(1 + \tau p)} \right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{K / \tau}{p \left( p + \frac{1}{\tau} \right)} \right]$$

Par lecture directe de la transformée de  $\frac{a}{p(p + a)}$ , on obtient, après simplification par  $(1 - z^{-1})$  :

$$H_B(z) = \frac{K(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \text{ avec } \alpha = e^{-\frac{T_s}{\tau}}$$

**Principaux résultats**

Pour les fonctions de transfert les plus courantes en régulation, les résultats sont regroupés dans le tableau page 95.

**2 Fonction de transfert en chaîne fermée**

On dispose donc des deux relations :

$$Y_R(z) = C(z) \cdot [W(z) - M(z)] \text{ et } M(z) = H_B(z) \cdot Y_R(z)$$

Après simplification, on retrouve la relation habituelle :

$$F(z) = \frac{M(z)}{W(z)} = \frac{C(z) \cdot H_B(z)}{1 + C(z) \cdot H_B(z)}$$

mais exprimée pour les transformées en  $z$ .

On retiendra que l'on peut utiliser des techniques opératoires semblables à celles applicables en régulation continue.

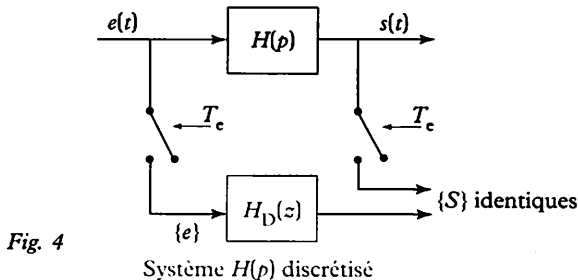
Deux types d'applications sont essentiellement développés :

- déterminer un correcteur spécifique  $C(z)$ , pour un dispositif industriel naturellement échantillonné, tel qu'une régulation de qualité liée à un analyseur non continu. Cet aspect est développé au chapitre 17 ;
- réaliser sous forme discrète des régulateurs ayant le comportement extérieur d'un régulateur PID classique, avec les avantages inhérents à une réalisation numérique. Cette application, développée en exercice résolu, nécessite que l'on soit capable de discrétiser une fonction de transfert définie en temps continu.

### 3 Discrétisation d'une fonction de transfert

#### Définition

Le problème, représenté figure 4, peut être exprimé sous la forme suivante : quelle fonction de transfert  $H_D(z)$  fournit des échantillons  $s(n)$  coïncidant avec  $s(t)$ , lorsque ses échantillons d'entrée  $e(n)$  coïncident avec  $e(t)$  ?



#### Exemple

Le résultat, simple, peut être abordé à l'aide de l'exemple suivant qui concerne un système du 1<sup>er</sup> ordre, de fonction de transfert

$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ . Le signal d'entrée est l'échelon unité  $u(t)$ . Le signal de

sortie  $s(t)$  représente donc la réponse indicielle  $s(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot u(t)$ .

Des échantillons  $e(n)$  et  $s(n)$  coïncidants peuvent être obtenus par échantillonnage de  $e(t)$  et  $s(t)$ . On trouve alors :

$$E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{et} \quad S(z) = \frac{K(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$$

$$H_D(z) \text{ vaut donc : } H_D(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

On constate donc que :

$$H_D(z) = H_B(z).$$

### 4 Conclusion

On retiendra que la réalisation discrète d'un système continu revient à chercher la transformée en  $z$  de ce système associé à un bloqueur d'ordre zéro.

# Exercice résolu

On désire obtenir une réalisation discrète d'un régulateur PI de structure mixte. On rappelle sa fonction de transfert continue :

$$C(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

- Déterminer sa fonction de transfert discrétisée  $C_D(z)$ .
- Pour  $T_i = 10$  s,  $A = 1$  et  $T_c = 1$  s, déterminer numériquement  $C_D(z)$ .
- Déterminer, par la méthode de division polynomiale, les premiers échantillons de sa réponse indicielle.
- Comparer à la réponse indicielle du correcteur  $C_D(z)$  fournie par un simulateur. Conclure.
- On désire assurer la régulation du système continu  $H(p) = \frac{K e^{-T_p}}{1 + \tau p}$  où  $K=1,2$ ;  $T = 3$  s et  $\tau = 10$  s. Pour  $T_c = 1$  s, déterminer  $H_B(z)$  puis  $F(z)$ .
- Déterminer les premiers échantillons de la réponse de la boucle à un échelon.
- Tracer au simulateur la réponse indicielle de la boucle complète, pour  $T_c = 1$  s, puis  $T_c = 3$  s. Conclure.

**Solution :**

## 1. Expression de $C_D(z)$

Par définition :

$$C_D(z) = C_B(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{C(p)}{p} \right]$$

soit :

$$C_D(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{A}{p} \right] + (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{A}{T_i p^2} \right].$$

Les transformées peuvent être lues directement dans le tableau du chapitre 15 :

$$C_D(z) = A + \frac{A}{T_i} \cdot T_c \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

## 2. Application numérique

$$C_D(z) = 1 + \frac{0,1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - 0,9 z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

## 3 Réponse indicielle du régulateur

Pour  $E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$  on obtient :

$$S(z) = \frac{1 - 0,9 z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}.$$

Par division de  $(1 - 0,9 z^{-1})$  par  $(1 - 2 z^{-1} + z^{-2})$  on obtient :

$$S(z) = 1 + 1,1 z^{-1} + 1,2 z^{-2} + 1,3 z^{-3} + 1,4 z^{-4} + \dots$$

Les échantillons  $s(n)$  coïncident bien avec la réponse indicielle en temps continu, qui aboutit à 1 répétition en  $T_i = 10$  s.

## 4. Utilisation du simulateur

Les courbes de la figure 5 confirment ce résultat.

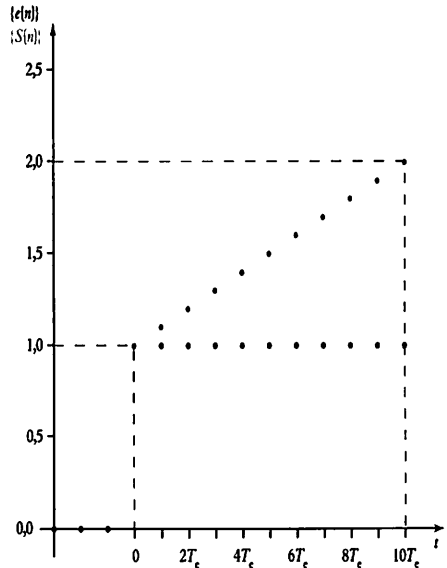


Fig. 5

## 5. Expression de $H_B(z)$

Le tableau fournit, pour un modèle de Brodia :

$$H_B(z) = \frac{K(1 - \alpha) z^{-(m+1)}}{1 - \alpha z^{-1}} \text{ avec } m = \frac{T}{T_c} = 3.$$

Pour  $T_c = 1$  s et  $\tau = 10$  s,  $\alpha = e^{-\frac{T_c}{\tau}}$  est égal à  $\alpha \approx 0,9$ .

$$\text{On obtient donc : } H_B(z) = \frac{0,12 z^{-4}}{1 - 0,9 z^{-1}}.$$

Après calculs, on obtient :

$$F(z) = \frac{C(z) \cdot H_B(z)}{1 + C(z) \cdot H_B(z)} = \frac{0,12 z^{-4}}{1 - z^{-1} + 0,12 z^{-4}}$$

## 6 Réponse indicielle de la boucle

Un calcul analogue à celui de la question 3 aboutit à :

$$M(z) = \frac{0,12 z^{-4}}{1 - 2 z^{-1} + z^{-2} + 0,12 z^{-4} - 0,12 z^{-5}}$$

soit  $M(z) \approx 0,12 z^{-4} + 0,24 z^{-5} + 0,36 z^{-6} + 0,48 z^{-7} + 0,585 z^{-8} \dots$

## 7. Vérification au simulateur

Les courbes de la figure 6 valident le calcul ci-dessus. On constate qu'une augmentation de la période d'échantillonnage aboutit à une déstabilisation de la boucle. On montre théoriquement que l'utilisation d'un régulateur PID discrétisé en lieu et place d'un régulateur continu donne des résultats satisfaisants tant que  $T_e \approx \frac{\tau}{10}$  si  $\tau$  représente la constante de temps principale du système.

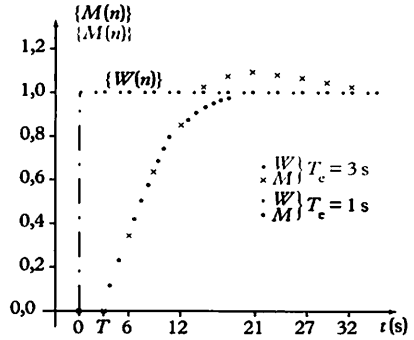


Fig. 6

Pour des boucles rapides, telles que des régulations de débit, les régulateurs industriels pour lesquels  $T_e = 1$  s ne peuvent donc pas être utilisés sans « adoucir » le réglage normal adopté en continu.

Système	$H(p)$	$H_B(z)$
gain	$K$	$K$
1 <sup>er</sup> ordre	$\frac{K}{1 + \tau p}$	$\frac{K(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$
Broïda	$\frac{K e^{-T_p}}{1 + \tau p}$	$\frac{K(1 - \alpha)z^{-(m+1)}}{1 - \alpha z^{-1}}$
intégrateur	$\frac{k}{p}$	$\frac{k T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
Strejc ( $n = 2$ )	$\frac{K}{(1 + \tau p)^2}$	$K \frac{z^{-1}(1 - \alpha - \frac{T_e}{\tau} \alpha) - \alpha z^{-2}(1 - \alpha - \frac{T_e}{\tau})}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$

$$\alpha = e^{-\frac{T}{T_e}} \quad m = \frac{T}{T_e} \text{ entier}$$

On prendra garde à l'usage des tables qui ne précisent pas si elles fournissent  $H(z)$  ou  $H_B(z)$ .

*Le chapitre précédent a montré qu'il était possible de réaliser sous forme discrète des régulateurs classiques, tels que les régulateurs PID.*

*La réalisation numérique permet en outre de disposer de fonctionnalités supplémentaires : affichages numériques, graphiques de tendance, dispositifs d'anti-saturation de l'action intégrale, etc.*

*Cependant, la correction en temps discret peut apporter beaucoup plus, en particulier dans la synthèse directe des correcteurs, et plus particulièrement si le système physique comporte un temps mort important. L'exercice résolu du chapitre 16 a bien montré que la discrétisation d'un système à temps mort aboutit à une expression  $H_B(z)$  sous forme d'une fraction rationnelle et la détermination d'un correcteur spécifique ne présente pas de difficultés particulières.*

*Enfin la correction en temps discret permet d'apporter une solution satisfaisante aux dispositifs industriels naturellement discrétisés, par exemple lors de l'emploi d'un analyseur de qualité fonctionnant de manière continue.*

## 1 Discrétisation d'un régulateur PID

On ne traitera ici que le cas de PID discrétisés où la période d'échantillonnage  $T_e$  (*scan time* en anglais) peut être ajustée par l'utilisateur. Dans l'exercice corrigé du chapitre précédent, on a vu que pour un régulateur PI mixte, de fonction de transfert  $C(p) = A \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ , la

discrétisation conduit à : 
$$C_D(z) = A + \frac{A}{T_i} \cdot \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Cet algorithme, utilisé avec une période  $T_e$  inférieure à  $\frac{\tau}{10}$ , aboutit à un comportement de la boucle analogue à celui obtenu avec un régulateur continu. Que se passe-t-il si  $T_e$  est supérieure à  $\frac{\tau}{10}$  ?

Dans l'exercice résolu, on a constaté qu'une période  $T_e$  plus grande entraînait une déstabilisation de la boucle de régulation. On peut montrer que tout se passe comme si le bloqueur introduisait un retard qui augmente le temps mort naturel.

