

C. SERMONDADE
A. TOUSSAINT
sous la direction de
R. MÉRAT & R. MOREAU

BTS

CONIL JEAN-PIERRE
18 LES NVX HORIZONS
78990 ELANCOURT
IP.CONIL@FREESURF.FR

Régulation

Tome 2
Identifications,
stabilité,
réglages

NATHAN

Sommaire

1. Identification 1 : Procédés stables	4
2. Identification 2 : Modèles de Strejc et de Broïda	8
3. Identification 3 : Procédés intégrateurs	14
4. Système bouclé 1 : Précision 1	20
5. Système bouclé 2 : Précision 2	26
6. Système bouclé 3 : Stabilité	32
7. Système bouclé 4 : Amortissement	38
8. Stabilité 1 : Critères algébriques : 1. Principes	44
9. Stabilité 2 : Critères algébriques : 2. Applications	50
10. Stabilité 3 : Critères isochrones : 1. Généralités	56
11. Stabilité 4 : Critères isochrones : 2. Diagrammes	62
12. Transformation chaîne ouverte-chaîne fermée 1 : Principe	68
13. Transformation chaîne ouverte-chaîne fermée 2 : Applications	74
14. Réglage 1 : Généralités	80
15. Réglage 2 : Système du premier ordre	86
16. Réglage 3 : Système naturellement stable	92
17. Réglage 4 : Méthode de Ziegler et Nichols	98
18. Réglage 5 : Système naturellement instable	104
19. Réglage 6 : Critère de Naslin 1 : Procédés stables	110
20. Réglage 7 : Critère de Naslin 2 : Procédés intégrateurs	116
Annexes :	
1. Nomogramme identification	122
2. Réponse indicielle	123
3. Nomogramme identification	124
4. Abaque de Nichols	125
5. Principaux symboles utilisés	126
6. Principaux résultats du tome 1	127

Ce livre s'adresse aux techniciens de la régulation qui ont besoin de disposer rapidement d'informations théoriques ou pratiques. Il est plus généralement destiné à tous ceux qui souhaitent se familiariser avec la régulation, sans se limiter aux asservissements. Ce livre est le second d'une série qui présentera l'ensemble de la régulation et du contrôle-commande des installations industrielles.

Utilisant un formalisme mathématique allégé, il regroupe les résultats essentiels de la régulation : à ce titre, il peut constituer un aide-mémoire très utile aux étudiants et aux auditeurs de la formation permanente.

Le technicien ou l'étudiant, qui désire retrouver un résultat ou une explication, est immédiatement dirigé par la table des matières vers le sujet qui l'intéresse. Pour celui qui désire bien maîtriser les lois de la régulation, les difficultés sont réparties entre des chapitres courts, qui constituent une suite d'étapes simples. Après chacune d'elles les connaissances peuvent être contrôlées et confortées avant de passer à la suivante. Cette démarche qui apporte simultanément progressivité et assurance en soi sera certainement appréciée de tous ceux que l'étude des sciences intéresse.

La présentation retenue doit permettre un accès facile à l'information recherchée et un apprentissage aisé. En effet, à chaque notion importante correspond un chapitre. Le lecteur y trouve un thème illustré d'exemples. Tous les chapitres sont accompagnés d'exercices avec leurs solutions (proposées pour des échelles de temps réduites pour simplifier).

Le contenu de chaque chapitre reste toujours simple, les auteurs ayant choisi de privilégier l'observation et l'exploitation d'expériences personnelles plutôt que l'exposé de théories et le recours systématique aux mathématiques.

Les connaissances acquises, indépendantes des technologies en perpétuelle évolution, peuvent suffire pour une bonne maîtrise des nombreux équipements de régulation, dans les domaines les plus variés.

Elles peuvent permettre aux techniciens de conception, d'installation, de maintenance et de conduite de compléter des connaissances parfois empiriques, que les contraintes modernes de qualité de production imposent de réactualiser.

1 Objectif

Confronté au problème concret de l'automatisation d'un procédé industriel, le technicien de régulation doit, de plus en plus, mettre en œuvre des régulateurs permettant une conduite optimale de l'installation. La mise en œuvre d'une stratégie de régulation nécessite une identification de nombreuses fonctions de transfert.

Lorsque les fabrications étaient essentiellement assurées par des dispositifs fonctionnant en continu, le réglage pouvait être déterminé par des méthodes empiriques, puis affiné en cours de production. Il n'avait plus alors à être modifié pendant toute la durée de fonctionnement.

De nos jours, pour des raisons économiques, la fabrication est discontinue (production « par lots » ou production Batch). L'automatisation de toutes les phases de fonctionnement, y compris des phases de démarrage et d'arrêt, nécessite alors une connaissance précise des différentes fonctions de transfert des systèmes, voire la variation de ces fonctions suivant le point de fonctionnement ou la valeur d'une perturbation.

Deux méthodes fondamentales d'identification sont utilisées :

- l'identification par modèle de connaissance ;
- l'identification expérimentale, par des méthodes temporelles ou fréquentielles ;

L'identification industrielle a fait de grands progrès ces dernières années, notamment grâce à la mise en œuvre de techniques numériques, utilisant des méthodes statistiques.

Le principe en est fourni figure 1 : le système et son modèle étant soumis, en continu, aux mêmes sollicitations d'entrée $E(t)$, les signaux de sortie respectifs $S(t)$ et $S'(t)$ sont comparés et leur écart $\varepsilon(t)$ est traité au moyen d'un logiciel qui ajuste le modèle de façon à minimiser la différence entre système et modèle.

Cette méthode permet l'identification en continu et en ligne du système. Elle autorise en même temps l'adaptation des paramètres de réglage du correcteur (régulation auto-adaptative).

A présent on va aborder des méthodes d'identification simples, pouvant être mises en œuvre sur le site par un technicien, avec le matériel installé. Elles reposent sur l'analyse d'une réponse indiciaire, autour d'un point de fonctionnement, pour des procédés considérés comme continus et linéaires.

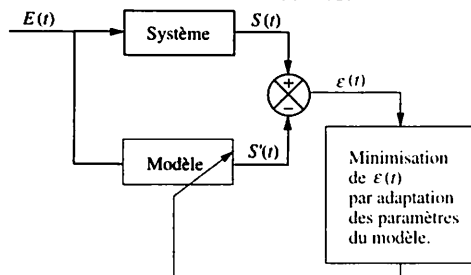


Fig. 1
Les possibilités des calculateurs modernes permettent l'identification en ligne des différentes fonctions de transfert d'un processus industriel.

2 Fonctions à identifier

L'essentiel est naturellement l'identification de la fonction de transfert réglante $H(p)$. En effet l'adoption d'un réglage empirique peut conduire à la mise en oscillation de la boucle de régulation (« pompage »). Ce problème sera abordé aux chapitres consacrés à l'étude de la stabilité (chapitres 8 à 11).

Mais il ne faut pas réduire le rôle de l'identification à la recherche d'un réglage plus ou moins performant.

D'une part, la connaissance de $H(p)$ et de la variation du gain statique en particulier, permet d'adapter le réglage du correcteur en fonction du point de fonctionnement.

D'autre part, la connaissance précise des principales fonctions de transfert perturbatrices $H_{zi}(p)$ permet l'élaboration d'une stratégie globale de régulation, mettant en œuvre simultanément des régulations en chaîne ouverte et des régulations en chaîne fermée (fig. 2).

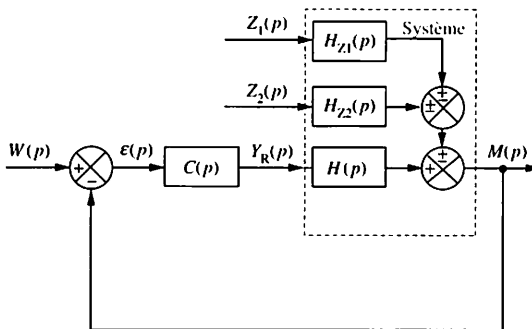


Fig. 2
Schéma fonctionnel
d'un système soumis à
deux perturbations
principales.

3 Méthodes graphiques d'identification

Identification en chaîne ouverte

- Mode opératoire

Le système doit être stabilisé autour du point de fonctionnement étudié ($Y_R(t) = \text{Cte}$ et $M(t) = \text{Cte}$), le régulateur étant en fonctionnement manuel (fig. 3). On superpose un échelon d'amplitude limitée à Y_R , de l'ordre de 5 %, pour conserver l'hypothèse linéaire et ne pas risquer de trop modifier la production en cours. Les variations de $M(t)$ sont alors enregistrées jusqu'à stabilisation de sa valeur.

Pendant la durée de l'essai, les perturbations doivent demeurer constantes, ce qui en pratique reste délicat à obtenir et nécessite souvent plusieurs essais afin d'obtenir un enregistrement exploitable. Les possibilités des systèmes numériques de contrôle-commande permettent la réalisation de ces nombreux essais, notamment grâce à la fonction dite *historique*, ainsi que leur exploitation avec la fonction loupe.

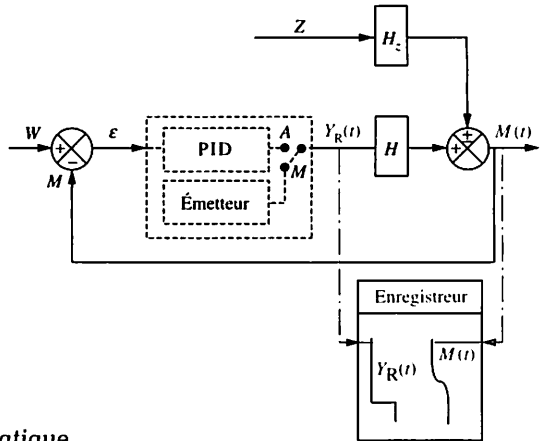


Fig. 3
L'identification sur un site de production nécessite un enregistreur et un régulateur en position « Manuel ».

- Identification du gain statique

On note ΔY_R l'amplitude de la variation $y_R(t)$ du signal de réglage et ΔM l'amplitude finale de la variation $m(t)$ enregistrée.

Quel que soit le modèle adopté le gain statique du système est déterminé par :

$$K = \frac{\Delta M}{\Delta Y_R}$$

avec ΔM et ΔY_R exprimés en pourcentages, K étant sans unité.

Si E représente la valeur numérique de ΔY_R , on obtient donc : $\Delta M = KE$.

- Identification de systèmes du 1^{er} et du 2^e ordre (figure 4 a ou b)

Pour un modèle du 1^{er} ordre, la fonction de transfert isomorphe est :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

La valeur de la constante de temps τ est déterminée à 63 % de la valeur finale de la variation de $m(t)$. L'utilisation de la tangente à l'origine, et du temps de réponse T_R à 5 % permet de vérifier la valeur de τ . En particulier $T_R = 3\tau$.

Fig. 4 a

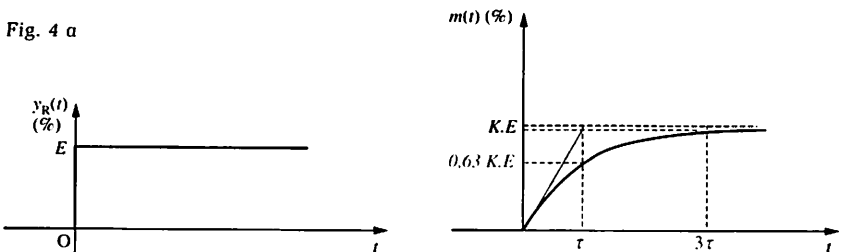
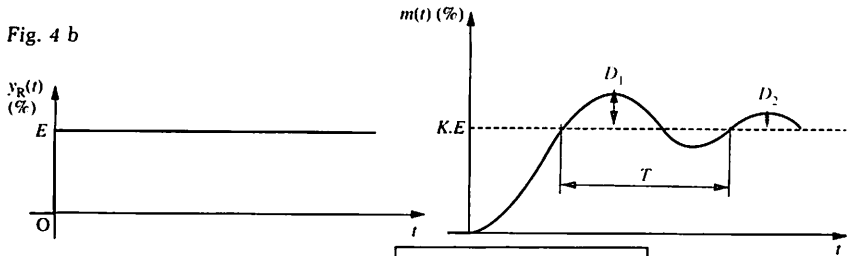


Fig. 4 b



Pour un modèle du 2^e ordre, la fonction de transfert isomorphe est :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\lambda p}{\omega_0} + 1}$$

Pour une réponse pseudopériodique, les relevés des dépassements successifs D_1 et D_2 et de la pseudopériode T permettent de déterminer le facteur d'amortissement λ et la pulsation propre ω_0 puisque :

$$\frac{D_2}{D_1} = e^{-\frac{2\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\lambda^2}}$$

Malheureusement la majorité des systèmes industriels ont une réponse indiciaire apériodique, avec éventuellement un temps mort naturel. Pour ce type de réponse, on utilisera, dans le prochain chapitre, les modèles de Broïda et de Strejc.

Identification en chaîne fermée

Mode opératoire

Le régulateur est en mode automatique (position A sur la figure 3) et en action proportionnelle seule. On augmente l'amplification A jusqu'à l'obtention d'oscillations entretenues d'amplitude limitée. La période de ces oscillations et la valeur A_0 de l'amplification correspondante permettent de déterminer les paramètres des modèles de Broïda et Strejc.

Cette méthode, dite des oscillations limites, est très peu utilisée industriellement car dangereuse pour la sécurité des personnes et des biens. Elle fera l'objet d'une étude particulière lors d'un chapitre ultérieur.

Remarques

L'identification permet d'aboutir à un modèle dynamique de la fonction de transfert étudiée. Les contraintes de production rendent souvent difficiles les essais, qui doivent donc être réalisés en nombre limité. Le technicien chargé de l'identification, puis du réglage d'une boucle de régulation, doit se persuader qu'il est illusoire d'effectuer de trop nombreux essais, pour affiner son modèle dynamique. Il est préférable de connaître l'allure générale des caractéristiques statiques, qui permettent de déceler une variation du gain statique K, dont il pourra tenir compte pour assurer une bonne robustesse à son réglage.

IDENTIFICATION 2

1 Identification par modèle de Broïda

Fonctions de transfert isomorphes

Ce modèle simple, parfois considéré comme un peu « rustique », reste à la base de la régulation pratique. Pour ce modèle, la fonction de transfert isomorphe est :

$$H(p) = \frac{K e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

Il faut noter que l'on compare la réponse indicielle du modèle et celle du procédé réel à partir du point de décolllement de $m(t)$. Si le procédé comporte un temps mort naturel T' , celui-ci ne doit pas être pris en compte dans la détermination des paramètres du modèle (fig. 1). L'écart ou distance entre la réponse du système réel et celle du modèle est minimal si les deux courbes coïncident pour 28 % et 40 % de la variation (fig. 2).

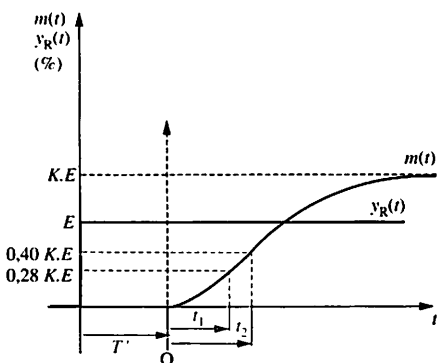


Fig. 1
Si le système réel comporte un temps mort naturel T' , l'identification doit être conduite à partir du point de décolllement de la réponse indicielle.

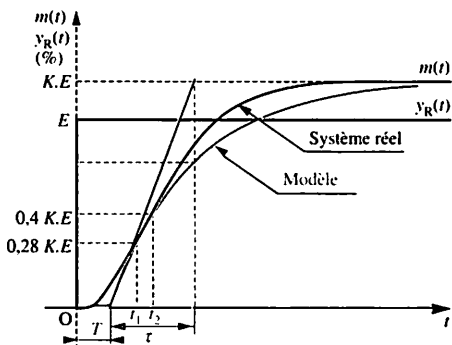


Fig. 2
Tant que le rapport T/τ est faible, les deux réponses indicielles sont approximativement confondues. $E = 5\%$ par exemple.

La détermination des paramètres du modèle s'effectue alors à partir de ces deux points d'abscisse : t_1 et t_2 .

$$\tau = 5,5(t_2 - t_1) \quad T = 2,8t_1 - 1,8t_2$$

Validité du modèle

Il faut insister sur le fait que T , souvent appelé temps mort d'identification, n'a pas d'existence réelle. En particulier, en comparant les réponses fréquentielles d'un procédé et de son modèle de Broïda, on peut montrer que le modèle reste satisfaisant tant que :

$$\frac{T}{\tau} < 0,25$$

Pour des boucles peu critiques, l'usage veut même que l'on transgresse cette limite !

Si le système comporte un temps mort naturel T' il faut l'ajouter au temps mort d'identification T pour établir la fonction de transfert globale :

$$H(p) = \frac{Ke^{-(T' + T)p}}{1 + \tau p}$$

Par la suite, en particulier pour les critères de réglages, c'est la somme $T' + T$ qui devra être prise en compte.

2 Identification par modèle de Strejc

Fonctions de transfert isomorphes

Moins simple, ce modèle se justifie lorsque le modèle précédent devient trop approximatif et que l'on désire obtenir une fonction de transfert approchant davantage la réalité. Pour ce modèle, la fonction de transfert isomorphe est :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$$

Comme pour le cas précédent, l'enregistrement pris en compte débute à partir du point de décollement de $m(t)$. Si le procédé comporte un temps mort naturel T' , celui-ci ne doit pas être pris en compte dans la détermination des paramètres du modèle.

Les paramètres τ et n sont déterminés à l'aide du nomogramme de l'annexe 1, à partir des relevés des durées T_u et T_a , comme indiqué figure 3.

On cherche le point d'inflexion I , puis on trace la tangente à ce point, ce qui permet d'obtenir T_u et T_a , par intersection avec l'axe des abscisses et l'asymptote.

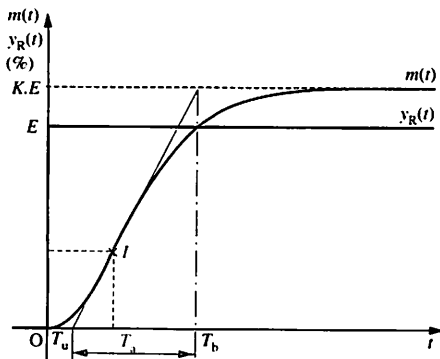


Fig. 3
La détermination des durées T_u et T_a utilise le tracé de la tangente au point d'inflexion.

En traçant la droite reliant les valeurs de $\frac{T_u}{T_a}$ et de T_a , sur le nomogramme de l'annexe 1, on détermine graphiquement τ et n .

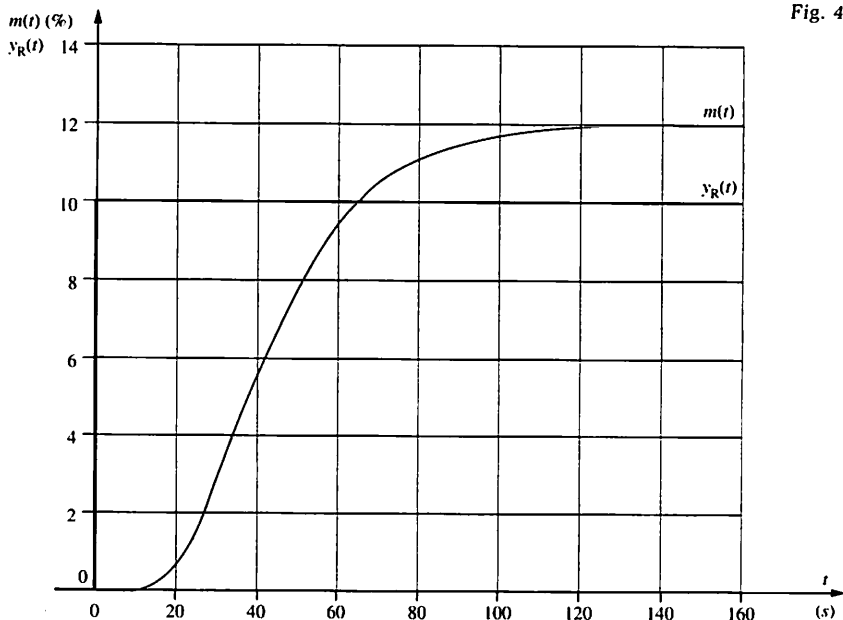


Fig. 4

Dans la majorité des cas, l'ordre n trouvé est fractionnaire. Bien que cela n'ait aucune réalité physique, cette approche est utilisée lors de la recherche des réglages d'un régulateur.

Lorsque l'identification a été réalisée à des fins de simulation, l'ordre n doit être entier. Afin de minimiser la distance entre le modèle et le système réel, il convient de réajuster le modèle. Deux approches sont possibles :

- Le système possède un temps mort naturel T' : on introduit alors un temps mort fictif d'identification T .

Exemple :

$T_u = 25$ s ; $T_a = 100$ s ; $K = 1,2$ soit $\frac{T_u}{T_a} = 0,25$. On obtient donc : $n \approx 3,3$ et $\tau \approx 26$ s.

Afin d'aboutir à un ordre n entier, on choisit l'entier immédiatement inférieur, correspondant à $\frac{T_u}{T_a} = 0,218$ et $\tau = 27$ s.

L'erreur $(0,25 - 0,218)T_a = 3,2$ s est adoptée comme temps mort T de correction. La fonction de transfert adoptée est donc :

$H(p) = \frac{1,2e^{-3,2p}}{(1 + 27p)^3}$ à laquelle il faudra rajouter T' , pour obtenir la fonction de transfert globale.

- Le système ne possède pas de temps mort naturel : on préfère corriger l'ordre en retouchant la valeur numérique de la constante de temps τ . La règle de transformation consiste à adopter l'entier immédiatement inférieur en conservant la valeur du produit $n\tau$.

On obtient donc : $3,3 \times 26 = 3 \cdot \tau'$ ce qui aboutit à : $\tau' = 28,6$ s. La fonction de transfert adoptée est donc : $H(p) = \frac{1,2}{(1 + 28,6p)^3}$.

Validité du modèle

Le modèle de Strejc peut lui-même être parfois considéré comme trop grossier et on peut se poser légitimement la question de trouver un modèle polynomial plus performant. Dans de tels cas il convient de se poser la question suivante : faut-il rechercher un modèle dynamique plus précis alors que la détermination du gain statique est, elle-même, peu précise et que, pour un même point de fonctionnement, la valeur de ce gain est susceptible de varier dans des proportions importantes ? Si on reprend par exemple les résultats du paragraphe 4, du chapitre 10 de Régulation tome 1, l'identification d'un réacteur chimique élémentaire par modèle de connaissances fait apparaître l'équation différentielle :

$$\frac{\rho \cdot V \cdot C}{k \cdot S} \frac{dT'}{dt} + T' = \frac{P}{k \cdot S}$$

où C représente la capacité thermique massique du liquide remplissant le réacteur.

Des essais « à l'eau », durant lesquels le produit actif est remplacé par de l'eau, permettent de tester l'installation sans danger et le technicien de réglage en profite généralement pour identifier le réacteur.

La détermination de la constante de temps $\tau = \frac{\rho \cdot V \cdot C}{k \cdot S}$ devra tenir compte du produit réellement utilisé par la suite.

Exercice résolu

A partir de la réponse indicielle (fig. 4) d'un procédé industriel dont le signal réglant subit une variation en échelon ΔY_R d'amplitude $E = 10\%$, on se propose de modéliser la fonction de transfert réglante $H(p)$ de ce procédé. La modélisation doit permettre la simulation du procédé industriel dans un système numérique de contrôle-commande, afin de valider une stratégie complexe de régulation.

- Déterminer le gain statique K du système.
- Déterminer éventuellement le temps mort naturel T' du système.
- Établir les paramètres du modèle de Broïda.
- Établir les paramètres du modèle de Strejc.
- Choisir le modèle le plus adapté au système réel.

Solution :

1. Gain statique K

Pour une variation ΔY_R d'amplitude $E = 10\%$ du signal réglant, on observe une amplitude limite $\Delta M = KE = 12\%$. Les grandeurs étant directement relevées en pourcentages on obtient :

$$K = \frac{\Delta M}{\Delta Y_R} \text{ soit : } K = \frac{12}{10} \text{ donc : } \boxed{K = 1,2}$$

2. Détermination éventuelle d'un temps mort naturel T'

On détermine graphiquement sur la figure 5 un temps mort proche de 11 à 12 secondes.

On adopte $\boxed{T' = 12 \text{ s}}$

L'instant $t_0 = 12 \text{ s}$ correspond au point de décollement.

3. Modèle de Broïda

On détermine graphiquement :

$t_1 = 20 \text{ s}$ et $t_2 = 26 \text{ s}$ (fig. 5).

$$\boxed{\begin{aligned} \tau &= 5,5(t_2 - t_1) = 33 \text{ s} \\ T &= 2,8t_1 - 1,8t_2 = 9,2 \text{ s} \end{aligned}}$$

Validité : $\frac{T}{\tau} = 0,28$. Dans ce cas ce

modèle est donc une approche « limite » du système.

$$H_1(p) = \frac{Ke^{-(T'+T)p}}{1 + \tau p}$$

$$\text{soit : } H_1(p) = \frac{1,2e^{-21p}}{1 + 33p}$$

4. Modèle de Strejc

On détermine graphiquement :

$T_u = 8 \text{ s}$ et $T_a = 43 \text{ s}$ (fig. 6) donc

$$\frac{T_u}{T_a} \approx 0,186$$

Sur le nomogramme de la page 122 on relève : $n \approx 2,7$ et $\tau \approx 12,5 \text{ s}$ que l'on peut corriger en :

$$\boxed{n \approx 2 \text{ et } \tau \approx 17 \text{ s}}$$

On note que $n \approx 3$ et $\tau = 11,2 \text{ s}$ est également une possibilité de modèle.

Dans ces conditions $H_2(p) = \frac{Ke^{-T'p}}{(1 + \tau p)^n}$

$$\text{soit : } \boxed{H_2(p) = \frac{1,2e^{-12p}}{(1 + 17p)^2}}$$

5. Choix du modèle le mieux adapté

Le modèle de Broïda admettant un

rapport $\frac{T}{\tau} > 0,25$ on adopte le modèle

de Strejc qui reproduit mieux la dynamique du procédé, en particulier à l'instant d'une variation brutale de Y_R (tangente horizontale).

Remarques : La valeur relative importante du saut de commande, $\Delta Y_R = 10\%$, doit inciter à vérifier si le système peut encore être considéré comme linéaire pour de telles variations. En effet il est illusoire de tenter de réaliser une identification sophistiquée, alors que les hypothèses initiales de linéarité ne sont plus vraies. On retiendra qu'un modèle approximatif est souvent suffisant en régulation, et qu'il est préférable de connaître le sens de variation de ses paramètres plutôt que d'hypothétiques valeurs précises en un point de fonctionnement.

Fig. 5

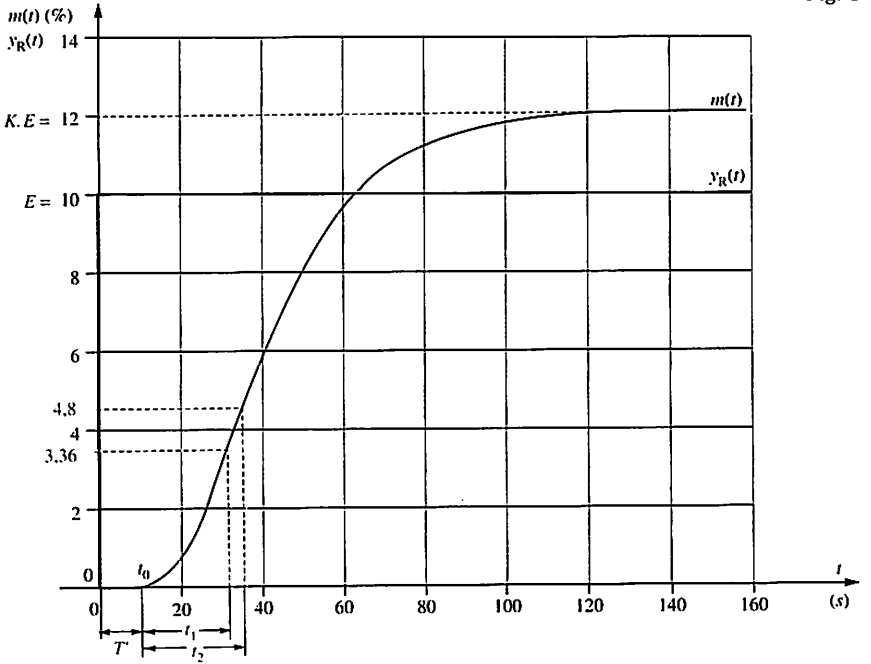
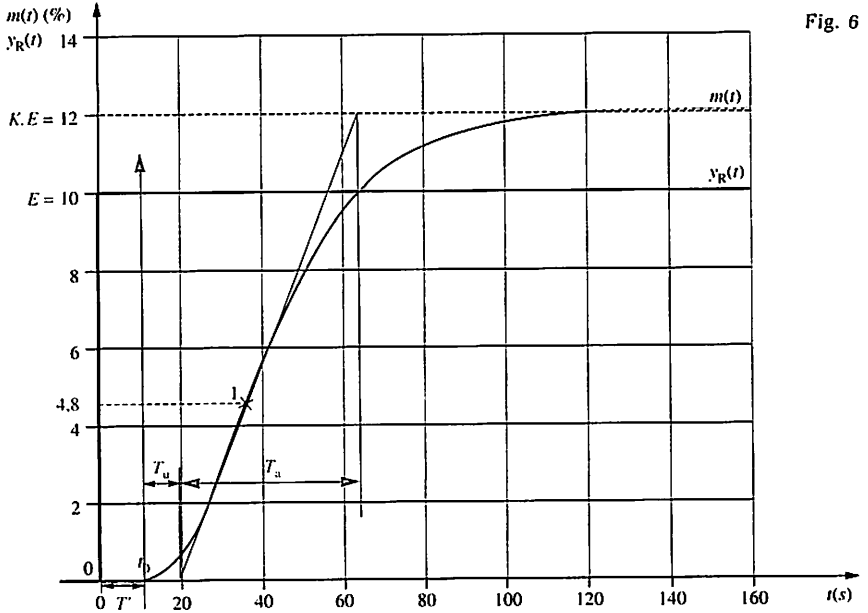


Fig. 6



1 Introduction

Les méthodes d'identification des procédés naturellement instables ou intégrateurs font appel aux mêmes techniques que celles décrites dans le chapitre précédent. Il faut cependant noter que la mise en œuvre pratique est source de difficultés liées à la sécurité et impose un protocole très strict de manipulation. En effet, sous l'influence d'une variation du signal réglant imposée à partir d'un point de fonctionnement stable, un système intégrateur voit sa mesure diverger vers les extrémités de l'échelle de son transmetteur. Celle-ci franchit alors rapidement les seuils d'alarme, obligeant l'opérateur à prévoir une manœuvre de repli.

2 Méthodes graphiques d'identification

Identification en chaîne ouverte

Mode opératoire

Le système doit être stabilisé autour du point de fonctionnement étudié ($Y_R(t) = \text{Cte}$ et $M(t) = \text{Cte}$), le régulateur étant en fonctionnement manuel. L'obtention de ce point de fonctionnement nécessite généralement une utilisation du régulateur en position automatique, avec un préréglage empirique, souvent en régulation proportionnelle. Lors d'une stabilisation de la boucle de régulation, l'opérateur bascule le régulateur en position « Manuel » puis impose rapidement l'échelon de commande.

Par la suite il enregistre l'évolution de la mesure, en surveillant les seuils d'alarmes. Dès que l'un d'entre eux risque d'être atteint, il commute le régulateur en position « Automatique », afin d'assurer rapidement un retour au point de fonctionnement.

• Identification d'un système intégrateur « pur »

Par définition sa fonction de transfert isomorphe est de la forme :

$$H(p) = \frac{k}{p}$$

On rappelle qu'il ne faut pas confondre le gain statique d'un système naturellement stable, noté K nombre sans unité, avec la constante d'intégration, notée k et exprimée sous forme de l'inverse d'un temps. En l'absence de normalisation, et par commodité de vocabulaire, le nombre k est appelé gain dynamique.

Détermination de k :

La réponse indicielle d'un tel système est représentée figure 1.

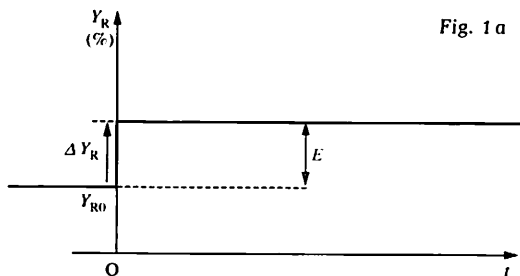


Fig. 1 a

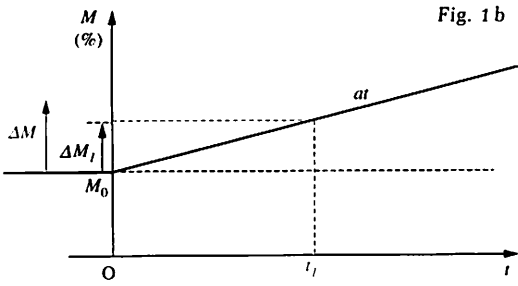


Fig. 1 b

A partir du point de fonctionnement (M_0, Y_{R0}) une variation en échelon d'amplitude E de Y_R entraîne une variation $m(t)$ en rampe, d'équation

$$\Delta M(t) = m(t) = at$$

$m(t)$ étant un pourcentage et t étant exprimé en secondes ou minutes, les techniciens expriment a en pour-cent par seconde ($\frac{\%}{s}$)

ou par minute ($\frac{\%}{\text{min}}$).

En notation de Laplace on obtient donc $M(p) = \frac{a}{p^2}$, la sollicitation sur la commande étant $Y_R(p) = \frac{E}{p}$. Par définition la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} \quad \text{soit :} \quad H(p) = \frac{a/p^2}{E/p} = \left(\frac{a}{E}\right) \cdot \frac{1}{p}$$

On voit donc que le paramètre k s'exprime par :

$$k = \frac{a}{E} \quad (\text{s}^{-1} \text{ ou } \text{min}^{-1})$$

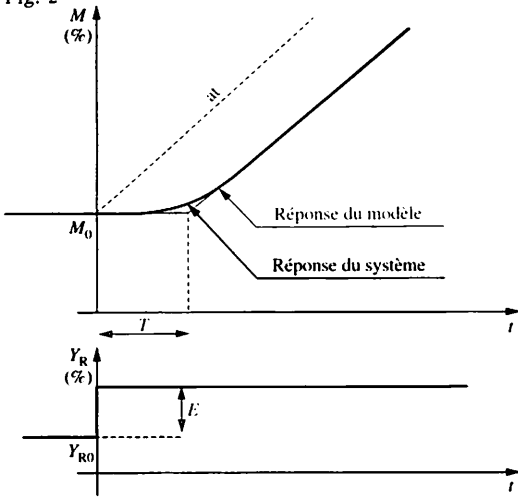
Exemple :

Pour $E = 5\%$, on relève : $\Delta M_1 = 7\%$ pour $t_1 = 10\text{ s}$.

Détermination de a : $a = 0,7\% \text{ s}^{-1}$.

Détermination de k : $k = \frac{0,7}{5} = 0,14 \text{ s}^{-1}$

Fig. 2



Le procédé obéit donc à la fonction de transfert : $H(p) = \frac{0,14}{p}$.

• Identification par modèle de Broida

Pour ce modèle, la fonction de transfert isomorphe est :

$$H(p) = \frac{ke^{-Tp}}{p}$$

La réponse indicielle est fournie figure 2. On constate qu'elle tend vers une asymptote oblique que l'on trace et dont on détermine le

coefficient directeur ou pente $a \left(\frac{\%}{s} \right)$. Le gain dynamique k est

déterminé comme précédemment : $k = \frac{a}{E} \text{ (s}^{-1} \text{ ou min}^{-1}\text{)}$.

Le temps mort T du modèle est directement relevé sur la courbe, à l'intersection de l'asymptote oblique et de l'horizontale.

Ce modèle, rudimentaire, permet cependant une approche convenable du réglage et de la simulation des systèmes intégrateurs.

• Identification par modèle de Strejc

Pour ce modèle, la fonction de transfert isomorphe est :

$$H(p) = k \frac{1}{p(1 + \tau p)^n}$$

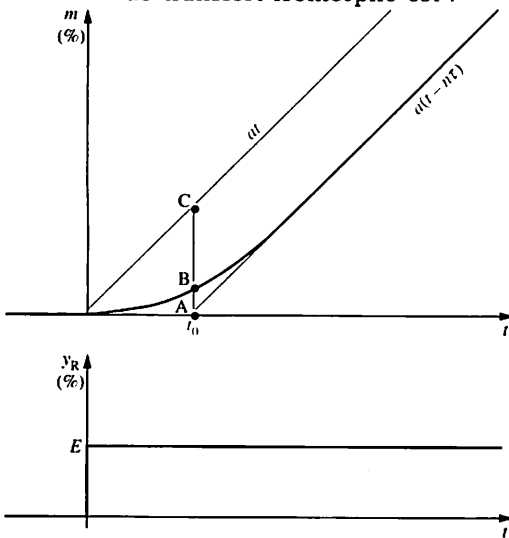


Fig. 3

La réponse indicielle est fournie figure 3. On constate qu'elle tend vers une asymptote oblique que l'on trace et dont on détermine la pente $a \left(\frac{\%}{s} \right)$.

Le gain dynamique k est déterminé comme précédemment : $k = \frac{a}{E} \text{ (s}^{-1} \text{ ou min}^{-1}\text{)}$. La sollicitation sur la commande étant $Y_R(p) = \frac{E}{p}$, on obtient donc :

$M(p) = k \frac{E}{p^2(1 + \tau p)^n}$. Par inversion de Laplace, on peut montrer que $m(t)$ peut s'exprimer par :

$$m(t) = kE \left[t - n\tau + e^{-\frac{t}{\tau}} \left(n\tau + \frac{(n-1)\tau}{1!} \cdot \frac{t}{\tau} + \dots + \frac{\tau}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{t}{\tau} \right)^{n-1} \right) \right] \quad (1)$$

Dans ces conditions l'asymptote oblique a pour équation : $m(t) = kE(t - n\tau) = a(t - n\tau)$.

L'abscisse t_0 est donc égale à $n\tau$.

On obtient donc : $\tau = \frac{t_0}{n}$

Le point B vérifie l'expression (1) pour $t = t_0 = n\tau$. On montre alors que le rapport $\frac{AB}{AC}$ ne dépend que de l'ordre n .

Le nomogramme en annexe page 124 fournit alors n à partir de ce rapport, par l'intermédiaire d'une droite passant par le pivot central.

Identification en chaîne fermée

-Principe

Un système naturellement instable devient généralement stable lorsqu'il est bouclé.

Cette propriété est vérifiée lorsque le bouclage est réalisé par l'intermédiaire d'un régulateur, le plus souvent en action proportionnelle (fig. 4).