Des tables de réglage, en particulier celle de Takahashi, prennent en compte des termes correctifs fonction de  $T_e$ .

Une méthode simple consiste à adoucir le réglage de Broïda applicable en temps continu, puis à considérer que le bloqueur augmente



le temps mort naturel de  $\frac{T_c}{2}$ . On obtient donc le réglage PI mixte suivant :

$$T_i = \tau + T + \frac{T_c}{2} \quad \text{et} \quad AK = 1,2 \left( \frac{T + \frac{T_c}{2}}{\tau} \right)^{-0,8}$$

Exemple :

Pour  $K=1,2$ ;  $T=3$  s;  $\tau=10$  s et  $T_c=3$  s, les formules aboutissent à :  $T_i=14,5$  s et  $A \approx 1,9$ .

Le correcteur PI correspondant  $C_D(z) = \frac{1,9 - 1,507z^{-1}}{1 - z^{-1}}$  donne la réponse indicielle de la figure 1.

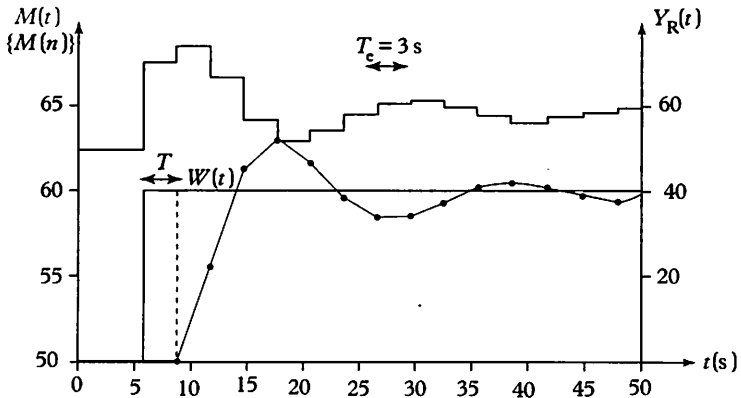


Fig. 1

Les limites de la discrétisation du PID sont :

- si le système présente un temps mort NON négligeable ( $T > 0,05 \tau$ ) :  $0,2 T < T_c < T$ ;
- si le système ne présente pas (ou peu) de temps mort, en appelant  $(T_{R5\%})_{BF}$  le temps de réponse désiré en chaîne fermée :

$$\left( \frac{T_{R5\%}}{6} \right)_{BF} < T_c < \left( \frac{T_{R5\%}}{15} \right)_{BF}$$

## 2 Synthèse directe par modèle de référence

Cette technique de détermination d'un correcteur a été abondamment traitée, en régulation en temps continu, dans les chapitres 1 à 11. L'ensemble des résultats reste vrai, à condition de choisir convenablement le modèle de référence et la période d'échantillonnage.

Si on note  $F(z)$  le modèle de référence et  $H_B(z)$  la fonction de transfert du système, associé à un BOZ, le correcteur est donné par :

$$C(z) = \frac{F(z)}{H_B(z) [1 - F(z)]}$$

On retrouve des contraintes de réalisation. En particulier, si le système présente un temps mort naturel  $T$ , le modèle de référence doit comporter un temps mort supérieur ou égal à  $T$ .

La théorie montre qu'un correcteur causal (et donc réalisable) doit être de la forme :

$$C(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Déterminer un correcteur revient donc à déterminer les coefficients  $a_i$  et  $b_i$ . De nombreux SNCC commencent à offrir ce type de correcteurs, sous la dénomination de correcteurs en  $z$  (*sampling corrector* en anglais). Ils se présentent souvent sous forme d'une fraction rationnelle. Le chapitre 18 traite des méthodes de réalisation.

**Discrétisation d'un modèle de référence utilisé en temps continu**

Si  $F(p)$  est le modèle en temps continu, sa discrétisation est notée  $F_D(z)$ .

Exemple : soit  $H(p) = \frac{K e^{-T_p}}{1 + \tau p}$ . Le modèle de référence souvent

adopté en asservissement est :  $F(p) = 1 \cdot \frac{e^{-T_p}}{1 + \tau' p}$  avec  $\tau' \leq \tau$ .

Les résultats du chapitre précédent donnent :

$$H_B(z) = \frac{K (1 - \alpha) z^{-(m+1)}}{1 - \alpha z^{-1}} \quad \text{et} \quad F_D(z) = \frac{(1 - \beta) z^{-(m+1)}}{1 - \beta z^{-1}}$$

avec  $\alpha = e^{-\frac{T_c}{\tau}}$ ,  $m = \frac{T}{T_c}$  et  $\beta = e^{-\frac{T_c}{\tau'}}$ .

Le calcul de  $C(z)$  aboutit au correcteur causal suivant :

$$C(z) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \cdot \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1} - (1 - \beta) z^{-(m+1)}}, \text{ exemple :}$$

pour  $K = 2$ ;  $T = 3$  s;  $\tau = 10$  s;  $\tau' = 3$  s et  $T_c = 1$  s, on obtient :

$$C(z) = \frac{1,42 - 1,278 z^{-1}}{1 - 0,716 z^{-1} - 0,284 z^{-4}}$$

Les performances de ce correcteur peuvent être appréciées à la figure 2.

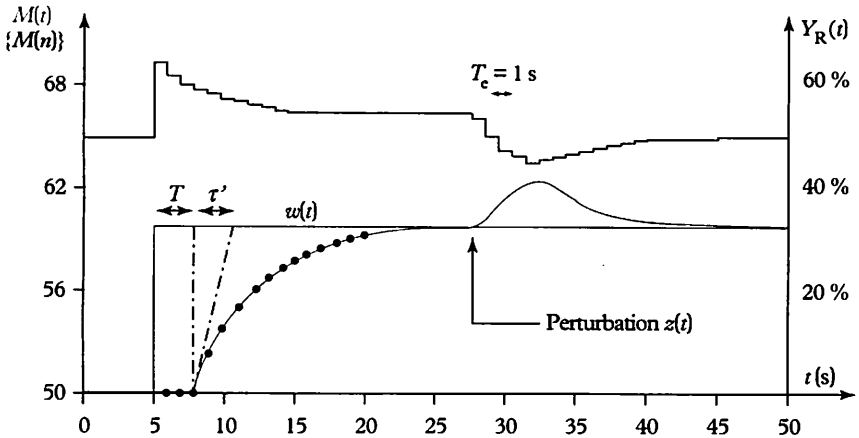


Fig. 2

On constate que  $T_c$  respecte les règles du paragraphe 1 et que les performances sont analogues à celles obtenues avec un correcteur de Smith en temps continu.

### Autres modèles de référence

L'utilisation d'une régulation en temps discret permet d'exploiter des modèles de référence n'ayant pas d'équivalents en temps continu.

Cet aspect est abordé dans l'exercice résolu.

## 3 Conclusions

L'utilisation d'un correcteur en temps discret doit être réalisée en prenant de nombreuses précautions, en particulier en ce qui concerne la stabilité du correcteur  $C(z)$ . En effet, la suite des échantillons  $\varepsilon(n)$  peut être nulle à partir d'un certain instant et la suite  $Y_R(n)$  peut continuer à osciller. L'étude générale de la stabilité d'une fonction  $F(z)$  dépasse le cadre de cet ouvrage, mais on retiendra qu'elle est réalisée à partir de l'analyse des racines du dénominateur de  $F(z)$ .

Pour ce qui concerne le choix du modèle de référence et de la période  $T_c$ , les recommandations du chapitre 11 et celles du paragraphe 1 constituent une bonne base de réflexion.

# Exercice résolu

On désire obtenir une régulation satisfaisante pour le système, correspondant au

système intégrateur  $H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)}$  le

gain dynamique valant  $k = 1$  et la constante de temps de l'actionneur  $\tau = 1$  s.

Pour limiter les contraintes trop importantes sur  $Y_R$ , on se propose de réaliser un système à réponse plate, lorsque la boucle est fermée.

Une boucle à temps discret est à réponse plate (ou pile) si la mesure  $\{M_n\}$  rejoint la consigne  $\{W\}$  selon un régime transitoire apériodique de durée finie  $nT_c$ .

1. Déterminer la fonction de transfert du modèle de référence pour  $n = 2$  (fig. 3).

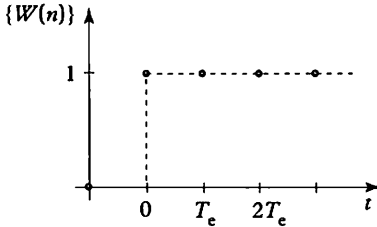
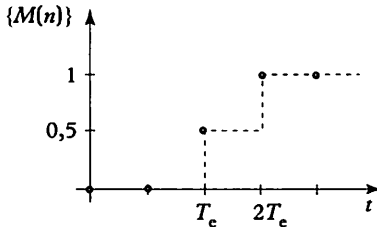


Fig. 3



2. Pour  $T_c = 1$  s, déterminer numériquement  $C(z)$ .

3. Avec un simulateur, rechercher la réponse indicielle de la boucle réalisée. Conclure.

4. On désire étudier la robustesse de la boucle. Pour  $k = 0,8$  et  $\tau = 1,2$  s, tracer la nouvelle réponse indicielle. Que peut-on dire de la robustesse?

5. Que peut-on conclure quant au choix du modèle de référence?

**Solution :**

## 1. Expression de $F(z)$

La mesure désirée peut être considérée comme la somme de deux échelons d'am-

plitude 0,5, l'un retardé de  $T_c$  et l'autre de  $2T_c$ . On obtient donc :

$$M(z) = \frac{0,5 z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{0,5 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

pour  $W(z) =$

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ et } F(z) = \frac{M(z)}{W(z)} = 0,5 z^{-1} + 0,5 z^{-2}$$

## 2. Expression de $C(z)$

$$C(z) = \frac{F(z)}{H_B(z) [1 - F(z)]} \text{ Pour } T_c = 1 \text{ s}$$

$$C(z) = \frac{1,359 - 0,5 z^{-1} - 1,359 z^{-2} + 0,5 z^{-3}}{1 + 0,218 z^{-1} - 0,859 z^{-2} - 0,359 z^{-3}}$$

## 3. Réponse indicielle de la boucle

Les courbes de la figure 4 confirment un comportement satisfaisant de la mesure  $M(t)$  entre les instants d'échantillonnage et une commande assez douce.

## 4. Étude de la robustesse

Les courbes de la figure 5 mettent en évidence une bonne stabilité vis-à-vis d'une évolution du procédé physique.

## 5. Choix du modèle de référence

Les correcteurs en temps discret peuvent être calculés pour tout modèle de la forme :

$$F(z) = \frac{M(z)}{W(z)} = c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}$$

permettant ainsi de modéliser l'allure de la réponse indicielle (fig. 6). Pour éviter de «brutaliser» un actionneur, les modifications de  $Y_R(t)$  sont réalisées avec pente d'équilibrage, entre l'ancienne valeur  $Y_{Rn-1}$  et la nouvelle  $Y_{Rn}$ .

On retiendra en outre qu'une régulation satisfaisante peut être obtenue pour une période  $T_c$  élevée par rapport à la dynamique d'un procédé, l'automaticien n'accordant pas la même importance que l'électronicien à la condition de Shannon.

Il en sera tout autrement si le dispositif numérique doit simultanément réaliser une identification en ligne du système.

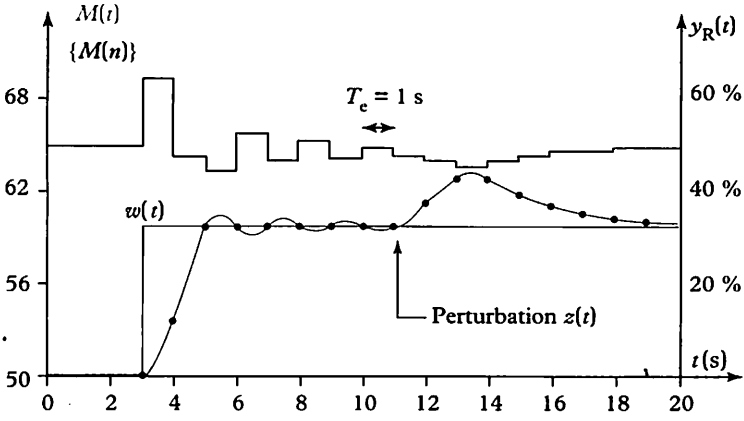


Fig. 4

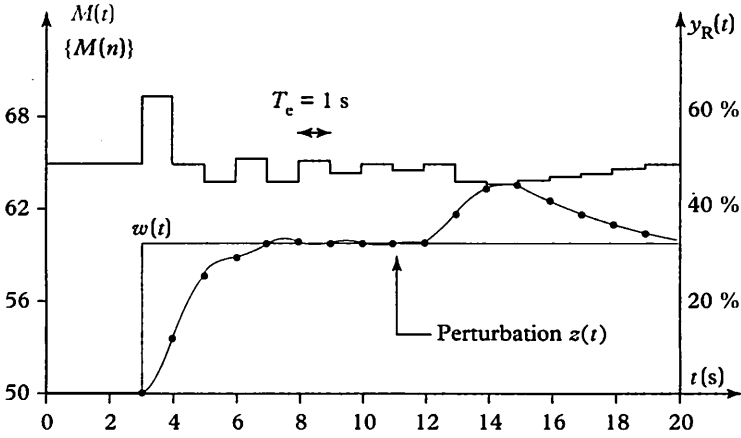


Fig. 5

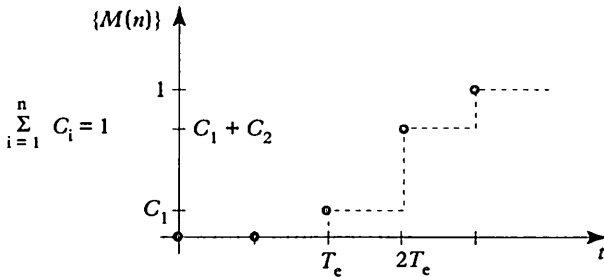


Fig. 6

Les blocs algorithmiques disponibles dans un SNCC sont tous réalisés sous forme discrète. La documentation technique fait habituellement référence au module correspondant en temps continu, mais de nombreux constructeurs utilisent une représentation discrète, sous forme d'équations récurrentes.

Ce chapitre développe cette notion et souligne les problèmes liés à l'utilisation de l'équivalent continu des blocs algorithmiques.

## 1 Systèmes numériques de contrôle-commande

Ils offrent, sous forme numérique, les modules autrefois disponibles en technologie continue : filtre du 1<sup>er</sup> ordre, module avance-retard, régulateur PID, temps mort...

La réalisation de chaque bloc correspond à la discrétisation  $G_D(z)$  de son équivalent analogique  $G(p)$ .

Le principal problème est que si certains constructeurs offrent bien une discrétisation *exacte*, d'autres se contentent d'une discrétisation *approchée* qui conduit à des désillusions importantes, notamment pour les stratégies évoquées au début de cet ouvrage (correcteur de Smith, correcteur à modèle interne...).

Il faut signaler que cet inconvénient ne se pose pas avec les logiciels prévus pour la simulation.

Pour bien comprendre la difficulté, il faut détailler la réalisation interne des blocs algorithmiques utilisés dans une stratégie.

### Terminologie

**Bloc algorithmique** : c'est une fonction ou une procédure informatique, écrite en assembleur ou langage C, dont le code est généralement inscrit en mémoire non volatile.

**Stratégie** : à l'aide d'outils de CAO, un utilisateur chaîne un ensemble de blocs algorithmiques, par des liaisons qui sont autant de liens entre les sorties et les entrées des différents blocs.

### Exemple

Un régulateur PI simplifié, schématisé figure 1, peut être vu comme une procédure dont les données entrantes (passées par valeur) sont disponibles sur les variables  $e_1$  et  $e_2$ . La donnée sortante (passée par référence) est disponible en  $s_1$ . Comment l'échantillon  $Y_{Rn}$  est-il calculé, lors de l'exécution cadencée du bloc?

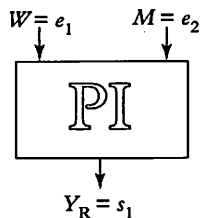


Fig. 1

## 2 Équations récurrentes

Le concept peut être introduit à partir de l'exemple ci-dessus. Le régulateur PI mixte  $C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  est discrétisé sous la forme :

$C_D(z) = A + \frac{A}{T_i} \cdot \frac{T_c z^{-1}}{1 - z^{-1}}$ . Or  $C_D(z) = \frac{Y_R(z)}{\varepsilon(z)}$ . En réduisant au même dénominateur, on peut écrire :

$$Y_R(z) \cdot (1 - z^{-1}) = A \left[1 - \left(1 - \frac{T_c}{T_i}\right) z^{-1}\right] \cdot \varepsilon(z).$$

En développant, il vient :

$$Y_R(z) - z^{-1} Y_R(z) = A \varepsilon(z) - A \left(1 - \frac{T_c}{T_i}\right) z^{-1} \varepsilon(z).$$

Si on se souvient que  $Y_R(z)$  est la transformée en  $z$  de la suite des échantillons  $\{Y_{Rn}\}$  et que l'opérateur  $z^{-1}$  correspond à un retard de  $T_c$ , on peut écrire la relation sur les suites d'échantillons :

$$\{Y_{Rn}\} - \{Y_{Rn-1}\} = A \{\varepsilon_n\} - A \left(1 - \frac{T_c}{T_i}\right) \{\varepsilon_{n-1}\}.$$

Cette relation, vraie quel que soit le temps discret  $t$ , est vraie pour un instant particulier  $t = nT_c$ .

On obtient donc la relation suivante, vraie pour des échantillons  $n$  et  $n - 1$  quelconques.

$$Y_{Rn} - Y_{Rn-1} = A \varepsilon_n - A \left(1 - \frac{T_c}{T_i}\right) \varepsilon_{n-1}$$

ou  $Y_{Rn} = Y_{Rn-1} + A \varepsilon_n - A \left(1 - \frac{T_c}{T_i}\right) \varepsilon_{n-1}$  appelée équation récur-

rente du régulateur PI, écrite sous une forme incrémentale.

Pour fonctionner, la procédure de calcul nécessite donc les valeurs  $Y_{Rn-1}$  et  $\varepsilon_{n-1}$  qui doivent avoir été mémorisées à l'échantillonnage précédent. Ceci est obtenu avec des structures de données de type pile ou tableaux.

### Exemple

Le programme BASIC suivant permet de réaliser le régulateur PI en mode automatique :

```
REM Simulation d'un régulateur PI en mode automatique
DIM SHARED TEMPS, TE, A, TI AS SINGLE ' Variables globales
DIM YR, EPS (1 TO 2) AS SINGLE ' Tableaux de réels
DECLARE SUB PID (EPS ( ) AS SINGLE, YR ( ) AS SINGLE)
***** INSTRUCTIONS*****
```

```

CLS : SCREEN 0 : COLOR 2, 0
A = 1: TI = 10 : TE = 1
YR (1) = 0 : YR (2) = 0 : EPS (1) = 0 : EPS (2) = 1
FOR TEMPS = 0 TO TI STEP TE
    PID EPS ( ), YR ( )
    PRINT TEMPS, YR (2)
NEXT TEMPS
END
***** PROCEDURE SUB*****
SUB PID (EPS ( ) AS SINGLE, YR ( ) AS SINGLE)
    YR (2) = YR (1) + A* EPS (2) - A* (1 - (TE / TI))* EPS (1)
    YR (1) = YR (2) : EPS (1) = EPS (2)
END SUB

```

L'exécution fournit des résultats conformes à ceux de l'exercice résolu du chapitre 16.

### 3 Discrétisation approchée

Le paragraphe précédent a dégagé la méthode permettant d'établir l'équation récurrente d'un bloc défini par sa fonction de transfert en  $z$ . On notera que cette équation porte aussi le nom d'équation aux différences, car elle joue, en temps discret, le rôle que joue l'équation différentielle en temps continu.

Il faut signaler que les électroniciens discrétisent souvent un filtre continu  $H(p)$  en utilisant une transformation bilinéaire : en effec-

tuant le changement de variable  $p = \frac{2}{T_c} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$  dans  $H(p)$ , on

obtient une discrétisation approchée de cette fonction de transfert. Cette transformation, qui dépasse le cadre de cet ouvrage, revient à calculer une intégrale par la méthode des trapèzes. Elle donne des résultats satisfaisants uniquement lorsque  $T_c$  satisfait à la condition de Shannon.

Malheureusement, de nombreux SNCC utilisent aussi une discrétisation approchée, essentiellement pour limiter la charge de calcul des processeurs. L'étude des discrétisations exacte et approchée d'une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre est conduite dans l'exercice résolu.

### 4 Applications

L'exercice résolu du chapitre 14 a permis de déterminer la suite des échantillons de sortie d'une fonction  $F(z)$  à partir des échantillons d'entrée. La connaissance de l'équation récurrente du bloc  $F(z)$  permet ce calcul plus facilement.



Pour toute équation récurrente, on peut présenter les calculs sous la forme d'un tableau. À partir d'une ou plusieurs lignes déterminant les conditions initiales, la connaissance des données des lignes précédentes et de l'équation récurrente permet de remplir la ligne suivante. Pour la suite des échantillons correspondants à l'échelon unité  $\varepsilon_n = 1$  pour  $n \geq 0$  et  $\varepsilon_n = 0$  pour  $n < 0$ , l'équation récurrente du régulateur PI fournit le tableau ci-dessous qui ne nécessite qu'une ligne  $n = -1$  de conditions initiales.

Instant	$Y_{Rn}$	$Y_{Rn-1}$	$\varepsilon_n$	$\varepsilon_{n-1}$
$n = -1$	0	0	0	0
$n = 0$	1	0	1	0
$n = 1$	1,1	1	1	1
$n = 2$	1,2	1,1	1	1

← Conditions initiales

Échantillons de sortie

Échantillons d'entrée

$$A = 1 \quad T_i = 10 \text{ s} \quad T_c = 1 \text{ s} \quad Y_{Rn} = Y_{Rn-1} + \varepsilon_n - 0,9 \varepsilon_{n-1}$$

## 5 Conclusions

L'utilisation des blocs algorithmiques d'un SNCC demande une très grande vigilance de la part d'un technicien. La période  $T_c$  sera réglée aussi faible que possible, en fonction de la dynamique de chaque boucle, de la charge du processeur, des tâches prioritaires de sécurité. Si une stratégie complexe utilise une simulation d'un système continu, le technicien devra (en l'absence de documentation précise) conduire des essais afin de juger de la qualité de la discrétisation réalisée.

On notera en particulier qu'il est facile de vérifier que  $Z [X(p) \cdot Y(p)]$  est différent de  $Z [X(p)] \cdot Z [Y(p)]$  et que la simulation discrète d'une fonction de Strejc du second ordre  $H(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$  par deux

blocs  $\frac{1}{1 + \tau p}$  conduit à une erreur de discrétisation. Cet exemple est abordé dans l'exercice résolu.

# Exercice résolu

On désire pouvoir simuler la fonction

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \text{ sous forme discrète.}$$

- Rappeler sa fonction de transfert  $H(z)$ .
- Déterminer l'équation récurrente correspondante.
- Établir, en basic, un programme permettant de réaliser cette équation.
- De nombreux SNCC ne disposant pas de coprocesseurs mathématiques, la fonction exponentielle  $e^x$  est assimilée à son développement limité  $1 + x$ . Comment l'équation récurrente est-elle modifiée?
- Tracer sur un même graphe les réponses indicielles des deux équations. Conclure.
- On simule un second ordre :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2} \text{ par chaînage de deux}$$

premiers ordres. Établir, en basic, un programme permettant de réaliser cette opération.