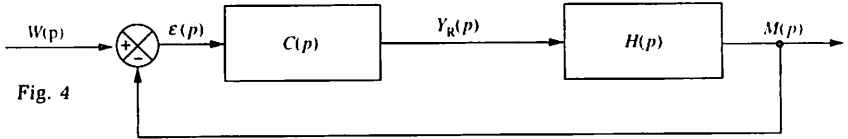


Fig. 4

-Mode opératoire

Le régulateur est en mode automatique et en action proportionnelle seule. L'amplification A est fixée à une valeur assez faible, de manière à obtenir une réponse indicielle apériodique du système bouclé.

On applique alors un échelon d'amplitude limitée de consigne ΔW , de l'ordre de 5 %, pour conserver l'hypothèse linéaire autour du point de fonctionnement étudié. Les variations de $M(t)$ sont alors enregistrées jusqu'à stabilisation de sa valeur.

La fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée est alors identifiée, sous la forme d'un modèle de Strejc : $F(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$. On constate que $K = 1$, car le système fournit l'action intégrale, permettant une précision statique parfaite.

L'utilisation des résultats du chapitre 22 (Régulation tome 1) permet de retrouver facilement la fonction $H(p)$ du système seul.

En effet si $F(p) = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)}$ alors : $H(p) = \frac{F(p)}{C(p)[1 - F(p)]}$.

Le régulateur étant à action proportionnelle seule, on peut écrire : $C(p) = A$.

On obtient donc : $H(p) = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{(1 + \tau p)^n - 1}$ de la forme :

$$H(p) = \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots}$$

avec : $k = \frac{1}{An\tau}$; $\alpha_1 = \frac{\tau(n-1)}{2}$; $\alpha_2 = \frac{\alpha_1\tau(n-2)}{3}$; $\alpha_3 = \frac{\alpha_1\alpha_2\tau(n-3)}{4}$.

Cette méthode présente de nombreux avantages. En particulier elle donne une précision acceptable, tout en étant facile à mettre en œuvre, dans de bonnes conditions de sécurité.

Exercice résolu

L'installation représentée figure 5 a pour objectif de traiter des rejets boueux, de débit Q_a , avant nouvelle utilisation du liquide. Le bac 1, dit de décantation, permet d'éliminer les particules en suspension dans le liquide. Les boues, recueillies en fond de bac, sont évacuées lors des arrêts périodiques.

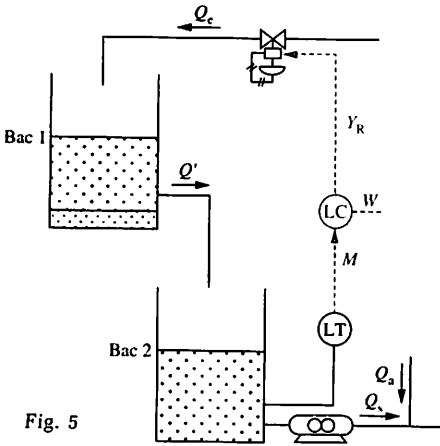


Fig. 5

Par l'intermédiaire de la pompe d'extraction, le bac de stockage 2 autorise l'évacuation du liquide avec un débit de sortie Q_s conforme à la demande des utilisateurs. En aval de la pompe on réalise un traitement en ajoutant un autre liquide dont le débit Q_a est proportionnel au débit d'extraction.

1. A partir d'un point de fonctionnement stable, en position de fonctionnement « Manuel », on réalise un enregistrement de la réponse indicielle, pour un échelon de 5 % de Y_R (fig. 6). Déterminer la valeur du gain dynamique k .
2. Déterminer la fonction $H_1(p)$, modèle de Broïda du procédé.
3. Déterminer la fonction $H_2(p)$, modèle de Strejc du procédé.
4. A partir d'un point de fonctionnement stable, en position de fonctionnement « Automatique », on réalise un

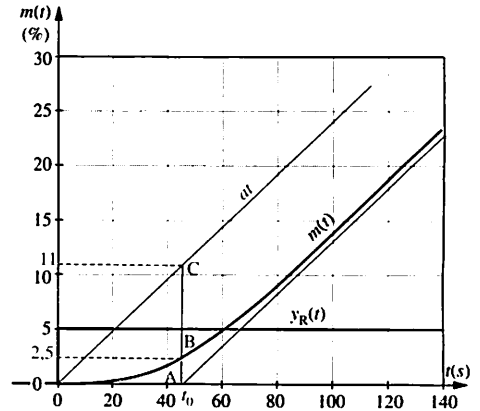


Fig. 6. Réponse indicielle en chaîne ouverte

enregistrement de réponse indicielle, pour un échelon de 10 % de W (fig. 7). L'amplification du régulateur, en mode proportionnel, est égale à $A = 0,15$.

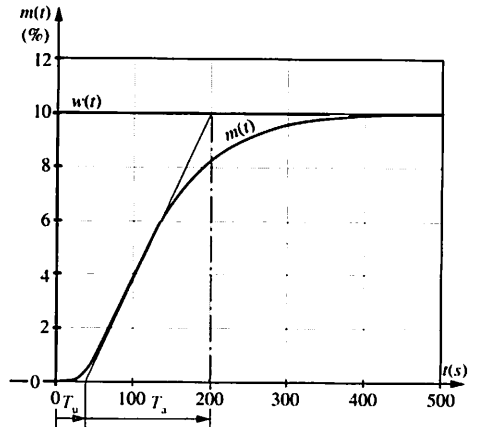


Fig. 7. Réponse indicielle en chaîne fermée

- Déterminer la fonction $H_3(p)$, qui est le modèle de Strejc du procédé.
5. Comparer les résultats obtenus pour les modèles de Strejc

Solution :

1. Détermination du gain dynamique k

L'asymptote oblique coupe l'axe des abscisses en $t_0 = 45$ s. On trace ensuite la parallèle à l'asymptote passant par l'origine. Cette droite a pour équation $m(t) = at$.

Or on constate que, pour cette droite, au point d'abscisse $t_0 = 45$ s, correspond l'ordonnée $m(t_0) = 11$ %.

On en déduit donc son coefficient directeur : $a = \frac{11}{45} \% \text{ s}^{-1}$.

L'amplitude de l'échelon sur Y_R étant de 5 %, on en déduit k : $k = \frac{11/45}{5} \text{ s}^{-1}$.

On obtient donc :

$$k = 0,049 \text{ s}^{-1} \approx 0,05 \text{ s}^{-1}$$

2. Détermination du modèle de Broida

Le temps mort T est directement lu sur le graphe puisque $T = t_0 = 45$ s.

Le modèle de Broida du procédé est donc :

$$H_1(p) = 0,05 \frac{e^{-45p}}{p}$$

3. Détermination du modèle de Strejc

On trace la verticale AC et on relève les valeurs AB et AC (% ou mm) soit :

AB = 2,5 % et AC = 11 % donc :

$$\frac{AB}{AC} = 0,227.$$

Par utilisation du nomogramme on en déduit l'ordre $n \approx 3$.

La constante de temps τ est donc égale

$$\text{à : } \tau = \frac{t_0}{n} \approx 15 \text{ s.}$$

Le modèle de Strejc du procédé est donc :

$$H_2(p) = 0,05 \frac{1}{p(1+15p)^3}$$

4. Identification en chaîne fermée

Tout d'abord la réponse indicielle de la boucle doit être identifiée, sous la

forme d'un modèle de Strejc. Le tracé de la tangente au point d'inflexion détermine $T_u = 36$ s et $T_a = 164$ s.

Le nomogramme du chapitre précédent fournit : $n \approx 3$ et $\tau = 45$ s.

La fonction de transfert en chaîne fermée est donc : $F(p) = \frac{1}{(1+45p)^3}$.

La fonction de transfert du système seul est donc :

$$H_3(p) = \frac{1}{0,15} \cdot \frac{1}{(1+45p)^3 - 1}$$

Par identification avec la forme :

$$H_3(p) = \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots}$$

On obtient :

$$k = \frac{1}{An\tau} = \frac{1}{0,15 \times 3 \times 45} = 0,049 \approx 0,05 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha_1 = \frac{\tau(n-1)}{2} = 45; \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1 \tau(n-2)}{3} = 675$$

Le modèle de Strejc du procédé est donc :

$$H_3(p) = \frac{0,05}{p} \cdot \frac{1}{1 + 45p + 675p^2}$$

5. Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes

Le développement du dénominateur $(1+15p)^3$ donne :

$$1 + 45p + 675p^2 + 3375p^3.$$

On constate l'identité avec l'expression du dénominateur de $H_3(p)$, en ce qui concerne les trois premiers termes.

Le tracé des réponses indicielles de $H_2(p)$ et $H_3(p)$ fournit des courbes pratiquement confondues. Cet exemple permet de vérifier le résultat empirique dégagé au chapitre précédent :

on peut toujours diminuer l'ordre d'un système en retouchant la valeur numérique de la constante de temps τ ,

à condition de conserver la même valeur pour le produit $n\tau$.

En effet $3 \times 15 = 2 \times 22,5$ et le développement de $(1+22,5p)^2$ donne :

$$1 + 45p + 506p^2.$$

Pour caractériser les performances d'une boucle de régulation, on est conduit à définir deux grandeurs fondamentales : la précision et la stabilité.

La première est étudiée dans le présent chapitre, la stabilité étant traitée dans le chapitre 6. Ces deux grandeurs sont intimement liées et il faut être conscient que toute amélioration de l'une risque de se faire au détriment de l'autre. On parle de compromis précision-stabilité. La difficulté de ce compromis résulte du fait qu'il dépend très fortement du type de régulation envisagé et des contraintes de sécurité propres au procédé de fabrication. Il n'existe donc pas de solution miracle et le technicien de régulation doit prendre en compte de nombreux paramètres pour aboutir à un compromis acceptable.

Par exemple, il n'est pas équivalent de faire fonctionner une boucle de régulation avec une consigne fixe ou de travailler avec une consigne variable.

Dans le premier cas (*régulation de maintien*) le régulateur doit essentiellement limiter l'influence des perturbations aléatoires, souvent d'amplitudes faibles.

Dans le second cas (*régulation de correspondance ou asservissement*) le régulateur a pour rôle de forcer la mesure à suivre la variation, souvent importante, de la consigne, sans prendre en compte les perturbations. Le problème devient encore plus délicat si la loi de variation de la consigne W est aléatoire.

Conformément aux notations habituelles, l'étude est réalisée pour un système représenté par le schéma fonctionnel de la figure 1. Toutes les grandeurs représentent des variations par rapport à un point de

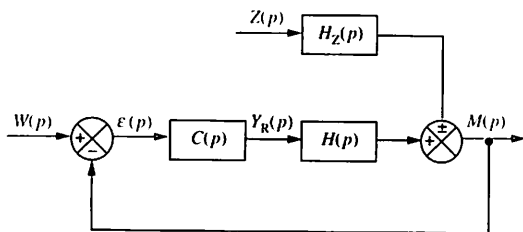


Fig. 1. Schéma fonctionnel d'une boucle de régulation.

fonctionnement. Leurs amplitudes permettent de conserver l'hypothèse linéaire et donc de définir les fonctions de transfert $H(p)$ et $H_z(p)$.

On rappelle que toutes les grandeurs sont exprimées en pourcentage de leur échelle de mesure ou de variation.

1 Définitions

La précision d'un système bouclé est caractérisée par la valeur de l'écart $\varepsilon(t)$ entre la consigne $W(t)$ et la mesure $M(t)$: $\varepsilon(t) = W(t) - M(t)$ (on rappelle que les grandes lettres représentent les valeurs des signaux, les minuscules correspondant à leurs variations).

La variation de $\varepsilon(t)$ au cours du temps, vis-à-vis de variations particulières des signaux d'entrée, peut souvent se décomposer en deux parties : le régime transitoire et le régime permanent. On est donc conduit à définir deux sortes de précision, suivant cette distinction.

2 Précision statique

Elle est définie par la valeur limite, si elle existe, de $\varepsilon(t)$ lorsque le temps t tend vers l'infini.

Elle peut être obtenue lorsque la boucle évolue vers un point de fonctionnement stable, après une variation en échelon de la consigne ou des signaux de perturbation (fig. 2).

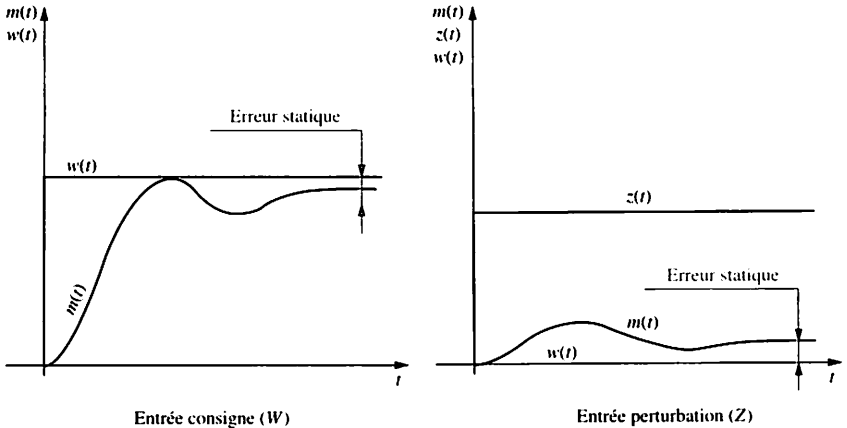


Fig. 2

On parle alors d'erreur statique (ou d'écart résiduel, ou d'écart permanent, ou d'erreur stationnaire) d'ordre 1. Bien évidemment l'objectif est d'obtenir $\varepsilon(\infty) = 0$.

Elle peut également être mesurée lorsque $W(t)$ et $M(t)$ subissent des variations « parallèles », notamment dans le cas d'une variation de la consigne en rampe. Dans ce dernier cas on parle alors d'erreur de traînage ou d'erreur stationnaire du deuxième ordre (fig. 3); elle est souvent difficile à annuler. Cette difficulté se présente avec de nombreux systèmes industriels, comportant en particulier des montées en température avec gradient imposé.

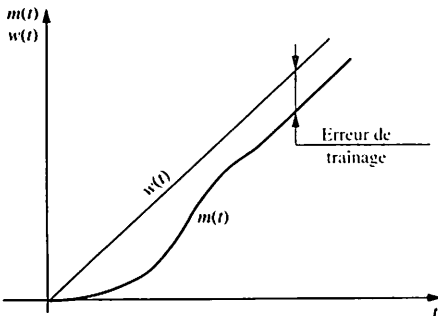


Fig. 3

La réponse d'une boucle de régulation à une rampe de consigne fait apparaître une erreur de traînage.

On voit donc qu'il existe une certaine ambiguïté au niveau des termes : on peut définir la précision statique pour diverses catégories de sollicitations sur les signaux d'entrée (consigne ou perturbations) d'une boucle de régulation. Or, en régulation, le régime statique est le régime permanent d'équilibre obtenu en l'absence de variations $w(t)$ et $z(t)$, au bout d'un temps infini.

Il faut donc parler de précision statique vis-à-vis de tel ou tel signal de sollicitation. En l'absence d'indication, l'expression *erreur statique* est utilisée pour l'erreur stationnaire d'ordre 1 (sollicitation en échelon) et l'expression *erreur de traînage* est employée pour une sollicitation en rampe (erreur stationnaire d'ordre 2).

Dans l'hypothèse d'un système linéaire, et pour des variations $w(t)$ et $m(t)$ par rapport à un point de fonctionnement stable, la précision statique peut être calculée. On suppose qu'initialement $\varepsilon(0) = 0$.

- Le théorème de la valeur finale, utilisable avec les notations de Laplace, précise :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

Or d'après le schéma de la figure 1 :

$$\varepsilon(p) = W(p) - M(p) \text{ avec } M(p) = C(p) \cdot H(p) \cdot \varepsilon(p) \pm H_z(p) \cdot Z(p)$$

On obtient donc :

$$\varepsilon(p) = W(p) \cdot \frac{1}{1 + C(p)H(p)} \pm \frac{H_z(p)}{1 + C(p)H(p)} \cdot Z(p)$$

Le calcul n'est bien entendu possible que si $w(t)$ et $z(t)$ subissent des variations déterministes dont on connaît la transformée de Laplace.

3 Précision dynamique

Obtenir une précision statique parfaite, c'est-à-dire $\varepsilon(\infty) = 0$, est un objectif intéressant, à condition que pendant le régime transitoire $\varepsilon(t)$ ne prenne pas des valeurs trop importantes, pendant une grande durée.

Compte tenu des remarques du paragraphe précédent, en principe, il faut définir la précision dynamique pour diverses catégories de sollicitations.

En général on caractérise la précision dynamique par la réponse indicielle de la boucle de régulation, vis-à-vis d'un échelon de consigne, ce qui constitue le cas le plus défavorable (fig. 4).

En effet le régime transitoire est d'autant plus précis que la réponse est rapide et suffisamment amortie. Dans la pratique ces objectifs sont difficilement conciliables, compte tenu des contraintes du procédé, en particulier celles liées à l'énergie mise en jeu par les actionneurs.

- La rapidité de la réponse indicielle est chiffrée par le *temps de montée*

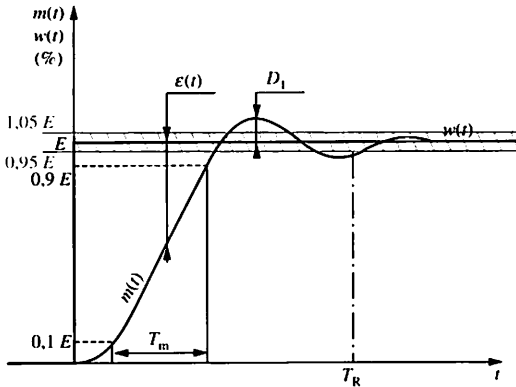


Fig. 4. Réponse indicielle d'un procédé industriel. Une diminution de T_m augmente D_1 et inversement.

T_m (temps nécessaire pour passer de 10 % à 90 % de la valeur finale) et par le temps de réponse T_R à 5 % (temps nécessaire pour atteindre la valeur finale à ± 5 %).

-L'amortissement de la réponse indicielle est évaluée par le premier dépassement D_1 ou par le coefficient d'amortissement λ si la réponse peut être assimilée à celle d'un second ordre équivalent.

Si l'on veut regrouper les deux critères (rapidité et amortissement), on calcule un critère global, par exemple sous la forme de l'intégrale de la valeur absolue de l'écart :

$$I = \int_0^{\infty} |w(t) - m(t)| dt$$

La surface hachurée de la figure 5 représente cette intégrale. La minimisation de ce critère est obtenue pour T_m et D_1 faibles, ce qui est incompatible avec les contraintes industrielles. Dans la pratique le critère amortissement est prépondérant et on adopte souvent T_m important pour assurer D_1 faible.

La notion de précision dynamique est importante pour comprendre le chapitre 6 traitant de la stabilité.

On peut se souvenir que les paramètres caractéristiques de la réponse temporelle d'un système sont liés à ceux de sa réponse en fréquence et donc que ces derniers permettent également de chiffrer la précision du système étudié.

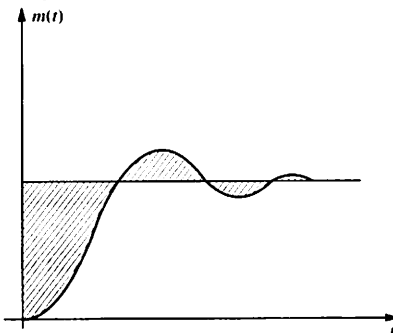


Fig. 5
La minimisation de l'aire hachurée nécessiterait une puissance mise en jeu incompatible avec la sécurité des installations industrielles.

Exercice résolu

On étudie une régulation de niveau, installée sur un bac de stockage (fig. 6). L'installation est caractérisée par les données suivantes :

- la vanne est de type normalement ouverte (NO), à caractéristique linéaire;
- le régulateur est à action proportionnelle seule;

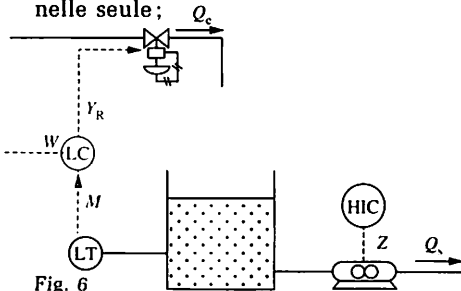


Fig. 6

Le point de fonctionnement initial correspond aux valeurs suivantes : $M_0 = W_0 = 60\%$, $Q_{e0} = Q_{s0} = 30\%$.

Toutes ces indications sont fournies en pourcentages de leurs échelles de variations ou de transmetteurs. Par rapport au schéma fonctionnel habituel, ceci permet d'écrire : $Z_0 = 30\%$ et $Y_{R0} = 70\%$ puisque la perturbation principale est le signal de commande de la pompe et que les gains statiques de la vanne et de la pompe sont égaux à un.

Autour du point de fonctionnement choisi, une identification a fourni les résultats suivants :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = -\frac{0,1}{p} \cdot \frac{1}{(1+10p)}$$

Fonction de transfert de la pompe :

$$\frac{Q_s(p)}{Z(p)} = \frac{1}{(1+10p)}; \quad \frac{M(p)}{Q_s(p)} = -\frac{0,1}{p}$$

1. Justifier le signe moins dans l'expression de $H(p)$ et en déduire le sens d'action du régulateur de niveau.
2. Représenter un schéma fonctionnel détaillé de l'ensemble de la boucle.
3. Modifier ce schéma fonctionnel, de façon à retrouver le schéma traditionnel.

4. Déterminer la précision statique du système bouclé :

a) vis-à-vis d'un échelon de consigne

$$W(p) = \frac{10}{p}$$

b) vis-à-vis d'un échelon de perturbation

$$Z(p) = \frac{10}{p}$$

Solution :

1. Sens d'action du régulateur

D'une part, la vanne de régulation étant normalement ouverte, une augmentation du signal de commande diminue le débit entrant, ce qui aboutit à une diminution du niveau (variation négative) : le gain dynamique est donc négatif.

D'autre part une augmentation de la mesure m doit entraîner une diminution du débit à l'entrée, donc une augmentation du signal de commande Y_R : le régulateur doit être à sens d'action directe.

2. Schéma fonctionnel

Compte tenu du sens d'action du régulateur et des signes des fonctions de transfert, il est représenté figure 7. On remarque qu'il est d'usage de représenter les « valeurs absolues » dans les blocs fonctionnels, les signes étant pris en compte au niveau des sommateurs. Cette disposition permet plus facilement d'interpréter les sens réels de variation des grandeurs.

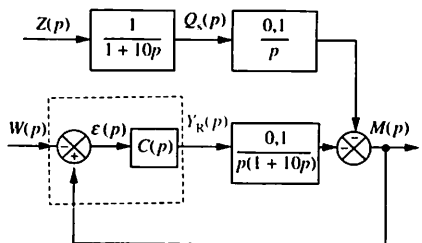


Fig. 7

3. Schéma fonctionnel modifié

Pour pouvoir utiliser les formules données dans le tome 1, il est d'usage

de compenser deux signes moins par un signe plus. On obtient le schéma de la figure 8. L'inconvénient de ce schéma est d'aboutir à un signal Y_R qui ne représente plus les variations réelles du signal de commande de la vanne NO.

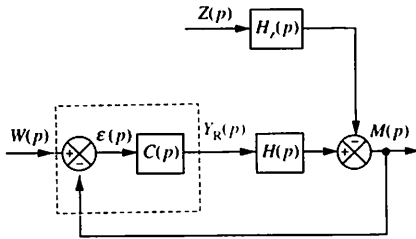


Fig. 8. Schéma fonctionnel modifié.

4. Précision statique en asservissement

Le fait d'avoir retrouvé le schéma fonctionnel traditionnel permet d'utiliser les résultats habituels (annexe page 127) :

$$M(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot W(p) - \frac{H_z(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot Z(p)$$

Or $\varepsilon(p) = W(p) - M(p)$ donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + C(p) \cdot H(p)} W(p) + \frac{H_z(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot Z(p)$$

La précision statique peut être étudiée par la limite de $\varepsilon(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Pour cela on rappelle le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

a) Pour un échelon de consigne, en fonctionnement en asservissement, on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{0,1 \cdot A}{p(1 + 10p)}} \cdot \frac{10}{p}$$

On peut en déduire :

$$p \cdot \varepsilon(p) = \frac{10}{1 + \frac{0,1 \cdot A}{p(1 + 10p)}}$$

dont la limite vaut zéro lorsque $p \rightarrow 0$. La précision statique est donc parfaite car $\varepsilon(\infty) = 0$.

Cette propriété sera généralisée au chapitre 5 : la précision statique est parfaite en asservissement si $T(p)$ présente une intégration, quelle que soit son origine.

b) Pour un échelon de perturbation, en fonctionnement en régulation, il vient :

$$\varepsilon(p) = \frac{0,1}{p(1 + 10p)} \cdot \frac{10}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,1 \cdot A}{p(1 + 10p)}}$$

On peut en déduire :

$$p \cdot \varepsilon(p) = \frac{0,1}{(0,1 \cdot A + p + 10p^2)} \quad \text{dont la limite vaut } \frac{1}{A} \text{ lorsque } p \rightarrow 0.$$

La précision statique n'est donc pas parfaite car $\varepsilon(\infty) \neq 0$.

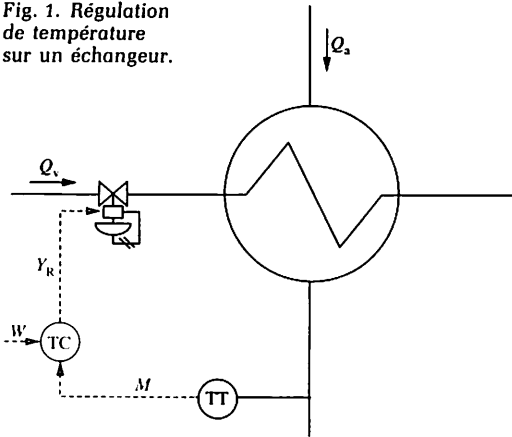
Cette propriété sera également étudiée au chapitre 5 : la précision statique est parfaite en régulation si $T(p)$ présente une intégration et si $H_z(p)$ n'en présente pas. On voit donc qu'une intégration dans $T(p)$ n'assure pas nécessairement une bonne régulation !

Le cas le plus répandu correspond à celui où la perturbation d'une boucle n° 1 est la grandeur réglante Y_R d'une boucle adjacente n° 2. Ce signal Y_R est susceptible de subir des variations en rampe, lors de démarrages ou de compensations de perturbations de la boucle n° 2. Après que cette boucle soit stabilisée on pourra obtenir une précision statique satisfaisante pour la boucle n° 1.

1 Étude d'un échangeur de chaleur

On se propose d'étudier dans le détail les notions abordées dans le chapitre précédent. Pour cela on envisage une régulation de température, associée à l'échangeur de chaleur décrit à la figure 1.

Fig. 1. Régulation de température sur un échangeur.



Caractérisation du procédé

La grandeur à régler est la température du produit A à la sortie de l'échangeur. La grandeur réglante est le débit de vapeur Q_v . La principale perturbation est le débit de charge Q_a .

En première approximation, on peut assimiler la fonction de transfert réglante du procédé à un premier ordre de grande constante de

$$\text{temps : } H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

De même, pour la fonction de transfert perturbatrice :

$$H_z(p) = \frac{M(p)}{Z(p)} = \frac{K'}{1 + \tau' p}$$

Régulation proportionnelle

Le correcteur du régulateur, à action inverse, est défini par :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A$$

On va étudier la précision statique et la précision dynamique, vis-à-vis d'une variation de consigne en échelon, à partir d'un point de fonctionnement stable. On suppose qu'initialement $W_0 = M_0$ (précision statique parfaite, obtenue par exemple à l'aide d'un biais de commande).

- Étude de la précision statique

Si $W(p) = \frac{E}{p}$, on montre facilement que $\varepsilon(p) = \frac{E/p}{1 + \frac{AK}{1 + \tau p}}$ (voir Régu-

lation 1 chap. 22). Par application du théorème de la valeur finale, on détermine l'erreur statique :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \frac{E}{1 + AK} \neq 0$$

Ce résultat a déjà été énoncé dans le tome 1 : Une augmentation de l'amplification A améliore la précision statique. On remarque que c'est en fait le gain de boucle AK qui intervient.

-Étude de la précision dynamique

On montre que la fonction de transfert en chaîne fermée

$$F(p) = \frac{M(p)}{W(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \text{ est de la forme : } F(p) = \frac{K''}{1 + \tau'' p}$$

$$K'' = \frac{AK}{1 + AK} \text{ et } \tau'' = \frac{\tau}{1 + AK}$$

On obtient donc une fonction de transfert du premier ordre, avec un gain statique K'' d'autant plus proche de 1 que le gain de boucle AK est grand (amélioration de la précision statique déjà vue ci-dessus). De plus on constate qu'une augmentation de l'amplification A du régulateur entraîne une diminution de la constante de temps τ'' en chaîne fermée, ce qui améliore la précision dynamique (fig. 2).

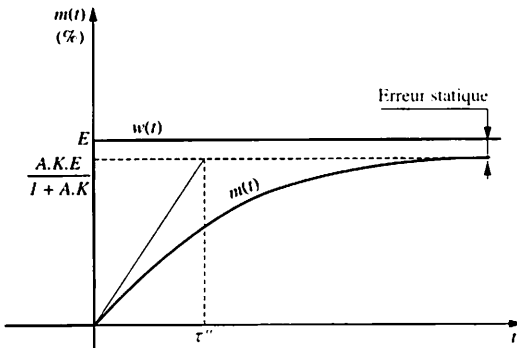


Fig. 2. Réponse indicielle de la chaîne fermée.

Enfin, puisque l'on obtient un premier ordre, le temps de réponse à 5 % vaut : $T_R(5\%) = 3\tau''$. Si l'on envisage la précision statique, vis-à-vis d'un échelon de perturbation d'amplitude E' , les calculs sont similaires et aboutissent à

$$\varepsilon(\infty) = \frac{K' \cdot E'}{1 + AK}$$

-Lien avec l'étude fréquentielle

En remplaçant p par $j\omega$, il vient :

$$F(j\omega) = \frac{K''}{1 + \tau'' j\omega}$$

On constate que la précision statique, caractérisée par K'' , peut être obtenue par la limite de $F(j\omega)$ lorsque ω tend vers 0 (le régime statique, ou continu, est un régime variable de fréquence nulle). De même la précision dynamique peut être caractérisée par la pulsation de coupure à -3 dB : $\omega_c = \frac{1}{\tau''}$ (fig. 3).

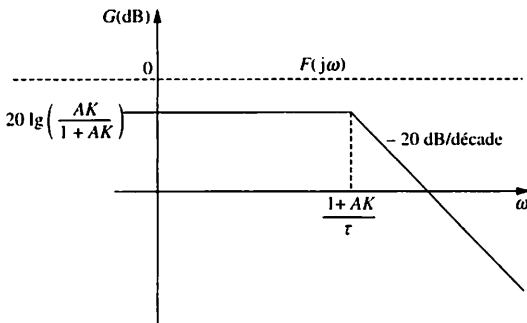


Fig. 3. Diagramme asymptotique de $F(j\omega)$.

Ce diagramme asymptotique de Bode est intéressant. On constate qu'en élargissant la bande passante de la réponse en fréquence d'une boucle de régulation on diminue son temps de réponse. Cette

remarque est parfois l'explication donnée en électronique pour justifier une éventuelle action dérivée dans le correcteur (qui élargit la bande passante).

- *Étude de la réponse à une rampe de consigne ou de perturbation*
Les systèmes industriels sont souvent sollicités par de tels signaux (démarrage d'installation, évolution progressive du débit de charge, ...). Si la consigne évolue en rampe, on a : $W(p) = \frac{k}{p^2}$.

L'écart $\varepsilon(t)$ vaut donc : $\varepsilon(p) = \frac{k/p^2}{1 + \frac{AK}{1 + \tau p}}$ qui tend vers l'infini lorsque p

tend vers 0. L'erreur de traînage tend vers l'infini. L'étude de la réponse à une rampe de perturbation aboutit aux mêmes résultats. On retiendra donc qu'une régulation de type proportionnelle ne convient pas pour des entrées en rampe.

Régulation proportionnelle et intégrale

Le correcteur du régulateur, à action inverse, est donc défini par :

$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ pour une structure série ou mixte.

On étudie la précision statique et la précision dynamique, dans le cas d'une variation de consigne en échelon, à partir d'un point de fonctionnement stable. Pour ce dernier la précision statique parfaite est obtenue grâce à l'action intégrale (voir Régulation 1, chap. 18). On peut retrouver ce résultat par le calcul.

- *Étude de la précision statique*

Si $W(p) = \frac{E}{p}$, on montre que : $\varepsilon(p) = \frac{E/p}{1 + AK \cdot \frac{1 + T_i p}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{T_i p}}$.

Par application du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = 0$$

Ce résultat a déjà été énoncé dans le tome 1 : La précision statique d'une boucle ayant un régulateur à action intégrale est parfaite.

- *Étude de la précision dynamique*

La fonction de transfert isomorphe

$$F(p) = \frac{M(p)}{W(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \text{ avec : } T(p) = \frac{AK(1 + T_i p)}{(1 + \tau p) \cdot T_i p}$$

Dans le cas particulier où le temps d'action intégrale $T_i = \tau$ (ce qui constitue le meilleur réglage d'un premier ordre en mode PI),

$$F(p) = \frac{1}{1 + \tau'' p} \text{ avec cette fois : } \tau'' = \frac{\tau}{AK}$$

La constante de temps τ'' est donc d'autant plus faible que l'amplification est importante. La précision dynamique est améliorée lorsque l'amplification est augmentée.

Ce réglage, déjà évoqué au chapitre 18 du tome 1, est considéré comme le plus performant pour un système du premier ordre, à condition que la valeur du gain de boucle AK ne soit pas trop importante car cela entraîne des saturations sur l'organe de commande. Le calcul théorique de τ'' , effectué avec l'hypothèse linéaire, est alors faux.

Pour une perturbation subissant une variation en échelon, on aboutit à des résultats analogues.

- Étude de la réponse à une rampe de consigne ou de perturbation

Si la consigne évolue en rampe, on a : $W(p) = \frac{k}{p^2}$

L'écart $\varepsilon(t)$ vaut donc : $\varepsilon(p) = \frac{k/p^2}{1 + T(p)}$. Le produit $p \cdot \varepsilon(p)$ tend vers $\frac{kT_i}{AK}$

lorsque p tend vers 0. L'erreur de traînage tend donc vers une constante non nulle, qui diminue lorsque A augmente. L'annulation de cette erreur n'est possible qu'en présence d'un deuxième terme d'intégration dans $T(p)$. Dans la pratique, même sans cette deuxième intégration, l'erreur de traînage d'un système du premier ordre corrigé par une régulation PI reste faible tant que le coefficient directeur k de la rampe n'est pas trop important (inférieur à $\frac{50}{\tau}$).

2 Généralisation

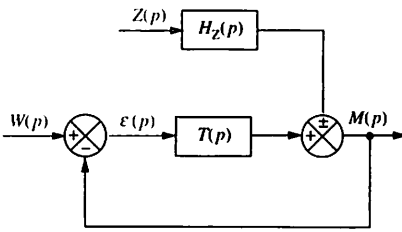
La précision d'un système bouclé dépend :

- de la fonction de transfert $T(p)$ en chaîne ouverte et en particulier de sa classe,
- de l'entrée sollicitée, consigne $W(p)$ ou perturbation $Z(p)$,
- de la catégorie de sollicitation, essentiellement échelon ou rampe,
- de la fonction de transfert perturbatrice $H_z(p)$ et en particulier de sa classe.

Pour une boucle représentée par le schéma fonctionnel de la figure 4, un tableau récapitulatif peut être établi :

Classe de $T(p)$ et $H_z(p)$		Consigne $W(p)$		Perturbation $Z(p)$	
		$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$
0	0	Cte	∞	Cte	∞
1	0	0	Cte	0	Cte
1	1	0	Cte	Cte	∞
		erreur statique	erreur de traînage	erreur statique	erreur de traînage

Fig. 4

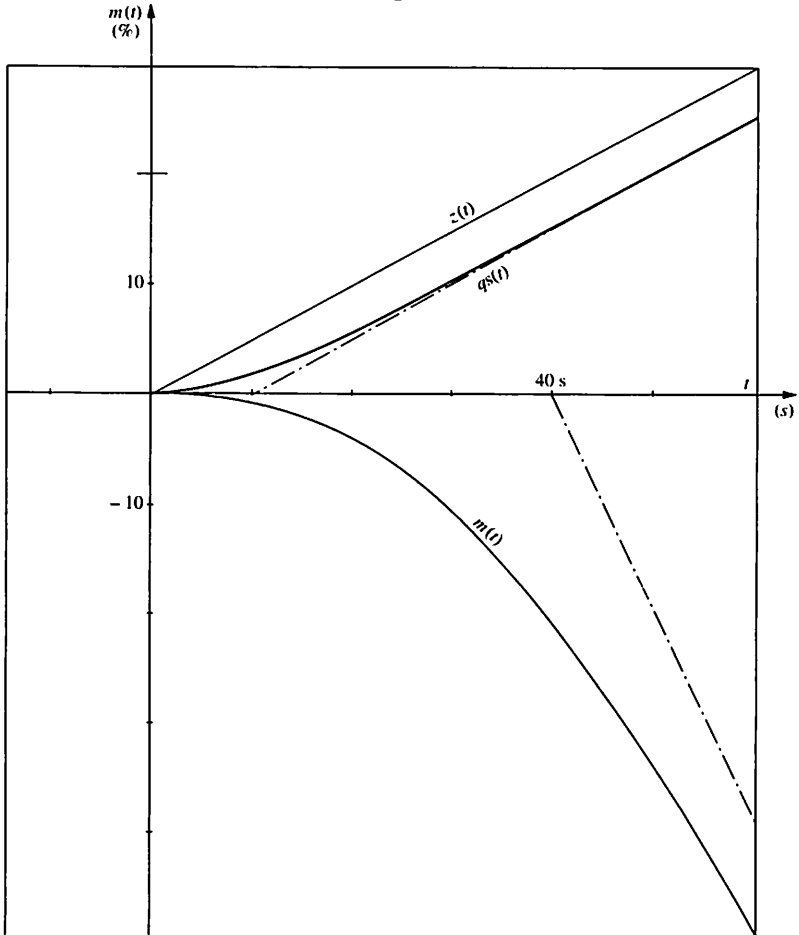


On remarque qu'il est important de connaître la fonction de transfert perturbatrice. En effet la présence d'une action intégrale dans $T(p)$ ne garantit pas une erreur statique nulle, lorsque $H_z(p)$ est de classe 1. L'exemple le plus connu est celui d'une perturbation constante du couple, pour un moteur faisant partie d'un asservissement

de position utilisant une régulation proportionnelle : elle aboutit à une erreur de position.

On note que cet aspect, souvent occulté lorsqu'il s'agit d'un asservissement, est fondamental en régulation.

Fig. 5



On reprend le dispositif étudié dans l'exercice du chapitre précédent.

A partir du point de fonctionnement choisi, on désire augmenter le débit de charge Q_s jusqu'à 60 %, en faisant subir au signal de commande de la pompe une variation en rampe de la forme : $z(t) = 0,5 \cdot t \cdot u(t)$. Cette sorte de sollicitation permet une augmentation continue du débit alimentant l'installation située en aval, sans trop la perturber.

1. Calculer l'amplification A du régulateur permettant d'obtenir une réponse $m(t)$ semblable à celle d'un deuxième ordre d'amortissement $\lambda = 1$.
2. Exprimer alors $q_s(t)$ et $m(t)$.
3. Tracer, pour la durée de variation de $z(t)$, l'allure des courbes $z(t)$, $q_s(t)$, $m(t)$.
4. Calculer la valeur de l'écart $\varepsilon(t)$, au terme de la variation de $z(t)$. Que peut-on préconiser pour améliorer cette régulation ?

Solution :

1. Calcul de l'amplification A

Le système étant sollicité par une entrée de perturbation, il faut rechercher la fonction de transfert

$$F_z(p) = \frac{M(p)}{Z(p)} = \frac{H_z(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)}$$

On obtient :

$$F_z(p) = \frac{-1/A}{1 + \frac{10}{A}p + \frac{100}{A}p^2}$$

fonction que l'on peut identifier à un second ordre normalisé avec :

$$\frac{2\lambda}{\omega_0} = \frac{10}{A} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{A}}{10}$$

ce qui conduit : $2\sqrt{A} = \frac{1}{\lambda}$.

Pour $\lambda = 1$ il faut donc adopter :

$$A = 0,25$$

2. Expression de $q_s(t)$ et $m(t)$

En adoptant la valeur précédente de A

on obtient : $F_z(p) = \frac{-4}{1 + 40p + 400p^2}$.

D'autre part $\frac{Q_s(p)}{Z(p)} = \frac{1}{1 + 10p}$ et

$Z(p) = \frac{0,5}{p^2}$ pour une variation en rampe.

Après décomposition en éléments simples de $Q_s(p)$ et $M(t)$, on obtient par inversion temporelle :

$$q_s(t) = 5 \left(e^{-\frac{t}{10}} - 1 \right) + 0,5t$$

et

$$m(t) = - (80 + 2t)e^{-0,05t} - 2t + 80$$

3. Courbes $z(t)$, $q_s(t)$, $m(t)$

Elles sont fournies figure 5, pour la durée de variation de $z(t)$, à savoir 60 s.

4. Erreur statique

Pour $t = 60$ s, on constate que :

$$m(t) \simeq -50 \%$$

Cela aboutit à un écart $\varepsilon(t)$ de 50 %, par rapport à une consigne fixe. On vérifie que l'on retrouve la dernière ligne du tableau, avec une erreur de traînage qui tend vers l'infini. Il faut introduire une deuxième intégration dans $T(p)$, en adoptant une régulation P.I. Dans ce cas l'erreur de traînage devient constante pendant la variation de Q_s , avec obtention d'une erreur statique nulle après stabilisation de Q_s à sa nouvelle valeur.

En revanche, une évolution de $z(t)$ en $t^2 \cdot u(t)$ ne permettrait de nouveau plus une erreur de traînage constante. L'évolution du débit de charge Q_s sous forme de rampe a donc une double nécessité : ne pas trop perturber l'installation située en aval, mais également ne pas trop perturber celle située en amont.

Pour être efficace, une boucle de régulation doit assurer une précision statique parfaite et une précision dynamique optimale, caractérisée par des écarts faibles, pendant les régimes transitoires.

Ce dernier objectif, lié à la rapidité de réaction de la boucle, nécessite bien souvent des réglages du régulateur qui peuvent entraîner des phénomènes de pompage (voir Régulation 1, chap. 11), incompatibles avec le but recherché et la sécurité de l'installation.

En effet l'étude des caractéristiques statiques montre que le gain statique K d'un système dépend très largement du point de fonctionnement et des perturbations : un réglage satisfaisant, fixé une fois pour toutes dans le régulateur pour un point de fonctionnement déterminé, peut se révéler inadéquat si la fonction de transfert évolue. Le technicien de régulation doit donc rechercher un compromis entre la *précision* et la *stabilité* d'une boucle de régulation, afin d'assurer une certaine *robustesse* (Régulation 1, chap. 13).

1 Définition

Un système est dit stable si toute variation bornée d'un signal d'entrée $e(t)$ produit une variation bornée du signal de sortie $s(t)$ (fig. 1). Par l'expression signal borné on doit comprendre un signal tel que : $\lim e(t) = \text{Cte}$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Cette définition est générale : elle s'applique aux systèmes bouclés, aussi bien en régulation qu'en mécanique ou en électronique. La stabilité d'un système est une propriété intrinsèque de ce dernier, indépendamment de l'entrée sollicitée. Pour une boucle de régulation, les entrées considérées sont la consigne $W(t)$ et les perturbations $Z(t)$.

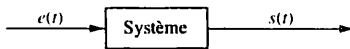


Fig. 1

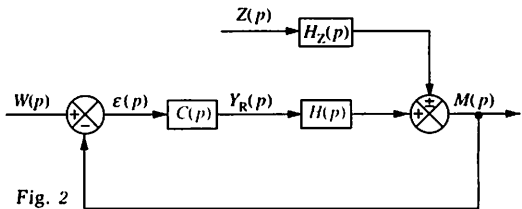


Fig. 2

2 Conditions de stabilité

Pour un système bouclé traditionnel (fig. 2), l'expression de $M(p)$ a été déterminée dans Régulation 1, chapitre 22.

$$M(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot W(p) \pm \frac{H_z(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot Z(p) \quad (1)$$

Pour la simplifier on définit la fonction de transfert en chaîne ouverte $T(p)$: $T(p) = C(p) \cdot H(p)$.

La relation (1) devient alors : $M(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \cdot W(p) \pm \frac{H_z(p)}{1 + T(p)} \cdot Z(p)$;

elle est donc de la forme : $M(p) = F(p) \cdot W(p) + F_z(p) \cdot Z(p)$ avec :

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \quad \text{et} \quad F_z(p) = \pm \frac{H_z(p)}{1 + T(p)} \quad (2)$$

La détermination de la réponse temporelle $m(t)$ à une sollicitation quelconque, par exemple à une impulsion de Dirac (de transformée de Laplace égale à 1), conduit à rechercher les pôles de $F(p)$ et de $F_z(p)$, afin de permettre l'inversion temporelle. Après réduction de ces deux fractions rationnelles en éléments simples, l'inversion temporelle est immédiate (voir les tables fournies dans Régulation 1, chap. 24).

On rappelle que les pôles d'une fraction sont les racines (on dit : les zéros) de son dénominateur.

Compte tenu des expressions (2), on constate que, dans les deux cas, les pôles sont les racines de l'équation :

$$1 + T(p) = 0$$

On montre mathématiquement que ses racines sont également celles de l'équation caractéristique de la boucle de régulation, qui permet la détermination de la solution $m(t)$ de l'équation différentielle homogène régissant le système bouclé.

On peut donc aussi bien raisonner à partir d'un calcul en transformée de Laplace qu'à partir de l'équation différentielle homogène d'un système.

Différents cas pouvant se présenter, pour cette étude, on choisit l'exemple d'un système bouclé ayant un terme d'asservissement $F(p)$

du type second ordre normalisé : $F(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1}$ ce qui

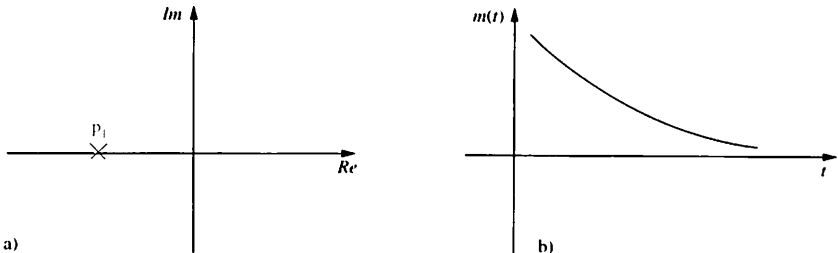
correspond à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 m(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} \cdot \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = Kw(t)$$

L'équation caractéristique est donc : $\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1 = 0$ dont les racines, réelles ou complexes, sont notées p_1 et p_2 .

- p_1 et p_2 sont des racines réelles négatives : $p_1 = -r_1$; $p_2 = -r_2$ ($r_1 > 0$ et $r_2 > 0$: fig. 3).

Fig. 3



La solution générale de l'équation différentielle homogène est alors de la forme : $m(t) = \alpha_1 e^{-r_1 t} + \alpha_2 e^{-r_2 t} + Cte$, fonction représentée figure 3. Dans ces conditions on dit que le système est stable.

- p_1 et (ou) p_2 sont des racines réelles positives : $p_1 = +r_1$; $p_2 = \pm r_2$ ($r_1 > 0$ et $r_2 > 0$: fig. 4) alors : $m(t) = \alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{\pm r_2 t} + Cte$, fonction représentée à la figure 4.

Dans ces conditions on dit que le système est instable.

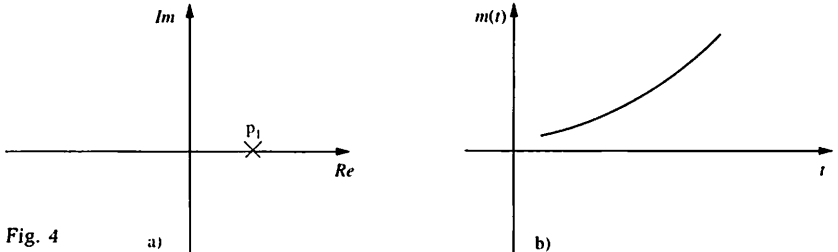


Fig. 4

- p_1 et p_2 sont deux racines complexes à parties réelles négatives (fig. 5) $p_i = -r \pm j\omega$, avec $r > 0$;

$$m(t) \text{ est alors de la forme : } m(t) = \alpha_1 e^{(-r - j\omega)t} + \alpha_2 e^{(-r + j\omega)t} + Cte.$$

Cette fonction est représentée figure 5.

La réponse transitoire est une sinusoïde amortie, le système est stable.

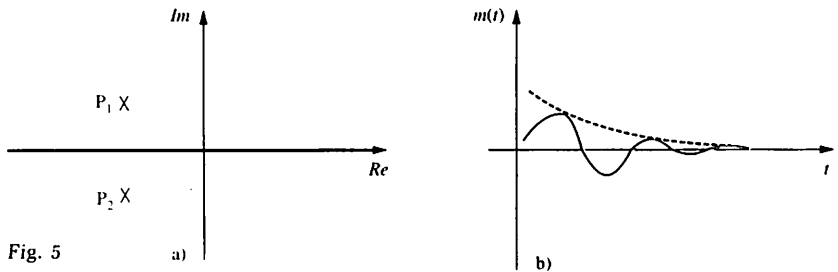


Fig. 5

- p_1 et p_2 sont deux racines complexes imaginaires conjugués (fig. 6) $p_i = \pm j\omega$.

$$m(t) \text{ est alors de la forme : } m(t) = \alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos \omega t + Cte.$$

La réponse (fig. 6) montre que le système effectue des oscillations entretenues. On considère, dans ce cas limite, que le système est instable.

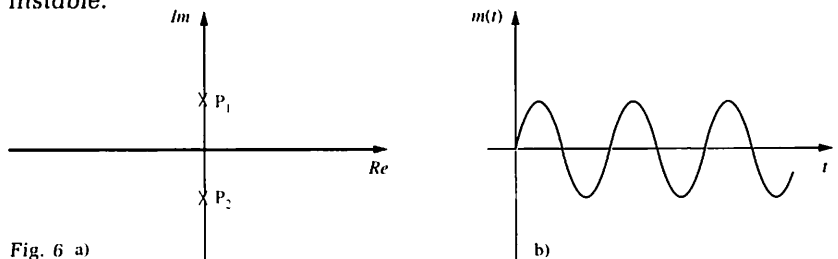


Fig. 6 a)

- p_1 et p_2 sont deux racines complexes à parties réelles positives (fig. 7)
 $p_i = + r \pm j\omega$, avec $r > 0$;
 $m(t)$ est alors de la forme : $m(t) = \alpha_1 e^{(r - j\omega)t} + \alpha_2 e^{(r + j\omega)t} + \text{Cte}$ fonction représentée à la figure 7.
 La réponse transitoire indique que le système est instable.

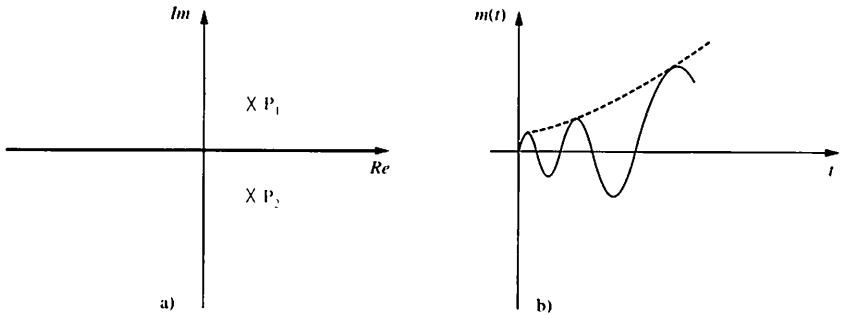


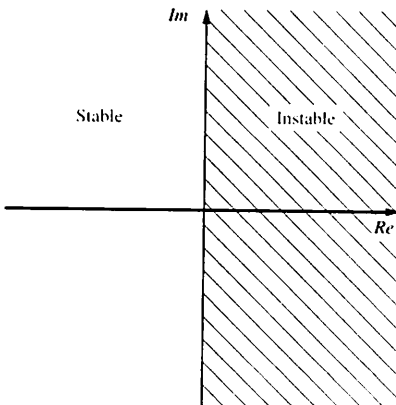
Fig. 7

3 Généralisation

Les résultats précédents permettent d'énoncer la condition fondamentale :

Un système linéaire est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert en chaîne fermée ont leur partie réelle négative.

Cela conduit à exclure, pour les racines de l'équation $1 + T(p) = 0$, la partie droite du plan complexe (fig. 8).



La détermination de la stabilité peut donc apparaître comme mathématiquement très difficile. En effet il faut déterminer les racines d'un polynôme dont le degré peut dépasser deux. Dans la pratique on ne cherche pas à connaître explicitement les racines (ce qui est difficile) mais uniquement si certaines ont une partie réelle positive. Le problème devient alors plus facile et il est abordé au chapitre 8 traitant des critères de stabilité.

Fig. 8

Exercices résolus

- 1 On reprend le dispositif étudié au chapitre 4 (fig. 9). La pompe est désormais de constante de temps négligeable, ainsi que la vanne de régulation, cette dernière étant, de plus, maintenant de type NF.
- Établir la nouvelle expression de la fonction de transfert $H(p)$.
 - Même question pour $H_z(p)$.
 - Déterminer le sens d'action du régulateur.
 - Établir le nouveau schéma fonctionnel valable pour cette installation.

Solution :

1. Expression de $H(p)$

La vanne est désormais de type normalement fermée (NF), essentiellement pour des raisons de sécurité qui, dans le cas présent, conduisent à isoler le bac de stockage en cas d'incident. Une augmentation du signal de commande entraîne maintenant une augmentation du débit entrant, ce qui provoque une montée du niveau

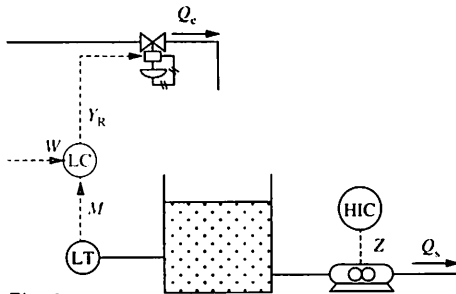


Fig. 9

(variation positive) : le gain dynamique est donc positif. La vanne ayant de plus une constante de temps négligeable, le terme du premier ordre disparaît dans sa fonction de transfert. On obtient donc pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = + \frac{0,1}{p}$$

2. Expression de $H_z(p)$

Une augmentation de la commande de la pompe entraîne toujours une baisse

du niveau (variation négative) : le gain dynamique k est donc toujours négatif. Cependant la constante de temps de cette pompe étant désormais négligeable, le terme du premier ordre disparaît également dans l'expression de $H_z(p)$. On obtient donc :

$$H_z(p) = \frac{M(p)}{Z(p)} = - \frac{0,1}{p}$$

3. Sens d'action du régulateur

Compte tenu du sens de la vanne, une augmentation de la mesure m doit entraîner une diminution du débit à l'entrée, donc une diminution du signal de commande Y_R : le régulateur doit être à sens d'action inverse.

4. Schéma fonctionnel

Compte tenu du sens d'action du régulateur et des signes des fonctions de transfert, ce schéma est représenté figure 10. On remarque que l'on retrouve le schéma traditionnel.

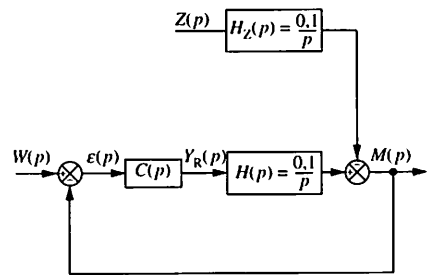


Fig. 10

- 2 Un système physique, sollicité par un échelon de commande $y_R(t) = 10 \cdot u(t)$ admet la réponse indicielle représentée figure 11, courbe 1. Le technicien relève les deux premiers dépassements D_1 et D_2 ainsi que la pseudo-période T . Compte tenu de l'allure de la courbe, il l'assimile à celle d'un second ordre équivalent :

$$H(p) = \frac{K'}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1}$$

1. Déterminer les valeurs de D_1 , D_2 , $m(\infty)$ en pourcentages, et celle de T en secondes.

2. En déduire les paramètres K , λ , et ω_0 du modèle.

3. Représenter, dans le plan complexe, les pôles de cette fonction $H(p)$.

4. On associe le système à un régulateur PID de structure mixte idéalisée. On désire obtenir en chaîne fermée une fonction de transfert permettant une réponse indicielle aperiodique, si possible de la forme 1^{er} ordre (fig. 11, courbe 2). On adopte donc

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p}, \text{ avec } \tau = 10 \text{ s.}$$

Déterminer les valeurs de T_i , T_d et A correspondantes.

5. Représenter dans le plan complexe le(s) pôle(s) de $F(p)$. Conclusions ?

Solution :

1. Valeurs des relevés expérimentaux
On trouve graphiquement $D_1 \approx 31\%$, $D_2 \approx 3\%$, $m(\infty) \approx 10\%$ et $T \approx 95$ s.

2. Paramètres K , λ et ω_0 du modèle
Les résultats de Régulation tome 1, repris page 127, donnent :

$$D_1 = e^{-\lambda\pi/\sqrt{1-\lambda^2}} \Rightarrow \lambda = 0,35$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 0,066 \text{ rad/s.}$$

Or $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\lambda^2}$, d'où : $\omega_0 = 0,07$ rad/s.
Une vérification de la validité du modèle peut être effectuée à partir du dépassement D_2 . En effet

$$\frac{D_2}{D_1} = e^{-2\lambda\pi/\sqrt{1-\lambda^2}} = 0,096 \text{ pour un } D_1$$

second ordre. Dans le cas présent on aboutit à $D_2 = 2,97\%$, ce qui est conforme à la valeur expérimentale.

$$H(p) = \frac{1}{200p^2 + 10p + 1}$$

3. Pôles de $H(p)$

Ils sont représentés figure 12 :

$$p_1 = -\lambda\omega_0 + j\omega = -0,0245 + 0,066j$$

$$\text{et } p_2 = -\lambda\omega_0 - j\omega = -0,0245 - 0,066j$$

4. Détermination de $C(p)$

En chaîne fermée :

$$F(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)}$$

$$\text{avec : } C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$$

Il vient donc :

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{(200p^2 + 10p + 1) \times T_i p}{(T_i T_d p^2 + T_i p + 1) \times A}}$$

$F(p)$ se réduit à un 1^{er} ordre si on adopte : $T_i = 10$ s, $T_d = 20$ s, $A = 1$.

5. Pôle de $F(p)$

Il est représenté figure 12 :

$$p_3 = -\frac{1}{\tau} = -0,1, \text{ situé dans une zone}$$

permettant un bon amortissement.

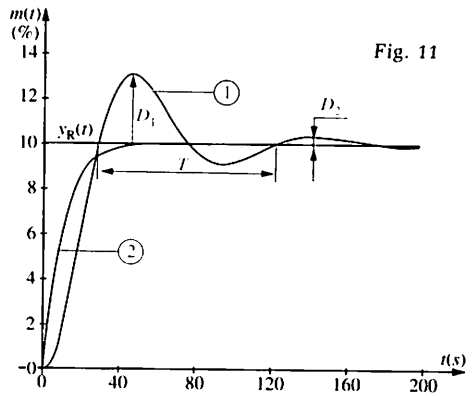


Fig. 11

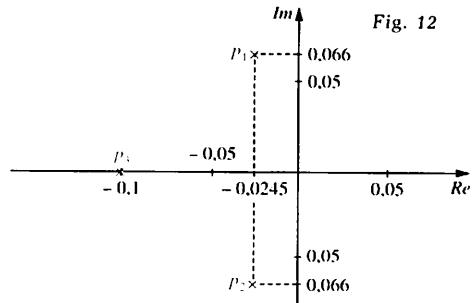


Fig. 12

L'amortissement d'une boucle de régulation, abordé au chapitre 4, montre que ce paramètre permet de caractériser la précision. L'amortissement est donc lié à la stabilité et on conçoit facilement qu'un système très amorti soit stable. La stabilité pouvant être caractérisée par la position des pôles de la fonction de transfert réglante, il apparaît intéressant de pouvoir lier l'amortissement d'une boucle de régulation à la position des pôles de sa fonction de transfert $F(p)$.

Les régulateurs actuels les plus sophistiqués font appel à la notion de placement de pôles, assurant ainsi une grande robustesse des boucles de régulation, vis-à-vis d'une évolution du système.

1 Amortissement d'un système du second ordre

L'étude de l'amortissement d'un système du second ordre est intéressante dans la mesure où la réponse indicielle des deux fonctions de transfert $F(p)$ et $F_z(p)$ d'une boucle de régulation en position « Automatique » peuvent souvent être assimilées à celle d'un tel système. On parle alors de fonction de transfert équivalente du second ordre, dont les pôles sont souvent appelés *pôles dominants*.

Pour lier la stabilité et l'amortissement d'un système du second ordre, on rappelle l'expression de sa réponse indicielle (tome 1, chap. 11) pour $\lambda < 1$:

$$s(t) = K \left[1 - e^{-\lambda\omega_0 t} \left(\cos \omega t + \frac{\lambda\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$$

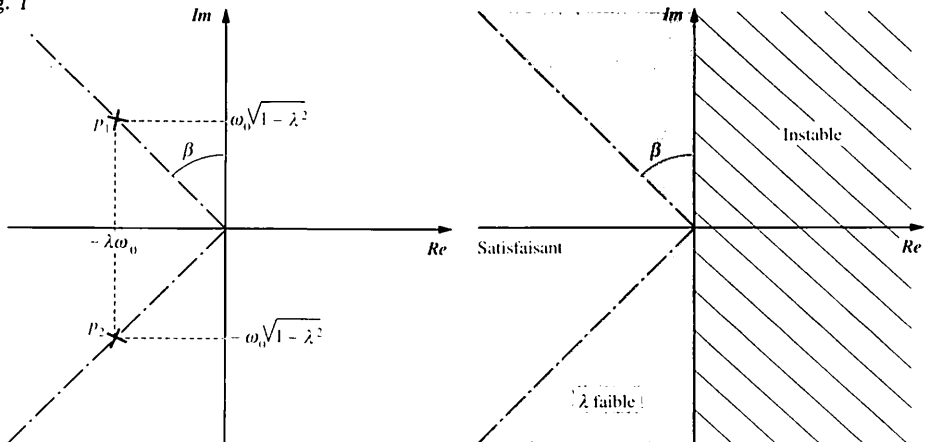
avec : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}$.

Si λ est inférieur à 1, on peut poser $\lambda = \sin \beta$

Dans le plan complexe, les deux pôles d'un deuxième ordre ont pour expression :

$$p_i = -\lambda\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}$$

Fig. 1

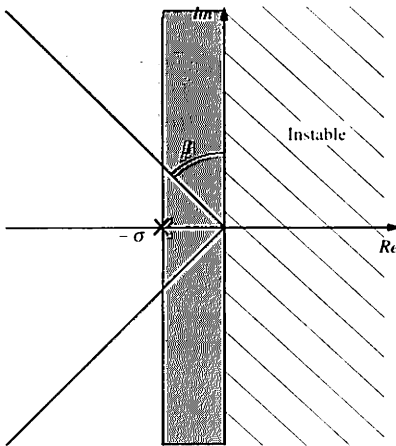


La figure 1 représente la position de ces deux pôles, avec $\lambda = \sin \beta$. On voit donc que se fixer un coefficient d'amortissement λ revient à imposer un lieu des pôles entre les deux droites faisant l'angle β avec l'axe imaginaire.

Par exemple $\lambda = 0,7$ correspond à $\beta = 45^\circ$.

Cette première condition assurée, il est évident que le produit $\lambda\omega_0$, qui caractérise la décroissance exponentielle de l'enveloppe du signal $s(t)$, ne doit pas être trop faible afin d'éviter l'existence d'oscillations d'amplitude non négligeable, pendant un laps de temps trop long.

En effet le terme $e^{-\lambda\omega_0 t}$ peut être mis sous la forme $e^{-\frac{t}{\tau_p}}$ où la constante de temps principale τ_p caractérise la rapidité d'atténuation de l'amplitude des oscillations. Une trop faible valeur de $\lambda\omega_0$ aboutit à une valeur importante de $\tau_p = \frac{1}{\lambda\omega_0}$.



Pour réaliser cette condition sur la partie réelle des pôles, on élimine une zone supplémentaire du plan complexe, comprise entre l'axe imaginaire et une droite parallèle à cet axe, d'abscisse $-\sigma$. Cette valeur caractérise l'horizon d'amortissement (fig. 2).

Conclusions

Une réponse acceptable est obtenue en imposant un coefficient d'amortissement λ compris entre 0,4 et 0,7, avec une valeur élevée pour le produit $\lambda\omega_0$, bien que compatible avec les contraintes technologiques du système.

Fig. 2. $\sigma = \lambda\omega_0$. Un système bouclé est suffisamment amorti si tous ses pôles sont situés dans la zone non hachurée.

Ces résultats sont exploités dans les techniques de réglages qui sont abordées au chapitre 14. On conservera en mémoire qu'une bonne connaissance des réponses temporelle et fréquentielle d'un système du second ordre est essentielle pour comprendre ces techniques, qui tentent d'assurer le compromis précision-stabilité, en fonction de critères objectifs.

2 Technique de placement de pôles

Principe

L'exercice corrigé du chapitre 6 est un exemple intéressant de cette technique. La fonction de transfert du système $H(p)$ est connue sous la forme d'un second ordre présentant deux pôles p_1 et p_2 dans la zone correspondant à un amortissement insuffisant.

En chaîne fermée, la fonction de transfert $F(p)$ présente un seul pôle réel p_3 , dans la zone d'amortissement satisfaisant. Le correcteur $C(p)$ apparaît donc comme un dispositif permettant de « corriger » la position des pôles, lors du passage de la chaîne ouverte à la chaîne fermée.

Pour comprendre le mécanisme de la méthode, on envisage l'expression de la fonction de transfert en chaîne ouverte $T(p) = C(p) \cdot H(p)$

$$T(p) = \frac{A(1 + T_i p + T_i \cdot T_d \cdot p^2)}{T_i p (200p^2 + 10p + 1)}$$

On constate que les valeurs adoptées pour T_i et T_d permettent exactement de simplifier le dénominateur de $H(p)$ avec le numérateur de $C(p)$. On peut dire sous une autre forme, que les pôles du système ont été « compensés » par les zéros du correcteur.

Pourquoi cette simplification mathématique est-elle intéressante ?

Sur l'exemple précédent, si la simplification a lieu, on constate que la fonction de transfert $T(p)$ devient $T(p) = \frac{A}{T_i \cdot p}$ qui ne présente plus

qu'un seul pôle $p = 0$ (pôle à l'origine).

Les chapitres 12 et 13 montreront que la fonction de transfert $F(p)$ qui s'en déduit est alors toujours stable, quelle que soit la valeur adoptée pour l'amplification A .

Contraintes de réalisation de $C(p)$

- Il est clair que l'exemple précédent est purement pédagogique. En effet une fonction de transfert $H(p)$ du 3^e ordre ne permettrait plus la simplification précédente. Le numérateur de $C(p)$ permettrait au plus de « compenser » deux pôles de $H(p)$, par exemple les deux pôles les plus proches de la zone d'amortissement insuffisant.
- De plus l'exercice utilise une forme idéalisée du correcteur PID de structure mixte. En effet cette forme aboutit, pour $C(p)$, à une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur. Ceci est impossible physiquement et le régulateur n'est pas réalisable. Dans la pratique l'action dérivée présente un terme de filtrage (voir Régulation 1, chapitre 20, page 100) ce qui modifie l'expression réelle de $T(p)$:

$$T(p) = \frac{A}{T_i \cdot p \cdot (1 + \tau_F p)}$$

Dans la pratique cette constante de temps de filtrage est très faible et ne modifie pas sensiblement les résultats obtenus. Cependant on peut facilement montrer qu'on obtient alors une fonction de transfert $F(p)$ du second ordre, ce qui permet d'énoncer la règle suivante :

Un correcteur est physiquement réalisable si l'ordre de $F(p)$ est supérieur ou égal à celui de $H(p)$

- Si la technique apparaît comme intéressante, il faut souligner qu'elle n'est en rien une méthode miraculeuse : elle ne permet pas de rendre stable un système qui est initialement instable et présente donc des pôles à partie réelle positive. En effet une simplification purement mathématique fait disparaître des points intermédiaires dans le schéma fonctionnel. Les évolutions de ces points ne sont pas observables et la théorie générale de la commandabilité et de l'observabilité d'un système montre que le système devient instable en chaîne fermée. On retiendra qu'un système instable ne peut être rendu stable que par bouclage en contre-réaction. (fig. 3).

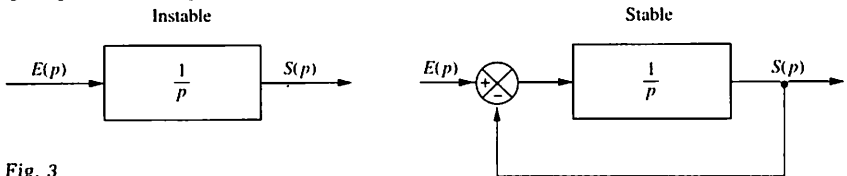


Fig. 3

- Enfin les valeurs obtenues pour T_i et T_d , à savoir $T_i = 10$ s et $T_d = 20$ s aboutissent à des résultats non satisfaisants sur un régulateur industriel. La valeur de T_d est trop élevée par rapport à celle de T_i . Il en résulte une trop grande sensibilité aux parasites car, généralement,

$$\tau_F = \frac{T_d}{10}$$

modifie fortement $T(p)$ qui présente alors un second pôle $-\frac{1}{\tau_F}$ proche de zéro.

Conclusions

La technique précédente n'est pas intéressante pour un régulateur PID car ce dernier n'offre pas suffisamment de degrés de liberté. Par contre cette technique peut être employée pour construire des régulateurs spécifiques, propres à une application précise. Couramment employée pour des servo-mécanismes, elle a du mal à se généraliser en régulation industrielle pour les deux raisons suivantes :

- en régulation, les fonctions de transfert dépendent très fortement du point de fonctionnement. Ceci se traduit par des pôles essentiellement variables au cours du temps, ce qui n'assure pas leur « compensation » en permanence.

- les agents de conduite des installations, les techniciens de réglage, sont familiarisés avec un matériel éprouvé, dont ils connaissent les réactions. Les contraintes de sécurité des personnes et des biens ne permettent pas facilement l'introduction de nouveaux concepts.

Exercice résolu

□ Pour un dispositif analogue à celui étudié au chapitre précédent, on désire déterminer les paramètres de réglage du régulateur de niveau (LC) de manière à obtenir une réponse indicielle en chaîne fermée, à une variation de consigne, conforme à celle d'un deuxième ordre avec : $\lambda\omega_0 = 0,025$ ce qui permet de garantir un temps de réponse T_R . Les durées sont exprimées en secondes (les autres symboles représentent des pourcentages).

Le régulateur LC est de type PI, avec une fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

1. Établir l'expression de la fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée,

sachant que $H(p) = \frac{1}{100p} = -H_Z(p)$.

2. Même question pour $F_Z(p)$.

3. Déterminer l'ordre de grandeur de T_R .

4. Déterminer les paramètres de réglage A et T_i permettant d'obtenir :

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \lambda = 0,4.$$

5. Représenter, dans le plan complexe, les pôles de ces fonctions de transfert.

6. Pour $w(t) = 10u(t)$, tracer les courbes de réponse correspondant aux deux valeurs précédentes de λ . Interpréter les résultats.

Solution :

1. Expression de $F(p)$

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \text{ avec } T(p) = C(p) \cdot H(p)$$

Compte tenu des expressions de $C(p)$ et $H(p)$ il vient :

$$F(p) = \frac{1 + T_i p}{1 + T_i p + \frac{100T_i}{A} p^2}$$

2. Expression de $F_Z(p)$

$$F_Z(p) = \pm \frac{H_Z(p)}{1 + T(p)}$$

En remplaçant $H_Z(p)$ par son expression on obtient :

$$F_Z(p) = \frac{-T_i p / A}{1 + T_i p + \frac{100T_i}{A} p^2}$$

On constate que les deux fonctions de transfert ont le même dénominateur, ce qui montre que la stabilité ne dépend pas de l'entrée du système envisagé.

3. Détermination de T_R

On rappelle les résultats du chapitre 11 du tome 1. Pour un système de second ordre, ou assimilé, le temps de réponse à $\pm 5\%$ de la valeur finale

$$\text{est égal à } 3\tau_p = \frac{3}{\lambda\omega_0}.$$

On obtient donc : $T_R(5\%) = 120 \text{ s}$

4. Détermination de A et T_i

Par identification avec le dénominateur du second ordre normalisé il vient :

$$1 + T_i p + \frac{100T_i}{A} p^2 = \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1$$

on tire : $\frac{2\lambda}{\omega_0} = T_i$ et $\omega_0 = 0,1 \sqrt{\frac{A}{T_i}}$ soit :

$$\lambda = 0,05 \sqrt{A \cdot T_i} \text{ et } \lambda\omega_0 = 0,005 A.$$

Dans ce cas précis $\lambda\omega_0$ ne dépend que de A (résultat non général).

D'où : $A = 5$; $T_i = 40 \text{ s}$ si $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$T_i = 12,8 \text{ s}$ si $\lambda = 0,4$.

5. Positionnement des pôles

$$p_i = -\lambda\omega_0 \pm j\omega$$

avec $\omega_0 = 0,0353 \text{ rad/s}$ $\left(\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

ou $\omega_0 = 0,0625 \text{ rad/s}$ ($\lambda = 0,4$).

Les pôles sont donc :

$$p_i = -0,025 \pm j0,025 \quad \left(\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

et $p_i = -0,025 \pm j0,057 \quad (\lambda = 0,4)$

La figure 4 représente ces couples de points.

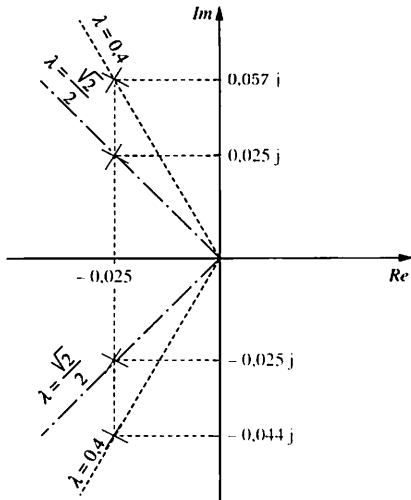


Fig. 4

6. Réponses temporelles

$$M(p) = \frac{1 + T_i p}{1 + T_i p + \frac{100T_i}{A} p^2} \cdot W(p) \text{ avec :}$$

$$W(p) = \frac{10}{p}$$

soit $m(t) = 10 - e^{-0,025t}$

$$\left(\frac{0,75}{\omega} \sin \omega t + 10 \cos \omega t \right)$$

Pour $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$m(t) = 10 - e^{-0,025t} [30 \sin(0,025t) + 10 \cos(0,025t)]$$

Pour $\lambda = 0,4$

$$m(t) = 10 - e^{-0,025t} [17 \sin(0,057t) + 10 \cos(0,057t)]$$

La figure 5 représente les deux courbes.

Dans tous les cas la précision statique est parfaite ($\varepsilon(\infty) = 0$) et le temps de réponse est identique ($\lambda\omega_0 = 0,025$) et conforme au résultat de la question 3. En régime transitoire de perturbation (fig. 6), la diminution de λ améliore l'écart transitoire ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$) mais diminue l'amortissement. Un compromis doit être trouvé en fonction du cahier des charges de l'installation.

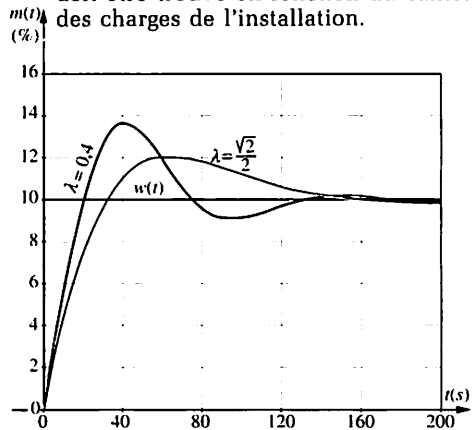


Fig. 5. La courbe $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ apparaît comme la meilleure solution en asservissement.

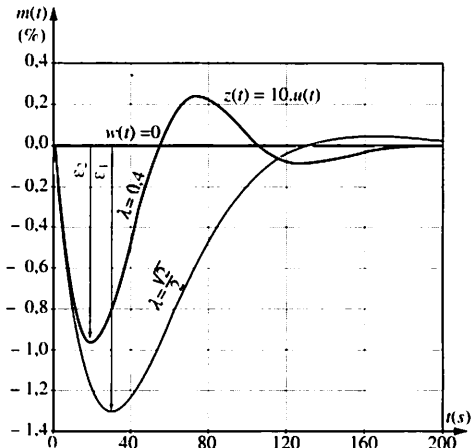


Fig. 6. La courbe $\lambda = 0,4$ apparaît comme la meilleure solution en régulation.

L'étude de l'amortissement d'un système a mis en évidence le lien entre sa stabilité et la position des pôles de sa fonction de transfert, dans le plan complexe. Pour les systèmes constitués par une boucle de régulation, le problème est relativement compliqué, dans la mesure où la fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée dépend des expressions de $C(p)$ et $H(p)$, toutes deux pouvant être compliquées. Pour la recherche de ses pôles, la fonction de transfert $F(p)$ peut comporter une équation de degré supérieur à deux, rendant ainsi la résolution mathématique compliquée.