- Comparer sur un graphe la réponse indicielle obtenue avec celle fournie par la discrétisation exacte d'un 2<sup>e</sup> ordre. Conclure.

**Solution :**

## 1. Expression de $H(z)$

$$H_D(z) = \frac{K(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \text{ avec } \alpha = e^{-\frac{T_c}{\tau}}$$

## 2. Équation récurrente

$$S(z) (1 - \alpha z^{-1}) = K(1 - \alpha) z^{-1} E(z)$$

donc :

$$S_n = \alpha S_{n-1} + K(1 - \alpha) E_{n-1}$$

## 3. Programme Basic

REM Simulation exacte d'un système du 1<sup>er</sup> ordre  
DIM SHARED K, ALPHA AS SINGLE ' Variables globales

DIM TEMPS, TE, TAU AS SINGLE  
DIM S, E (1 TO 2) AS SINGLE  
DECLARE SUB ORDRE1 (E ( ) AS SINGLE, S ( ) AS SINGLE)

\*\*\*\*\* Instructions\*\*\*\*\*

CLS : SCREEN 0 : COLOR 2, 0  
K = 1 : TAU = 10 : TE = 1 : ALPHA = EXP (-TE / TAU)

S (1) = 0 : S (2) = 0 : E (1) = 0 : E (2) = 1

FOR TEMPS = 0 TO TAU STEP TE

ORDRE1 E ( ), S ( )

PRINT TEMPS, S (2)

NEXT TEMPS

END

\*\*\*\*\* PROCEDURE SUB\*\*\*\*\*  
SUB ORDRE1 (E ( ) AS SINGLE, S ( ) AS SINGLE)

S (2) = ALPHA \* S (1) + K \* (1 - ALPHA) \* E (1)

S (1) = S (2) : E (1) = E (2)

END SUB

## 4. Équation récurrente approchée

Il suffit de modifier la définition suivante  
ALPHA = 1 - TE / TAU.

## 5. Courbes

Les courbes de la figure 2 montrent que les échantillons de la discrétisation exacte coïncident avec la réponse continue

$s(z) = K(1 - e^{-\frac{T_c}{\tau}})$ . On constate que l'erreur augmente avec  $T_c$ .

## 6. Système du second ordre

Le programme suivant correspond au cahier des charges :

REM Simulation d'un système du 2<sup>e</sup> ordre par deux 1<sup>er</sup> ordres exacts

DIM SHARED K, ALPHA AS SINGLE ' Variables globales

DIM TEMPS, TE, TAU AS SINGLE

DIM S1, E1 (1 TO 2) AS SINGLE

DIM S2, E2 (1 TO 2) AS SINGLE

DECLARE SUB ORDRE1 (E ( ) AS SINGLE, S ( ) AS SINGLE)

\*\*\*\*\* Instructions\*\*\*\*\*

CLS : SCREEN 0 : COLOR 2, 0

K = 1 : TAU = 10 : TE = 1 : ALPHA = EXP (-TE / TAU)

S1 (1) = 0 : S1 (2) = 0 : E1 (1) = 0 : E1 (2) = 1

S2 (1) = 0 : S2 (2) = 0 : E2 (1) = 0 : E2 (2) = 0

FOR TEMPS = 0 TO TAU STEP TE

ORDRE1 E1 ( ), S1 ( )

E2 (1) = S1 (1) : E2 (2) = S1 (2)

ORDRE1 E2 ( ), S2 ( )

PRINT TEMPS, S2 (2)

NEXT TEMPS

END

\*\*\*\*\* PROCEDURE SUB\*\*\*\*\*

SUB ORDRE1 (E ( ) AS SINGLE, S ( ) AS SINGLE)

S (2) = ALPHA \* S (1) + K \* (1 - ALPHA) \* E (1)

S (1) = S (2) : E (1) = E (2)

END SUB

## 7. Courbes

Les courbes de la figure 3 montrent que les échantillons ne coïncident pas avec la réponse continue

$$s(t) = K \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right].$$

On constate ici aussi que l'erreur augmente avec  $T_c$  et, bien entendu, encore plus si la discrétisation du 1<sup>er</sup> ordre est approchée.

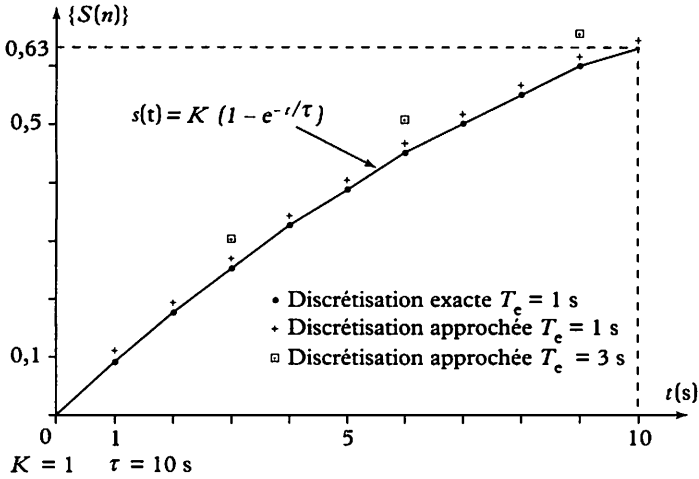


Fig. 2

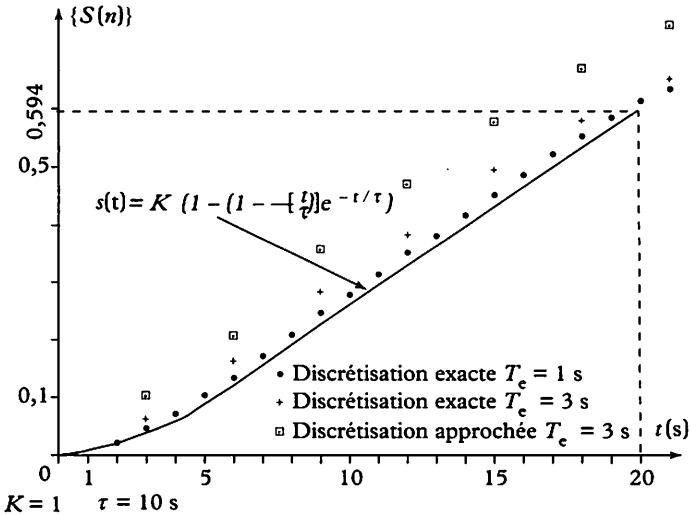


Fig. 3

## 1 Codage logique et traitement d'une grandeur physique

Le codage d'une information logique est simple : un niveau logique est codé « 0 », l'autre « 1 ». Le stockage nécessite de faibles capacités de mémoire puisqu'un octet permet le stockage de 8 informations binaires.

Le traitement des informations binaires ne nécessite pas de ressources matérielles importantes. L'unité arithmétique d'un microprocesseur est conçue pour traiter des informations binaires et effectuer les opérations logiques élémentaires (ET, OU, NON...).

Le succès des automates programmables industriels (API) est en partie dû à leur faible coût et leur fiabilité.

On peut donc maintenant se poser la question suivante : peut-on coder une information continue sous une forme simplifiée permettant ensuite leur utilisation dans des opérations élémentaires de type Booléen ?

La logique floue permet de répondre à cette question.

## 2 Codage flou : notion de classe d'appartenance

Cette notion de flou est récente (1965) et a été introduite par le professeur L. Zadeh.

- En logique à 2 niveaux, il existe 2 classes d'appartenance. Si l'on appartient à l'une, on n'appartient pas à l'autre. La frontière est donc très précise. Cette notion peut être traduite par la figure 1 a).

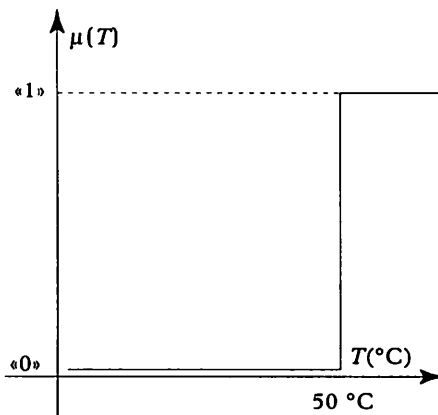


Fig. 1a –  $\mu$  représente le degré d'appartenance à la classe.

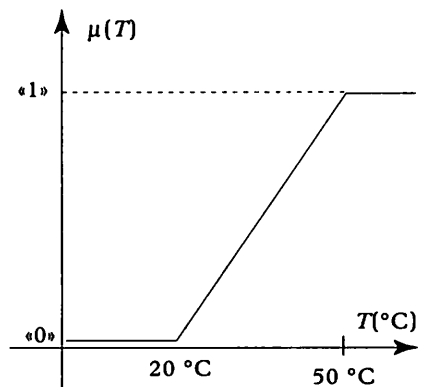


Fig. 1 b

Si l'on définit la classe CHAUD comme toute température égale ou supérieure à 50 °C, un codage binaire de l'information conduit à définir la classe FROID comme toute température inférieure à 50 °C.

- En logique floue, on peut définir un DEGRÉ d'appartenance à une classe, degré qui est un nombre compris entre 0 et 1. Cette notion peut être traduite par la figure 1 b). Si à 40 °C l'appartenance à la classe CHAUD est forte, elle est nulle à 20 °C.

La notion précédente permet de définir plusieurs classes d'appartenance, appelées valeurs *linguistiques* en langage flou, car on peut les décrire au moyen de mots (exemple : assez chaud).

Pour le codage flou de la variable linguistique température, on peut ainsi définir les trois valeurs ou classes FROID, TIÈDE, CHAUD, avec des degrés d'appartenance définis comme sur la figure 2.

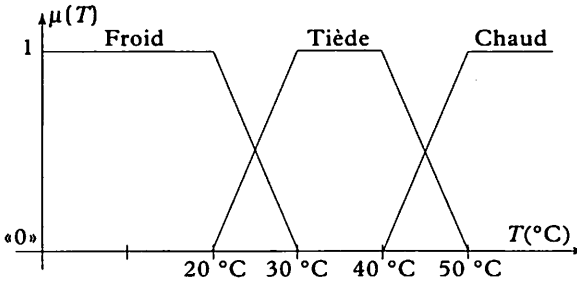


Fig. 2

Cette notion permet donc d'introduire une frontière « floue » entre les classes d'appartenance, car une valeur donnée de la variable continue (exemple : 40 °C) peut appartenir à plusieurs classes, avec des degrés différents. Selon la forme des classes (trapèzes, triangles...), la somme de ces degrés ne vaut pas nécessairement 1.

À chaque variable linguistique (exemple : *température*) sont associées des valeurs linguistiques représentées par des *sous-ensembles flous*, chacun associé à sa fonction d'appartenance  $\mu$  (ou degré d'appartenance), définie sur l'ensemble des classes de températures.

### 3 Logique floue

#### Notion d'opérateurs logiques sur des variables floues

Soit  $\otimes$  un opérateur logique défini en logique floue.

Si on appelle  $\mu_{A_1}(x_1)$  le degré d'appartenance de  $x_1$  à la classe  $A_1$  et  $\mu_{A_2}(x_1)$  le degré d'appartenance de  $x_1$  à la classe  $A_2$ , on peut définir la prémisse logique  $x_1 = A_1 \otimes x_1 = A_2$  par son degré d'appartenance  $\mu_{A_1} \otimes_{A_2}$ , obtenu à partir de  $\mu_{A_1}(x_1)$  et  $\mu_{A_2}(x_1)$ .

Si l'opérateur  $\otimes$  est la fonction ET (ou l'intersection), on définit

$\mu_{A_1 \cap A_2}$  ainsi :

$\mu_{A_1 \cap A_2} = \min(\mu_{A_1}, \mu_{A_2})$ , où le symbole  $\min$  désigne la fonction qui extrait la plus petite valeur.