Pour éviter ces difficultés, essentiellement d'ordre mathématique, des méthodes ont été mises au point, permettant une interprétation plus facile, sans calculs fastidieux. Divers cas peuvent être rencontrés :

- pour les systèmes dont la fonction de transfert $T(p)$ en chaîne ouverte est complexe, et en particulier si elle comporte un terme de retard, on utilise des critères géométriques, qui sont abordés au chapitre 10 ;
- pour les systèmes dont la fonction de transfert $T(p)$ est simple et peut être mise sous forme d'une fraction rationnelle en p (donc sans retard

T), le calcul de $F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$ peut être abordé. La difficulté n'est

plus alors que de pouvoir résoudre une équation de degré élevé. Dans ce dernier cas, on utilise des critères algébriques.

1 Définitions

Le but des critères algébriques est de déterminer si un système, caractérisé par une fonction de transfert isomorphe $F(p)$, est stable ou non, ce qui revient à connaître le signe des parties réelles de ses pôles. Tout l'intérêt de ces critères réside dans le fait qu'ils n'imposent pas d'explicitier les racines de l'équation $1 + T(p) = 0$, mais seulement de chercher si certaines d'entre elles ont une partie réelle positive.

Puisque $F(p)$ est supposée pouvoir se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle, la recherche des racines de l'équation $1 + T(p) = 0$ se ramène à celle des racines du numérateur de $1 + T(p)$, après réduction au même dénominateur. Par la suite on écrira cette condition sous la forme suivante : $\text{Num}[1 + T(p)] = 0$ ou $P(p) = 0$.

Cette équation, appelée *équation caractéristique*, peut s'écrire :

$$a_N p^N + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

c'est-à-dire sous la forme d'un polynôme caractéristique $P(p)$ de degré N , degré qui ne doit pas être confondu avec l'ordre n de la fonction de transfert $H(p)$ du système dont on assure la régulation.

En régulation la fonction de transfert $C(p)$ du régulateur dépend des paramètres de réglage, classiquement A , T_i et T_d . La fonction de transfert $H(p)$ fait, quant à elle, apparaître soit un gain statique K , soit un gain dynamique k , tous deux susceptibles de varier en fonction du point de fonctionnement de la boucle (les autres termes, dont les constantes de temps, sont beaucoup moins variables).

La stabilité de $F(p)$ peut donc n'être réalisée que pour certaines valeurs de ces paramètres. On parle alors de *stabilité conditionnelle*. Si la stabilité est assurée quelles que soient les variations possibles des paramètres du système ou du régulateur, on parle de *stabilité absolue*. La stabilité conditionnelle conduit à définir des *frontières de stabilité*, aussi appelées courbes de stabilité, qui permettent d'étudier la qualité d'un réglage ou la robustesse d'une boucle de régulation.

2 Critère algébrique de Routh

A partir de l'équation caractéristique $P(p) = 0$, écrite sous la forme :

$$a_N p^N + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

on construit un tableau, dit tableau de Routh, utilisant les coefficients de l'équation.

p^N	a_N	a_{N-2}	a_{N-4}
p^{N-1}	a_{N-1}	a_{N-3}	a_{N-5}
p^{N-2}	b_1	b_2	b_3	...	
p^{N-3}	c_1	c_2	...		
...			
p^0					

Les deux premières lignes correspondent aux coefficients de l'équation, le calcul des autres coefficients (b_1, c_1, \dots) obéit à la règle suivante :

$$b_1 = \frac{(a_{N-1} \cdot a_{N-2} - a_N \cdot a_{N-3})}{a_{N-1}} \quad b_2 = \frac{(a_{N-1} \cdot a_{N-4} - a_N \cdot a_{N-5})}{a_{N-1}}$$

$$c_1 = \frac{(b_1 \cdot a_{N-3} - a_{N-1} \cdot b_2)}{b_1} \quad c_2 = \frac{(b_1 \cdot a_{N-5} - a_{N-1} \cdot b_3)}{b_1}$$

Le calcul se poursuit jusqu'à épuisement des coefficients.

Condition de stabilité

Le système étudié est stable si tous les termes de la première colonne du tableau de Routh ont le même signe, sinon le nombre de racines à partie réelle positive est égal au nombre de changements de signe. Si l'un des coefficients est nul, le système présente des oscillations entretenues, ce qui est synonyme de « pompage » en régulation.

Exemple

- Stabilité absolue : L'équation étudiée est la suivante :
 $P(p) = 8 + 12p + 6p^2 + p^3$.

On dresse alors le tableau de Routh :

p^3	1	12	0
p^2	6	8	0
p^1	$\frac{64}{6}$	0	
p^0	8		

Dans ce cas tous les termes de la 1^{re} colonne sont positifs : la boucle de régulation correspondante est stable.

- Stabilité conditionnelle : la boucle de régulation représentée figure 1, est telle que : $H(p) = \frac{1}{(1 + 10p)^3}$ et $C(p) = A$ (régulation à action proportionnelle)

$$1 + T(p) = 1 + \frac{A}{(1 + 10p)^3} = \frac{(1 + 10p)^3 + A}{(1 + 10p)^3}$$

$$P(p) = 1000p^3 + 300p^2 + 30p + (1 + A)$$

Le tableau de Routh est le suivant :

p^3	1000	30	0
p^2	300	$1 + A$	0
p^1	$\frac{(80 - 10 \cdot A)}{3}$	0	
p^0	$1 + A$		

La boucle de régulation est stable si : $-1 < A < 8$. En pratique, il est évident que l'amplification A est positive, puisque $A = 0$ correspond à un régulateur utilisé en position « Manuel ».

3 Critère algébrique d'Hurwitz

Ce critère, beaucoup plus difficile à mettre en œuvre si N est grand, est basé sur l'écriture d'un déterminant. Les coefficients de ce déterminant utilisent naturellement ceux du développement du polynôme $P(p)$. On doit alors calculer ce déterminant et tous ses déterminants mineurs.

Soit le déterminant Δ_N défini par :

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & \dots & \dots \\ a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & \dots & \dots \\ 0 & a_{N-1} & a_{N-3} & \dots & \dots \\ 0 & a_N & a_{N-2} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

La variation d'indice obéit aux règles suivantes :

- suivant l'horizontale, de gauche à droite : décroissance de 2 unités en passant d'un terme au suivant;
- suivant la verticale : croissance de 1 unité en passant d'un terme à celui situé immédiatement en-dessous.

Les déterminants mineurs sont définis par :

$$\Delta_1 = a_{N-1} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} \\ a_N & a_{N-2} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} \\ a_N & a_{N-2} & a_{N-4} \\ 0 & a_{N-1} & a_{N-3} \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

Le système est stable si tous les déterminants sont positifs. Les résultats sont bien évidemment les mêmes avec les deux méthodes.

4 Exemples

- Stabilité absolue : l'équation étudiée est la suivante :

$P(p) = (p+2)(p+4)(p+6)$ qui présente trois racines réelles négatives. Le tableau de Routh est :

$$\begin{array}{r} p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 44 & 0 \\ 12 & 48 & 0 \\ 40 & 0 & \\ 48 & & \end{array}$$

Tous les termes de la 1^{re} colonne sont positifs.

- Instabilité limite : l'équation étudiée est la suivante :

$P(p) = (p+2)(p+4) \cdot p$ qui présente une racine nulle. Le tableau de Routh est :

$$\begin{array}{r} p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & \\ \boxed{0} & & \end{array}$$

Un des termes de la 1^{re} colonne est nul.

- Instabilité : l'équation étudiée est la suivante :

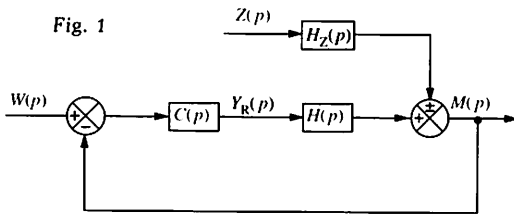
$P(p) = (p+2)(p+4)(p-5)$ qui présente une racine réelle positive. Le tableau de Routh est :

$$\begin{array}{r} p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & -22 & 0 \\ 1 & -40 & 0 \\ 18 & 0 & \\ \boxed{-40} & & \end{array}$$

Un des termes de la 1^{re} colonne est négatif.

Exercices résolus

1 On utilise une boucle de régulation, modélisée par le schéma fonctionnel de la figure 1.



a) On désire étudier l'influence de l'ordre de la fonction de transfert, ainsi que sa classe, sur la stabilité de la boucle réalisée, en régulation proportionnelle.

Pour cela on envisage les 3 fonctions de transfert suivantes :

$$H_1(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2} \quad H_2(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^2}$$

$$H_3(p) = \frac{k}{p^2(1 + \tau p)^2}$$

1. Dans les trois cas, déterminer l'expression de l'équation caractéristique.

2. Préciser si la stabilité est absolue ou non (A seule variable).

3. Si la stabilité est conditionnelle, déterminer la valeur A_0 de l'amplification du régulateur qui conduit au pompage de la boucle.

b) Pour le procédé de fonction de transfert $H_1(p)$, on introduit une action intégrale, la fonction de transfert du régulateur devenant :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

4. Montrer que la stabilité n'est plus absolue.

5. Pour $T_i = \frac{\tau}{4}$, déterminer la valeur A_0 de l'amplification qui conduit au pompage. La boucle est-elle instable pour $T_i = \tau$?

Solution :

1. Expression de $F(p)$ dans les trois cas

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

avec : $T(p) = C(p) \cdot H(p)$

Compte tenu des expressions de $C(p)$ et $H(p)$ il vient :

$$F_1(p) = \frac{AK}{AK + (1 + \tau p)^2}$$

$$F_2(p) = \frac{Ak}{Ak + p(1 + \tau p)^2}$$

$$F_3(p) = \frac{Ak}{Ak + p^2(1 + \tau p)^2}$$

On obtient donc les trois équations caractéristiques :

$$P_1(p) = \tau^2 p^2 + 2\tau p + (1 + AK)$$

$$P_2(p) = \tau^2 p^3 + 2\tau p^2 + p + Ak$$

$$P_3(p) = \tau^2 p^4 + 2\tau p^3 + p^2 + Ak$$

2. Étude de la stabilité

On utilise la méthode du tableau de Routh.

$P_1(p)$ fait apparaître la colonne suivante : τ^2 ; 2τ ; $1 + AK$ dont les termes sont tous positifs. La stabilité est absolue, quelle que soit la valeur de A .

$P_2(p)$ fait apparaître la colonne suivante : τ^2 ; 2τ ; $1 - AK\tau/2$, Ak dont le troisième terme peut devenir négatif : la stabilité est conditionnelle.

$P_3(p)$ fait apparaître la colonne suivante : τ^2 ; 2τ ; $1 - 2Ak$; Ak dont un des termes est négatif; le système est donc toujours oscillant.

3. Amplification limite d'oscillation

Pour $F_2(p)$, si $Ak > \frac{2}{\tau}$ c'est-à-dire

$$A \geq A_0 = \frac{2}{k\tau}$$

, on obtient un régime oscillant. On vérifie sur cet exemple qu'une augmentation de A conduit

habituellement au pompage et que le gain dynamique k est bien homogène à l'inverse d'un temps.

4. Régulation proportionnelle et intégrale

On obtient :

$$P'_i(p) = \tau^2 T_i p^3 + 2\tau T_i p^2 + T_i(1 + AK)p + AK$$

Le tableau de Routh comporte le terme $b_1 = T_i(1 + AK) - \frac{AK\tau}{2}$ qui peut devenir négatif. La stabilité est devenue conditionnelle, à cause de l'introduction de l'action intégrale, dont on vérifie le rôle déstabilisant sur cet exemple.

5. Amplification limite d'oscillation

Pour $T_i = \frac{\tau}{4}$, si $AK > 1$ donc : $A_0 = \frac{1}{K}$,

le terme b_1 devient négatif. En revanche pour $T_i = \tau$, le terme b_1 est toujours positif, car il vaut $\tau \left(1 + \frac{AK}{2}\right)$.

On vérifie sur cet exemple qu'une augmentation de T_i peut stabiliser une boucle instable pour des valeurs trop faibles de T_i . On remarquera que, dans toutes ces études, c'est en fait le gain de boucle AK qui intervient.

2. Préciser si la stabilité est conditionnelle.

3. Pour une régulation PI ($T_d = 0$), exprimer la valeur minimale de T_i qui entraîne l'oscillation de la chaîne fermée.

4. Pour une régulation PID, que devient cette valeur minimale.

Solution :

1. Équation caractéristique

$$F(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)}$$

$$F(p) = \frac{Ak(T_i \cdot T_d p^2 + T_i p + 1)}{T_i p^2(1 + \tau p) + Ak(T_i \cdot T_d p^2 + T_i p + 1)}$$

L'équation caractéristique est :

$$P(p) = T_i \tau p^3 + (1 + AkT_d)T_i p^2 + AkT_i p + Ak$$

2. Stabilité

Le tableau de Routh fait apparaître la colonne suivante :

$$T_i \tau; (1 + AkT_d)T_i;$$

$$b_1 = \frac{AkT_i[(1 + AkT_d)T_i - \tau]}{(1 + AkT_d)T_i}; c_1 = Ak$$

Le terme b_1 est susceptible de devenir négatif ou nul : la stabilité est conditionnelle.

3. Régulation PI

On prend $T_d = 0$ pour les différents termes. La valeur minimale $T_{i \min 1}$ que l'on peut adopter pour T_i est celle qui

annule le terme b_1 soit $T_{i \min 1} = \tau$.

Cette condition est particulière au système $H(p)$ choisi.

4. Régulation PID

En annulant le nouveau terme b_1 on

obtient : $T_{i \min 2} = \frac{\tau}{1 + AkT_d}$ qui est

plus faible que $T_{i \min 1}$. L'utilisation de l'action dérivée permet donc d'adopter une action intégrale plus importante (T_i plus faible) qu'en régulation PI. Ce résultat sera étudié en détail dans le chapitre suivant.

2 Un système bouclé conforme au schéma fonctionnel représenté figure 1 admet pour fonction de transfert réglante :

$$H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)}$$

Le régulateur utilisé est de structure mixte : $C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p\right)$

On désire montrer que l'utilisation de l'action dérivée permet d'augmenter la stabilité de la chaîne fermée.

1. Déterminer l'expression de l'équation caractéristique.

L'exercice résolu au chapitre 8 a mis en évidence un des grands intérêts des critères algébriques de stabilité : l'influence des variations des divers paramètres intervenant dans l'expression des fonctions de transfert $F(p)$ et $F_z(p)$ peut être mise en évidence facilement, ce qui permet au technicien de mieux maîtriser le réglage d'un régulateur.

Le nombre de paramètres pouvant être important, il convient de dégager les diverses catégories d'études. La classification se fait essentiellement en fonction de l'origine du paramètre dont on veut étudier l'influence.

On distingue :

- les études de stabilité, lorsque les paramètres du procédé sont supposés fixes. Par exemple, elles permettent de connaître l'influence de la structure d'un régulateur, pour un réglage fixé.

- les études de robustesse, lorsque les paramètres du procédé sont variables, la structure du régulateur étant figée. Elles permettent de savoir si un réglage donne un fonctionnement stable, quel que soit le point de fonctionnement.

1 Étude de stabilité : influence d'une action dérivée

Pour un procédé, dont le modèle de Strejc est $H(p) = \frac{1}{(1+10p)^3}$, on réalise une boucle de régulation avec un régulateur PID à structure parallèle :

$$C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$$

On se propose d'étudier la courbe de stabilité de cette boucle, c'est-à-dire la courbe $T_i = f(A)$ délimitant les zones de stabilité et d'instabilité. Le problème comportant trois variables (A , T_i , T_d), on réalise une étude en adoptant T_d comme paramètre.

Détermination de l'équation caractéristique

$$1 + T(p) = 1 + \left(A + \frac{1}{T_i p} + T_d \cdot p \right) \times \frac{1}{(1+10p)^3}$$

$$P(p) = 1000T_i p^4 + 300T_i p^3 + p^2 T_i (30 + T_d) + p T_i (1 + A) + 1$$

Après avoir mis T_i en facteur, on dresse le tableau de Routh suivant :

p^4	1 000	$30 + T_d$	$\frac{1}{T_i}$	
p^3	300	$1 + A$	0	avec : $b_1 = \frac{80 + 3T_d - 10 A}{3}$
p^2	b_1	$\frac{1}{T_i}$	0	
p^1	c_1	0	0	et : $c_1 = 1 + A - \frac{900}{T_i (80 + 3T_d - 10 A)}$
p^0	$\frac{1}{T_i}$			

Les « frontières » de stabilité correspondent donc à $b_1 = 0$ et $c_1 = 0$.

Cas d'une régulation PI : $T_d = 0$

$b_1 > 0$ entraîne : $A < 8$, condition déjà rencontrée en régulation P (1)

$c_1 > 0$ impose la condition : $T_i > \frac{900}{(80 - 10 A)(1 + A)}$ (2)

La courbe de stabilité est donc la courbe (1) de la figure 1, à gauche de la droite verticale $A = 8$. Compte tenu de l'inégalité (2), la zone de stabilité est située au-dessus de la courbe, la zone d'instabilité étant en dessous.

Cette courbe permet de retrouver les principaux résultats obtenus de façon expérimentale dans Régulation 1 (chap. 15 à chap. 19).

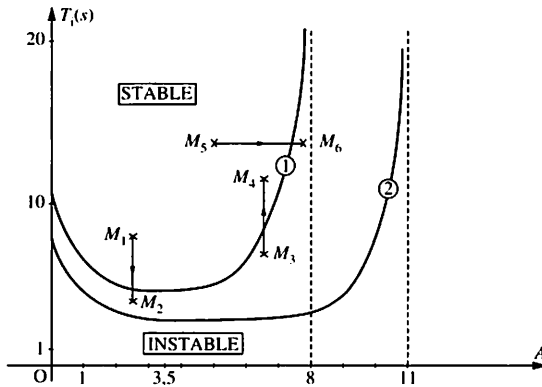


Fig. 1

- Étude à action proportionnelle constante

On retrouve qu'une augmentation de T_i stabilise la boucle, une diminution pouvant entraîner le pompage, par franchissement de la courbe frontière (points M_1 et M_2).

On constate à nouveau que pour des amplifications élevées (supérieures à 3,5), plus le système est sous-amorti par une amplification forte, plus il faut adopter une valeur élevée de T_i pour obtenir un amortissement satisfaisant (points M_3 et M_4).

- Étude à action intégrale constante

On constate qu'il existe deux zones : $A > 3,5$ et $A < 3,5$, cette valeur particulière de A correspondant à l'axe de symétrie de la courbe.

Dans la première le système est dit régulier, dans la mesure où une augmentation de A conduit à l'instabilité (points M_5 et M_6).

Dans la deuxième zone, l'étude de la stabilité est plus complexe car une diminution de A conduit à un moindre amortissement, pouvant aller jusqu'à l'instabilité si $T_i < \frac{90}{8}$. On parle alors de système irrégulier.

Cas d'une régulation PID : $T_d = 10$ s

La condition $b_1 > 0$ entraîne : $A < 11$.

$$c_1 > 0 \text{ aboutit à la condition } T_i > \frac{900}{(80 + 3T_d - 10 A)(1 + A)}$$

La courbe de stabilité devient la courbe (2) de la figure 1.

On constate que la zone de stabilité est plus étendue que précédemment, ce qui permet de conclure à l'effet stabilisant de l'action dérivée.

2 Étude de robustesse : sensibilité au gain statique

Pour un procédé, dont le modèle de Strejc est $H(p) = \frac{K}{(1 + 10p)^3}$, on réalise une boucle de régulation avec un régulateur PI à structure mixte :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

Le procédé possède une caractéristique statique fortement non linéaire, le gain statique K variant de 0,5 à 2, en fonction du point de fonctionnement sur la caractéristique statique du procédé (voir Régulation 1, chap. 6).

On se propose d'étudier les courbes de stabilité extrêmes $T_i = f(A)$ de cette boucle, délimitant les zones de stabilité et d'instabilité, pour les deux valeurs extrêmes de K , qui est le paramètre de cette étude.

Détermination de l'équation caractéristique

$$1 + T(p) = 1 + AK \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) \cdot \frac{1}{(1 + 10p)^3}$$

$$P(p) = 1000T_i p^4 + 300T_i p^3 + 30T_i p^2 + pT_i(1 + AK) + AK.$$

On peut encore mettre T_i en facteur (par rapport à l'exemple du paragraphe précédent, on notera la modification du dernier terme, due à la modification de structure). On aboutit au tableau de Routh suivant :

p^4	1000	30	$\frac{AK}{T_i}$	
p^3	300	$1 + AK$	0	avec : $b_1 = \frac{80 - 10AK}{3}$ (3)
p^2	b_1	$\frac{AK}{T_i}$	0	
p^1	c_1	0	0	et : $c_1 = 1 + AK - \frac{900AK}{T_i(80 - 10AK)}$ (4)
p^0	$\frac{AK}{T_i}$			

Les «frontières» de stabilité correspondent donc à $b_1 = 0$ et $c_1 = 0$.

Premier cas limite : $K = 0,5$

La condition $b_1 > 0$ entraîne : $A < 16$.

$$c_1 > 0 \text{ aboutit à la condition : } T_i > \frac{450 A}{(80 - 5 A)(1 + 0,5 A)}$$

Second cas limite : $K = 2$

La condition $b_1 > 0$ entraîne : $A < 4$.

$$c_1 > 0 \text{ aboutit à la condition : } T_i > \frac{1800 A}{(80 - 20 A)(1 + 2 A)}$$

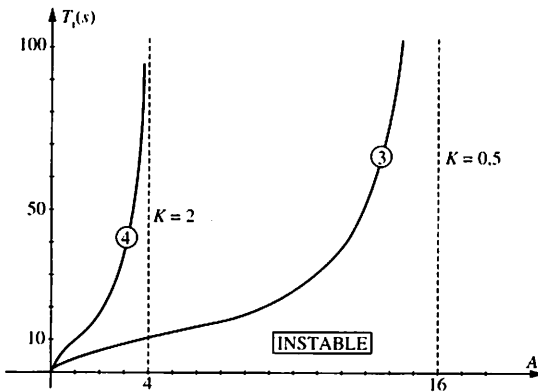


Fig. 2

Les deux courbes de stabilité sont représentées sur la figure 2.

On constate que le changement de structure rend le système régulier et que la zone de stabilité correspondant à $K = 0,5$ a une surface plus importante que celle correspondant à $K = 2$, ce qui permet de conclure à l'effet déstabilisant d'un gain statique qui augmente.

Pour permettre un fonctionnement satisfaisant, un réglage doit donc appartenir au domaine le plus restreint, par exemple :

$$A = 2 \text{ et } T_i = 50 \text{ s.}$$

Pour $K = 0,5$, ce réglage aboutit alors à des régimes transitoires lents, ce qui conduit à une précision dynamique médiocre. Dans la pratique on conclut à la nécessité d'agrandir le domaine de stabilité, par une action dérivée. L'étude de l'influence d'une variation de la constante de temps peut être faite, mais ce paramètre varie peu.

Exercice résolu

On se propose d'étudier la stabilité d'une boucle de régulation constituée d'un système physique de classe 1, de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{20p(1 + 10p)}$$

associé à un régulateur de type PID parallèle :

$$C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$$

1. Déterminer le contour de stabilité :

$$\frac{1}{T_i} = f(A, T_d) \text{ avec } T_d = 0 \text{ puis } T_d = 10 \text{ s.}$$

Le coefficient d'action intégrale $\frac{1}{T_i}$ sera exprimé en répétitions par minute (rep/min).

2. Situer la zone de stabilité et celle d'instabilité.

3. Vérifier la stabilité pour le réglage suivant : $A = 2,5$; $\frac{1}{T_i} = 7$ rep/min; $T_d = 0$.

4. La structure du régulateur est modifiée et devient mixte :

$C'(p) = A' \left(1 + \frac{1}{T_i' p} + T_d' p \right)$. Déterminer le nouveau contour de stabilité : $\frac{1}{T_i'} = f(A', T_d')$ avec $T_d' = 0$ puis $T_d' = 10$ s.

5. Pour la structure donnée question 4, vérifier si le réglage : $A' = 2,5$; $\frac{1}{T_i'} = 7$ rep/min; $T_d' = 0$ correspond ou non à un fonctionnement stable.

6. La structure du régulateur est série, de la forme

$$C''(p) = A'' \left(1 + \frac{1}{T_i'' \cdot p} \right) (1 + T_d'' \cdot p)$$

Déterminer dans ce cas le contour de stabilité. Tracer l'allure de ce dernier pour $T_d'' = 2,5$, puis 10 s.

7. Conclusions.

Solution :

1. Contour de stabilité

$$P(p) = 200T_i p^3 + p^2 T_i (20 + T_d) + p T_i A + 1.$$

Après factorisation de T_i , on obtient le tableau de Routh suivant :

p^3	200	A
p^2	$20 + T_d$	$\frac{1}{T_i}$
p^1	b_1	0
p^0	$\frac{1}{T_i}$	0

$$\text{avec } b_1 = A(20 + T_d) - \frac{200}{T_i}.$$

T_i étant exprimé en secondes, la condition de stabilité se traduit par le contour limite : $\frac{1}{T_i} = A \frac{(20 + T_d)}{200}$.

Avec l'unité courante des coefficients d'action intégrale on peut écrire :

$$\boxed{\frac{1}{T_i} \text{ (rep/min)} = \frac{6A(20 + T_d)}{20}} \quad (5)$$

Les courbes sont fournies figure 3 :

- courbe 1 : $T_d = 0$ donc $\frac{1}{T_i} = 6A$

- courbe 2 : $T_d = 10$ s donc $\frac{1}{T_i} = 9A$

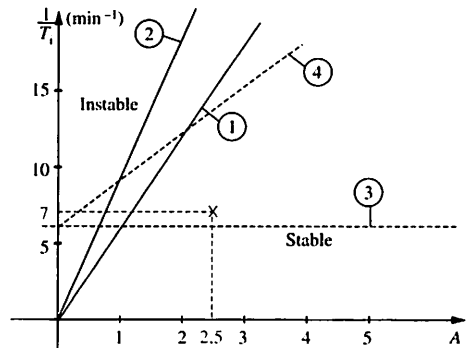


Fig. 3

2. Zone de stabilité

$b_1 > 0$: la zone de stabilité est située sous la droite.

On peut se souvenir aussi que l'action dérivée augmente la zone de stabilité.

3. Étude d'un réglage

Le réglage proposé est dans la zone de stabilité.

4. Nouveau contour de stabilité

La méthode la plus simple, qui sera reprise dans les chapitres concernant le réglage, est d'utiliser les formules de passage entre les deux structures. Ces formules sont obtenues par identification terme à terme des fonctions de transfert des deux régulateurs.

$$C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$$

$$= A' \left(1 + \frac{1}{T_i' \cdot p} + T_d' \cdot p \right) = C'(p)$$

On obtient donc : $A = A'$; $\frac{1}{T_i} = \frac{A'}{T_i'}$;

$$T_d = A' T_d' = A T_d'$$

Par report dans l'équation précédente (5), on obtient :

$$\frac{1}{T_i'} \text{ (rep/min)} = 6 \frac{(20 + A T_d')}{20}$$

Les courbes 3 et 4 correspondantes sont fournies figure 3.

- courbe 3 : $T_d' = 0$ donc $\frac{1}{T_i'} = 6$

- courbe 4 : $T_d' = 10$ s donc $\frac{1}{T_i'} = 3A + 6$

5. Validité du réglage

On constate que le réglage PI proposé n'est pas dans la zone de stabilité.

6. Nouveau contour de stabilité

Par identification des fonctions de transfert $C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$ et

$$C''(p) = A'' \left(1 + \frac{1}{T_i'' \cdot p} \right) (1 + T_d'' \cdot p)$$

on obtient :

$$A = A'' \frac{(T_i'' + T_d'')}{T_i''} ; \frac{1}{T_i} = \frac{A''}{T_i''} ;$$

$$T_d = A'' T_d''$$

Par report dans le résultat (5) il vient :

$$\frac{1}{T_i''} = \frac{1200 + 60A'' \cdot T_d''}{200 - (20 + A'' \cdot T_d'') \cdot T_d''}$$

Les trois courbes demandées sont représentées figures 4 a, b et c.4.

7. Conclusions

On vérifie que la zone de stabilité augmente avec la valeur de T_d'' , la stabilité devenant même absolue pour $T_d'' > 10$ s. On souligne une nouvelle fois combien il est important, pour le technicien, de connaître la structure du régulateur.

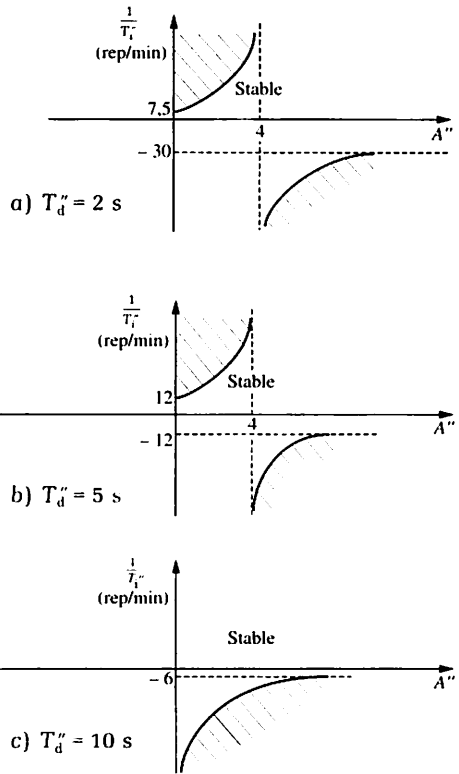


Fig. 4

L'utilisation des critères algébriques est limitée. La prise en compte d'un temps mort dans la fonction de transfert d'un procédé est impossible, sauf si l'on trouve un équivalent polynomial de cette fonction, ce qui conduit toujours à des équations d'ordre élevé.

Mais l'inconvénient majeur de la méthode est l'absence de critères objectifs permettant de prédéterminer les performances d'un réglage lorsqu'il est placé dans la zone de stabilité. On peut concevoir que la proximité de la «frontière de stabilité» donne une boucle avec un amortissement faible, mais le raisonnement ne peut pas être prolongé. A «distance égale» vaut-il mieux prendre $A = 2$ et $T_i = 60$ s ou $A = 3$ et $T_i = 90$ s ?

Les techniciens de régulation étant familiarisés avec les fonctions de transfert isochrones des systèmes, des méthodes fondées sur celles-ci peuvent être mises en œuvre, permettant une visualisation plus claire de l'influence des paramètres de réglage et une prédétermination des performances en chaîne fermée.

1 Critère isochrone

Les chapitres 8 et 9 ont permis de dégager la notion de frontière de stabilité. Celle-ci est définie par le fait que l'un des pôles de $F(p)$ est à partie réelle nulle; il se réduit à : $p = j\omega$.

Ce pôle est donc défini comme étant une racine de l'équation $1 + \bar{T}(j\omega) = 0$ ou, ce qui revient au même,

$$T(j\omega) = -1 \quad (1)$$

Or il est possible de rechercher graphiquement une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$ en traçant le graphe de cette fonction et en cherchant les intersections éventuelles avec l'axe des abscisses.

De même il est possible de résoudre l'équation (1) en traçant dans le plan complexe de Nyquist le graphe de $T(j\omega)$ et en envisageant son passage par le point de coordonnées $(-1,0)$, que l'on appellera désormais *point critique*.

On distingue alors trois cas (fig. 1) :

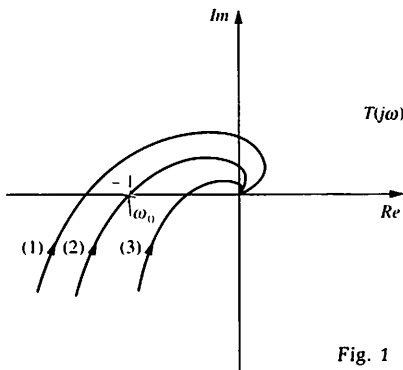


Fig. 1

- courbe 1 : il existe une pulsation ω_0 telle que $T(j\omega_0)$ soit réel, de module $|T(j\omega_0)| > 1$; on montre alors mathématiquement que l'équation $T(p) = -1$ admet deux racines complexes, de partie réelle positive : le système est instable.
- courbe 2 : il existe une pulsation ω_0 telle que $T(j\omega_0) = -1$; la boucle de régulation est à l'instabilité limite, le système présentant des oscillations entretenues de pulsations ω_0 ;

- courbe 3 : il existe une pulsation ω_0 telle que $T(j\omega_0)$ soit réel, de module $|T(j\omega_0)| < 1$; on montre alors mathématiquement que l'équation $T(p) = -1$ admet deux racines complexes, de partie réelle négative : le système est stable.

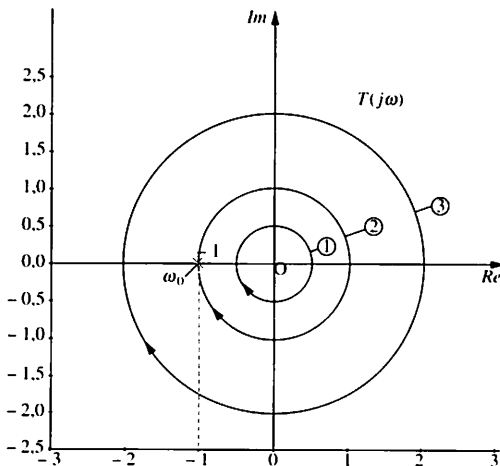
2 Critère simplifié du revers

On peut énoncer la règle suivante :
un système bouclé à retour unitaire est stable si, en décrivant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en chaîne ouverte $T(j\omega)$, dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique sur la gauche; il est instable dans le cas contraire.

3 Études pratiques

- Un réacteur chimique est chauffé par l'intermédiaire d'un liquide circulant dans une enveloppe extérieure (chauffage par double enveloppe). Pour le procédé cela se traduit, en première approximation, par un retard pur (ou temps mort) de durée T . La fonction de transfert est de la forme : $H(p) = Ke^{-Tp}$, avec $T = 10$ s.

Fig. 2



On veut montrer qu'en régulation proportionnelle il existe une amplification limite provoquant le pompage de la boucle. La fonction de transfert du régulateur se réduit à : $C(p) = A$.

La fonction de transfert isochrone en chaîne ouverte est : $T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega)$, obtenue en remplaçant p par $j\omega$ (voir Régulation 1, chap. 22).

On obtient alors :

$$T(j\omega) = A \cdot Ke^{-Tj\omega}$$

soit : $\underline{T} = T(j\omega) = [AK, -T\omega]$

puisque $e^{-j\varphi} = [1, -\varphi]$ (propriétés des nombres complexes).

Pour différentes valeurs du gain de boucle AK , les courbes représentant $T(j\omega)$ sont des cercles de centre O et de rayon AK (fig. 2) :

$AK = 0,5$: (courbe 1) elle caractérise un système stable;

$AK = 1$: (courbe 2) elle correspond à un système effectuant des oscillations entretenues, de pulsation ω_0 telle que :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T} = 0,314 \text{ rad/s};$$

$AK = 2$: le système bouclé est instable.

On retiendra de cet exemple que l'argument d'une fonction de transfert présentant un temps mort varie proportionnellement à ω : il existe donc nécessairement une pulsation pour laquelle cet argument est égal à $-\pi$. La boucle est stable si, pour cette pulsation, le module de $T(j\omega)$ est inférieur à un.

- Un échangeur de chaleur admet pour fonction de transfert réglante :

$$H(p) = \frac{1,4}{(1 + 12p)^3}.$$

On l'associe à un régulateur PI de structure mixte

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right).$$

On désire mettre en évidence que chacune des deux contributions peut être la cause de l'instabilité du système bouclé.

$$\text{Dans ce cas : } T(j\omega) = \frac{1,4A(1 + T_i j\omega)}{T_i j\omega(1 + 12j\omega)^3}$$

$$\text{dont le module vaut : } |T(j\omega)| = \frac{1,4A \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{T_i \omega (1 + 12^2 \omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{et dont l'argument est : } \varphi = \text{Arctan } T_i \omega - \frac{\pi}{2} - 3 \text{ Arctan } 12\omega.$$

Pour trois réglages différents, le lieu de $T(j\omega)$ est tracé dans un diagramme de Nyquist (fig. 3)

courbe 1 : $A = 2$; $T_i = 30$ s \Rightarrow le système bouclé est stable;

courbe 2 : $A = 5$; $T_i = 30$ s \Rightarrow une augmentation de A conduit à l'instabilité;

courbe 3 : $A = 2$; $T_i = 10$ s \Rightarrow une diminution de T_i conduit à l'instabilité.

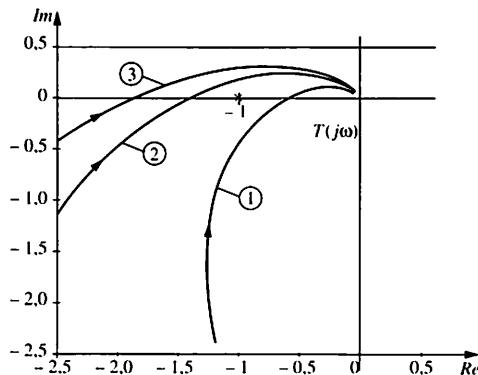


Fig. 3

4 Généralisation

En fonction de l'ordre de la fonction de transfert $T(j\omega)$, qui détermine la valeur asymptotique de son argument φ , et donc les quadrants où se situent les lieux de Nyquist, on peut prévoir si la stabilité d'une boucle est conditionnelle ou non (fig. 4).

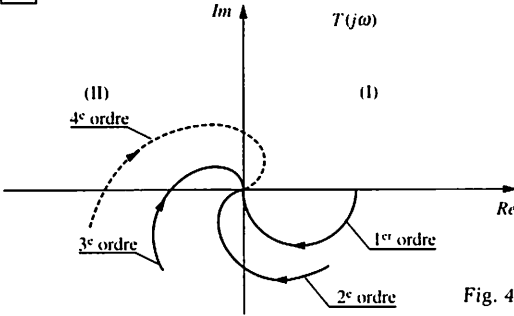


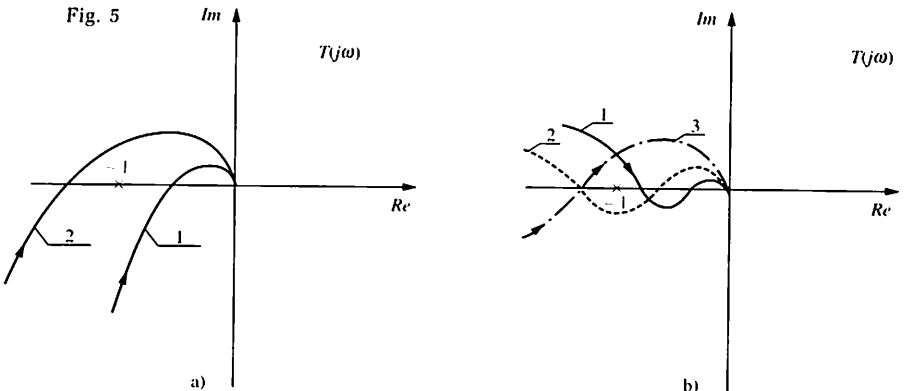
Fig. 4

$T(j\omega)$	Stabilité	Quadrants occupés
Premier ordre	absolue	IV
Second ordre	absolue (avec risque d'amortissement très faible)	III et IV
Troisième ordre	relative	II, III et IV
Enième ordre	relative	tous
Premier ordre avec temps mort	relative	tous

Pour les boucles admettant une stabilité relative (ou conditionnelle) on distingue :

- la stabilité régulière (fig. 5 a) : le régime instable finit par être obtenu par augmentation de l'amplification A du régulateur ;
- la stabilité irrégulière (fig. 5 b) : le régime instable peut être obtenu par augmentation (courbe 3) ou diminution (courbe 1) de A (ce qui sera très gênant en régulation).

Fig. 5



Exercice résolu

On se propose de vérifier les résultats de l'exercice résolu du chapitre précédent, par application du critère du revers. On rappelle la fonction de transfert du procédé :

$$H(p) = \frac{1}{20p(1 + 10p)}$$

Ce système est associé à un régulateur PI de structure mixte (ou série) de fonction de transfert :

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

On rappelle que l'utilisation des critères algébriques a permis d'établir la courbe de stabilité fournie figure 6.

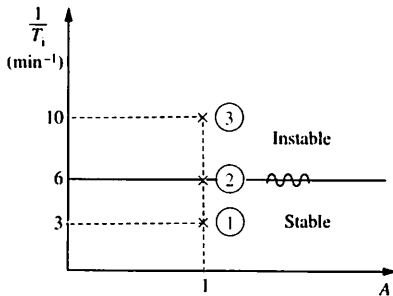


Fig. 6

1. Déterminer l'expression littérale de $T(j\omega)$.

2. Déterminer les expressions du module et de l'argument de $T(j\omega)$.

On désire vérifier, par le critère du revers, la stabilité des réglages :

$$A = 1; \quad \frac{1}{T_i} = 3 \text{ rep/min}; \quad (1)$$

$$A = 1; \quad \frac{1}{T_i} = 6 \text{ rep/min}; \quad (2)$$

$$A = 1; \quad \frac{1}{T_i} = 10 \text{ rep/min}. \quad (3)$$

3. Tracer les lieux de Nyquist correspondant à ces trois réglages.

4. Que conclure quant à ces réglages ?

5. Représenter l'allure de la réponse indicielle correspondant au réglage n° 1.

Solution :

1. Expression de $T(j\omega)$

$$T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega) \\ = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot j\omega} \right) \cdot \frac{1}{20j\omega(1 + 10j\omega)}$$

$$\text{ou : } T(j\omega) = -A \frac{(1 + T_i \cdot j\omega)}{20T_i \omega^2 (1 + 10j\omega)}$$

2. Module et argument de $T(j\omega)$

Le module d'un rapport de nombres complexes étant le rapport des modules, l'argument étant la différence des arguments, il vient :

$$|T(j\omega)| = \frac{A \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{20T_i \omega^2 \sqrt{1 + 10^2 \omega^2}}$$

et arg $T(j\omega)$

$$= \varphi = \text{Arctan}(T_i \cdot \omega) - \pi - \text{Arctan}(10\omega)$$

3. Lieux de Nyquist

Pour les trois réglages proposés, ces courbes ont été tracées figure 7, avec un agrandissement de la zone utile pour l'étude de la stabilité (partie réelle négative).

4. Conclusions

Courbe (1) : le point critique reste sur la gauche de l'observateur qui décrit la courbe dans le sens des pulsations croissantes; le système bouclé est stable.

Courbe (2) : elle passe par le point critique; le système bouclé est à l'instabilité limite.

Courbe (3) : le point critique reste sur la droite de l'observateur qui décrit la courbe dans le sens des pulsations croissantes; le système bouclé est instable.

5. Réponse indicielle

Elle est représentée figure 8.

On constate que la réponse est stable, mais peu amortie. On conclut donc à la nécessité de disposer de critère objectif permettant de qualifier l'amortissement à partir du lieu de $T(j\omega)$.

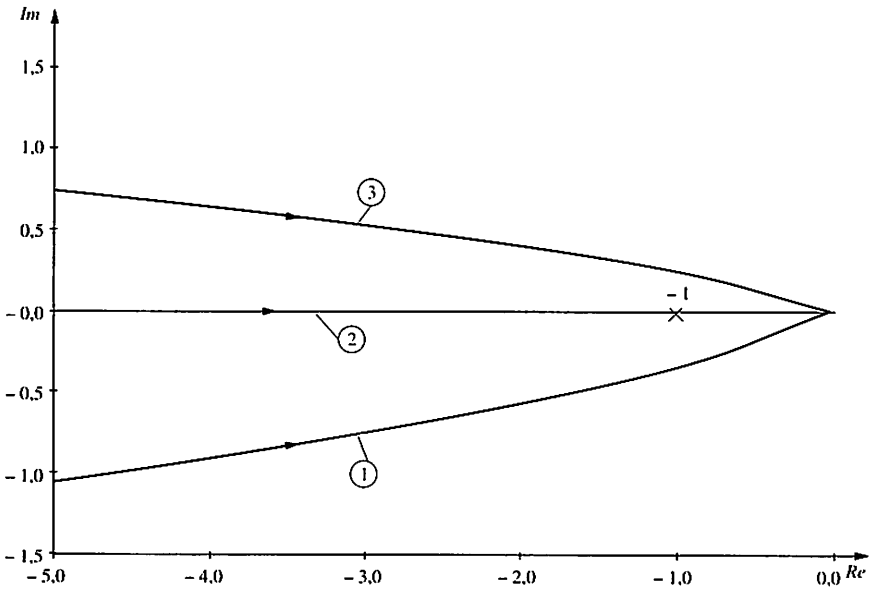


Fig. 7

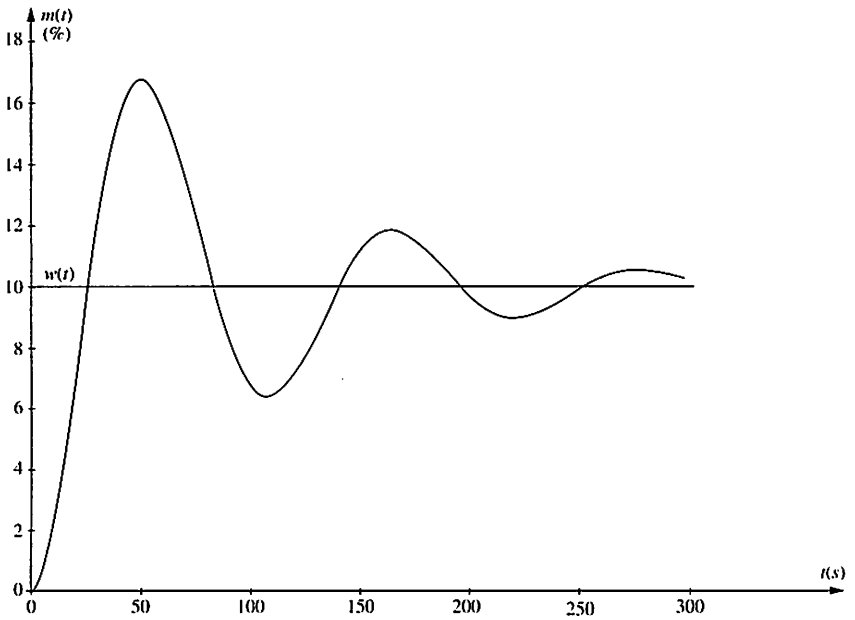


Fig. 8

L'utilisation de la règle du revers et la représentation de $T(j\omega)$ dans le plan complexe, appelé plan de Nyquist en régulation, n'est pas toujours très commode. En effet, le paramètre essentiel de réglage d'une boucle par un technicien reste l'amplification A du régulateur. Or l'étude du réseau de courbes obtenu en faisant varier A nécessite de recalculer tous les points. De plus le diagramme de Nyquist présente l'inconvénient de placer les hautes fréquences près de l'origine du plan, dans une zone très réduite.

Pour ces deux raisons, le technicien de régulation préfère utiliser les diagrammes de Bode ou de Black (voir Régulation 1, chap. 8, 10 et 23). Ils présentent l'avantage de permettre facilement une prédétermination des performances d'une boucle de régulation, à partir de la seule connaissance de sa fonction de transfert en chaîne ouverte $T(j\omega)$.

1 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'une fonction de transfert comporte deux courbes : la courbe de gain et la courbe de phase. L'intérêt essentiel de ce diagramme est d'utiliser le gain logarithmique G défini par :

$$G = 20 \lg |T(j\omega)|$$

Dans la plupart des cas (sauf une structure parallèle) l'amplification A du régulateur se trouve en facteur dans l'expression de $T(j\omega)$. L'expression de G peut s'écrire sous la forme d'une somme :

$$G = 20 \lg A + 20 \lg |\dots|$$

Dans ce diagramme une variation de A se traduit par une translation verticale de la courbe de gain, la courbe de phase ne changeant pas. Ainsi, pour une courbe de phase unique, la figure 1 représente trois courbes de gain possibles.

Étude de la stabilité

Les deux diagrammes étant superposés, il est aisé de déterminer $|T(j\omega)|$ pour la pulsation ω_2 correspondant à un argument φ de $T(j\omega)$ égal à -180° .

- Courbe 1 : $G(\omega_2) < 0$ dB donc $|T(j\omega)| < 1$: le système bouclé est stable ;
- Courbe 2 : $G(\omega_2) = 0$ dB donc $|T(j\omega)| = 1$: le système bouclé est à l'oscillation limite, si $\omega_0 = \omega_2$;
- Courbe 3 : $G(\omega_2) > 0$ dB donc $|T(j\omega)| > 1$: le système bouclé est instable.

L'analyse peut également être conduite à partir de la pulsation ω_1 pour laquelle $G(\omega) = 0$ dB. Dans le cas de la courbe (1) on constate que la valeur de φ est alors supérieure à -180° : le système est stable.

Le diagramme de Bode est cependant beaucoup plus utilisé en électronique qu'en régulation. En général un électronicien s'intéresse essentiellement à la courbe de gain, pour étudier par exemple un filtre. Au contraire un technicien de régulation, concerné exclusivement par des systèmes bouclés, prend en compte la courbe de phase

pour contrôler la stabilité de ceux-ci. Le diagramme de Bode en deux courbes est alors peu pratique. On lui préfère le diagramme de Black (voir Régulation 1, chap. 10).

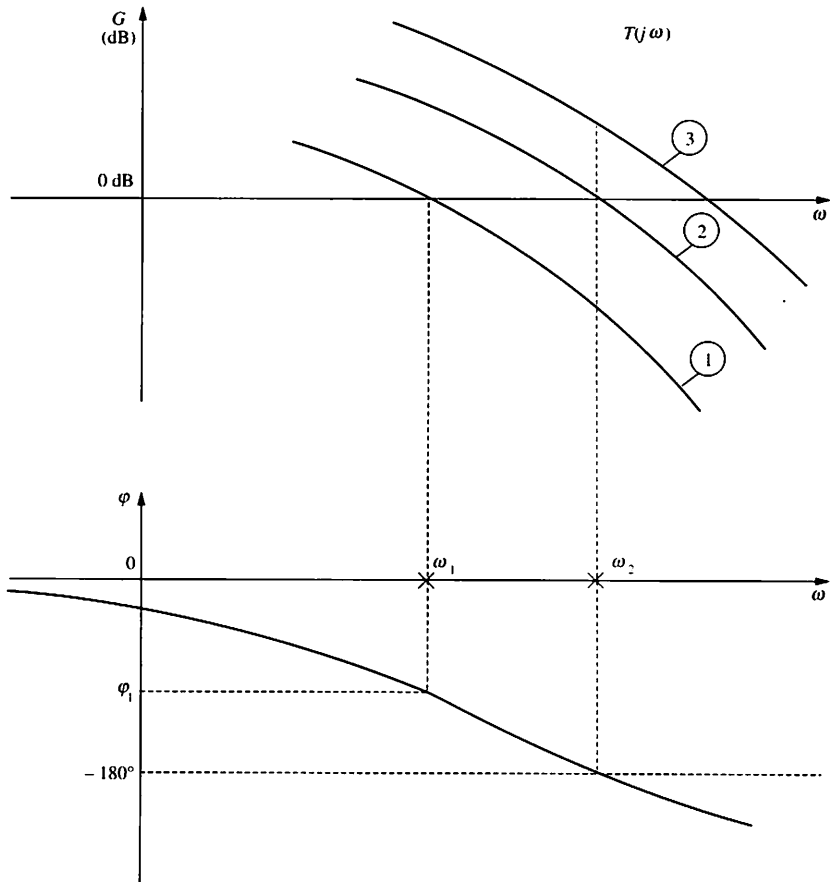


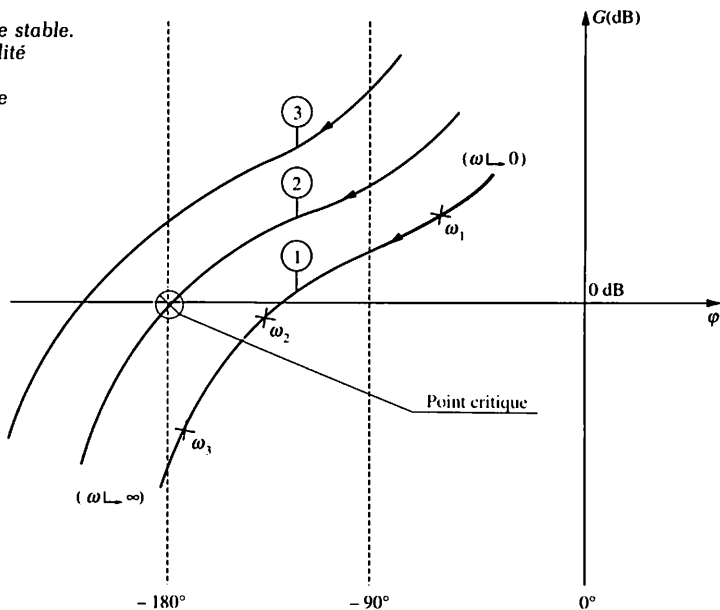
Fig. 1. Les trois courbes de gain se déduisent les unes des autres par translation verticale.

2 Diagramme de Black

Il présente l'extrême intérêt de regrouper les informations module et argument (ou phase) dans une seule courbe, appelée lieu de Black. La pulsation ω devient un paramètre pour chaque point de la courbe $T(j\omega)$.

La figure 2 (p. 64) représente ainsi les trois courbes distinguées ci-dessus. Dans ce type de représentation, une modification de l'amplification (sous les réserves précédentes de structure) se traduit également par une translation verticale. Le diagramme de Black sera donc le diagramme privilégié de cet ouvrage.

Fig. 2 Courbe 1 : système stable.
 Courbe 2 : instabilité limite.
 Courbe 3 : système instable.



3 Marges de stabilité

Les chapitres précédents ont permis de dégager la notion de zones de stabilité et d'instabilité. Cependant l'appartenance à la zone de stabilité ne permet pas de garantir des performances déterminées, en particulier du point de vue de l'amortissement. L'intérêt des diagrammes de Nyquist et surtout de Black est de réduire le problème à une intersection graphique de la courbe $T(j\omega)$ et de la droite correspondant à $\varphi = -180^\circ$. Cette droite (horizontale dans le diagramme de Nyquist, verticale dans le diagramme de Black) peut être partagée en deux demi-droites, ayant pour origine le point critique. La notion de proximité par rapport au point critique prend alors un sens. Plus $T(j\omega)$ passe à proximité du point critique, plus on se rapproche de l'instabilité limite et plus l'amortissement est faible.

Les éléments d'appréciation de cette distance sont les *marges de stabilité*.

Marge de gain G_m (dB)

La marge de gain d'une boucle stable est la variation possible pour le gain (exprimée en dB) sans risquer d'atteindre l'instabilité limite. Graphiquement, c'est l'écart du gain entre le point critique (0 dB) et le point correspondant à ω_2 (voir figure 1), pour lequel l'argument φ de $T(j\omega)$ est -180° .

Marge de phase φ_m

Elle représente l'écart entre la phase du point critique (-180°) et celle

Fig. 3 a. Diagramme de Bode.

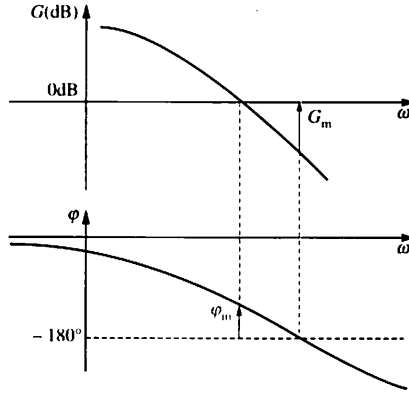


Fig. 3 b. Diagramme de Black.

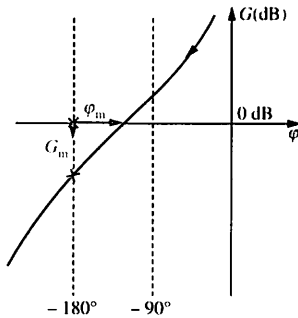
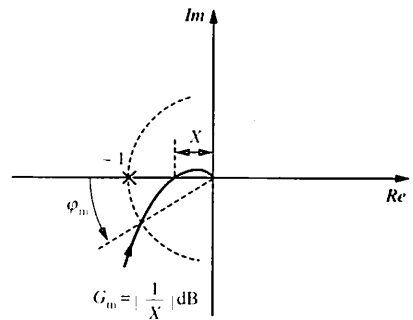


Fig. 3 c. Diagramme de Nyquist.



du point de transition correspondant à la pulsation ω_1 pour laquelle $G(\omega) = 0\text{ dB}$ (voir figure 1).

Ces marges se mesurent *directement* sur les diagrammes de Bode et de Black (fig. 3).

Valeurs pratiques des marges

Elles seront justifiées au chapitre suivant, en modélisant une boucle de régulation sous-amortie par un système du second ordre. Dans la pratique les valeurs suivantes sont conseillées, pour obtenir un bon compromis entre l'amortissement et la rapidité de la boucle.

$$\begin{aligned} 10\text{ dB} < G_m < 15\text{ dB} \\ 40^\circ < \varphi_m < 50^\circ \end{aligned}$$

Bien entendu ces valeurs sont à interpréter dès lors que le système présente un gain statique K variable ou que l'identification du système est sommaire.

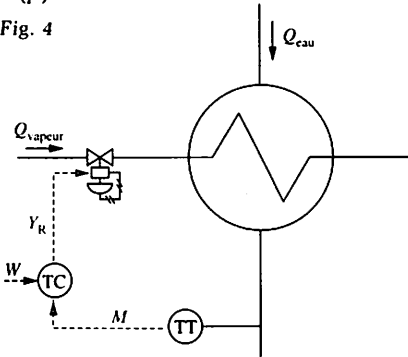
Exercice résolu

□ L'échangeur de température, représenté à la figure 4, admet la fonction

$$\text{de transfert : } H(p) = \frac{K}{(1 + 10p)^2}$$

Ce système est associé à un régulateur proportionnel d'amplification A : $C(p) = A$.

Fig. 4



1. Donner les expressions littérales du gain et de la phase correspondant à $T(j\omega)$.

2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$.

3. Par identification avec un système du second ordre, déterminer l'amortissement λ et la pulsation propre ω_0 de cette fonction de transfert $F(p)$.

4. Pour un gain de boucle $AK = 10$, en déduire les performances indicielles (dépassement D_1 %, temps de réponse) de la boucle de régulation.

5. Pour le réglage précédent, tracer le lieu de Black.

6. En déduire les marges de stabilité.

7. Quel gain de boucle permet d'obtenir une marge de phase de 50° ?

8. En déduire les nouvelles performances de la chaîne fermée.

9. Afin de garantir la précision statique en chaîne fermée, on associe au système un régulateur PI mixte

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) \text{ avec } T_i = 10 \text{ s.}$$

On désire toujours obtenir $\varphi_m = 50^\circ$. Calculer le gain de boucle AK correspondant.

10. Tracer le lieu de Black de $T(j\omega)$.

Solution :

1. Expression de $T(j\omega)$

$$T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{AK}{(1 + 10j\omega)^2}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{AK}{(1 + 100\omega^2)}$$

donc : $G = 20 \lg AK - 20 \lg(1 + 100\omega^2)$

et l'argument de $T(j\omega)$ est égal à : $\varphi = -2 \operatorname{Arctan}(10\omega)$, qui ne dépend pas de AK .

2. Expression de $F(p)$

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{\frac{AK}{1 + AK}}{1 + \frac{20}{1 + AK}p + \frac{100}{1 + AK}p^2}$$

3. Détermination de λ et ω_0

Par identification avec le dénominateur du second ordre normalisé on obtient :

$$1 + \frac{20}{1 + AK}p + \frac{100}{1 + AK}p^2 = \frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0}p + 1$$

$$\text{donc : } \frac{2\lambda}{\omega_0} = \frac{20}{1 + AK} \text{ et : } \omega_0 = \frac{\sqrt{1 + AK}}{10}$$

$$\text{ce qui conduit à : } \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + AK}}$$

4. Performances en chaîne fermée

Si $AK = 10$ on obtient : $\lambda = 0,3$ et $\omega_0 = 0,33 \text{ rad/s}$.

On rappelle les résultats du chapitre 11 du tome Régulation 1 : pour un système du second ordre, ou assimilé, le temps de réponse à $\pm 5\%$ de la valeur finale est égal à $3\tau_p = \frac{3}{\lambda\omega_0}$.

Dans le cas présent : $\lambda\omega_0 = 0,1$ donc :

$$T_R = 30 \text{ s}$$

De même : $D_1 = 100e^{-\lambda\pi/\sqrt{1-\lambda^2}}$, ce qui conduit à : $D_1 = 37\%$

5. Étude en chaîne ouverte

Les résultats de la première question, avec $AK = 10$, permettent de tracer le lieu de Black, fourni figure 5 (courbe 1).

6. Marges de stabilité

On détermine graphiquement : $\varphi_{m1} = 37^\circ$. La marge de gain G_m ne peut pas être relevée puisqu'il s'agit d'un second ordre.

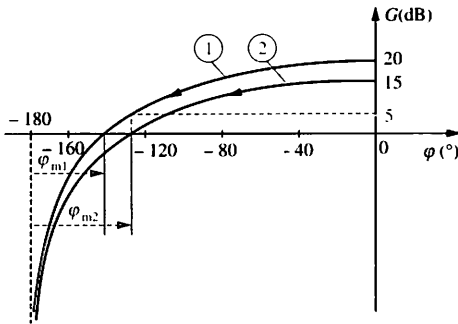


Fig. 5. $\varphi_{m1} = 37^\circ$ correspond à un dépassement de 37 %.
 $\varphi_{m2} = 50^\circ$ correspond à un dépassement de 26 %.

7. Obtention d'une marge de 50° (φ_{m2})

On constate graphiquement, sur le diagramme de Black, qu'un décalage de -5 dB vers le bas est nécessaire. On en déduit que :

$$20 \lg(AK)' - 20 \lg(AK) = -5 \text{ dB},$$

donc : $\frac{(AK)'}{(AK)} = \frac{1}{1,78}$. Cela correspond à

$(AK)' = 5,6$. A gain statique K constant, cela revient à diminuer l'amplification A du régulateur.

On voit bien le lien entre l'amortissement et la marge de stabilité φ_m .

8. Nouvelles performances

$AK = 5,6$ entraîne : $\lambda = 0,39$ et $\omega_0 = 0,26$ rad/s donc : $D_1 = 26\%$

9. Calcul du gain de boucle

$$T(j\omega) = \frac{AK(1 + T_i \cdot j\omega)}{T_i \cdot j\omega(1 + 10j\omega)^2}$$

La valeur $T_i = 10$ s permet la simplification suivante :

$$T(j\omega) = \frac{AK}{10j\omega(1 + 10j\omega)}$$

donc :

$$G = 20 \lg AK - 20 \lg 10\omega - 10 \lg(1 + 100\omega^2) \quad (1)$$

et l'argument de $T(j\omega)$ est égal à :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(10\omega) \quad (2)$$

Pour obtenir une marge de phase de 50° , il faut déterminer la pulsation ω_1 telle que :

$$G = 0 \text{ dB}$$

$$\text{et : } \varphi = 50^\circ - 180^\circ = -130^\circ (-2,27 \text{ rad})$$

L'expression (2) fournit :

$$\omega_1 = 0,084 \text{ rad/s.}$$

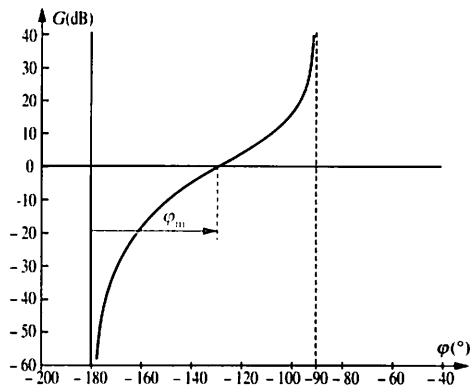
Le report dans (1) aboutit à :

$$\boxed{AK = 1,09}$$

10. Lieu de $T(j\omega)$

La courbe, présentée figure 6, présente bien la marge imposée.

Fig. 6



TRANSFORMATION

Les diagrammes de Nyquist, et surtout de Black, facilitent l'étude de la stabilité d'une boucle de régulation. Les marges de stabilité doivent se situer entre des valeurs préconisées (voir chapitre précédent) qui peuvent apparaître empiriques pour l'instant.

On se propose maintenant de montrer que la connaissance du lieu de Black ou de Nyquist, donc des marges de stabilité, permet d'établir un lien explicite entre la valeur de ces marges et l'amortissement de la boucle de régulation. Pour cela on va tout d'abord supposer que la fonction de transfert en chaîne fermée est du second ordre.

1 Amortissement d'une boucle du second ordre

On désigne par φ_m la marge de phase de la fonction de transfert en chaîne ouverte $T(j\omega)$ et par λ l'amortissement de la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$. On peut écrire cette fonction :

$$F(p) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1}; \text{ le gain statique est égal à 1 si l'on suppose la}$$

précision statique parfaite. Par définition $F(p)$ peut s'écrire également :

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

Dans ces conditions :

$$T(p) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p}$$

On peut calculer la phase φ de la fonction de transfert isochrone $T(j\omega)$. En remplaçant p par $j\omega$, on obtient le nombre complexe :

$$T(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{j\omega(2\lambda\omega_0 + j\omega)}, \text{ fonction :}$$

- de module

$$|T(j\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\omega \sqrt{4\lambda^2 \omega_0^2 + \omega^2}} \quad (1)$$

- d'argument φ , phase cherchée :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{\omega}{2\lambda\omega_0} \right) \quad (2)$$

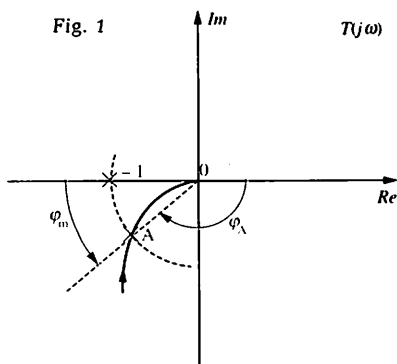


Fig. 1

Si l'on considère le point A de la figure 1, caractérisé par $|T(j\omega_A)| = 1$, on peut déterminer la pulsation ω_A correspondante, ainsi que la phase φ_A .

De (1) on tire : $\omega_\Lambda = \omega_0 \cdot \sqrt{\sqrt{1 + 4\lambda^4} - 2\lambda^2}$

De (2) on tire : $\varphi_\Lambda = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\omega_\Lambda}{2\lambda\omega_0}\right)$

Or la marge de phase est : $\varphi_m = \pi + \varphi_\Lambda$.

D'où : $\varphi_m = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\omega_\Lambda}{2\lambda\omega_0}\right)$ et : $\tan \varphi_m = \frac{2\lambda\omega_0}{\omega_\Lambda}$

soit : $\tan \varphi_m = \frac{2\lambda}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\lambda^4} - 2\lambda^2}}$.

A cette relation entre φ_m et λ , correspond le graphe de la figure 2. On rappelle que ce résultat est vrai pour une fonction $F(p)$ du second ordre.

Donc, pour un second ordre, le choix de la marge de phase φ_m impose l'amortissement λ et les performances qui en découlent directement, telles que le dépassement D_1 ou le facteur de résonance Q (Régulation 1, chap. 12).

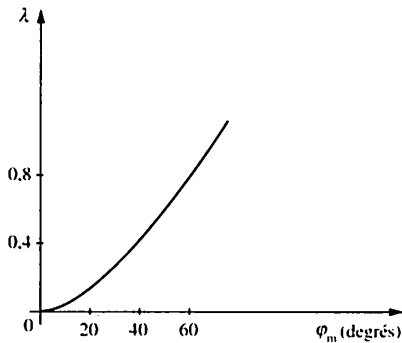


Fig. 2

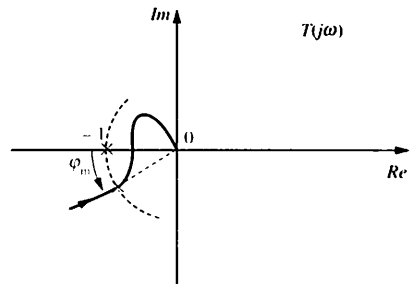


Fig. 3

Généralisation

Les relations ci-dessus peuvent être appliquées, avec une approximation acceptable, pour toute fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$ assimilable à une fonction de transfert du second ordre, d'amortissement inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cependant cette approximation n'est plus possible lorsque la fonction de transfert $T(j\omega)$ a un comportement irrégulier (fig. 3). Dès lors la connaissance du seul point A est insuffisante et il convient de disposer de moyens permettant d'obtenir la fonction de transfert $F(j\omega)$ pour toutes les valeurs ω , à partir du lieu de $T(j\omega)$.

2 Transformation complexe $Z = \frac{z}{1+z}$

$T(j\omega)$ étant un nombre complexe, $F(j\omega)$ également, on constate que l'étude du passage de $T(j\omega)$ à $F(j\omega)$ se ramène à la transformation mathématique traduite par la relation $Z = \frac{z}{1+z}$, où z est l'affixe d'un point du plan complexe et Z l'affixe de son image dans la transformation.

Actuellement il existe essentiellement deux méthodes d'étude.

Méthodes numériques

Utilisant les possibilités des micro-ordinateurs et des langages de programmation, il est facile de mettre au point des outils de calcul assisté par ordinateur (CAO) en régulation, permettant d'obtenir $F(j\omega)$ pour diverses fonctions $T(j\omega)$.

Méthodes graphiques

Des transformations géométriques permettent de passer d'un point M , d'affixe complexe z , à son transformé M' , d'affixe complexe $Z = \frac{z}{1+z}$.

Cette méthode s'avère mal commode si l'on doit chercher les images de nombreux points. Pour cette raison, d'autres techniques ont été développées, utilisant des réseaux de courbes appelées abaques de Hall ou de Nichols suivant le plan complexe utilisé (Nyquist ou Black)

- Abaque de Hall

On représente dans le plan de Nyquist le lieu des points pour lesquels le module $|Z| = \left| \frac{z}{1+z} \right|$ a une valeur constante. En donnant différentes valeurs à cette constante, on obtient une famille de courbes appelées courbes isomodules. De même on représente le lieu des points pour lesquels $\text{Arg}(Z) = \text{Arg}\left(\frac{z}{1+z}\right)$ a une valeur déterminée. On obtient ainsi les courbes isophases. Dans le plan de Nyquist, on obtient deux faisceaux de cercles orthogonaux (fig. 4).

Vérification pour un point : $z = 2 - j$. Donc : $Z = \frac{2-j}{3-j} = \frac{7-j}{10}$ de module 0,707 et d'argument $-8,1^\circ$.

Sur l'abaque, à proximité du point z , passent effectivement la courbe isomodule $M = 0,7$ et la courbe isophase $\alpha = -10^\circ$.

- Abaque de Nichols

D'une manière identique, on représente dans le plan de Black les courbes isomodules et isophases de la transformation $Z = \frac{z}{1+z}$ (annexe page 125).

L'ensemble diagramme de Black + abaques de Nichols est d'un usage plus commode. Vérification pour un point : $z = (0 \text{ dB}, -100^\circ)$ soit $z = [1, -100^\circ]$ ou $z = -0,174 - 0,985j$.

Donc $Z = \frac{-0,174 - 0,985j}{0,826 - 0,985j}$ de module 0,77 (soit -2 dB) et d'argument -50° . Sur l'abaque, on voit bien que sur le point z passent la courbe isomodule -2 dB et la courbe isophase $\alpha = -50^\circ$.

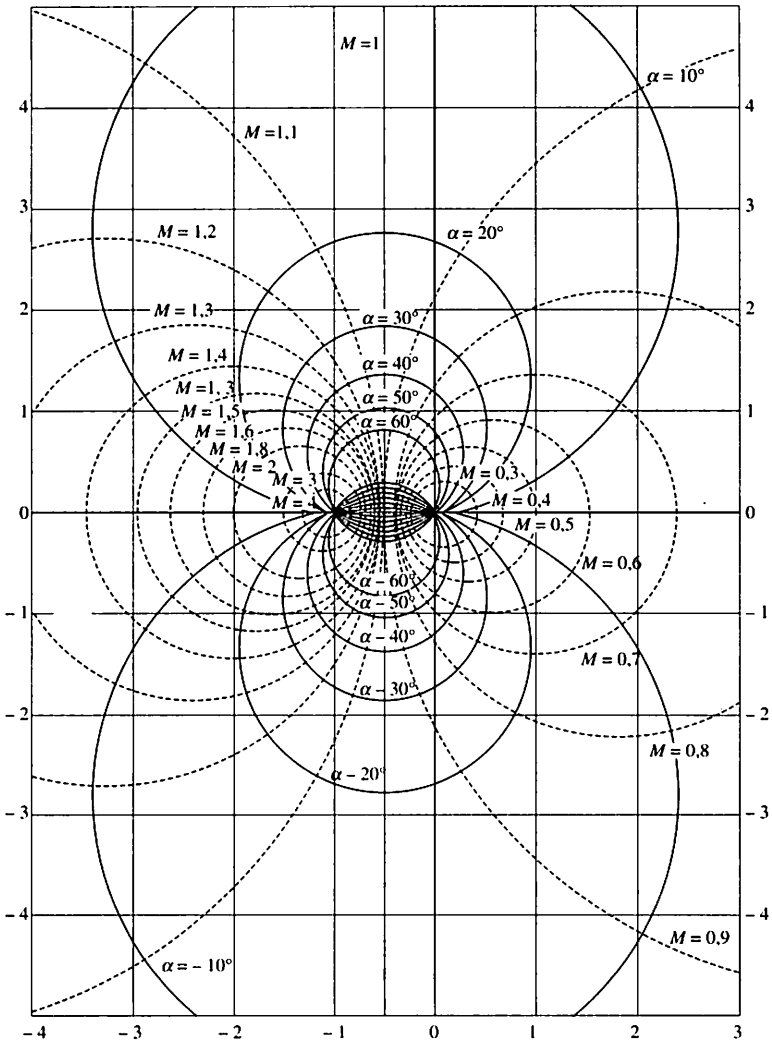


Fig. 4

Exercice résolu

Un système industriel identifié en chaîne ouverte a été modélisé par une fonction de transfert de Broida :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = 1,5 \frac{e^{-10p}}{1 + 30p}$$

A ce système on associe un régulateur à action proportionnelle : $C(p) = A = 2$.

1. Déterminer, sous forme d'un tableau, le module et l'argument de $T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega)$ pour plusieurs valeurs de ω , correctement choisies.

2. En utilisant l'abaque de Black-Nichols, déterminer le module et l'argument de $F(j\omega)$, fonction de transfert de la chaîne fermée correspondante.

3. Dans le plan de Bode, tracer la courbe de gain correspondant à la fonction $F(j\omega)$.

4. En déduire graphiquement la pulsation ω_R et le facteur de résonance Q .

5. En assimilant la courbe de gain de $F(j\omega)$ à celle d'un second ordre équivalent $F^*(j\omega)$, déterminer les paramètres λ et ω_0 de $F^*(j\omega)$.

6. Dans le plan de Bode, tracer la courbe de gain de $F^*(j\omega)$. Comparer à $F(j\omega)$.

7. Déterminer le premier dépassement D_1 correspondant à $F^*(j\omega)$. Est-il conforme au dépassement réel de $F(j\omega)$?

Solution :

1. Courbe $T(j\omega)$

$$T(j\omega) = 3 \frac{e^{-10j\omega}}{1 + 30j\omega}$$

donc :

$$\varphi = \arg[T(j\omega)] = -10\omega - \text{Arctan}(30\omega).$$

$$G_{dB} = 20 \lg |T(j\omega)| \\ = 20 \lg 3 - 10 \lg(1 + 30^2\omega^2)$$

car $|e^{j\theta}| = 1$.

Pour choisir les valeurs de ω , il suffit d'encadrer la pulsation de coupure

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{30}$$

ω (rad/s)	0	0,01	0,02
G (dB)	9,54	9,17	8,2
φ (°)	0	-22,4	-42,4

ω (rad/s)	$\omega_c = 0,033$	0,04	0,08
G (dB)	6,6	5,7	1,24
φ (°)	-64	-73	-113

ω (rad/s)	0,14	0,146	0,148	0,16
G (dB)	-3,16	-3,50	-3,62	-4,3
φ (°)	-157	-161	-162	-169

ω (rad/s)	0,32
G (dB)	-10
φ (°)	-267

Ce tableau comporte un « effet loupe » entre 0,14 et 0,16.

2. Courbe $F(j\omega)$

Elle se relève directement sur l'abaque de Black-Nichols.

ω (rad/s)	0	0,01	0,02
G (dB)	-2,5	-2,46	-2,37

ω (rad/s)	$\omega_c = 0,033$	0,04	0,08
G (dB)	-2,13	-1,96	-0,28

ω (rad/s)	0,14	0,146	0,148	0,16
G (dB)	3,7	3,83	3,825	3,44
ω (rad/s)	0,32			
G (dB)	-10			

3. Courbe de gain de $F(j\omega)$

Elle correspond à la courbe 1 de la figure 5.

4. Détermination de ω_R et Q

On relève sur le graphe précédent :

$$\omega_R = 0,146 \text{ rad/s}$$

et $Q_{dB} = 3,825 - (-2,5) = 6,325$ soit

$$Q = 2,07$$

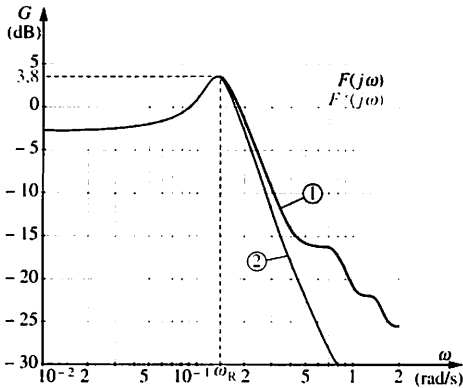


Fig. 5

5. Détermination du second ordre équivalent $F^*(j\omega)$

Les paramètres λ et ω_0 sont déterminés à partir des relations établies dans le tome Régulation 1 (chap. 12).

$$\lambda^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{\omega_R^2}{1 - 2\lambda^2}$$

On obtient ainsi :

$$\lambda = 0,25 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 0,156 \text{ rad/s}$$

6. Courbe de gain de $F^*(j\omega)$

C'est la courbe 2 de la figure 5.