**Règles de la logique floue**

Elles utilisent les opérateurs logiques flous précédents, mais appliqués à plusieurs variables linguistiques différentes, comme température et pression par exemple.

Pour un calcul flou utilisant 2 variables floues  $x_1$  et  $x_2$  dites d'entrée et une variable floue  $y$  dite de sortie, les « calculs » s'expriment suivant une règle dont l'énoncé a la forme suivante :

si  $x_1 = A_1$  et si  $x_2 = B_2$  alors  $y = C_3$

Cette règle SI... ET... ALORS... doit être interprétée comme suit, pour un couple de valeurs  $x_{10}$  et  $x_{20}$  donné :

si  $x_1$  appartient à la la classe  $A_1$  avec le degré  $\mu_{A_1}(x_{10})$  ET si  $x_2$  appartient à la la classe  $B_2$  avec le degré  $\mu_{B_2}(x_{20})$  ALORS  $y$  appartient à la classe  $C_3$  avec le degré d'appartenance  $\mu'_{C_3} = \mu_{C_3} \oplus \mu_{(A_1(x_{10}) \cap B_2(x_{20}))}$  où  $\oplus$  représente l'opérateur traduisant l'implication.

Si la règle est interprétée au sens de Mamdani (voir exercice corrigé), alors  $\oplus = \min$ .

Le schéma de la figure 3 précise la règle. Un correcteur flou utilisera plusieurs règles, représentées par une table (voir chapitre 20).

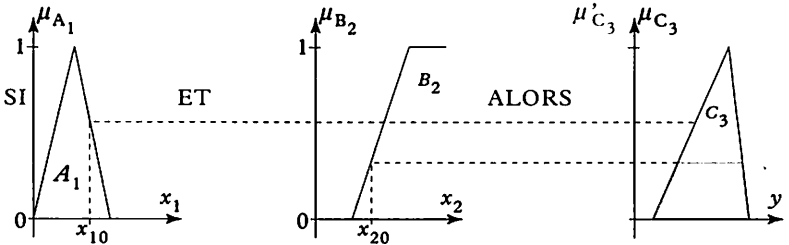


Fig. 5

**4 Fuzzification**

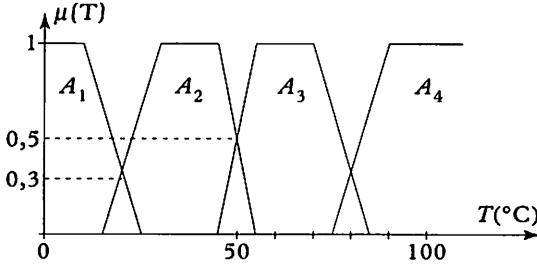
Désormais utilisé en français, ce terme semble préférable à « flouification ». Il provient de l'expression anglaise « fuzzy set » qui veut dire sous-ensemble flou.

La fuzzification permet de transformer une variable d'entrée (par exemple, une température) en variable floue dite variable linguistique.

Chaque variable floue est, en général, composée d'un triplet que l'on peut symboliser par  $(V, E, C_v)$  où :

- $V$  est la variable (par exemple, la température).
- $E$  définit l'ensemble de référence (en général, l'échelle d'un transmetteur) où  $V$  prend ses valeurs.

•  $C_v$  définit les classes d'appartenance (sous-ensembles flous de  $E$ ) qui sont utilisées pour caractériser  $V$ .  
 La figure 4 permet de comprendre une fuzzification de température à 4 classes.



Légende :

- $A_1$  = classe TRÈS FROID
- $A_2$  = classe FROID
- $A_3$  = classe CHAUD
- $A_4$  = classe TRÈS CHAUD

Fig. 6

## 5 Défuzzification

Cette opération permet d'obtenir une action précise (exemple : calcul du  $Y_R$  d'un régulateur ou de sa variation  $\Delta Y_R$ ) à partir du résultat d'un calcul flou.

On reviendra dans le chapitre 20 sur les règles utilisées dans un correcteur flou, mais on peut déjà dire que leur application fournit un jeu (au sens d'ensemble, mais ce terme est à éviter ici) de valeurs floues, chaque valeur étant l'application d'une règle (fig. 5).

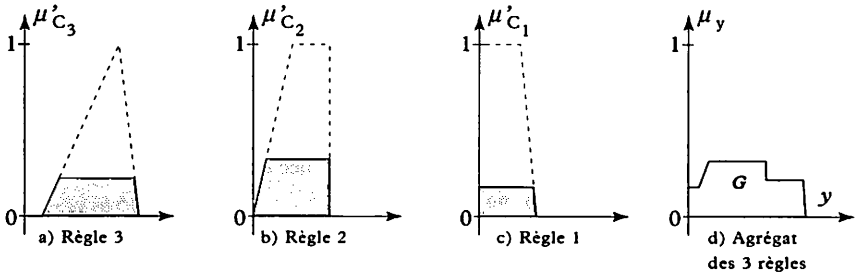


Fig. 5

On combine alors les fonctions d'appartenance de ces valeurs de « sortie » selon divers opérateurs, le plus classique consistant à retenir le degré d'appartenance maximal. Il résulte alors une valeur floue unique de sortie  $Y_F$ .

$Y_F$  étant une valeur floue, elle est définie par sa fonction d'appartenance dans son domaine de définition. La défuzzification est l'opération qui permet de calculer la valeur unique  $Y_R$  du signal de commande. La méthode la plus connue consiste à calculer le centre de gravité de l'ensemble flou  $Y_F$  et de retenir cette valeur pour  $Y_R$ .

# Exercice résolu

L'opérateur d'implication  $\oplus$  au sens de Mamdani est la fonction min. Elle présente la particularité de fournir des fonctions d'appartenance  $\mu'_C$  ayant la forme de trapèzes, que les classes  $C_i$  soient définies sous forme de trapèzes ou de triangles.

L'agrégation des résultats des diverses règles conduit à «superposer» plusieurs trapèzes. L'opération de défuzzification impose la recherche du centre de gravité de cette surface, ce qui n'est pas sans poser un sérieux problème de géométrie. Il est possible de définir l'opérateur d'implication  $\oplus$  au sens de Larsen. Cette méthode est particulièrement bien adaptée à des classes définies sous forme de triangles, pour la variable  $y$  de sortie.

On rappelle que  $\mu'_{C3} = \mu_{C3} \oplus \mu_{(A1(x_{10}) \cap B2(x_{20}))}$ . Si la règle est interprétée au sens de Larsen, alors l'opérateur correspond au produit cartésien. Le schéma de la figure 8 précise l'application de la règle.

On applique la méthode de Larsen, avec 2 règles, pour des classes de  $y$  définies comme indiquées à la figure 6.

L'agrégation concerne alors 2 classes disjointes ou non, de hauteurs  $h_1$  et  $h_2$ , de centres de gravité partiels  $G_1$  et  $G_2$ , de coordonnées  $y_1$  et  $y_2$ .

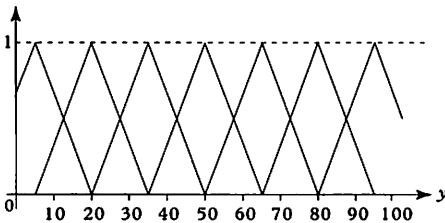


Fig. 6

- Déterminer l'expression de  $Y_R$  pour 2 classes disjointes.
- Déterminer l'expression générale de  $Y'_R$  pour 2 classes ayant une partie commune.
- Déterminer l'erreur commise en utilisant le résultat de la question 1 dans ce cas. Conclure.

**Solution :**

### 1. Cas de 2 classes disjointes

Les 2 triangles étant isocèles, leurs surfaces respectives valent  $\frac{1}{2} HL$  où  $L$  est la

largeur de la classe, à la base, c'est-à-dire 30 % dans le cas présent.

Le barycentre pondéré par les surfaces a donc pour coordonnée :

$$Y_R = \frac{15 h_1 y_1 + 15 h_2 y_2}{15 h_1 + 15 h_2} = \frac{h_1 y_1 + h_2 y_2}{h_1 + h_2}$$

Calcul très rapide pour un système numérique.

### 2. Cas d'une partie commune

Par rapport au cas précédent, il faut retrancher la partie commune (figure 7) en la pondérant par une aire comptée négativement.

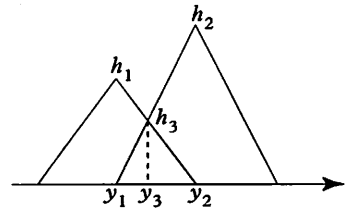


Fig. 7

Un calcul géométrique rapide montre

que  $h_3 = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}$  et que l'abscisse du sommet de la partie commune vaut :

$$y_3 = \frac{h_1 y_2 + h_2 y_1}{h_1 + h_2}$$

Le barycentre a désormais pour coordonnée exacte :

$$Y'_R = \frac{15 h_1 y_1 + 15 h_2 y_2 - 7,5 h_3 y_3}{15 h_1 + 15 h_2 - 7,5 h_3}$$

$$Y'_R = \frac{h_1 y_1 + h_2 y_2 - 0,5 h_3 y_3}{h_1 + h_2 - 0,5 h_3}$$

### 3. Erreur commise

Elle est égale à  $\varepsilon = Y'_R - Y_R$  et peut être graphée pour  $h_1$  et  $h_2$  variant de 0 à 1. On constate que la surface  $\varepsilon(h_1, h_2)$  obtenue (figure 9) reste inférieure à 1,5 % ( $Y_R$  variant de 0 à 100 %), ce qui permet de conclure que le calcul simplifié de  $Y_R$  est suffisant et facilite l'algorithme de défuzzification.



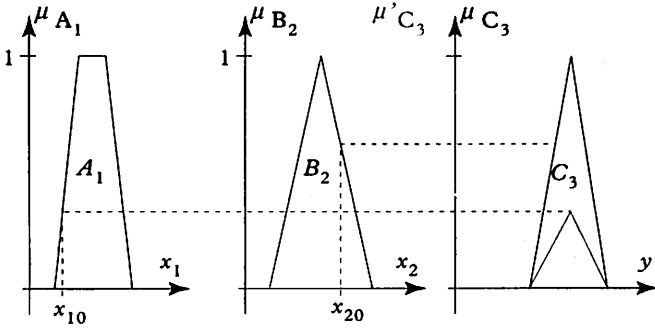


Fig. 8 - Méthode de Larsen

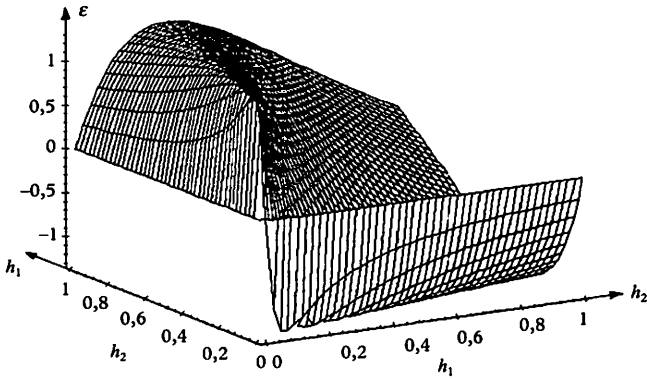


Fig. 9

La commande floue a pour but de traiter des problèmes de commande de processus à partir uniquement de connaissances de comportement que des spécialistes du procédé (on parle alors « d'experts ») doivent formuler sous une forme adaptée, c'est-à-dire linguistique (avec des mots).

Cette définition implique que la connaissance des diverses fonctions de transfert n'est pas nécessaire. De plus, la description du comportement peut être floue, c'est-à-dire imprécise, et alors l'utilisation de variables linguistiques floues est idéale pour son codage.