On constate bien la concordance entre les deux courbes, tout au moins pour les fréquences basses.

7. Dépassement D_1

Il est fourni par $D_1 = 100 e^{-\lambda\pi/\sqrt{1-\lambda^2}}$, formule établie dans le tome Régulation 1 (chap. 11).

$$\text{On a donc : } D_1 = 44 \%$$

Les réponses indicielles de $F(j\omega)$ et $F^*(j\omega)$, pour un échelon de consigne d'amplitude 10 %, ont été tracées au simulateur et sont fournies figure 6.

La réponse réelle de $F(j\omega)$, décalée de la valeur du temps mort 10 s, est caractérisée par une pseudopulsation

conforme à celle du second ordre équivalent, son dépassement étant de 47 %. Si l'on veut déterminer le temps de réponse du système réel, on n'oubliera pas de rajouter la valeur du temps mort à la valeur calculée pour le second ordre équivalent.

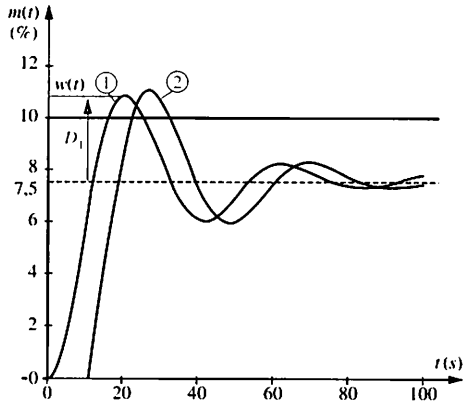


Fig. 6. ① réponse indicielle de $F^*(j\omega)$

② réponse indicielle de $F(j\omega)$

Les réponses indicielles de la figure 6 permettent une nouvelle fois de vérifier qu'en régulation de type P, la précision statique n'est pas parfaite. En effet, la valeur finale de $m(t)$ vaut 7,5 % ce qui diffère de l'amplitude de l'échelle de consigne (10 %). Une augmentation de A diminuerait l'écart résiduel mais diminuerait aussi l'amortissement λ . On retrouve encore le dilemme : précision-stabilité.

TRANSFORMATION

Pour un système associé à un régulateur, l'utilisation des abaques de Hall ou de Nichols permet de prédéterminer la fonction de transfert $F(j\omega)$ en chaîne fermée et, donc, de connaître les performances de la boucle de régulation réalisée.

Cette étude est précieuse car après une identification du système, il est souhaitable d'installer le régulateur en ayant choisi un pré-réglage qui permette d'obtenir directement les performances souhaitées. En effet, après le démarrage de l'installation, une amélioration des performances de la boucle ne sera généralement obtenue « sur le site » que par modification empirique de ce pré-réglage, aucun calcul n'étant possible compte tenu des délais de démarrage.

Cette étude permet également d'attirer l'attention du technicien sur le danger de certains réflexes empiriques tels que celui qui conduit à supposer qu'une diminution de l'amplification entraîne un amortissement plus important d'une boucle de régulation. Ce dernier problème va être étudié plus en détail.

1 Installation étudiée

La fabrication d'un engrais nécessite l'utilisation d'un réacteur chimique à double enveloppe, permettant :

- en régime stabilisé, le maintien de la température du mélange réactionnel,
- une évolution contrôlée de la température pendant les changements de phase de la fabrication (procédé Batch), matérialisés par le passage de la consigne de la valeur W_1 à la valeur W_2 , et réciproquement (fig. 1).

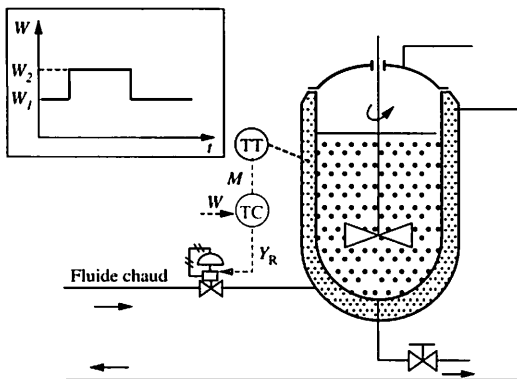


Fig. 1

En fin de fabrication, le produit est soutiré par gravitation, le réacteur est lavé puis à nouveau chargé pour le départ d'un nouveau lot.

Une identification, réalisée lors d'essais à l'eau (c'est-à-dire avec une charge simulée par de l'eau), a fourni la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{1}{(1 + 10p)^3}$$

Le système peut être considéré comme approximativement linéaire dans toute la plage de variation de la température M , grâce au choix judicieux de la vanne.

De plus la variation de consigne W n'entraîne pas de saturation sur la sortie du régulateur.

Au démarrage de l'installation, les paramètres de réglage ont été déterminés pour obtenir une marge de phase de 50°.

Le régulateur PI utilisé ayant une structure parallèle $C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A + \frac{1}{T_i p}$ les calculs du technicien ont conduit à adopter

le réglage suivant : $A = 2,1$; $T_i = 27$ s.

Lors du premier changement de consigne, d'amplitude 10 %, le technicien enregistre la réponse indicielle de la figure 2, courbe 2.

Le régime transitoire étant jugé inadapté, l'amplification A du régulateur est abaissée à 0,3, la valeur de T_i étant maintenue.

La nouvelle réponse indicielle correspond à la courbe 1 de la figure 2. En première analyse, ces réponses temporelles laissent apparaître une stabilité irrégulière due à la structure du régulateur.

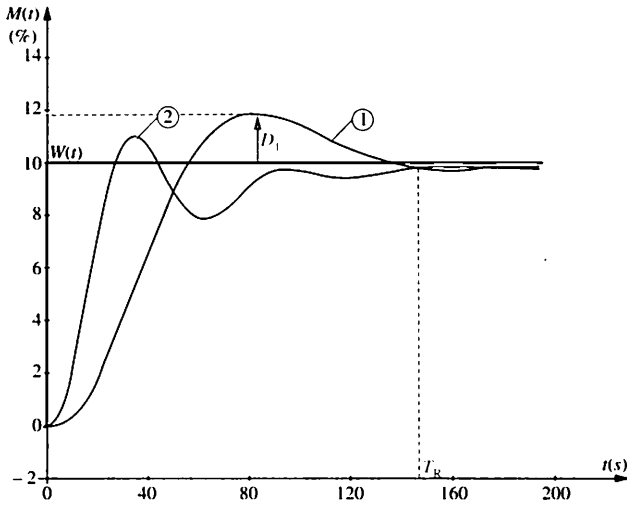


Fig. 2

2 Analyse de la stabilité au moyen des marges

On calcule la marge de phase φ_m pour les deux réglages précédents. Pour chacun on déduit le facteur d'amortissement λ , en utilisant l'hypothèse du second ordre équivalent. Ensuite, après avoir tracé les lieux de Black des deux fonctions de transfert en chaîne ouverte $T(j\omega)$, on détermine les marges de gain G_m .

Marges de phase

$$T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega) = \left(A + \frac{1}{T_i \cdot j\omega} \right) \cdot \frac{1}{(1 + 10j\omega)^3}$$

$$T(j\omega) = \frac{j\omega \cdot A \cdot T_i + 1}{T_i j\omega (1 + 10j\omega)^3}$$

soit : $G = 10 \lg(A^2 T_i^2 \omega^2 + 1) - 20 \lg(T_i \omega) - 30 \lg(1 + 10^2 \omega^2)$

et : $\varphi_m = \text{Arctan } AT_i \omega - \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } 10\omega$

Pour $A = 2,1$ et $T_i = 27$ s on obtient la courbe 2 de la figure 3.

Pour $A = 0,3$ et $T_i = 27$ s on obtient la courbe 1 de la figure 3.

L'examen des deux lieux de Black confirme une stabilité irrégulière, telle qu'elle est définie au chapitre 9 :

Dans les deux cas la marge de phase est bien $\varphi_m = 50^\circ$, la détermination du facteur d'amortissement du second ordre équivalent, à partir de la valeur de φ_m permet de tirer : $\lambda = 0,47$.

Les marges de gain sont respectivement : $G_{m2} = 10$ dB et $G_{m1} = 14$ dB, valeurs qui laissent présager une réponse plus stable pour le $A = 0,3$ réglage ($G_{m2} < G_{m1}$).

Critères algébriques

L'analyse de la stabilité par les critères algébriques (possible, compte tenu de la forme de $H(p)$) a été réalisée au paragraphe 1 du chapitre 9. Cette étude a mis en évidence une zone de stabilité irrégulière, pour laquelle une diminution de A ne conduit pas nécessairement à une augmentation de la stabilité (voir fig. 1, chap. 9). Les valeurs adoptées

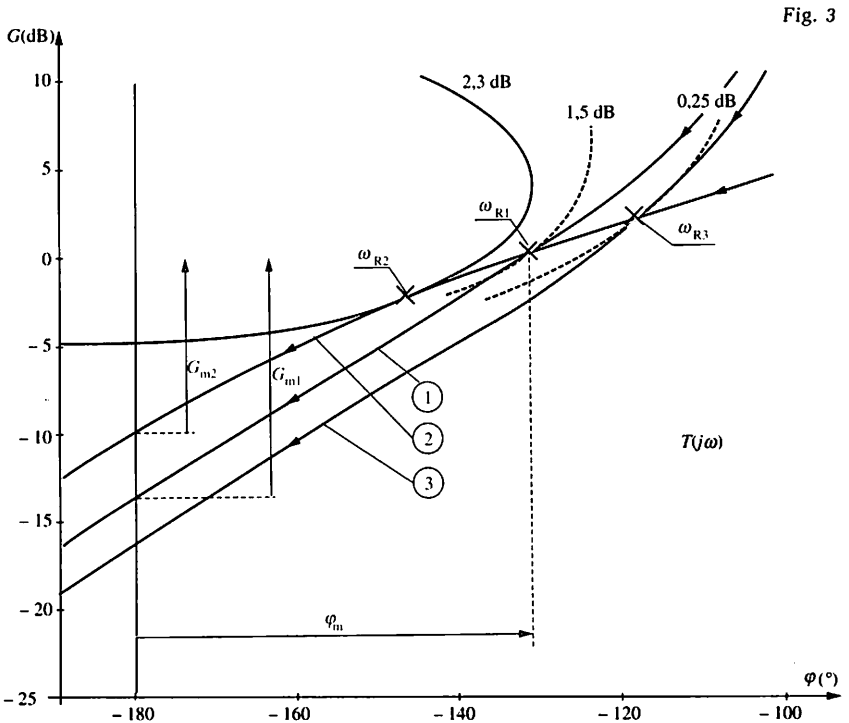


Fig. 3

pour A confirment que l'on est bien dans cette zone ($A < 3,5$). Par contre la valeur adoptée pour T_i est supérieure à $\frac{90}{8}$ et, donc, une diminution de A ne rendra pas possible un pompage de la boucle de régulation.

3 Étude des performances en chaîne fermée

L'utilisation de l'abaque de Black-Nichols (fig. 3) permet de mettre en évidence le pic de résonance de la fonction de transfert $F(j\omega)$ en chaîne fermée. Pour chaque courbe on peut relever la valeur de la pulsation de résonance ω_R et la valeur du facteur de résonance Q .

courbe 1 : $Q_1 = 1,5$ dB pour $\omega_{R1} = 0,032$ rad/s

courbe 2 : $Q_2 = 2,3$ dB pour $\omega_{R2} = 0,1$ rad/s

En utilisant l'approximation du second ordre équivalent, on obtient les performances suivantes, conformes à la courbe 1 de la figure 2.

$$\lambda^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{2} \quad \text{ce qui fournit : } \lambda = 0,48 \quad (Q_1 = 1,5 \text{ dB})$$

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_R^2}{1 - \lambda^2} \quad \text{ce qui donne : } \omega_0 = 0,0435 \text{ rad/s}$$

$$D_1 = 100e^{-\frac{\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}} \quad \text{soit : } D_1 = 18 \% ; \quad T_R = \frac{3}{\lambda\omega_0} \quad \text{soit : } T_R \approx 145 \text{ s.}$$

L'application de ces formules à la courbe 2 donne des résultats moins probants, ce qui s'explique par le fait que cette courbe s'écarte d'une réponse indicielle du second ordre.

4 Conclusion

L'étude précédente est très importante car elle dégage trois grands axes, qui doivent guider la réflexion du technicien de régulation :

- L'application des critères algébriques fait mal apparaître l'influence du réglage sur les performances attendues.
- Bien que progressivement supplantés par les logiciels de simulation qui permettent d'obtenir les réponses temporelles d'une boucle de régulation, les abaques restent d'une utilité primordiale pour comprendre l'influence du réglage.
- L'utilisation de régulateurs à structure parallèle complique énormément la régulation.

Comme cette structure est de plus en plus fréquemment mise en œuvre dans les systèmes numériques de contrôle-commande (SNCC), il est souhaitable que le technicien consulte précisément la documentation, au moment du réglage.

Exercice résolu

Pour le système étudié dans ce chapitre, on se propose de déterminer un réglage permettant d'obtenir un premier dépassement D_1 voisin de 10 %, en cas de modification de la consigne, sous forme d'un échelon.

Ce réglage doit être de type proportionnel et intégral, valable pour un régulateur de structure parallèle.

1. Déterminer le facteur de résonance Q , permettant d'obtenir ces performances, en utilisant l'approximation du second ordre équivalent.

2. En partant de la courbe 2 de la figure 3, déterminer le décalage de cette courbe permettant d'obtenir cette valeur de Q .

3. En déduire la valeur de l'amplification A_3 et du temps d'action intégrale T_{i3} .

4. Évaluer la valeur du temps de réponse T_R obtenu.

5. L'actualisation de l'installation avec un nouveau matériel impose une structure mixte, seule disponible :

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

Le technicien applique, sans corrections, les paramètres de réglages (A_3 ; T_{i3}) calculés précédemment pour une autre structure. Tracer le nouveau lieu $T(j\omega)$ dans un diagramme de Black. Comment les performances sont-elles modifiées ?

6. Recalculer les paramètres de réglages permettant de revenir aux performances souhaitées

$$(Q_{dB} = 0,25 \text{ dB}).$$

Solution :

1. Valeur de Q

L'application de la formule :

$D_1 = 100e^{\frac{-\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}}$ permet de trouver la valeur du coefficient d'amortisse-

$$\text{ment : } \lambda = \frac{\ln\left(\frac{100}{D_1}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{100}{D_1}\right)}}$$

Pour $D_1 = 10 \%$ on obtient : $\lambda \approx 0,59$

$$Q = \frac{1}{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}; \text{ d'où : } Q_{dB} \approx 0,42 \text{ dB}$$

2. Calcul du décalage

Si l'on adopte la valeur $Q_{dB} = 0,25 \text{ dB}$, plus facile à repérer sur un diagramme de Black, le lieu de $T(j\omega)$ doit donc être tangent à la courbe isomodule 0,25 dB. En effet, pour une régulation avec action intégrale, pour les valeurs faibles de ω , la courbe $T(j\omega)$ est tangente à l'axe vertical -90° (courbe isomodule 0 dB pour $F(j\omega)$). Cette remarque entraîne la règle suivante : pour une régulation à action intégrale, le coefficient de résonance Q_{dB} a pour valeur celle correspondant à la courbe isomodule qui est tangente à $T(j\omega)$.

Pour obtenir cette tangence, il faut décaler la courbe de $-2,5 \text{ dB}$ vers le bas. Ce décalage peut être traduit par le fait que la fonction de transfert du correcteur est multipliée par un facteur k tel que : $20 \lg k = -2,5 \text{ dB}$ soit :

$$k = 0,75$$

3. Fonction de transfert du nouveau correcteur

Par rapport à l'ancien correcteur

$$C_2(p) = 0,3 + \frac{1}{27 \cdot p}, \text{ le nouveau correcteur est donc :}$$

$$C_3(p) = k \cdot C_2(p)$$

$$\text{soit } C_3(p) = 0,225 + \frac{1}{36 \cdot p}$$

$$\text{Donc } A_3 = 0,225 \text{ et } T_{i3} = 36 \text{ s}$$

4. Temps de réponse T_R

On relève graphiquement sur la courbe 3 la valeur $\omega_{R3} = 0,02 \text{ rad/s}$.

Avec les mêmes formules que précédemment on détermine :

$$\omega_0 = 0,0362 \text{ rad/s.}$$

Le temps de réponse à 5 % est donc approximativement :

$$T_R = \frac{3}{\lambda \omega_0} \text{ soit : } \boxed{T_R \approx 140 \text{ s}}$$

La figure 4, tracée au simulateur, permet de comparer la réponse indicielle

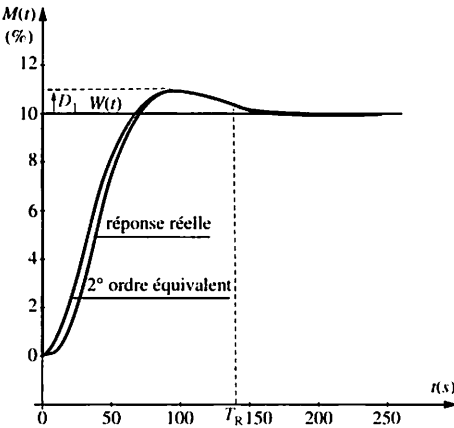


Fig. 4

réelle et celle du second ordre équivalent. Les valeurs de D_1 et T_R confirment bien la validité de l'étude. On notera qu'il est possible d'aboutir à un réglage, à partir de performances souhaitées en chaîne fermée.

5. Nouveau lieu $T(j\omega)$

Avec les réglages de la question 3, on obtient :

$$T(p) = \frac{0,225(1 + 36p)}{36p(1 + 10p)^3}$$

soit :

$$T(j\omega) = \frac{0,225(1 + 36j\omega)}{36j\omega(1 + 10j\omega)^3}$$

dont le lieu est représenté figure 5, courbe 4.

Par rapport à la courbe précédente (courbe 3) les marges sont beaucoup plus grandes donc les performances sont trop amorties. En particulier le phénomène de résonance disparaît et la fonction de transfert en chaîne fermée présentera des réponses indicielles apériodiques. Cela est essentiellement dû au fait que le coefficient d'action intégrale réel $\frac{A}{T_i}$ est trop faible.

6. Modification du réglage

L'égalité

$$C(p) = 0,225 + \frac{1}{36p} = A_4 \left(1 + \frac{1}{T_{i4}p} \right)$$

fournit : $\boxed{A_3 = 0,225}$ et $\boxed{T_{i4} = 8,1 \text{ s}}$.

On vérifie bien qu'il faut diminuer T_i pour revenir au même coefficient d'action intégrale réel.

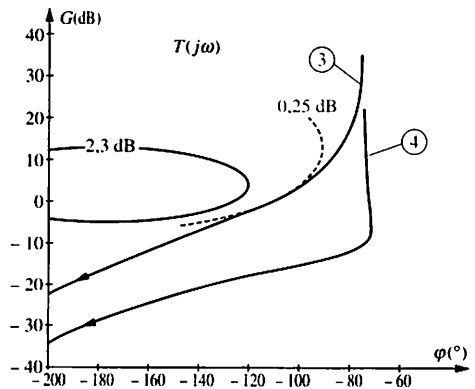


Fig. 5

L'exercice résolu du chapitre précédent montre qu'il est possible de déterminer le réglage d'un régulateur PI en se fixant un critère de performance, par exemple, le premier dépassement dans le cas cité. On se gardera de généraliser trop vite les méthodes mises en œuvre dans les chapitres précédents. On remarquera que la présence d'une contrainte supplémentaire, comme un temps de réponse T_R fixé par exemple, peut entraîner l'impossibilité de trouver un réglage pour une structure PID ou peut conduire à des valeurs aberrantes.

Pour un système considéré comme linéaire et hors saturation, la démarche qui consiste à se fixer un critère de performance tel que : erreurs stationnaires, dépassement ou amortissement, temps de montée, marges de stabilité, etc., est applicable sans trop de difficultés en asservissement, dans le domaine des servomécanismes. En régulation industrielle, une multitude de paramètres sont à prendre en compte. Pour le technicien, l'élaboration d'un réglage met en jeu des connaissances de nombreux domaines, notamment de la technologie d'appareillage et du génie chimique. Le résultat apparaît souvent très suspect au néophyte, qui peut être tenté de ne pas accorder un crédit suffisant aux diverses méthodes. Ce chapitre se propose d'étudier les principales contraintes à prendre en compte lors de l'élaboration d'un réglage PID. Elles permettront par la suite de pondérer les résultats proposés dans les chapitres suivants. En particulier on retiendra que ce qui peut être considéré comme empirique est, en réalité, le fruit de l'expérience professionnelle du régleur confirmé.

1 Performances temporelles

Régulation de correspondance, ou asservissement

Curieusement c'est le cas le moins fréquent et pourtant la plupart des méthodes de réglage sont définies par l'allure de la réponse indicielle de la boucle de régulation, obtenue pour un saut de consigne. Pour comprendre ce paradoxe, il suffit de savoir qu'il est matériellement plus facile de réaliser un échelon de consigne sur un régulateur qu'un échelon de mesure ! Toutefois il faut se souvenir qu'un échelon sur la consigne constitue une sollicitation violente pour une boucle de régulation. Dans la pratique, la variation de la consigne et de la mesure seront moins rapides. En particulier, la régulation des systèmes de production discontinue (batch) atténue les variations brutales de consigne : un dispositif d'équilibrage de consigne permet de passer d'une consigne à une autre par l'intermédiaire d'une rampe.

Terminologie

Une réponse indicielle ayant l'allure de la courbe 1 de la figure 1 sera dite caractéristique d'un réglage « dur ». En revanche, si l'allure est de la forme 2, le réglage est dit « mou ».

Régulation de maintien

L'objectif principal de la régulation est la compensation des perturbations, la consigne étant fixée. Dans la majorité des cas la réponse

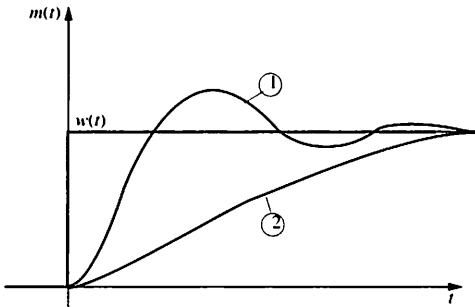


Fig. 1. Courbe 1 : réglage dur.
Courbe 2 : réglage mou.

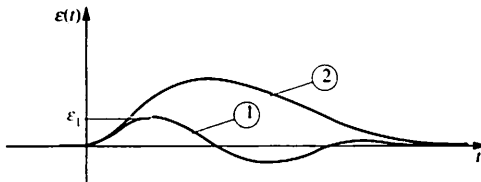


Fig. 2. Courbe 1 : réglage dur.
Courbe 2 : réglage mou.

désirée à une perturbation est représentée par la courbe 1 de la figure 2. Ce type de réponse minimise l'écart transitoire ε_1 , au détriment de l'amortissement de la boucle. Les perturbations naturelles étant généralement lentes, cette réponse optimale est obtenue par un réglage «dur». On observe donc que le réglage d'une boucle nécessite non seulement l'identification de la fonction de transfert réglant $H(p)$, mais aussi celle des fonctions de transfert perturbatrices $H_z(p)$.

Dans le cas d'installations complexes, abordé au paragraphe 5, les perturbations d'une boucle de régulation sont souvent les grandeurs réglantes d'une autre boucle de régulation. Le réglage d'une boucle dépend donc de celui d'autres boucles : le réglage de l'ensemble doit alors tenir compte des couplages imposés par le procédé.

2 Saturation du régulateur

La recherche des paramètres de réglage, suivant un critère lié à la rapidité d'une boucle de régulation, lors d'une variation de ε , peut conduire à des résultats entraînant une saturation du signal réglant Y_R à 0 % ou 100 %. Il est alors évident que les performances attendues ne seront pas vérifiées et donc qu'un objectif plus modeste doit être adopté.

Saturation due à l'action proportionnelle

Une augmentation de l'amplification A entraîne un fonctionnement en chaîne fermée plus rapide (voir Régulation 1, chap. 22). Un réglage aboutissant à une amplification trop importante induit une valeur faible de la bande proportionnelle $X_p \left(X_p = \frac{100}{A} \right)$ qui est, il faut le rappeler, la zone d'évolution linéaire du régulateur. Un bon réglage doit donc prendre en compte l'amplitude prévisible des perturbations ou des sauts de consigne.

Saturation due à l'action intégrale

Dans cette situation (mise en évidence aux figures 1 et 3 du chapitre 18 du tome Régulation 1), la part Y_1 du signal réglant Y_R est proportionnelle à la surface délimitée entre la consigne $W(t)$ et la mesure $M(t)$. Lors d'un changement brutal et de grande amplitude de la consigne, ou lorsque le système présente un temps mort important, cette surface est étendue et $Y_1(t)$ peut atteindre rapidement 100 %, saturant à elle seule la sortie du régulateur. Cette saturation limite la vitesse de variation de la mesure, favorisant ainsi la saturation de Y_1 . En régime indiciel, les conséquences de cette saturation sont généralement un dépassement important et un amortissement faible.

Afin de minimiser ces effets on peut :

- adopter un réglage plus mou que prévu
- utiliser des dispositifs d'antisaturation de Y_1 ou Y_R
- utiliser des lois de commande discontinues (mise hors service de l'action intégrale lorsque ε est supérieur à une valeur prédéterminée), etc. (voir fig. 3).

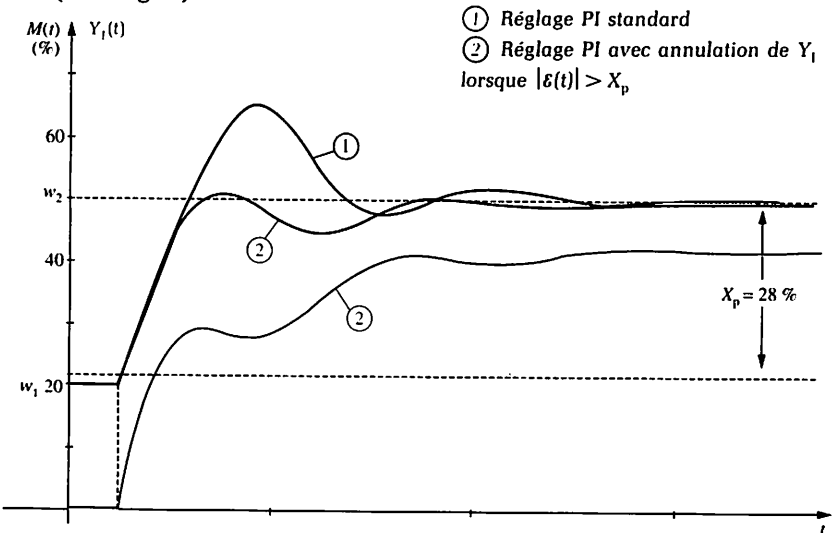


Fig. 3. Réponse indicielle de $W_1 = 20\%$ à $W_2 = 50\%$.

3 Non-linéarité du système

Si un système peut être considéré comme linéaire autour d'un point de fonctionnement, toute variation importante de la consigne ou des perturbations entraîne des modifications significatives des paramètres de son modèle, en particulier de son gain statique K .

4 Contraintes du système

La puissance mise en œuvre par les actionneurs est souvent importante. Une action intempestive sur un actionneur, liée à un réglage dur, peut entraîner des conséquences nuisibles sur le procédé.

A titre d'exemple le refroidissement d'un réacteur par de l'eau glacée en surfusion ne doit pas entraîner le « blindage » du réacteur. En effet un refroidissement brutal provoque un dépôt de glace à l'intérieur du réacteur, ce qui diminue le coefficient d'échange thermique. Le régulateur de température augmentera alors progressivement le signal réglant, ce qui conduit à un phénomène cumulatif qui se termine par l'arrêt de l'installation. De même, une chauffe trop importante, avec une mauvaise répartition de l'énergie calorifique, peut conduire à une dégradation du produit actif dans un réacteur. Enfin un travail trop important d'un actionneur mécanique réduit sa durée de vie.

5 Boucles multiples imbriquées

La figure 4 représente la régulation de niveau d'un fond de colonne de distillation. La grandeur réglante est le débit de soutirage Q_s . Tout en maîtrisant le niveau, cette boucle doit éviter de modifier trop brutalement Q_s , ce qui perturbe l'alimentation de la colonne située en aval. L'hypothèse des boucles indépendantes (voir Régulation 1) est trop simplificatrice et, pour son réglage notamment, l'installation doit être appréhendée dans sa globalité (voir exercice résolu).

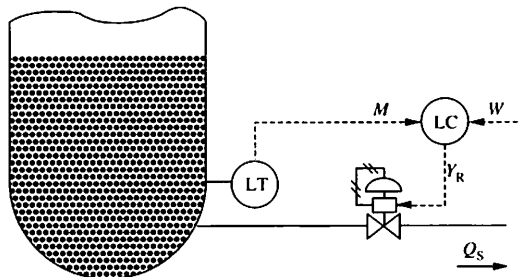


Fig. 4

Exercice résolu

On étudie le mélange en ligne représenté figure 5. Le fonctionnement du dispositif suppose un contrôle, d'une part de la qualité du mélange, mesurée par le transmetteur AT, d'autre part, du débit de charge mesuré par le transmetteur FT.

Deux chaînes de régulation indépendantes sont installées.

On précise que les vannes sont à caractéristiques linéaires, que la consigne W est considérée comme peu variable, tandis que la consigne W' peut évoluer de 20 à 90 %.

Le technicien chargé de l'installation a effectué des préréglages, après identification en chaîne ouverte autour du point de fonctionnement nominal (voir Régulation 1, chap. 13). Les premiers essais en chaîne fermée autour de ce point de fonctionnement ne donnent pas satisfaction : toute modification de faible amplitude de la consigne de débit de charge $Q_C = Q_A + Q_B$ conduit à un régime transitoire d'une durée trop grande, pour les deux boucles de régulation.

1. Effectuer une analyse du fonctionnement de l'installation.
2. En déduire les causes du dysfonctionnement.
3. Proposer une solution permettant un fonctionnement satisfaisant de l'installation.

Solution :

1. Analyse fonctionnelle

L'étude du système (voir Régulation 1, chap. 13) montre qu'il est fortement non linéaire et qu'il présente un rapport

$\frac{T}{\tau}$ très défavorable. Cependant les

essais étant conduits autour d'un point de fonctionnement fixe, la non-linéarité n'intervient pas. De plus, s'il est effectué correctement, le préréglage prend en compte le rapport $\frac{T}{\tau}$. Toute-

fois la stratégie adoptée fait apparaître un couplage des deux boucles, chaque grandeur de réglage Q_A ou Q_B modifiant les mesures M et M' .

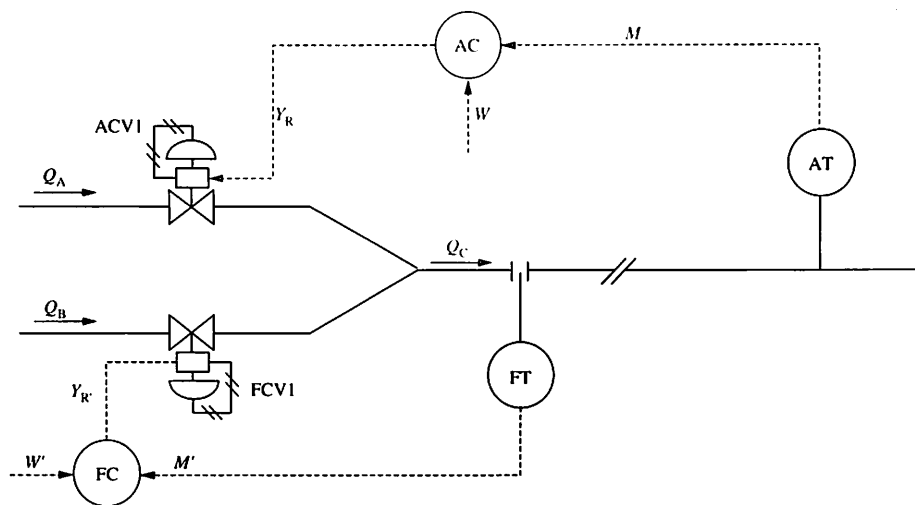


Fig. 5

2. Causes de dysfonctionnement

A partir d'un point de fonctionnement, une modification de la consigne W' de débit entraîne une variation de la mesure M . Le régulateur AC de qualité réagit alors sur le débit Q_A , modifiant le débit de charge. On conçoit que les deux boucles puissent « se renvoyer » des perturbations, la grandeur de réglage de chaque chaîne étant la grandeur perturbatrice principale de l'autre chaîne. Le phénomène est aggravé par des performances temporelles voisines des deux boucles : il s'instaure un phénomène de battement entre les deux boucles, qui fonctionnent en parallèle. Des moyens de résoudre efficacement ce problème existent ; ils ne sont pas étudiés dans cet ouvrage.

3. Modification des schémas de boucle

Les deux boucles ne pouvant pas fonctionner en parallèle, il convient d'asservir l'une à l'autre en considérant que la boucle de qualité est prio-

ritaire. Une solution consiste à lier la variation de Q_A à celle de Q_B (dans les proportions imposées par AC) de façon à garantir, a priori, la qualité du produit.

Réciproquement une modification du débit Q_A , due à une qualité non conforme, ne doit pas perturber la régulation de débit. Il suffit de ne pas mesurer $Q_C = Q_A + Q_B$ mais Q_B seul. On aboutit au schéma de la figure 6. Le régulateur AC de qualité ne pilote plus la vanne ACV1 mais le coefficient de proportionnalité k entre les ouvertures des deux vannes ($k = 1$ correspond à $Y_R = 50\%$) ce qui permet d'obtenir : $Y_{RT} = kM'$.

On retrouve un principe de régulation en chaîne ouverte évoqué dans Régulation 1.

On note que la consigne W' ne correspond plus au débit Q_C mais à celui de Q_B . On peut cependant utiliser une consigne de débit de charge W'' permettant le calcul de W' en tenant compte de W .

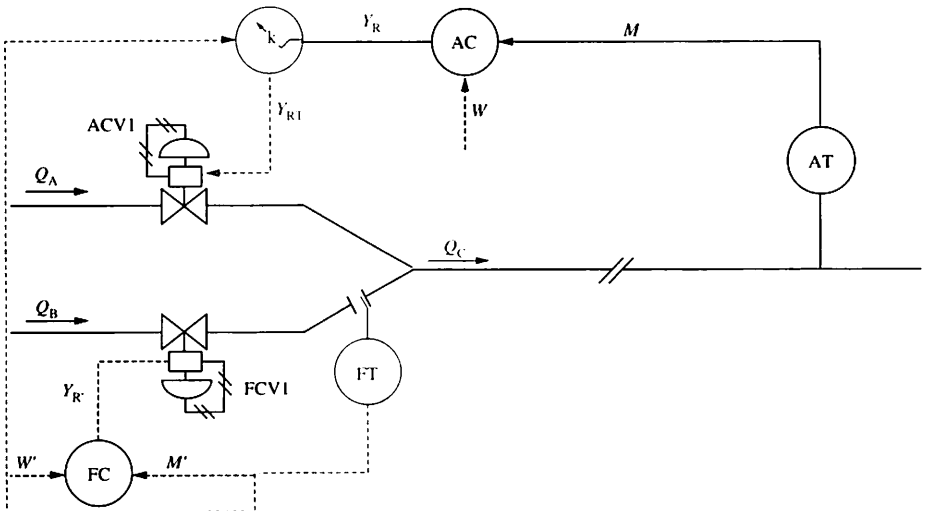


Fig. 6

Le modèle du premier ordre est le plus simple que l'on puisse choisir. Malgré cette simplicité il peut être utilisé pour de nombreux dispositifs industriels, dont le temps mort T est négligeable devant la valeur de la constante de temps τ . C'est le cas, par exemple, des boucles de régulation de débit ou de pression.

Deux approches sont possibles pour le réglage d'un système :

- soit le technicien choisit une structure de régulateur, puis détermine les paramètres du réglage en optimisant certains critères, comme le premier dépassement ou le temps de réponse.

- soit le technicien préfère se fixer un comportement en chaîne fermée, généralement sous la forme d'une fonction de transfert, que l'on appelle *modèle de référence*, et il recherche ensuite la structure de régulateur permettant d'obtenir le modèle désiré, exactement ou de façon approchée. Cette méthode aboutit généralement à des structures complexes, éloignées des structures PID que l'on étudie pour l'instant. Cependant un système du premier ordre se prête bien à cette démarche.

1 Réglage PI d'un premier ordre

On se donne une structure PI du régulateur, de fonction de transfert :

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

Ce choix correspond au désir d'obtenir une précision statique parfaite et d'utiliser une structure classique.

La fonction de transfert du système est : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$. La fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée est (voir Régulation 1, chap. 22) :

$$F(p) = \frac{M(p)}{W(p)} = \frac{H(p) \cdot C(p)}{1 + H(p) \cdot C(p)}$$

Cela conduit à : $F(p) = \frac{1 + T_i \cdot p}{1 + \frac{1 + KA}{KA} p + \frac{T_i \cdot \tau}{KA} p^2}$ que l'on peut écrire sous

la forme :

$$\frac{1 + ap}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1}$$

On retrouve un dénominateur du second ordre, ce qui va permettre une prédétermination des performances temporelles de la chaîne fermée.

On obtient par identification :

$$\lambda = \frac{1 + KA}{2\sqrt{KA}} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{\tau}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{KA}{T_i \cdot \tau}}$$

Les méthodes de réglages faisant toutes intervenir le produit KA , les techniciens de régulation définissent le gain de boucle $K_B = KA$, produit du gain statique du système et de l'amplification du régulateur.

Détermination de l'amplification A

L'amortissement $\lambda = 1$ est obtenu pour $T_i = \frac{4K_B \tau}{(1 + K_B)^2}$. Il est intéressant

de tracer la courbe $T_i = f(K_B)$, lieu des points pour lesquels $\lambda = 1$. Cette courbe, représentée figure 1, délimite les zones pour lesquelles $\lambda > 1$ et $\lambda < 1$.

Pour une valeur fixée de λ , on constate que le réguleur possède encore deux degrés de liberté. Généralement il se donne une contrainte supplémentaire, telle que la valeur numérique du temps de réponse

T_R , dont la valeur littérale est approximativement $\frac{3}{\lambda \omega_0}$. On obtient :

$$T_R \simeq \frac{6\tau}{1 + K_B} \quad \text{résultat qui est indépendant de la valeur de } T_i.$$

Le temps de réponse choisi détermine le gain de boucle et donc l'amplification A.

Exemple

L'étude est réalisée pour le système $H(p) = \frac{1,4}{1 + 20p}$. On désire un

temps de réponse de l'ordre de 30 s, pour obtenir une réponse indicielle en chaîne fermée plus rapide qu'en chaîne ouverte. Cette valeur impose $K_B = 3$, soit $A = 2,14$.