## 1 Structure générale d'un contrôleur flou

Un contrôleur flou (ce terme est mieux adapté que régulateur en logique floue) est un « système expert », fonctionnant à partir d'une représentation des connaissances basée sur les ensembles flous. Sa structure peut être décrite par le schéma de la figure 1.

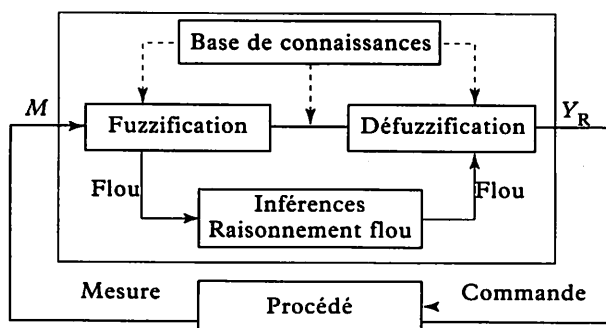


Fig. 1

Comme dans tout système expert, on trouve une base de connaissances et une logique de prise de décision, utilisant un raisonnement basé sur des règles d'inférence.

### Base de connaissance

Elle contient les définitions des termes utilisés dans la commande et les règles de comportement décrivant le comportement de l'expert.

### Moteur d'inférence

On appelle « inférences » les raisonnements du système expert en fonction des bases établies.

En logique floue, les inférences sont exprimées sous forme de règles (voir le chapitre 19).

Le moteur d'inférence est l'unité de traitement appliquant les règles d'inférence.

L'état du système à commander étant décrit par une ou plusieurs variables linguistiques floues dite « d'entrée », déterminées à partir du signal de mesure  $M$ , le moteur d'inférence applique les règles de la base à ces variables et fournit une variable floue de commande. L'étape de « défuzzification » élabore ensuite une commande  $Y_R$  non floue, applicable au système à commander.

## 2 La base de connaissances

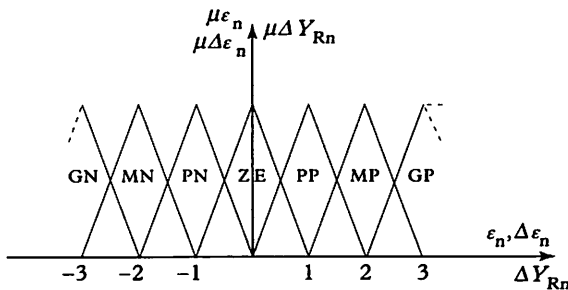
Elle comporte 2 parties :

### La base de données (les objets manipulés)

Elle fournit les définitions nécessaires à la manipulation de données floues et à la création des règles dites « linguistiques ».

Exemple : la plupart des contrôleurs choisissent d'utiliser deux variables d'entrée : le signal d'écart  $\varepsilon = W - M$  et sa variation  $\Delta\varepsilon$  entre 2 instants d'échantillonnage. Ces deux informations permettent de définir une information de position et de vitesse d'évolution de la mesure.

La fuzzification de ces deux variables linguistiques est généralement décrite par les sous-ensembles flous de la figure 2, sur un espace de discours normalisé de  $-3$  à  $+3$  pour le couple décrivant l'état normalisé  $(\varepsilon_n$  et  $\Delta\varepsilon_n)$ .



Fonctions d'appartenance sur un univers normalisé de  $-3$  à  $+3$ .

GN : négative grande, MN : négative moyenne, ..., ZE : zéro, PP : positive petite, ...

Fig. 2

Pour une valeur de  $\varepsilon$  donnée, on obtient donc deux sous-ensembles flous, avec deux degrés d'appartenance (compte tenu de l'allure des classes).

La variable floue de sortie est habituellement associée à la variation  $\Delta Y_R$  du signal de commande, entre deux instants d'échantillonnage, sous forme normalisée puis dénormalisée.

On note que l'on pilote donc la *vitesse* de variation de  $Y_R$ . Les fonctions d'appartenance de type triangulaire facilitent les calculs. L'obtention du signal  $Y_R$  nécessite ensuite l'emploi d'un étage intégrateur en sortie.

La prise en compte plus ou moins importante de  $\varepsilon$  et  $\Delta\varepsilon$ , ainsi que de la vitesse maximale autorisée pour  $Y_R$  s'effectue au moyen de 3 gains ajustables, conformément à la figure 3.

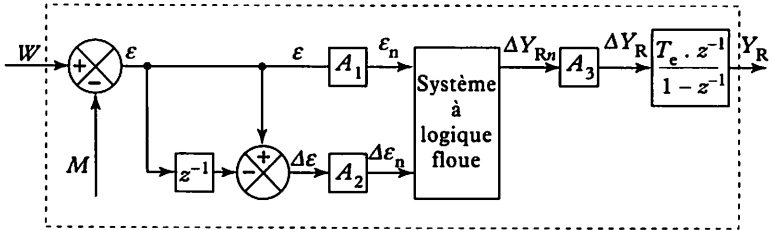


Fig. 3. Structure d'un correcteur flou standard

### La base des règles linguistiques de commande (les règles de manipulations)

Le comportement dynamique du contrôleur est caractérisé par un ensemble de règles linguistiques, fondées sur une description en langage expert. Elles s'énoncent souvent sous la forme :

SI < condition logique floue > ALORS < conséquence sur une classe de la variable de sortie >.

Exemple : SI  $\varepsilon_n$  est GP ET SI  $\Delta\varepsilon_n$  est PN ALORS  $Y_{Rn}$  est MP.

Dans un moteur d'inférence floue, il n'y a pas d'enchaînement des règles : elles sont toutes actives simultanément. On parle souvent de « fonctionnement en parallèle ».

Le fonctionnement de ces règles a été décrit au chapitre 19.

La prise en compte de 2 variables d'entrée et d'une variable de sortie conduit à définir 49 règles d'inférence, que l'on peut regrouper dans un tableau (fig. 4). Ce tableau est général et peut convenir pour tout contrôleur flou.

Le calcul de l'agrégat des règles est souvent réalisé au sens de Larsen, pour la rapidité des calculs et leur simplicité.

Le réglage de la valeur des gains  $A_i$  permet d'obtenir une réponse plus ou moins amortie. Ces gains sont souvent non accessibles à l'utilisateur. Parfois, ils peuvent apparaître sous forme de coefficients de réglage pour l'utilisateur et sont appelés *facteurs d'échelle floue* : plus  $A_1$  est grand et plus le régulateur réagit vite (ce qui augmente le risque d'instabilité). Plus  $A_2$  augmente et plus le risque d'instabilité diminue. On retrouve des constantes analogues aux coefficients  $K_p$  et  $K_d$  des régulateurs PID, le coefficient  $A_3$  étant assimilable à  $K_i$ .

$\begin{matrix} \varepsilon_n \\ \Delta\varepsilon_n \end{matrix}$	GN	MN	PN	ZE	PP	MP	GP
GN	GN						
MN		MN					
PN			PN				
ZE				ZE			
PP					PP		
MP						MP	
GP							GP

Fig. 4 – Table de décision, représentant les règles d'inférence floue.

### 3 Performances d'un contrôleur flou

L'expérience montre que les correcteurs totalement flous sont très robustes et peuvent être utilisés dans des procédés fortement non linéaires et évolutifs.

Cependant, de nombreux constructeurs préfèrent encore conserver une structure PID, l'action floue fonctionnant en parallèle, essentiellement pour la prise en compte des perturbations. On obtient ainsi des régulateurs sans *overshoot* et permettant une compensation rapide des perturbations.

On notera que leur structure interne est alors proche de celle des régulateurs auto-adaptatifs (utilisant un système expert) et qu'ils en ont les performances.

On notera que de nombreux outils de conception assistée par ordinateur (CAO) comportent les outils permettant un contrôle flou et qu'il existe même des microprocesseurs spécialisés pour la logique floue. La simplicité d'apprentissage et de mise en œuvre de ces outils devrait favoriser l'emploi de la commande floue, dans les domaines où elle est performante, domaines qui ne sont peut-être pas celui de la régulation avancée, où l'absence de critères généraux de réglages et de stabilité nuit à l'emploi de ces techniques.

On trouvera pages suivantes un complément sur les emplois industriels de la logique floue.

Les réalisations en temps discret nécessitent un échantillonnage d'une grandeur, avec une précision plus ou moins grande (8, 12 ou 16 bits), les valeurs échantillonnées étant ensuite codées sous forme d'information utilisant la notation en virgule flottante (mantisse et exposant). Cette technique de codage impose d'importantes capacités en mémoires vives.

La manipulation de ces informations dans un algorithme de régulation (faisant essentiellement appel aux opérations somme, produit, quotient) nécessite une unité centrale ayant de bonnes performances en traitement. Celles-ci sont obtenues soit par l'emploi d'un coprocesseur de calcul en virgule flottante (dit « coprocesseur mathématique ») soit par l'emploi d'un microprocesseur puissant (16 ou 32 bits). Ces solutions étaient toutes deux onéreuses à l'époque de l'apparition des premières réalisations en logique floue.

Les impératifs économiques ont entraîné la nécessité de pouvoir fabriquer des régulateurs sophistiqués au coût le plus faible possible. On peut alors légitimement se poser la question : une boucle élémentaire, relevant d'une régulation de type PID, nécessite-t-elle une solution technologiquement onéreuse ?

L'évolution des performances des microprocesseurs a rendu caduc un tel raisonnement. En outre, l'utilisation de la logique floue en régulation va à l'encontre de l'évolution historique : connaître le plus précisément possible la dynamique d'un procédé, afin de le modéliser.

Les constructeurs se contentent le plus souvent d'un moteur PID, complété par de la logique floue pour des performances particulières.

- De nombreux régulateurs PID auto-adaptatifs utilisent la logique floue au niveau du moteur d'inférence chargé

de modifier les paramètres de réglage  $X_p$ ,  $T_p$ ,  $T_d$ . La logique floue permet alors d'obtenir un moteur simple et robuste.

- D'autres constructeurs se contentent d'utiliser un complément flou pour traiter les divers événements perturbateurs d'une boucle PID. En cas de brutale variation de l'écart  $\varepsilon$ , un module élabore une consigne corrigée permettant de limiter les dépassements dus à l'action intégrale (figure 5) : la stratégie consiste à limiter l'intégrale de  $\varepsilon(t)$ . On retrouve un dispositif proche de certaines réalisations du correcteur de Smith, mais qui ne nécessite pas de modèle du système.

L'emploi de la logique floue est limité en régulation, mais il ne faut pas en minimiser les possibilités. Les techniques floues trouvent de nouveaux débouchés dans les capteurs « intelligents », et plus particulièrement dans les cellules photo-électriques.

L'utilisation de ces techniques permet :

- de supprimer l'arrière-plan d'un produit à contrôler ;
- de s'adapter à différentes couleurs d'un produit ;
- de s'adapter à des positionnements variables dans l'espace ;
- d'estimer des perturbations lumineuses passagères.

Le contrôle d'accès, la sécurité incendie... exploitent des techniques floues. Les applications de reconnaissances de formes, où de grosses puissances de calcul sont nécessaires, peuvent tirer parti des solutions robustes offertes par la logique floue.

Plus généralement, la logique floue trouve chaque jour des débouchés pour résoudre des problèmes d'automatique au sens large.

Un exemple est la conception de robots d'intervention, en milieu hostile, comme par exemple dans le domaine nucléaire. Autant il est facile de faire circuler un dispositif à che-

nilles sur une surface horizontale, autant il est difficile de concevoir un dispositif capable de gravir des escaliers. Un contrôleur de stabilité flou permet de concevoir un tel dispositif. Le domaine automobile est aussi un terrain de choix pour la mise en œuvre de dispositifs à logique floue, tant dans le domaine des suspensions actives que de la carburant. On retiendra que la logique floue se développe lentement mais sûrement.

Toutefois le plus souvent, elle ne sera pas directement accessible à l'utilisateur. Pour ce qui concerne la régulation, un correcteur flou n'est requis que pour un procédé mal défini, constamment variable et généralement multivariable. Les systèmes automatisés complexes, qui mettent en œuvre des automates programmables industriels aux possibilités parfois limitées, peuvent également tirer le plus grand profit de la logique floue.

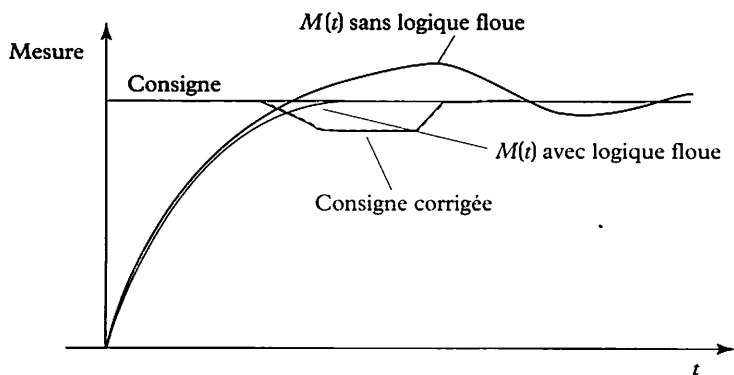
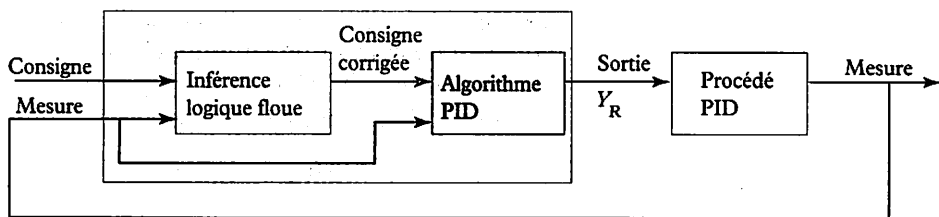


Fig. 5

L'adjectif « prédictif », de même que le terme « modèle interne », est utilisé dans de nombreuses circonstances. Dans le terme « prédicteur de Smith », il ne fait que décrire un dispositif interne permettant d'anticiper (sur l'action intégrale) la fin d'un temps mort naturel.

On ne confondra pas cette acception avec la signification qui est développée dans ce chapitre.

## 1 Limite des régulateurs à modèle interne, en technologie analogique

À un instant  $t$ , le signal de commande  $Y_R(t)$  est appliqué au procédé et à un modèle interne (éventuellement fourni sous forme d'état). La différence  $M(t) - \tilde{M}(t)$ , à l'instant  $t$ , est alors utilisée pour modifier  $Y_R(t)$ , en fonction d'un objectif de comportement, appelé modèle de référence et servant à déterminer la structure du correcteur.

Au niveau de celui-ci, la forme d'état permet de disposer d'infor-

mations « anticipatrices » telles que  $\frac{d\tilde{M}(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2\tilde{M}(t)}{dt^2}$ ... Ces der-

nières permettent de « prédire » l'avenir proche de  $M(t)$ , en fonction de son passé proche.

La figure 1 permet de caractériser deux scénarios d'évolution.

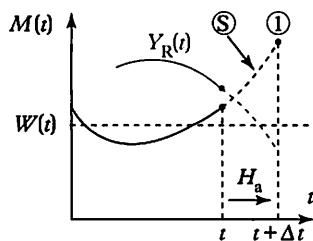


Figure 1 a)

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_t > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2M}{dt^2}\right)_t > 0$$

Ⓢ = scénario prévisible

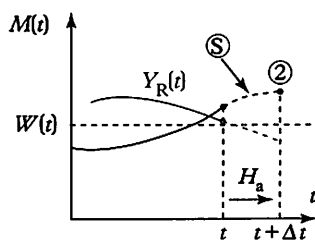


Figure 1 b)

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_t > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2M}{dt^2}\right)_t < 0$$

$H_a$  = horizon d'anticipation

Fig. 1

Les informations disponibles dans le cas ① conduisent à élaborer une forte diminution de  $Y_R$  à l'instant  $t$ . En revanche, le scénario ② conduit à ne pas trop diminuer  $Y_R$ .

En tout état de cause, on dira que l'horizon temporel d'anticipation  $H_a$  reste limité.



Que peut apporter la technologie numérique, traitée dans les chapitres qui précèdent ?

Un de ses avantages est la possibilité de mémoriser les événements passés (sur  $M(t)$ ,  $Y_R(t)$  ou  $Z(t)$ ) sur une durée plus ou moins longue. À l'aide d'une équation récurrente, cette mémoire du passé permet un calcul optimisé de la commande  $Y_{Rn}$  au seul instant d'échantillonnage présent.

On peut alors se poser la question suivante : si la puissance de calcul est suffisante, ne peut-elle pas permettre d'imaginer des scénarios d'évolution pour  $Y_R(t)$  et  $M(t)$ , pour une durée assez longue ?

Parmi ceux-ci, le calculateur ne peut-il pas choisir la séquence de commande jusqu'à  $Y_{Rn+k}$  conduisant la mesure à rejoindre sa valeur de consigne en un temps donné ?

À l'instant d'échantillonnage,  $nT_e$  ne peut-il pas appliquer la première valeur  $Y_{Rn}$  du scénario retenu ?

Ne peut-il pas alors, à l'échantillonnage suivant, reprendre les mêmes calculs ?

Une telle démarche est celle des régulateurs prédictifs .

## 2 Principe d'un régulateur prédictif

Les remarques ci-dessus montrent que le régulateur prédictif peut être envisagé comme apparenté au correcteur à modèle interne, bénéficiant des avantages de la technologie numérique : mémorisation et puissance de calcul.

### Définition du modèle interne

En technologie numérique, le modèle interne est décrit par une équation récurrente :

$$M_n = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i M_{n-i} + \sum_{j=1}^{j=n} \mu_j Y_{Rn-j} .$$

Bien évidemment, il est possible de masquer cet aspect à l'utilisateur en lui faisant manipuler des informations qu'il connaît mieux, en technique analogique : temps mort  $T$ , ordre  $n$  du système...

Pour les dispositifs les plus puissants, ce modèle peut ensuite être adapté en temps réel (voir chapitre 13).

### Définition d'un modèle de référence

Comme pour tout correcteur spécifique, le technicien de mise en œuvre doit spécifier un modèle de référence. Celui-ci est introduit en des termes analogues à ceux utilisés pour le modèle interne.

On rappelle que définir un modèle de référence (sous forme transfert ou sous forme de pôles et zéros) revient implicitement à se donner la réponse temporelle à un stimulus quelconque. En technique

prédictive, l'évolution désirée de la mesure (objectif spécifié) est représentée par la trajectoire de référence.

### Définition du correcteur

Il n'est naturellement pas représentable graphiquement. C'est un algorithme informatique décrit par un certain nombre d'informations.

#### a) Horizon de coïncidence ou de prédiction $H_p$

C'est l'intervalle de temps (dans le futur) sur lequel on cherche à ce que la trajectoire prédite  $\tilde{M}_{n+k}$  (déterminée à partir du modèle interne) soit la plus proche possible de la trajectoire de référence  $M_{Rn+k}$ .

#### b) Algorithme de minimisation

On utilise habituellement un critère quadratique (méthode des moindres carrés) cherchant à minimiser la somme des carrés des écarts entre les deux trajectoires  $\tilde{M}(t)$  et  $M_R(t)$  aux instants d'échantillonnage. Sur un horizon de contrôle ou de commande  $H_c$ , l'algorithme calcule la suite des valeurs  $Y_{Rn+j}$  à fournir à l'instant présent et dans le futur, pour minimiser cet écart.

Le fonctionnement peut être décrit par les courbes d'évolution de la figure 2.

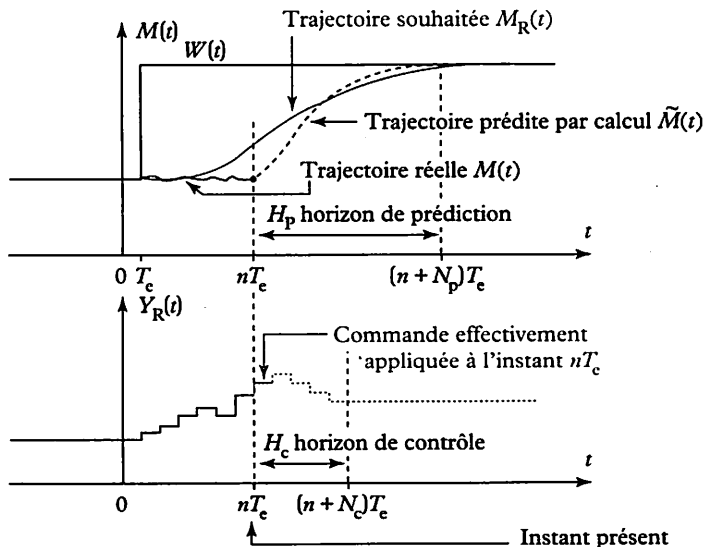


Fig. 2

## 3 Réglage du régulateur

### Choix de la période d'échantillonnage $T_e$

On se reportera aux chapitres 14 à 18.

### Choix de l'horizon $H_p$

Augmenter ce paramètre permet d'obtenir un effet adoucissant sur l'évolution de  $M(t)$  et  $Y_R(t)$  puisqu'on dispose de plus de temps pour coïncider. Il ne doit cependant pas être pris trop court.

En revanche, une diminution de  $H_p$  augmente l'instabilité vis-à-vis d'une erreur de modèle. En général, pour ce paramètre, on adopte une durée dont l'ordre de grandeur est le temps de réponse en chaîne ouverte.

### Choix de l'horizon $H_c$

Augmenter ce paramètre accélère la réponse du correcteur, toujours au prix d'un effort de calcul. Or il faut se souvenir que seule la première valeur  $Y_{Rn}$  de la séquence des  $Y_{Rn+k}$  sera appliquée en sortie.

On adopte en général  $H_c = N_c T_c$  avec  $N_c$  entier compris entre 1 et 4.

### Remarque

Il faut signaler qu'il existe d'autres approches. L'une d'elles consiste notamment à structurer l'aspect de la grandeur réglante  $Y_R$  sur un horizon  $H_c = H_p$ . Pour les variations de ce signal, on adopte des fonctions définies *a priori*, sous forme d'un polynôme par exemple. L'algorithme de minimisation permet ensuite la détermination des coefficients de cette fonction. Ce type de réalisation permet une commande plus douce, compatible avec les actionneurs habituels.

## 4 Conclusions

Les implémentations industrielles sont nombreuses, certaines permettant une prise en compte d'une tendance, vis-à-vis d'une perturbation mesurable  $Z(t)$ .

Parfois non disponibles en standard sur les SNCC, elles sont alors proposées sous forme de logiciel optionnel, mis en œuvre à partir du SNCC ou d'un PC relié au SNCC.

Une fois le paramétrage effectué et éventuellement testé en simulation, il est téléchargé dans le régulateur concerné.

Compte tenu de la lourdeur des moyens mis en œuvre, la technique prédictive est surtout utilisée pour les boucles dites de supervision. Ces dernières concernent les grandeurs importantes d'une unité, telle que la qualité d'un produit ou l'épaisseur d'une feuille d'aluminium par exemple.

On retiendra qu'elle s'adapte bien aux installations devant présenter régulièrement des changements de régime de charge, connus *a priori*. Le tableau comparatif de l'annexe page 126 permet au technicien d'apprécier les performances comparées des différentes familles de régulateurs.

On trouvera aux deux pages suivantes une annexe technique publiée avec l'aimable autorisation de la société Honeywell.

### Document technique sur les régulateurs prédictifs (Honeywell)

Le contrôle robuste met en œuvre des techniques permettant à l'ingénieur de concevoir des contrôleurs dont les performances restent cohérentes à travers l'ensemble des conditions de fonctionnement prévu. À présent, le contrôle robuste est utilisé dans des solutions prêtes à l'emploi et se traduit par des améliorations considérables dans les performances de contrôle.