Détermination du temps d'action intégrale T_i

Pour obtenir l'inégalité $\lambda < 1$ (réglage dur), on adopte la valeur : $T_i = T_{i1} = 0,5\tau = 10$ s (point 1, fig. 1).

Dans ces conditions, la réponse indicielle à un signal $W(p) = \frac{10}{p}$ est celle représentée courbe 1, figure 2.

On constate bien une réponse pseudo-oscillante, qui offre un amortissement insuffisant et ne satisfait pas à l'objectif $T_R \approx 30$ s.

Pour obtenir l'égalité $\lambda = 1$ on adopte maintenant : $T_i = T_{i2} = 0,75\tau = 15$ s (point 2, fig. 1).

La réponse obtenue correspond à la courbe 2, figure 2. Son amortissement est supérieur, assurant ainsi une stabilité renforcée, et la rapidité est celle désirée. Malgré le choix $\lambda = 1$, on constate cependant un dépassement. Celui-ci est dû au terme $(1 + T_i p)$ au numérateur de $F(p)$.

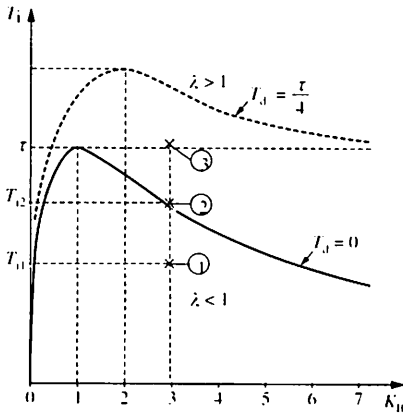


Fig. 1

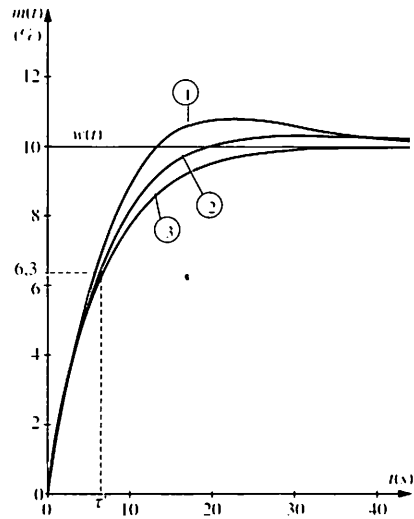


Fig. 2

L'adoption d'une valeur de T_i voisine de celle de τ permet d'obtenir l'inégalité $\lambda > 1$ et constitue un réglage satisfaisant. L'amortissement en chaîne fermée détermine le temps d'action intégrale.

Influence d'une éventuelle action dérivée

On se donne une structure PID du régulateur, de fonction de transfert :

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$$

Les calculs aboutissent à :
$$F(p) = \frac{1 + T_i \cdot p + T_i \cdot T_d p^2}{1 + \frac{1 + KA}{KA} T_i \cdot p + \frac{T_i(\tau + AKT_d)}{KA} \cdot p^2}$$

Par identification du dénominateur avec celui d'un second ordre on obtient les mêmes expressions de λ et ω_0 que précédemment, en remplaçant τ par $\tau + AKT_d$. En utilisant les valeurs de K_B et T_i adoptées en réglage PI, on obtient : $\lambda_{pid} < \lambda_{pi}$. L'influence déstabilisante de l'action dérivée peut être observée par ailleurs, avec le contour $T_i = f(K_B, T_d)$ correspondant à $\lambda = 1$. La courbe frontière

$T_i = \frac{4K_B(\tau + K_B T_d)}{(1 + K_B)^2}$ détermine une zone sous-amortie de plus grande

surface (voir fig. 1 pour $T_d = \frac{\tau}{4}$).

On retiendra qu'un réglage satisfaisant, pour un régulateur PI à structure mixte, correspond à une valeur de T_i voisine de celle de la constante de temps τ .

2 Méthode du modèle de référence en asservissement

L'objectif est d'obtenir en chaîne fermée, une fonction de transfert

$$F(p) = \frac{M(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + \tau' p} \text{ où } \tau' \text{ représente la constante de temps désirée,}$$

pour un fonctionnement en asservissement. Ce comportement est intéressant car la réponse indicielle est apériodique (modèle du 1^{er} ordre) et assure une précision statique parfaite (gain statique égal à 1). D'autre part la rapidité peut être réglée par τ' (temps de réponse $T_R = 3\tau'$)

Détermination de la fonction de transfert du régulateur $C(p)$

$$\text{Si : } F(p) = \frac{H(p) \cdot C(p)}{1 + H(p) \cdot C(p)} \text{ on obtient : } C(p) = \frac{F(p)}{H(p)[1 - F(p)]}$$

Avec : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ on aboutit à : $C(p) = \frac{\tau}{K\tau'} + \frac{1}{K\tau' p}$. C'est la fonction de transfert d'un régulateur à structure PI parallèle. On peut factoriser

$\frac{\tau}{K\tau'}$ pour l'écrire sous forme d'une structure mixte (ou série). On

$$\text{pose : } C(p) = \frac{\tau}{K\tau'} \left(1 + \frac{1}{\tau p} \right) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

On identifie ensuite. On obtient :

$$A = \frac{\tau}{K\tau'} \quad \text{et} \quad T_i = \tau$$

On constate que le gain de boucle $K_B = AK = \frac{\tau}{\tau'}$ représente le « facteur d'accélération » en chaîne fermée.

Réglage de $C(p)$

Pour une structure mixte, le réglage optimal est obtenu si $T_i = \tau$, le gain de boucle permettant alors de choisir l'accélération en asservissement. Dans la pratique un gain de boucle K_B de l'ordre 3 ou 4 permet d'éviter de trop restreindre la bande proportionnelle, de conserver une bonne robustesse vis-à-vis d'une variation de K et de minimiser les sollicitations sur l'actionneur.

La courbe 3 de la figure 2 représente la réponse indicielle correspondant au réglage matérialisé par le point 3, sur la figure 1. La valeur

$$K_B = 3 \text{ permet d'obtenir } \tau' = \frac{\tau}{K_B} = 6,7 \text{ s.}$$

Bien évidemment la méthode peut se généraliser, en se donnant par exemple un modèle de référence en régulation. Les calculs nécessitent alors la connaissance de $H_z(p)$. On retiendra que la méthode précédente donne de bons résultats en présence d'une perturbation. Si la perturbation est lentement variable et si l'on travaille en régulation de maintien, le gain K_B peut être augmenté.

Exercice résolu

Le fonctionnement du réacteur représenté figure 3 nécessite le maintien de sa pression de vapeur. Après installation de la chaîne de régulation, on désire régler les paramètres du régulateur PC1, de fonction de transfert

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

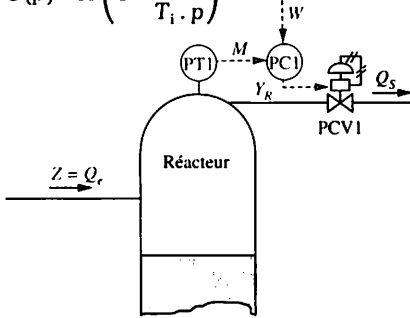


Fig. 3

En régulation de maintien, le point de fonctionnement nominal est :

$$W_0 = M_0 = 50 \% ; \quad Y_{R0} = 40 \% ; \\ Z_0 = 70 \%$$

tous les symboles représentant des pourcentages d'échelles de transmetteurs ou de variations.

Une identification, autour de ce point, fournit :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{1,2}{1 + 96p}$$

$$\text{et } H_z(p) = \frac{M(p)}{Z(p)} = \frac{1,8}{1 + 40p}$$

1. La vanne PCV1 étant de type normalement ouverte, déterminer le sens d'action du régulateur.

2. En chaîne fermée on désire obtenir le modèle de référence défini par :

$$F(p) = \frac{M(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + \tau' \cdot p} \text{ avec une constante de temps } \tau' \text{ minimale. Cependant on désire qu'une variation de consigne } \omega(t) = 10 \cdot u(t) \text{ n'entraîne pas de saturation de l'organe de réglage, soit : } 10 \% \leq Y_R(t) \leq 90 \%. \text{ En déduire le réglage PI du régulateur.}$$

3. Tracer les réponses $v(t)$, $y_R(t)$, $m(t)$ correspondantes.

4. En régulation de maintien, pour $z(t) = 10 \cdot u(t)$, exprimer $m(t)$ et $y_R(t)$.

5. Tracer les courbes correspondantes.

6. Vérifier que cette perturbation n'entraîne pas de saturation du régulateur pendant le régime transitoire.

Solution :

1. Sens d'action du régulateur

Une augmentation de la mesure doit entraîner une augmentation du débit de sortie Q_S . La vanne étant de type NO, le signal réglant Y_R doit donc diminuer, ce qui impose un sens d'action inverse.

2. Réglage

Pour un régulateur de structure mixte, le modèle proposé impose :

$$T_i = \tau = 96 \text{ s} \quad \text{Dans ces conditions}$$

$\tau' = \frac{\tau}{K_B}$. La condition concernant $Y_R(t)$ conduit à calculer $y_R(t)$ pour $\omega(t) = 10 \cdot u(t)$:

$$Y_R(p) = \frac{M(p)}{H(p)} = \frac{F(p)}{H(p)} \cdot W(p) \\ = \frac{1 + 96p}{1,2 \left(1 + \frac{96}{1,2 \cdot A} p \right)} \cdot \frac{10}{p}$$

Par inversion temporelle, on obtient :

$$y_R(t) = \left(10 A - \frac{10}{1,2} \right) e^{-\frac{t}{\tau'}} + \frac{10}{1,2}$$

Cette fonction admet un maximum égal à 10 A, à l'instant $t = 0^+$.

Compte tenu du talon $Y_{R0} = 40 \%$, cette variation maximale ne doit pas dépasser 50 %, ce qui impose $A = 5$.

$$\text{D'où : } K_B = 6 \text{ et donc : } \tau' = 16 \text{ s}$$

3. Courbes

Dans ces conditions :

$$y_R(t) = 41,8e^{-0,0625t} + 8,33$$

$$M(p) = \frac{1}{1 + 16p} \cdot \frac{10}{p} \text{ entraîne :}$$

$$m(t) = 10(1 - e^{-0.0625t})$$

Ces deux courbes sont fournies figure 4.

4. Régulation de maintien

$$F_z(p) = \frac{M(p)}{Z(p)} = \frac{H_z(p)}{1 + H(p) \cdot C(p)}$$

soit, avec

$$A = 5 : F_z(p) = \frac{28,8p}{(1 + 16p)(1 + 40p)}$$

Pour $z(t) = 10 \cdot u(t)$, la résolution mathématique conduit à :

$$m(t) = 12(e^{-0.025t} - e^{-0.0625t})$$

De même, $Y_R(p) = -C(p) \cdot M(p)$ soit, pour $A = 5$ et $T_i = 96$ s :

$$\frac{Y_R(p)}{Z(p)} = \frac{-(1,5 + 144p)}{(1 + 16p)(1 + 40p)}$$

Après inversion temporelle on obtient :

$$y_R(t) = -35e^{-0.025t} + 50e^{-0.0625t} - 15$$

5. Courbes

Ces deux courbes sont fournies figure 5.

6. Saturations

La courbe $y_R(t)$ atteint un minimum de -24 %. Compte tenu du talon $Y_{R0} = 40$ %, on trouve :

$$Y_{Rmin} = 16 \%$$

, ce qui est conforme aux exigences du cahier des charges. En pratique le problème de la saturation du signal Y_R est important et sur un grand nombre d'installations, il n'est pas rare de rencontrer des vannes « surdimensionnées ». Cet artifice permet d'augmenter la puissance mise en jeu et donc de réagir vite, tout en restant en régime non saturé en sortie du régulateur. Malheureusement ce surdimensionnement augmente le gain statique K du système, introduit des non-linéarités et dimi-

nue la précision de réglage, notamment à faible charge.

Dans certains cas le problème peut être résolu par l'installation de deux actionneurs : l'un permet de réagir vite aux variations importantes de charge, l'autre assure la précision statique, lors du retour au point de fonctionnement, par un dimensionnement plus faible.

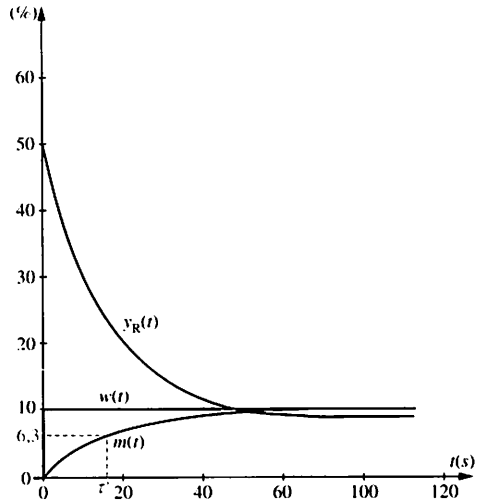


Fig. 4

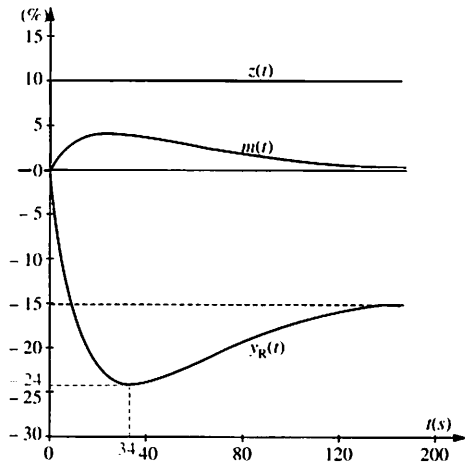


Fig. 5

Différents aspects de la représentation des systèmes en régulation industrielle ont été abordés dans la Régulation 1 (voir chap. 13). A la majorité des dispositifs il est souvent suffisant de faire correspondre un modèle de Broïda. En effet il est préférable de choisir un modèle simple, en tenant compte éventuellement des variations de ses paramètres, plutôt que d'utiliser un modèle trop complexe. Dans ce chapitre on se propose d'établir deux méthodes de réglage pour cette sorte de modèle. Ces méthodes supposent uniquement qu'une identification a pu fournir un modèle vraisemblable de la fonction de transfert réglante, sous la forme :

$$H(p) = K \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

1 Réglages de Broïda

Initialement développée pour un régulateur PID, de structure série, cette méthode est fondée sur l'obtention de marges de stabilité fixées.

Régulation PI

Le critère retenu correspond à une marge de gain telle que :

$$G_m(\text{dB}) = 6 \text{ dB}$$

On rappelle la fonction de transfert du régulateur

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

La fonction de transfert isochrone en chaîne ouverte est donc :

$$T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$\text{soit : } T(j\omega) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot j\omega} \right) \cdot K \frac{e^{-Tj\omega}}{1 + \tau j\omega}$$

$$\text{son module s'écrit : } |T(j\omega)| = \frac{AK\sqrt{1 + T_i^2\omega^2}}{T_i\omega\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

$$\text{son argument est égal à : } \varphi = -T\omega + \text{Arctan}(T_i\omega) - \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\tau\omega).$$

Le critère imposé nécessite : $|T(j\omega)| = 0,5$, (soit $20 \lg |T(j\omega)| = -6 \text{ dB}$), pour : $\varphi = -\pi \text{ rad}$.

On obtient un système de deux équations, à trois inconnues : A , T_i et ω ; il faut donc se fixer une contrainte supplémentaire.

Le chapitre précédent a fourni un réglage optimal, pour un système du premier ordre. Pour le réglage de Broïda on s'en inspire pour proposer $T_i = \tau$ comme contrainte. Ce choix se justifie doublement :
- le modèle de Broïda n'est qu'une extension de celui du premier ordre ;

-il permet une simplification de l'expression de $T(j\omega)$, ce qui facilite la résolution du système.

On obtient donc : $\frac{AK}{\tau\omega} = 0,5$ et : $-\tau\omega - \frac{\pi}{2} = -\pi$ d'où : $\omega = \frac{\pi}{2T}$.

Le réglage correspond donc à : $AK = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\pi}{4}$ et : $T_i = \tau$.

Les régulateurs nécessitant souvent l'introduction du paramètre : $X_p = \frac{100}{A}$, et les régleurs désirant souvent un amortissement important, le réglage de Broida impose :

$$X_p = \frac{400}{\pi} \cdot K \cdot \frac{T}{\tau}$$

$$T_i \geq \tau$$

On observe que l'on retrouve le rapport $\frac{T}{\tau}$, image de la difficulté de réglage (évoquée dans Régulation 1, chapitre 13). L'expression obtenue pour X_p laisse présager des performances médiocres au-dessus d'une valeur maximale de ce rapport.

Le calcul de la marge de phase aboutit à : $\varphi_m = 45^\circ$.

A un échelon de consigne $w(t) = 10 \cdot u(t)$, correspond la réponse indicieuse figure 1 courbe 1, pour le dispositif suivant :

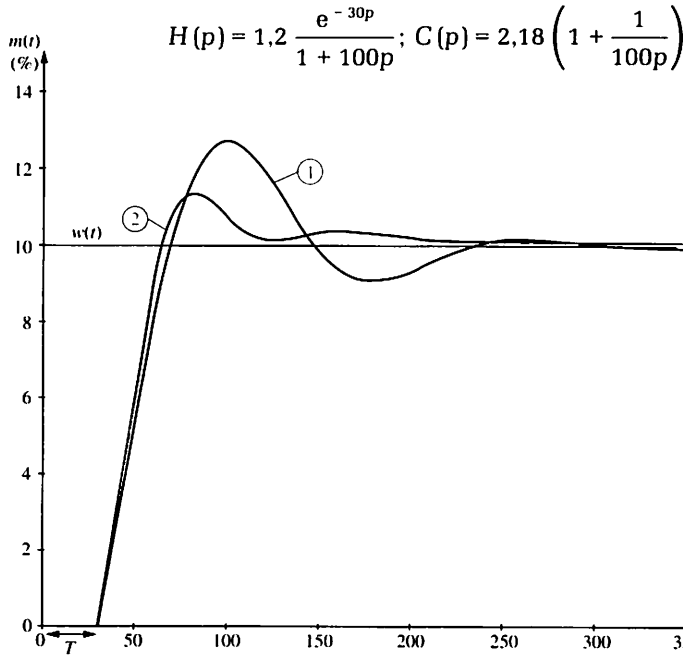


Fig. 1

Pour les valeurs adoptées, on observe un premier dépassement de 30 %. En fonction des contraintes industrielles, il peut être réduit en adoptant : $T_i > 100$.

Le tracé de $T(j\omega)$, dans le plan complexe de Black, confirme les marges de stabilité (fig. 2, courbe 1).

Régulation PID

Le critère retenu correspond toujours à une marge de gain $G_m(\text{dB}) = 6 \text{ dB}$. La fonction de transfert du régulateur de structure

$$\text{série est maintenant : } C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

La fonction de transfert $T(j\omega)$, a pour module :

$$|T(j\omega)| = \frac{AK \sqrt{1 + T_i^2 \cdot \omega^2}}{T_i \omega \sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}} \times \sqrt{1 + T_d^2 \cdot \omega^2}$$

et pour argument :

$$\varphi = -T\omega + \text{Arctan}(T_i \omega) + \text{Arctan}(T_d \omega) - \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\tau \omega)$$

En conservant la contrainte $T_i = \tau$ les expressions deviennent :

$$|T(j\omega)| = \frac{AK}{\tau \omega} \cdot \sqrt{1 + T_d^2 \cdot \omega^2} \text{ et } \varphi = -T\omega + \text{Arctan}(T_d \omega) - \frac{\pi}{2}$$

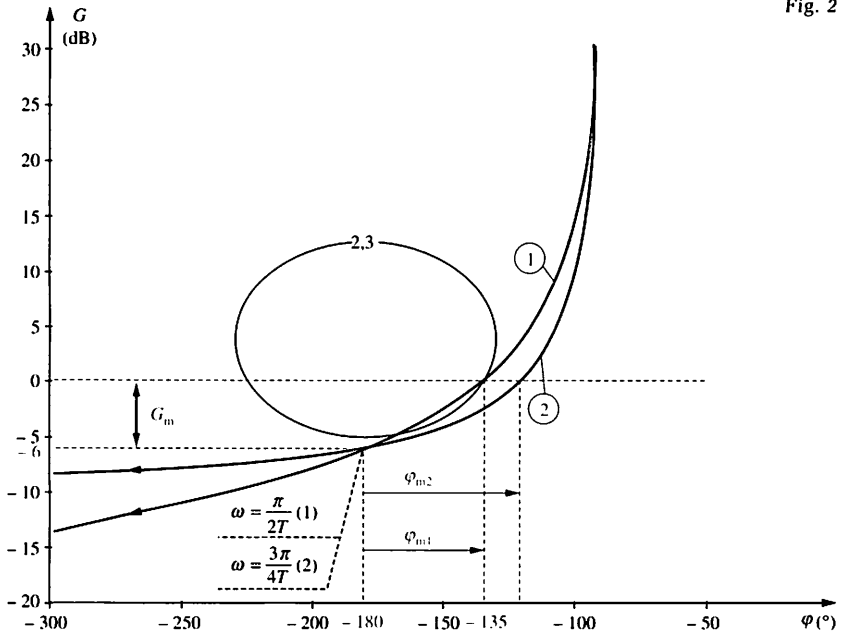


Fig. 2

Elles constituent un système de deux équations, à trois inconnues : A , T_d et ω . Pour pouvoir résoudre ce système, la méthode de Broida attribue à l'action dérivée une avance de phase de $\frac{\pi}{4}$ obtenue pour la pulsation ω telle que $\varphi = -\pi$.

Cela correspond à : $\text{Arctan } T_d \omega = \frac{\pi}{4}$ soit : $T_d \omega = 1$.

Le système se simplifie et l'on obtient :

$$\frac{AK\sqrt{2}}{\tau\omega} = 0,5 \text{ et : } -T\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\pi \text{ d'où : } \omega = \frac{3\pi}{4T}$$

Le réglage correspond à : $X_p = 120 \cdot K \cdot \frac{T}{\tau}$, $T_i \geq \tau$, $T_d = 0,42 \cdot T$.

La réponse indicielle est fournie figure 1, courbe 2 et le lieu de Black est tracé figure 2, courbe 2. On constate un meilleur amortissement de la réponse indicielle ce qui est confirmé, dans l'abaque de Black, par un lieu $T(j\omega)$ extérieur à la courbe isomodule 2,3 dB.

Pour une structure série du régulateur, on note que l'action dérivée permet de réaliser une contribution proportionnelle du régulateur plus importante. Cela est dû au terme d'intercorrélation $\left(1 + \frac{T_d}{T_i}\right)$ (voir également chapitre 20, Régulation 1).

Le temps d'action dérivée T_d est toujours limité à environ 40 s.

Tableau de réglages

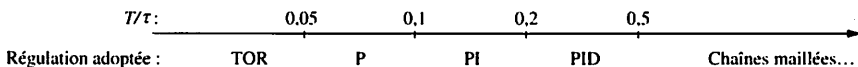
L'étude précédente ayant été réalisée pour une structure série, le tableau suivant permet d'établir les réglages pour les autres structures. Les correspondances sont obtenues en développant les structures et en écrivant qu'elles ont toutes les mêmes coefficients K_p , K_i et

K_d dans l'écriture parallèle $K_p + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p$

Structures paramètres	P	PI parallèle	PI série mixte	PID parallèle	PID mixte	PID série
$X_p \%$	$125K \cdot \frac{T}{\tau}$	$125K \cdot \frac{T}{\tau}$	$125K \cdot \frac{T}{\tau}$	$120K \cdot \frac{T}{\tau + 0,4T}$	$120K \cdot \frac{T}{\tau + 0,4T}$	$120K \cdot \frac{T}{\tau}$
T_i		$K \cdot \frac{T}{0,8}$	τ	$K \cdot \frac{T}{0,75}$	$\tau + 0,4 \cdot T$	τ
T_d				$\frac{0,35}{K} \cdot \tau$	$\frac{\tau}{2,5\tau + T} \cdot T$	$0,42 \cdot T$

2 Choix d'un régulateur

Le choix du mode de régulation dépend du système physique, et plus particulièrement de la fonction de transfert réglante $H(p)$. Si l'on considère le tableau ci-dessus, en particulier en structure série, on constate que l'expression du coefficient X_p dépend directement du rapport $\frac{T}{\tau}$, évoqué précédemment, et qui caractérise la difficulté de réglage. Pour des valeurs élevées de ce rapport, la stabilité du réglage impose des valeurs élevées de X_p , ce qui conduit à des performances temporelles peu satisfaisantes. On a donc établi une règle de choix en fonction de ce rapport. Elle est exprimée par le schéma suivant :



Cette échelle n'a qu'un rôle indicatif. Par exemple, le technicien de régulation reste libre d'adopter un réglage PID pour un rapport faible de $\frac{T}{\tau}$, à condition d'adapter son réglage. De plus il peut prendre en compte le type de régulation (maintien ou asservissement) et le type de sollicitation (échelon ou rampe d'équilibrage). Il tient enfin compte de la qualité de son identification et des variations éventuelles de son modèle, en fonction du point de fonctionnement ou d'une perturbation principale. On retiendra qu'aucune méthode de réglage ne prétend à l'universalité et que l'expérience du régulateur est primordiale, pour modifier un réglage sur le site de production.

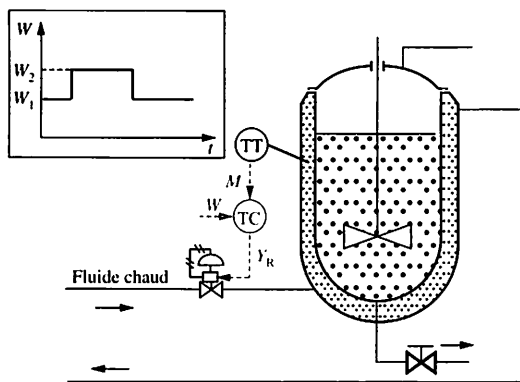


Fig. 3

Le dispositif étudié et représenté figure 3 est le réacteur évoqué au chapitre 13.

La fonction de transfert réglante $H(p)$ a été modélisée, à charge réelle, autour du point de fonctionnement suivant : $M_1 = W_1 = 40\%$; $Y_{R1} = 35\%$

$$H(p) = 1,2 \frac{e^{-30p}}{1 + 100p}$$

Le système est considéré comme linéaire dans l'intervalle de consigne W_1 à W_2 .

Le régulateur utilisé est à structure série :

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

1. Choisir le type de régulation.
2. Déterminer un réglage permettant d'obtenir une marge de gain de 6 dB.
3. Par utilisation de l'abaque de Black, évaluer le premier dépassement D_1 , en assimilant le lieu de $T(j\omega)$ à celui d'un second ordre équivalent.
4. En régulation PI, et en adoptant le réglage $T_i = \tau$, déterminer l'amplification critique A_c conduisant à des oscillations entretenues de la boucle.
5. Que peut-on penser de la robustesse de la boucle ?

Solution :

1. Choix de la régulation

Le rapport $\frac{T}{\tau}$ étant supérieur à 0,2, on choisit donc d'utiliser les trois actions PID.

2. Choix du réglage

Compte tenu de la marge de gain à réaliser, on utilise un réglage de Broida :

$$\boxed{X_p = 43\%} \quad \boxed{T_i = 100 \text{ s}}$$

$$\boxed{T_d = 12,7 \text{ s}}$$

3. Lieu de Black

La représentation de la fonction de transfert $T(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega)$ est fournie peut être tracée, la courbe étant déterminée à partir des expressions du cours :

$$|T(j\omega)| = \frac{AK}{\tau\omega} \sqrt{1 + T_d^2 \cdot \omega^2} \text{ et :}$$

$$\varphi = -T\omega + \text{Arctan}(T_d \omega) - \frac{\pi}{2}$$

On observe graphiquement que le facteur de résonance en chaîne fermée est environ égal à : $Q = 1$ dB, pour $\omega_R = 0,06$ rad/s.

Les résultats établis dans Régulation 1, chap. 11 et 12, permettent de calculer λ à partir de Q .

On obtient $\lambda = 0,52$ ce qui conduit à : $\boxed{D_1 = 15\%}$

Ce résultat est conforme à la réponse indicielle obtenue à la figure 1, courbe 2.

4. Amplification critique

Par définition c'est la valeur de A qui permet d'obtenir : $|T(j\omega_c)| = 1$ et : $\varphi = -\pi$ rad.

La pulsation critique ω_c est alors celle des oscillations observées.

Pour le réglage de Broida :

$$|T(j\omega)| = \frac{AK}{T_i \cdot \omega} \text{ et : } \varphi = -T\omega - \frac{\pi}{2}$$

On obtient : $\omega_c = \frac{\pi}{2T}$ ce qui conduit à :

$$\boxed{A_c = 4,36} \text{ (ou } X_p = 23\% \text{).}$$

5. Robustesse

Un doublement de l'amplification conduit au pompage. Or il faut se souvenir que c'est le produit AK qui intervient dans tous les calculs. Un doublement de K , avec $A = Cte$, conduit donc aussi au pompage. La régulation est donc moyennement robuste et l'hypothèse d'un système linéaire doit être vérifiée.

La méthode de Ziegler et Nichols ne doit pas être abordée comme une enième méthode de réglage. En effet dans les méthodes classiques on est conduit à distinguer les systèmes naturellement stables et les systèmes naturellement instables, ou intégrateurs. Dans les deux cas les réglages dépendent des paramètres de modèles qui sont différents. A partir de la réponse indicielle d'un système quelconque Ziegler et Nichols ont tenté d'obtenir un ensemble d'informations permettant d'aboutir à un réglage. Ces informations constituent la signature du système.

Le réglage de Broïda fait intervenir la quantité $S = K \frac{T}{\tau}$, dans l'expression de X_p . C'est la signature caractéristique d'un modèle de Broïda.

1 Signature kT d'un système

Cette signature ne fait pas référence à une constante de temps, donc à l'hypothèse propre à un système naturellement stable.

L'idée de départ est que la réponse indicielle d'un système naturellement stable est très longue à obtenir et, sur un long intervalle de temps, on n'est jamais certain de disposer d'une courbe exploitable. En revanche, le point d'inflexion de la réponse indicielle est généralement obtenu à 20 pour cent du temps nécessaire à l'obtention de l'asymptote horizontale et la durée correspondante est donc relativement courte.

La signature kT d'un système utilise donc cette portion de la réponse indicielle.

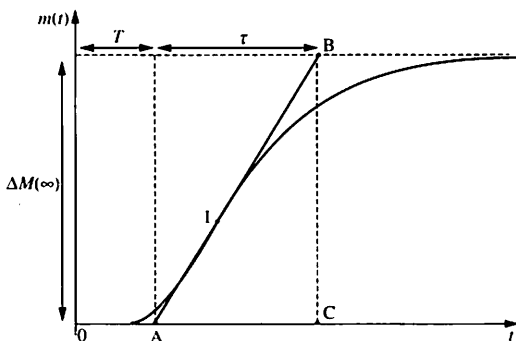
Signature d'un système naturellement stable

Soit un système représentable par un modèle de Broïda :

$$H(p) = K \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

Sa réponse indicielle réelle est fournie figure 1.

Fig. 1



La tangente au point d'inflexion I fait apparaître les points A et B aux intersections avec l'axe des temps et l'asymptote horizontale. Avec une marge d'erreur très faible, on peut admettre que la longueur OA correspond au temps mort T du modèle, la longueur AC correspondant à la constante de temps τ (voir fig. 2 chapitre 2 sur l'identification).

La pente de la tangente au point d'inflexion peut donc être évaluée par le rapport : $\frac{\Delta M(\infty)}{\tau}$ qui s'exprime en pourcentage par seconde (%/s).

En fonction de l'expression du gain statique : $K = \frac{\Delta M(\infty)}{\Delta Y_R}$, la signature $S = K \cdot \frac{T}{\tau}$ devient : $S = T \cdot \frac{\Delta M(\infty)}{\tau} \cdot \frac{1}{\Delta Y_R}$.

L'expression $\frac{\Delta M(\infty)}{\tau} \cdot \frac{1}{\Delta Y_R}$ est homogène à l'inverse d'un temps (s^{-1} ou min^{-1}). Elle représente la *sensibilité* du système à une variation ΔY_R du signal de commande. En effet ce paramètre est l'image de la vitesse de variation maximale de la mesure M , à la suite de l'échelon de commande ΔY_R . L'analogie avec le gain dynamique k introduit pour les systèmes intégrateurs conduit à utiliser cette notation. On obtient donc : $S = K \frac{T}{\tau} = k \cdot T$. Ce produit kT constitue donc une signature équivalente, en adoptant pour k la *sensibilité maximale* au point d'inflexion.

2 Réglage en signature $K \frac{T}{\tau}$

Initialement développée pour un régulateur PID de structure mixte, cette méthode est également basée sur l'obtention de marges de stabilité fixées, du même ordre de grandeur que pour le réglage de Broida. La structure du régulateur, $C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$ ne permet pas des calculs simples. Les résultats, pour une structure mixte, sont regroupés dans le tableau suivant :

Régulation paramètres	P	PI	PID
$X_p \%$	$100 K \frac{T}{\tau}$	$120 K \frac{T}{\tau}$	$80 K \frac{T}{\tau}$
T_i		$3 T$	$2 T$
T_d			$0,4 T$

Les valeurs proposées pour X_p et T_d sont proches de celles obtenues en structure série par la méthode de Broida. La différence essentielle provient du calcul de T_i à partir du temps mort T et non de la

constante de temps τ . Le réglage de Ziegler et Nichols est souvent considéré comme un réglage dur, avec des marges de stabilité faibles. On l'utilise souvent pour les servomécanismes. On l'adopte en régulation de maintien lorsque les perturbations sont lentes, ou lorsque des dispositifs d'antisaturation de l'action intégrale sont disponibles sur le régulateur.

La figure 2 permet d'observer un premier dépassement, proche de 40 %, pour le régulateur $C(p) = 2,31 \left(1 + \frac{1}{90p} \right)$ associé au système

suivant : $H(p) = 1,2 \frac{e^{-30p}}{1 + 100p}$ déjà étudié au chapitre précédent.

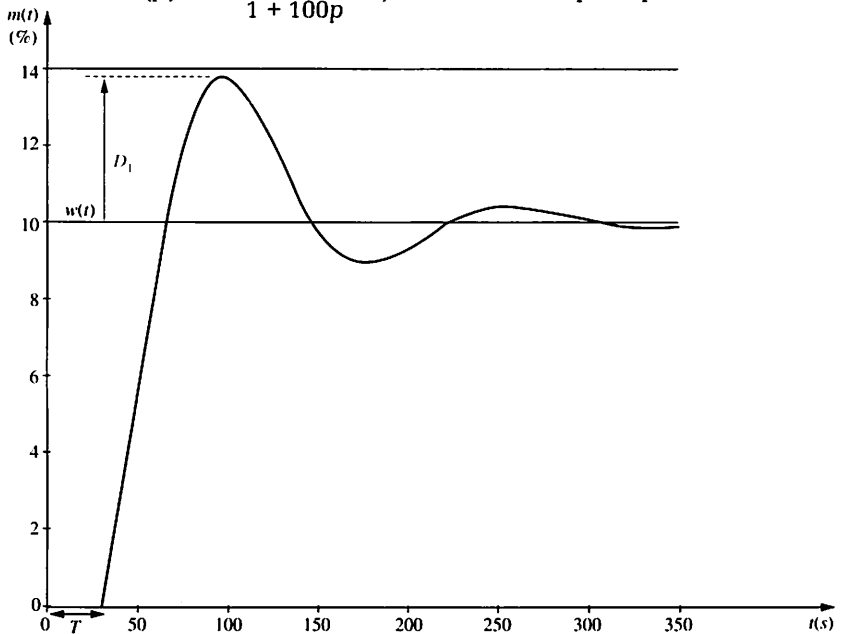


Fig. 2. Réponse indicielle pour un réglage PID de Ziegler et Nichols. Le premier dépassement D_1 est important.

3 Réglages en signature kT

Il suffit de reprendre le tableau précédent et de remplacer, dans le calcul de X_p , l'expression $K \frac{T}{\tau}$ par kT . L'avantage de cette expression est d'être utilisable également pour le réglage des systèmes instables, abordé au chapitre suivant.

L'inconvénient des méthodes de réglages présentées jusqu'à présent est de nécessiter un modèle ou une réponse indicielle du système, en chaîne ouverte. Celle-ci est parfois impossible à obtenir, compte tenu des contraintes de sécurité en cours de production. Aussi Ziegler et

Nichols ont-ils adapté leurs méthodes de réglage à un fonctionnement en chaîne fermée, assurant la sécurité. Cette méthode permet d'appréhender indirectement la signature (voir exercice résolu).

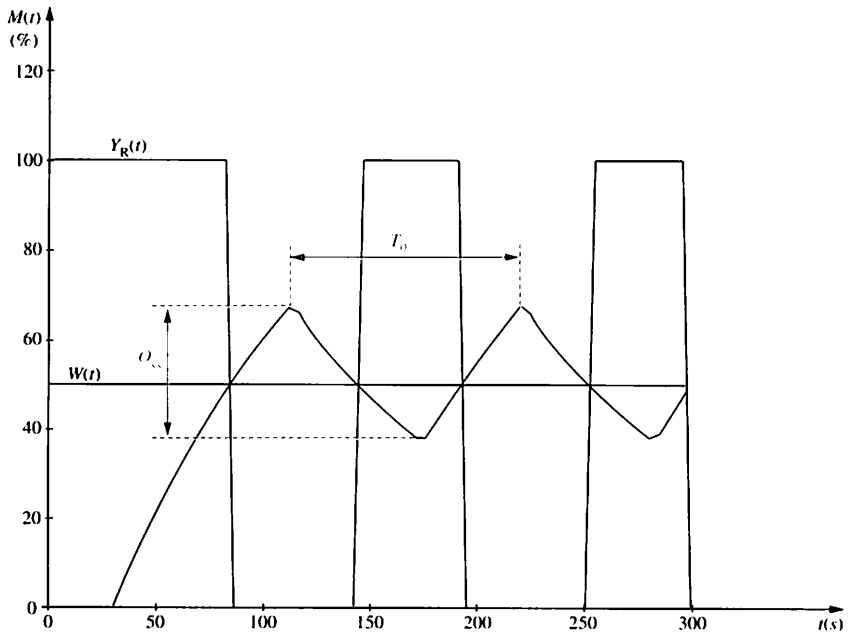
4 Méthode des oscillations TOR

Si la grandeur réglante le permet, et si les seuils d'alarme sont suffisamment éloignés de la consigne, on place le régulateur en tout ou rien. Ceci correspond à $X_p = 0$, sans aucune action intégrale ou dérivée.

On enregistre alors les oscillations obtenues sur la mesure (voir fig. 3). Pour un régulateur de structure mixte, la méthode de réglage fournit les paramètres à partir du relevé de l'amplitude des oscillations crête à crête (O_{CC} , exprimée en pourcentage de l'échelle du transmetteur) et de la période T_0 des oscillations.