#### *Contrôle prédictif à base de modèle*

L'obstacle principal à l'utilisation des techniques classiques réside dans le fait qu'elles aboutissent à un contrôleur incapable de gérer les contraintes sur les variables manipulées.

En pratique, le problème de contrôle en comporte (en exploitation, les vannes sont souvent entièrement ouvertes ou fermées). Par conséquent, les industries de procédé ont adopté le contrôle prédictif à base de modèle (MBPC ou MPC) en tant qu'outil principal pour le contrôle multivariable.

Les premiers outils ont connu un certain succès mais rencontraient certaines difficultés limitant les performances de contrôle. Ils comportaient un contrôleur et un optimiseur (souvent un programme linéaire) en amont de ce contrôleur, qui réglait les consignes afin de gérer les variables contrôlées non prises en charge, uniquement en régime établi.

La plupart des MBPC modernes résolvent formellement un problème d'optimisation, généralement à l'aide d'un programme quadratique. Cette approche a été adoptée par Honeywell lors du développement de sa technologie RMPCT (Robust Model Predictive Controller Technology).

#### *Conception robuste en technologie RMPCT*

L'algorithme de contrôle utilise un pro-

gramme quadratique pour trouver le jeu optimal d'ajustements des variables manipulées permettant d'amener l'ensemble des variables contrôlées à leurs consignes (ou plages de consignes) respectives en une fraction du temps de stabilisation en boucle ouverte spécifiée par un ingénieur.

Ce problème d'optimisation considère l'ensemble des variables contrôlées, sur un horizon de temps qui mènera à un régime établi en tenant compte, de manière rigoureuse, des limites des variables manipulées.

Une option est proposée dans la procédure de conception pour permettre à l'ingénieur de concevoir le contrôleur en tenant compte des incertitudes des modèles dynamiques des procédés.

L'outil de conception choisit un modèle dynamique du procédé qui minimise les ISE maximum (erreur quadratique de l'intégrale) pour une variation de consigne, sur l'ensemble des variables contrôlées et pour l'ensemble des comportements dynamiques attendus du procédé.

#### *Gestion de l'évolution des variables du contrôleur*

Lors du contrôle d'un procédé multivariable, il est important de bien conditionner le problème. Si, par exemple, le contrôleur tente de contrôler deux températures de colonne, il se peut que les deux températures évoluent de manière fortement parallèle (exemple : si le débit de « reboil » est augmenté les deux températures s'élèveront). Dans ce dernier cas, le problème est mal conditionné.

Il est donc nécessaire de régler le contrôleur lorsqu'il est mal conditionné afin qu'il reste stable lorsque le comportement dynamique du procédé s'écarte de celui pour lequel le contrôleur a été conçu.

Le RMPCT a été développé pour résoudre ce type de problème, ce qui aboutit à ralentir le contrôleur. Une approche à base de règles (appelée

gestion de seuils sur valeurs singulières) assure que l'agressivité du contrôleur est réglée de façon à pouvoir s'accommoder du conditionnement du problème.

#### *Utilisation de plages pour améliorer la robustesse*

Le RMPCT comporte un algorithme de contrôle de plage comme algorithme de base. Cet algorithme permet à l'ingénieur de spécifier soit des consignes, soit des plages de consignes. En spécifiant une plage au sein du contrôleur, sa robustesse est améliorée. Avec une plage, le contrôleur cesse de modifier les réglages dès que la prédiction sur le procédé tombe dans cette plage, ce qui réduit globalement les ajustements destinés à compenser l'erreur de modélisation.

#### *Autres améliorations du RMPCT*

Parmi ces améliorations, une des plus intéressantes sur le plan économique est le «feedforward» réglable. Avec RMPCT, l'ingénieur de contrôle peut régler le contrôleur pour éliminer les perturbations mesurées plus rapidement.

#### *Résumé*

Les développements dans le domaine du contrôle robuste sont accessibles à présent pour la communauté industrielle, sous une forme facile à comprendre et à utiliser. Ces techniques ont été utilisées pour résoudre des problèmes à une variable et à variables multiples, en permettant un contrôle plus performant et une exploitation plus rentable du procédé.

Les caractéristiques les plus intéressantes sont les suivantes :

- Si un modèle approximatif est suffisant, une méthode à base de courbe

de réponse peut être utilisée et les données saisies manuellement.

- La procédure d'identification est la plus automatique possible : l'ingénieur n'a pas besoin de définir l'ordre du modèle ou le retard pur.
- Grâce aux outils de simulation fournis, l'ingénieur peut tester entièrement le contrôleur avant de l'utiliser en boucle fermée.
- Le contrôleur supporte les consignes et plages de consignes, ce qui améliore la robustesse et l'immunité aux bruits.
- L'algorithme de contrôle de plage du RMPCT effectue la compensation la plus faible permettant de maintenir le procédé dans la plage ou à la consigne.
- Utilisation de l'estimation d'états pour les procédés intégrateurs (exemple : niveaux) pour améliorer globalement le procédé.
- La pondération des sorties permet à l'ingénieur de définir quelle variable doit être manipulée en priorité.
- L'optimiseur prend en compte à la fois les valeurs contrôlées et manipulées.
- Le contrôleur est industrialisé et comporte tous les auxiliaires de contrôle (initialisation, rampes...).
- Le contrôleur est résident sur le système TDC 3000 d'Honeywell mais peut fonctionner aussi sur les ordinateurs de supervision et donc être utilisable sur d'autres systèmes.

Type de correcteurs Critère	PID	PID auto-adaptatif	Correcteurs à modèle interne	Correcteur en z	Correcteur flou	Correcteur prédictif
Disponibilité sur SNCC	BIEN	BIEN	MOYEN	MÉDIOCRE	MOYEN	MÉDIOCRE
Réglage et mise en œuvre	BIEN	BIEN	MÉDIOCRE	MOYEN	BIEN	MOYEN
Robustesse en intensité de paramètres	MOYEN	BIEN	BIEN	MOYEN	BIEN	MOYEN
Robustesse en distance de structure	MOYEN	MOYEN	BIEN	MOYEN	MOYEN	MOYEN
Temps mort important	MÉDIOCRE	MÉDIOCRE	BIEN	BIEN	MÉDIOCRE	BIEN
Processus non modélisable	MOYEN	MÉDIOCRE	MÉDIOCRE	MÉDIOCRE	BIEN	MÉDIOCRE
Performances en régulation multi-variable	MÉDIOCRE	MÉDIOCRE	MOYEN	MOYEN	BIEN	BIEN
Prise en compte des contraintes	MOYEN	MOYEN	MOYEN	MOYEN	MOYEN	BIEN
Mesure à période d'échantillonnage grande	MÉDIOCRE	MÉDIOCRE	BIEN	BIEN	MÉDIOCRE	MOYEN

# Annexe : Principaux symboles utilisés

## Procédé :

$\rho$  : masse volumique d'un fluide  
 $S$  : surface d'un bac  
 $Q$  : débit (ex. :  $Q_e$  débit entrant,  
 $Q_v$  débit volumique,  $Q_m$  débit massique)

## Système :

$\tau$  : constante de temps  
 $n$  : ordre d'un système  
 $K$  : gain statique d'un système stable  
 $M$  : signal de mesure  
 $Z$  : signal perturbateur principal

## Second ordre :

$\lambda$  : coefficient d'amortissement  
 $\omega$  : pulsation (ex. :  $\omega_0$  pulsation propre ;  
 $\omega_R$  pulsation de résonance ;  $\omega_c$  ou  $\omega_b$  pul-  
sation de coupure)

## Régulateur :

$\varepsilon$  : signal d'écart mesure/consigne  
 $W$  : signal consigne (ex. :  $W_e$  consigne  
externe)  
 $Y_R$  : signal réglant (de sortie) d'un régulateur  
 $A$  : amplification d'un régulateur  
 $T_i$  : coefficient d'action proportionnel ( $K_p = A$ )  
 $K_p$  : constante de temps d'action intégrale  
 $K_d$  : coefficient d'action dérivée ( $T_d$  ou  
 $A.T_d$  suivant la structure du régulateur)

## Fonction de transfert :

$G$  : gain logarithmique  
 $H(p)$  : fonction de transfert isomorphe du  
procédé seul  
 $C(p)$  : fonction de transfert du régulateur  
 $F(p)$  fonction de transfert en chaîne fer-  
mée  
 $P(p)$  : polynôme caractéristique. Numé-  
rateur de la fraction rationnelle  $1 + T(p)$

## Performances :

$D_1$  : premier dépassement

## Signaux :

$u(t)$  : échelon d'amplitude unitaire

$\theta$  : température

$G$  : grandeur (ex. :  $G_R$  grandeur réglante ;  
 $G_I$  (grandeur incidente))

$T$  : temps mort (ou temps de retard)

$k$  : gain dynamique d'un système intégrateur  
 $m = \Delta M$  : petite variation de mesure  
 $z = \Delta Z$  : petite variation de  $Z$

$Q$  : facteur de résonance

$w = \Delta W$  : petite variation de consigne  
 $y_R = \Delta Y_R$  : petite variation de signal réglant  
 $X_p$  : bande proportionnelle ( $X_p = 100/A$ )  
 $T_d$  : constante de temps d'action dérivée  
 $K_i$  : coefficient d'action intégrale ( $1/T_i$  ou  
 $A/T_i$  suivant la structure du régulateur)

$\varphi$  : phase ou déphasage (degrés ou radians)  
 $H(j\omega)$  : fonction de transfert isochrone du  
procédé seul  
 $H_z(p)$  : fonction de transfert perturbatrice  
 $T(p) = C(p).H(p)$  : fonction de transfert en  
chaîne ouverte

$T_R$  : temps de réponse à  $\pm 5\%$

$\delta(t)$  : dérivée de  $u(t)$

---

**Dans la même collection**

---

**Mémentos**

Action commerciale	177146	Gestion financière	177952
Automatismes industriels	176573	Hydraulique industrielle	177989
Comptabilité		La distribution	177733
et gestion appliquées	177155	La pratique des claviers	177988
Construction mécanique	177739	La publicité	176857
Dessin industriel	176576	Le plan comptable abrégé	177149
Droit	177139	Législation du travail	
Droit constitutionnel	177824	1995/1996	177123
Économie d'entreprise	177144	Marketing direct	177865
Économie générale	177981	Mathématiques appliquées	
Électricité - Courant continu	177787	à l'électricité - Tome 1	177150
Électricité appliquée		Mathématiques appliquées	
Exercices	177142	à l'électricité - Tome 2	176574
Électricité professionnelle		Mathématiques financières	
Tome 1	177720	appliquées	177148
Électricité professionnelle		Outils de gestion commerciale	176816
Tome 2	177785	Pneumatique industrielle	177748
Électricité professionnelle		Régulation - Tome 1	177145
Tome 3	177830	Régulation - Tome 2	177743
Électronique analogique	177788	Régulation - Tome 3	176575
Électronique de puissance	176966	Régulation - Tome 4	177928
Électronique numérique	177990	Techniques du commerce	
Électrotechnique	177992	international	177993
Études de marché	176119	Unités et grandeurs	176891
Finances publiques	177825		

---

**Références**

Communication des entreprises	177157	Gestion de la PME/PMI	177912
Denrées et boissons	177853	Maintenance	177840
Économie	177836	Marketing	177158
Électricité professionnelle	177914	Mathématiques appliquées	177738
Électrochimie	177866	Organisation et gestion des entreprises	177837
Français	177154	Précis de mathématiques	
Génie électronique	176577	et de statistiques	177979
Génie électrotechnique	176578		
Génie mécanique -			
Automatismes industriels	177737		

---

**Lexiques**

Lexique Automatismes industriels	177791	Lexique Électronique	177794
Lexique Comptabilité-Gestion	177736	Lexique Internet	177951
Lexique Éco-Droit	177926		