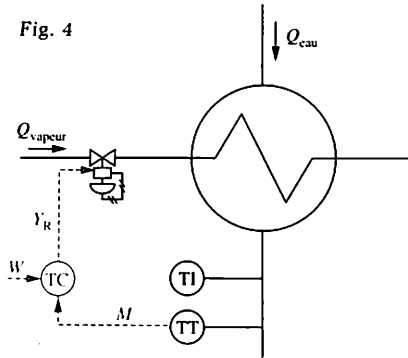
Régulation paramètres	P	PI	PID
X_p %	O_{CC}	$1,2 O_{CC}$	$0,8 O_{CC}$
T_i		$\frac{3}{4} T_0$	$0,5 T_0$
T_d			$0,1 T_0$

Fig. 3



Exercice résolu

On se propose de régler la boucle de température de l'échangeur de chaleur représenté figure 4, en utilisant la méthode des oscillations TOR.



La réponse temporelle est celle de la figure 3. En première approximation, on suppose que le système est linéaire sur toute la plage de variation de la mesure.

Le transmetteur de température utilisé (TT) possède une échelle E de mesure de 20 °C à 100 °C .

- Deux points de fonctionnement ont été relevés, pour un débit Q_{eau} fixé, valeurs vérifiées par l'indicateur de température (TI);

$$Y_R = 0\% \leftrightarrow M_0 = 20\text{ °C} = 0\%$$

$$Y_R = 100\% \leftrightarrow M_{\text{max}} = 116\text{ °C} = 120\%$$

1. Calculer les paramètres de réglage pour un régulateur PID de structure mixte.

2. A partir de la réponse de la figure 3, évaluer les paramètres du modèle équivalent au système sous la forme de Broida :

$$H(p) = \frac{Ke^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

3. En déduire les réglages correspondants à ce modèle.

4. Comparer les deux résultats obtenus.

Solution :

1. Réglages TOR

On relève sur l'enregistrement : $T_0 = 108\text{ s}$ et $O_{CC} = 30\%$.

Les réglages sont donnés par le tableau du paragraphe 4, soit :

$$X_p = 0,8 \quad O_{CC} = 24\%$$

$$T_i = 0,5 \quad T_0 = 54\text{ s}$$

$$T_d = 0,1 \quad T_0 = 11\text{ s}$$

2. Modèle de Broida

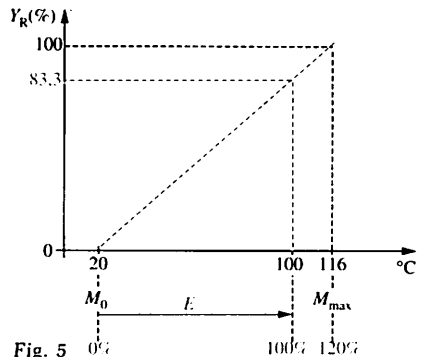
- Recherche du gain statique K

Le système étant supposé linéaire sur

toute la plage de variation : $K = \frac{\Delta M}{\Delta Y_R}$

ce qui revient à : $K = \frac{M_{\text{max}} - M_0}{E}$, les

échelles étant exprimées en pourcentages ou en degrés Celsius.



La figure 5 représente ces différentes grandeurs. On obtient donc :

$$K = \frac{116 - 20}{80} \Rightarrow K = 1,2$$

- Recherche du temps mort T

Cette valeur se relève directement sur la réponse temporelle de la figure 6, en considérant que l'on néglige l'hystérésis de commutation du régulateur.

On aboutit à : $T \approx 30\text{ s}$

- Recherche de la constante de temps τ
Ce paramètre peut être évalué à partir de la valeur de l'ondulation O_{CC} .

En effet, en assimilant les portions de courbes exponentielles à leur tangente, on obtient (fig. 6) :

$$\tan \alpha_1 = \frac{M_{\max} - W}{\tau} = \frac{\Delta M_1}{T}$$

$$\text{et } \tan \alpha_2 = \frac{W - M_0}{\tau} = \frac{\Delta M_2}{T}$$

$$O_{CC} = \Delta M_1 + \Delta M_2 = (M_{\max} - M_0) \cdot \frac{T}{\tau}$$

Pour $O_{CC} = 30\%$, $M_{\max} - M_0 = 120\%$ et $T = 30\text{ s}$, on évalue la constante de temps :

$$\tau \approx 120\text{ s}$$

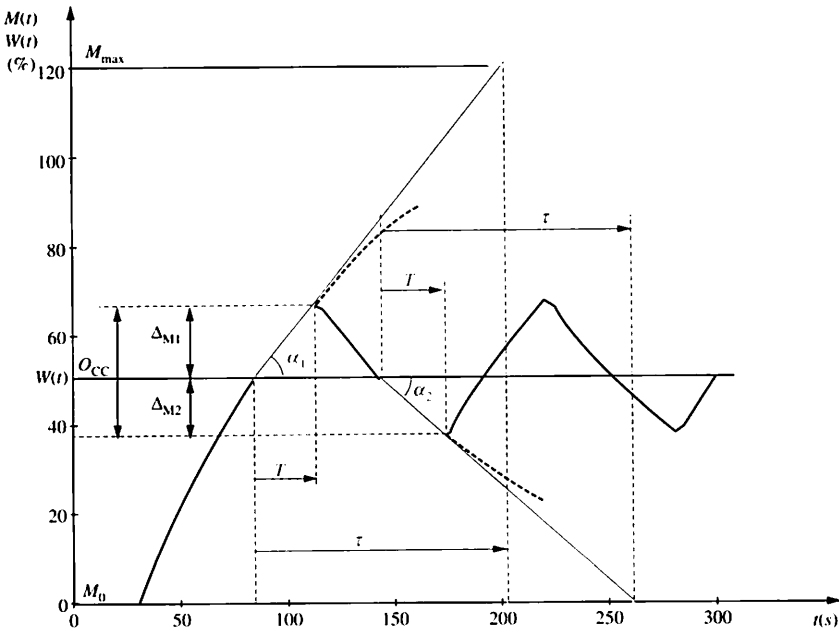
Dans ces conditions :

$$H(p) = 1,2 \cdot \frac{e^{-30p}}{1 + 120p}$$

3. Réglages

Par utilisation du tableau donné au paragraphe 2, on obtient :

Fig. 6



$$X_p = 80 K \frac{T}{\tau} = 24\%$$

$$T_i = 2 T = 60\text{ s}$$

$$T_d = 0,4 T = 12\text{ s}$$

4. Conclusion

Ces réglages, conduisant à des valeurs très proches des paramètres calculés précédemment, valident la méthode d'identification basée sur les oscillations TOR.

On retiendra que la méthode des oscillations TOR est l'une des premières à envisager lorsqu'on désire obtenir rapidement un réglage. C'est d'ailleurs l'une des solutions retenues par de nombreux constructeurs pour les dispositifs autorégulants. Ainsi les régulateurs de la marque EURO THERM de la série 900 (Régulation 1, chapitre 21) disposent de la fonction d'autorégulation « tune ».

L'identification des systèmes intégrateurs abordée au chapitre 3 a mis en évidence qu'un des modèles les plus simples, le modèle de Broïda, a une fonction de transfert réglante qui peut s'écrire sous la forme :

$$H(p) = k \frac{e^{-T_p}}{p}$$

On rappelle que le coefficient k , qui peut être appelé gain dynamique, est défini à partir de la réponse indicielle d'un tel système. Il représente le rapport $\frac{a}{E}$ où a est la pente de l'asymptote ($\% s^{-1}$) et E est l'amplitude de l'échelon de commande $\Delta Y_R (\%)$.

Compte tenu des remarques du chapitre précédent, k représente donc la sensibilité du système. En assimilant la réponse indicielle d'un système intégrateur à la première partie de celle d'un système naturellement stable, on peut donc régler un système intégrateur en utilisant sa signature kT .

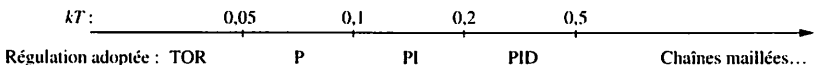
1 Réglage de Broïda

On retrouve le même critère de réglage, à savoir une marge de gain $G_m (\text{dB}) = 6 \text{ dB}$. En utilisant l'équivalence des signatures, on aboutit au tableau suivant, directement tiré de celui fournissant les réglages pour un système stable :

Structures paramètres	P	PI parallèle	PI série/mixte	PID parallèle	PID mixte	PID série
X_p	125kT	125kT	125kT	110kT	110kT	120kT
T_i		$\frac{kT^2}{0,15}$	5T	$\frac{kT^2}{0,15}$	5,2T	4,8T
T_d				$\frac{0,35}{k}$	0,4T	0,4T

2 Choix d'un régulateur

En utilisant l'équivalence des signatures, on retrouve une échelle proche de celle fournie pour un système stable. Si l'on admet qu'un système stable, correctement instrumenté, a un gain statique K proche de l'unité, la graduation peut être établie directement en fonction du produit kT .



Cette échelle n'a qu'un caractère indicatif. Le technicien de régulation reste libre d'adopter un réglage PID pour une signature kT faible, à condition d'adapter son réglage. Il peut, en même temps, prendre en compte le type de régulation (maintien ou asservissement) et le type de sollicitation (échelon ou rampe d'équilibrage).

Exemple : Pour le procédé de fonction de transfert $H(p) = 0,05 \frac{e^{-4p}}{p}$ la signature kT est égale à 0,2. Pour un régulateur de structure parallèle, les tableaux de réglages PI et PID fournissent les valeurs suivantes :

PI	$X_p = 25 \%$	$T_i = 5,3 \text{ s}$	
PID	$X_p = 22 \%$	$T_i = 5,3 \text{ s}$	$T_d = 7 \text{ s}$

Les réponses indicielles sont représentées figure 1, courbe 1 (PI) et courbe 2 (PID). On constate que l'utilisation de l'action dérivée améliore la réponse mais que l'amortissement demeure faible. On se gardera bien d'émettre des remarques hâtives sur les valeurs respectives de T_i et T_d , compte tenu de la structure parallèle, qui peut troubler le régleur. On se souviendra cependant qu'une augmentation de X_p et/ou de T_i aboutira à un accroissement de l'amortissement.

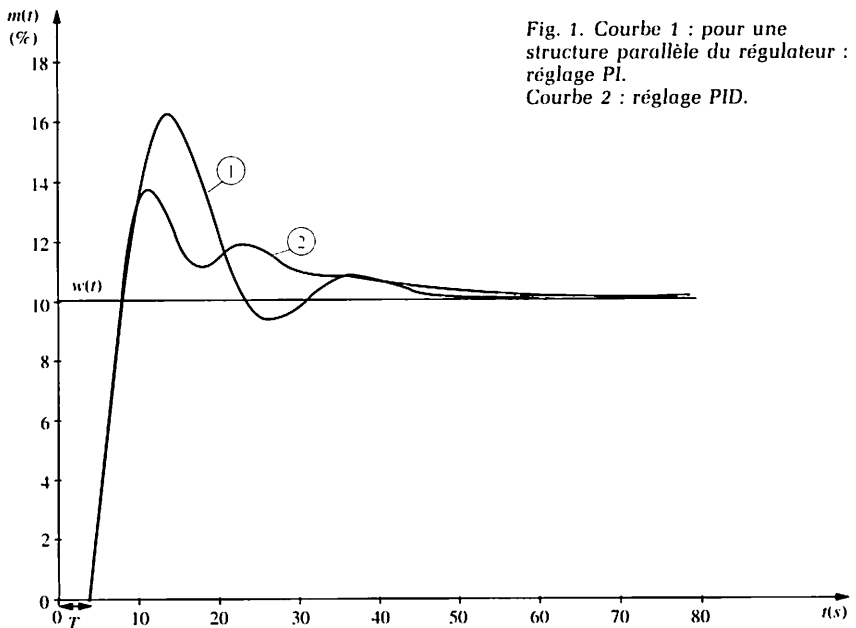


Fig. 1. Courbe 1 : pour une structure parallèle du régulateur : réglage PI.
Courbe 2 : réglage PID.

3 Méthode du régleur

Cette méthode, souvent considérée comme empirique, présente l'avantage de permettre un réglage sur le site de production, sans identification préalable. Procédant par retouches successives, le technicien détermine ainsi relativement rapidement ses actions.

On remarquera cependant que la durée de l'ensemble des essais est assez grande, souvent incompatible avec la durée allouée à cette opération.

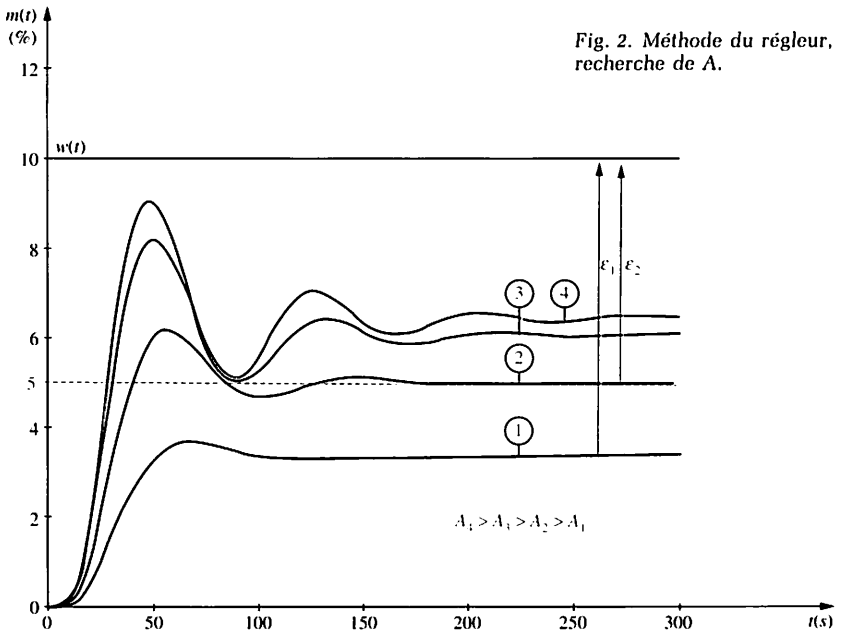
La méthode utilise un régulateur en position automatique, ce qui conduit à un fonctionnement en chaîne fermée. Elle assure donc la sécurité de la boucle, que le système soit instable ou non.

Détermination de l'action proportionnelle

Le système est initialement stabilisé en mode proportionnel, la précision statique étant obtenue par un biais ajustable.

A partir d'un échelon de consigne de faible amplitude (quelques pour cent de l'échelle du transmetteur), on recherche l'amplification A permettant d'obtenir un écart résiduel ε le plus faible possible, tout en conservant un amortissement convenable.

Pour un système naturellement stable, ces essais sont représentés figure 2, la valeur de A conduisant à la courbe 2 étant considérée comme optimale.



Détermination de l'action dérivée

Le premier problème à résoudre consiste à s'assurer qu'elle est nécessaire.

Si l'essai précédent en mode proportionnel conduit à un écart résiduel supérieur à 20 % de l'amplitude de l'échelon de consigne, il devient nécessaire d'utiliser une action dérivée. Pour l'essai précédent, conduisant à un écart de 50 %, une action dérivée est nécessaire. On reprend alors les essais en mode régulation proportionnelle et dérivée et on cherche la valeur de l'action dérivée conduisant à un premier dépassement (par rapport à la valeur finale $m(\infty)$) quasi nul. Ces essais, figure 3, permettent d'adopter la valeur de T_d correspondant à la courbe 3.

Détermination de l'action intégrale

Le régulateur étant désormais en mode PID, on détermine l'action intégrale conduisant à la réponse indicielle désirée, qui habituellement correspond à la courbe 3 de la figure 4.

L'inconvénient essentiel de la méthode est d'être délicate à mettre en œuvre sur un système intégrateur, car l'écart résiduel est nul.

L'usage de la méthode du réglage n'exclut absolument pas une identification ultérieure et l'utilisation d'un critère déterministe de réglage.

Fig. 3. Méthode du régleur, recherche de T_d .

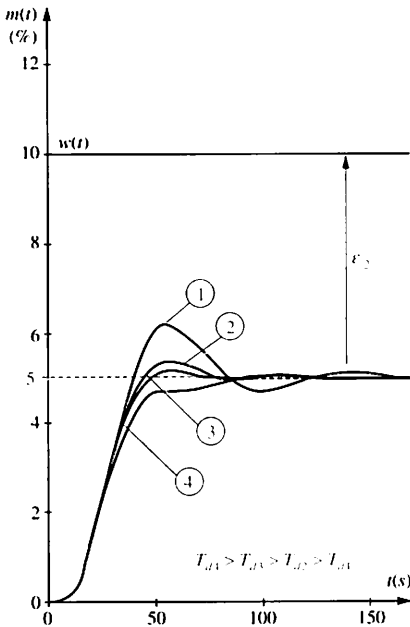
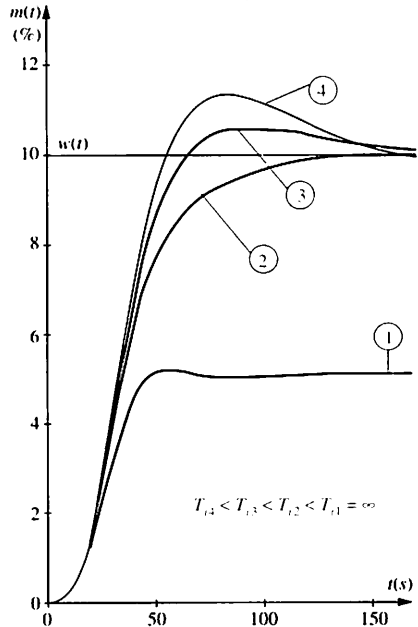


Fig. 4. Méthode du régleur, recherche de T_i .



Exercice résolu

Un technicien est chargé de régler un régulateur de niveau sur une cuve de stockage à extraction forcée. L'analyse indicielle lui fournit la courbe de la figure 5, pour un échelon $\Delta Y_R = 10\%$ du signal de commande du régulateur en mode manuel.

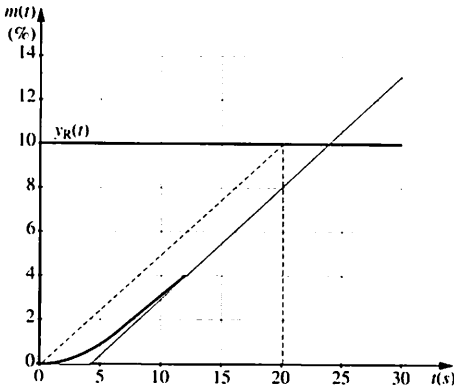


Fig. 5

- Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ correspondante, selon le modèle de Broïda.
- Calculer les paramètres de réglage permettant d'obtenir un réglage assez mou, pour un régulateur de structure parallèle.
- Estimer les performances en chaîne fermée, en utilisant l'abaque de Black.
- Déterminer la réponse indicielle de la boucle.
- Interpréter l'allure de la courbe obtenue.

Solution :

1. Identification

Le modèle proposé est : $H(p) = k \frac{e^{-T_p}}{p}$.

Les relevés sur la courbe permettent d'estimer T à 4 s. La pente de l'asymptote est égale à : $b = 0,5\%$ /s. Le gain dynamique k , défini par $k = \frac{b}{\Delta Y_R}$, est donc égal à : $k = 0,05\text{ s}^{-1}$.

On obtient donc : $H(p) = 0,05 \frac{e^{-4p}}{p}$

2. Réglages

L'application brutale du tableau de réglage de Broïda, avec $kT = 0,2$, aboutit à : $X_p = 22\%$ soit $A = 4,5$; $T_i = 5,3\text{ s}$; $T_d = 7\text{ s}$.

Désirant obtenir un amortissement supérieur à celui indiqué par la courbe 2 de la figure 1, le régleur adopte les valeurs suivantes :

$$A = 3,5 ; \quad T_i = 8\text{ s} ; \quad T_d = 7\text{ s}$$

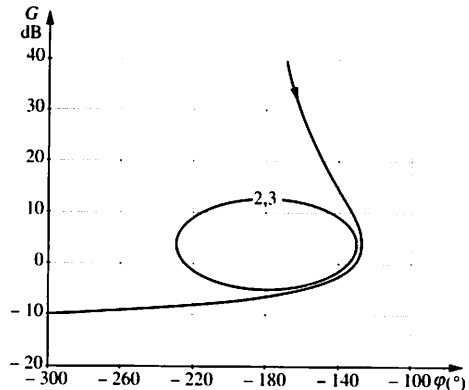
3. Lieu de Black

Pour la fonction de transfert isochrone

$$T(j\omega) = \left(3,5 + \frac{1}{8j\omega} + 7j\omega \right) \cdot 0,05 \frac{e^{-4j\omega}}{j\omega}$$

le lieu de Black est tracé à la figure 6.

Fig. 6. Structure parallèle du régulateur $A = 3,5$; $T_i = 8\text{ s}$; $T_d = 7\text{ s}$.



On constate que ce lieu reste extérieur au contour 2,3 dB. Ce résultat permet d'estimer que, pour un second ordre équivalent, le coefficient λ est supérieur à 0,42 et le premier dépassement D_1 est proche de 20 %.

4. Réponse indicielle

Tracée à l'aide d'un simulateur, elle est fournie figure 7.

5. Interprétation

Le dépassement obtenu est voisin de 25 %, valeur supérieure au dépassement théorique prévu. Cependant l'allure de la courbe, après le pre-

mier dépassement, peut surprendre : elle revient lentement vers la valeur finale.

Ce résultat peut être justifié. Le système est de classe 2, puisque $T(p)$ présente deux intégrations : l'une due au système, l'autre due à l'action intégrale du régulateur. Pour les systèmes de classe 1, le résultat concernant la précision statique est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

Pour les systèmes de classe 2, on montre que l'on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \varepsilon(t) dt = 0$$

De ce fait l'aire globale entre la courbe et l'asymptote doit être nulle. Cette surface comportant une première portion sous l'asymptote (trame de cou-

leur), la compensation se fera au retour vers la consigne par la portion au-dessus de l'asymptote (trame noire). Il est donc illusoire de tenter d'obtenir un bon amortissement et un temps de réponse satisfaisant : toute diminution de D_1 entraînera un retour encore plus lent vers la consigne.

La solution couramment employée pour résoudre ce dilemme consiste à utiliser une action intégrale intermittente (déjà évoquée au chapitre 14) ou un dispositif d'antisaturation de l'action intégrale qui « bloque » Y_1 à partir d'une certaine valeur ($Y_1 = 100\%$ par exemple).

Dans les deux cas cela revient à diminuer l'aire tramée en couleur, permettant ainsi un plus faible dépassement (chapitre 14, fig. 3) et un meilleur retour à la consigne. Tous les régulateurs modernes disposent d'un tel dispositif : pour les régulateurs Eurotherm de la gamme 900, un dispositif équivalent s'appelle « cutback ».

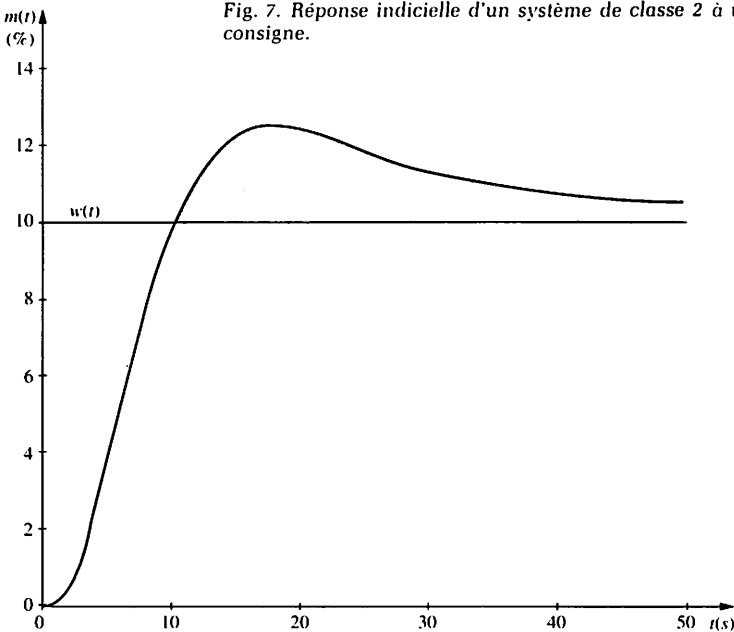


Fig. 7. Réponse indicielle d'un système de classe 2 à un saut de consigne.

Dans les chapitres précédents on a décrit les principales techniques de réglages, pour des systèmes représentables sous forme d'un modèle de Brouda. La méthode de réglage basée sur le critère de Naslin complète cette étude, pour des systèmes dont la fonction de transfert isomorphe est représentable sous la forme rationnelle, dont un exemple est le modèle de Strejc.

Cette méthode présente l'avantage de reposer sur un critère objectif de réglage, fondé sur le choix du premier dépassement D_1 en chaîne fermée. En cela elle diffère des méthodes précédemment évoquées qui ne faisaient que garantir certaines marges de stabilité, les performances dynamiques n'étant pas directement prévisibles.

Les réglages obtenus sont souvent considérés comme « mous », mais ils présentent l'avantage d'aboutir rarement à des saturations de l'organe réglant (voir chapitre 14).

1 Critère d'amortissement de Naslin

Il est directement issu d'une théorie mathématique des polynômes à amortissement réglable. Il peut cependant être facilement appréhendé à partir d'un exemple élémentaire : le système du second ordre, écrit sous forme normalisé (voir Régulation 1, chap. 12).

Cas particulier

La fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$ a une forme polynomiale :

$$F(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad \text{soit : } F(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0} p^2 + \frac{a_1}{a_0} p + 1}$$

Par identification avec un second ordre normalisé :

$$F(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1}$$

on obtient : $\omega_0^2 = \frac{a_0}{a_2}$ et : $\frac{2\lambda}{\omega_0} = \frac{a_1}{a_0}$

On définit alors un rapport d'amortissement de Naslin

$$\alpha = 4\lambda^2 = \frac{a_1^2}{a_2 \cdot a_0} ; \alpha \text{ dépend des trois coefficients du dénominateur}$$

de $F(p)$.

Pour une fonction de transfert en chaîne fermée du second ordre, on constate que ce rapport est directement lié au coefficient d'amortissement λ et donc au premier dépassement de sa réponse indicielle. En particulier $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($D_1 = 5\%$) aboutit à $\alpha = 2$.

Généralisation

Lorsque la fonction de transfert en chaîne fermée peut s'écrire sous la forme :

$$F(p) = \frac{b_M p^M + b_{M-1} p^{M-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec $M \leq N$, par analogie avec le second ordre, on définit $N - 1$ rapports caractéristiques, dits de Naslin :

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_2 \cdot a_0}; \alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_3 \cdot a_1}; \dots; \alpha_{N-1} = \frac{a_{N-1}^2}{a_N \cdot a_{N-2}}$$

La théorie évoquée précédemment permet de dire qu'en attribuant à tous ces rapports α_i une valeur commune α , appelé coefficient d'amortissement de Naslin, on peut régler le premier dépassement D_1 de la réponse indicielle de $F(p)$.

Exemple : La réponse indicielle de la fonction de transfert $F_1(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$ est fournie à la courbe 1 de la figure 1. On constate que les deux rapports caractéristiques de Naslin prennent la valeur commune $\alpha = 2$ et que le premier dépassement vaut environ : $D_1 = 5 \%$.

Influence des termes éventuels du numérateur

La réponse indicielle de la fonction de transfert $F_2(p) = \frac{p + 1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$ est fournie à la courbe 2 de la figure 1. On constate qu'un numérateur différent d'une constante a pour effet de diminuer l'amortissement de la fonction de transfert. Pour obtenir le même premier dépassement il convient donc de corriger la valeur de α en l'augmentant.

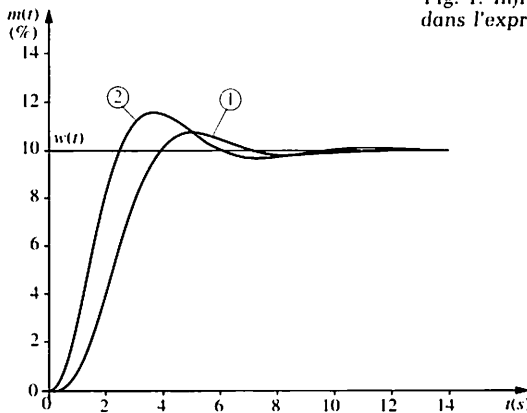


Fig. 1. Influence du numérateur dans l'expression de $F(p)$.

2 Application au réglage

En régulation, le modèle polynomial le plus utilisé est le modèle de Strejc, caractérisé par l'ordre n du système. En cas d'utilisation d'un régulateur de type PID, la fonction de transfert en chaîne fermée peut être exprimée sous forme d'une fraction rationnelle : on peut donc en régler l'amortissement par la méthode précédente.

Il existe des tableaux fournissant le dépassement D_1 , en fonction de l'ordre n du système en chaîne ouverte et de la valeur choisie pour α . Naslin préconise de retenir la formule empirique suivante, valable

$$\text{pour } n > 3 : \lg D_1 (\%) = 4,8 - 2\alpha$$

Pour $\alpha = 2$, elle fournit : $D_1 = 6,3 \%$, tandis que pour $\alpha = 1,7$ on aboutit à : $D_1 = 25 \%$.

Dans la pratique, les performances temporelles des boucles de régulation imposent un choix de α entre 1,8 et 2,2, en fonction de l'amortissement souhaité.

3 Exemple : système naturellement stable

Soit $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$ la fonction de transfert d'un système, avec : $K = 1,2$; $\tau = 12$ s et $n = 3$. On associe ce système à un régulateur PID de structure parallèle de fonction de transfert : $C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$

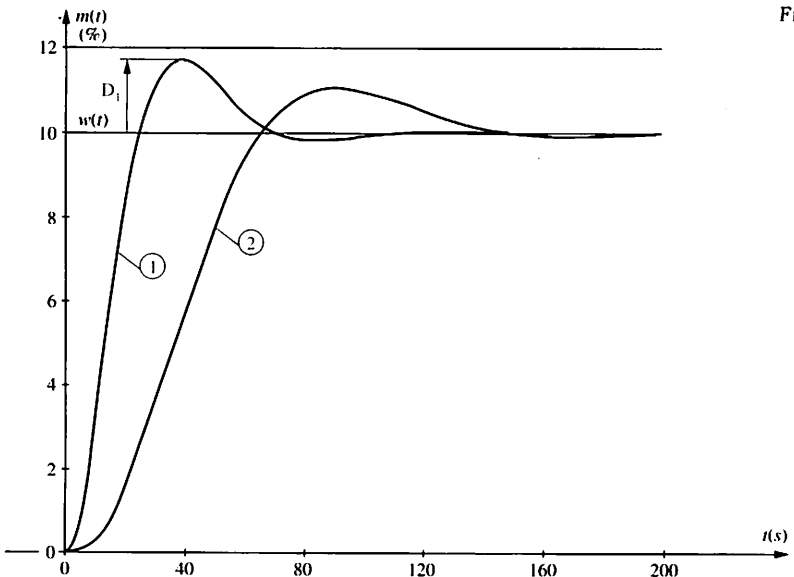


Fig. 2

La fonction de transfert en chaîne fermée $F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle, dont le dénominateur est le polynôme caractéristique :

$$P(p) = 1728T_i p^4 + 432T_i p^3 + (36 + 1,2T_d)T_i p^2 + (1 + 1,2A)T_i p + 1,2$$

Afin d'obtenir un premier dépassement D_1 faible, on adopte $\alpha = 2$ pour les trois rapports caractéristiques α_i . On aboutit alors à un système de 3 équations à 3 inconnues, dont les solutions sont : $A = 2$;

$$T_i = 11,2 \text{ s} \quad \text{et} \quad T_d = 15 \text{ s}.$$

La réponse indicielle, figure 2 courbe 1, permet de constater que $D_1 \approx 17\%$, valeur supérieure à la valeur fournie par la formule empirique, mais conforme aux résultats de Naslin, pour le cas $n = 3$. Cela est dû à l'ordre 3 du système (qui constitue un cas particulier) et à l'influence des termes du numérateur de $F(p)$.

Si on utilise un régulateur PI de structure parallèle, de fonction de transfert : $C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p}$, le polynôme caractéristique devient :

$$P(p) = 1728T_i p^4 + 432T_i p^3 + 36T_i p^2 + (1 + 1,2A)T_i p + 1,2$$

Pour $\alpha = 2$, on aboutit à un système de trois équations à deux inconnues dont les solutions sont : $A = 0,42$; $T_i = 38,4 \text{ s}$.

On constate alors que le 3^e rapport vaut 3 et est donc supérieur à α . La réponse indicielle, figure 2 courbe 2, montre que l'amortissement est légèrement supérieur à celui obtenu lorsque tous les rapports valent α .

4 Mise en œuvre pratique

L'existence de $N - 1$ rapports, pour une fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$ d'ordre N , impose $N - 1$ inconnues pour aboutir à un système d'équations que l'on peut résoudre. Or un régulateur PID ne dispose que de 3 paramètres de réglage. Que devient la méthode lorsque $(N - 1)$ est supérieur à 3 ? Naslin a montré que les résultats restaient approximativement vrais dans la mesure où tous les rapports sont supérieurs ou égaux à la valeur α adoptée. On peut ainsi facilement obtenir un réglage PI d'un système du 3^e ordre.

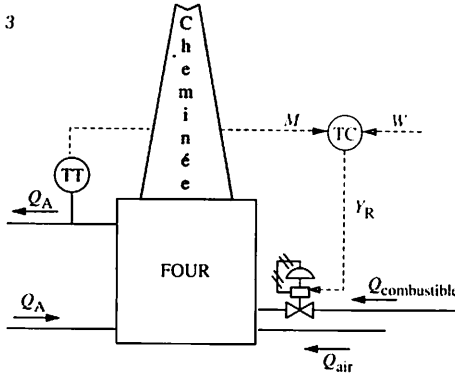
Une autre méthode, abordée dans l'exercice résolu, consiste à obtenir un modèle équivalent du système ayant un ordre plus faible. Cette technique de « dégénérescence » d'ordre est justifiée dans Régulation tome 3.

Enfin des abaques spécialisés permettent la détermination des réglages, pour les valeurs de n telles que : $3 \leq n \leq 8$.

Exercice résolu

Les conditions de fonctionnement spécifiques du four représenté figure 3 imposent un réglage mou, évitant une surchauffe du produit au niveau des brûleurs. Le technicien chargé du réglage décide d'adopter la méthode de Naslin.

Fig. 3



La fonction de transfert réglante est modélisée par :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{0,8}{(1 + 10p)^3}$$

Le régulateur employé a une structure mixte :

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$$

- Déterminer le réglage PID correspondant à $\alpha = 2$.
- Déterminer le réglage PI correspondant à $\alpha = 2$.
- « Réduire » la fonction $H(p)$ à un système du 2^e ordre.
- Déterminer le nouveau réglage PI correspondant à $\alpha = 2$.
- Estimer les performances en chaîne fermée des trois réglages, à partir de l'analyse harmonique dans le plan de Black.

Solution :

1. Réglage PID

Le dénominateur de $F(p)$ peut s'écrire :

$$P(p) = (1 + 10p)^3 T_i p + 0,8A(1 + T_i p + T_d \cdot T_i p^2)$$

$$P(p) = 1000T_i p^4 + 300T_i p^3 + (30 + 0,8AT_d) T_i p^2 + (1 + 0,8A) T_i p + 0,8A$$

L'adoption de la valeur $\alpha = 2$ pour les trois rapports caractéristiques aboutit à :

$$\alpha_3 = 2 \Rightarrow 30 + AT_d = 45 ;$$

$$\alpha_2 = 2 \Rightarrow \boxed{A = 3} ;$$

$$\alpha_3 = 2 \Rightarrow \boxed{T_d = 6,3 \text{ s}} ;$$

$$\alpha_1 = 2 \Rightarrow \boxed{T_i = 18,8 \text{ s}}$$

La réponse indicielle correspond à la courbe 1 de la figure 4.

2. Réglage PI

On fixe $T_d = 0$ dans les expressions des rapports α_i

$$\alpha_2 = 2 \Rightarrow \boxed{A = 0,625} ;$$

$$\alpha_1 = 2 \Rightarrow \boxed{T_i = 13,3 \text{ s}}$$

On remarque que le rapport $\alpha_3 = 3$ satisfait à la condition énoncée au paragraphe 4 ($\alpha_3 > 2$) : cela entraîne une diminution de D_1 .

La valeur faible de l'amplification conduit à un temps de réponse élevé. Ces résultats sont confirmés par la courbe 2 (fig. 4).

3. Réduction de l'ordre du modèle

On a vu dans les chapitres 2 et 3 que l'on peut écrire

$$H(p) = \frac{0,8}{(1 + 10p)^3} \approx \frac{0,8}{(1 + \tau p)^2}$$

en respectant l'équivalence suivante : $n_1 \tau_1 = n_2 \tau_2$, soit : $3 \times 10 = 2 \cdot \tau$ et donc :

$$\boxed{H(p) \approx \frac{0,8}{(1 + 15p)^2}}$$

4. Réglage PI du nouveau modèle

Le dénominateur de $F(p)$ peut alors s'écrire :

$$P(p) = (1 + 15p)^2 T_i p + 0,8A (1 + T_i p)$$

$$= 225T_i p^3 + 30T_i p^2 + (1 + 0,8A)T_i p + 0,8A$$

$$\alpha_2 = 2 \Rightarrow \boxed{A = 1,25};$$

$$\alpha_1 = 2 \Rightarrow \boxed{T_i = 15 \text{ s}}$$

La réponse indicielle de la courbe 3 (fig. 4) valide le concept de réduction du modèle.

5. Performances en chaîne fermée

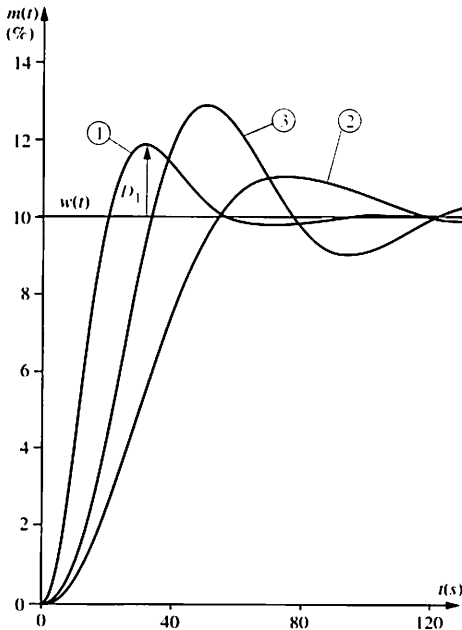
La figure 5 regroupe les lieux de Black, pour les trois cas précédents. Les performances en chaîne fermée peuvent être estimées, par comparaison avec un second ordre équivalent.

$$Q_{1 \text{ dB}} = 1,5 \text{ dB } (Q_1 = 1,19);$$

$$Q_{2 \text{ dB}} = 0,25 \text{ dB } (Q_2 = 1,03);$$

$$Q_{3 \text{ dB}} = 3 \text{ dB } (Q_3 = 1,4)$$

Fig. 4



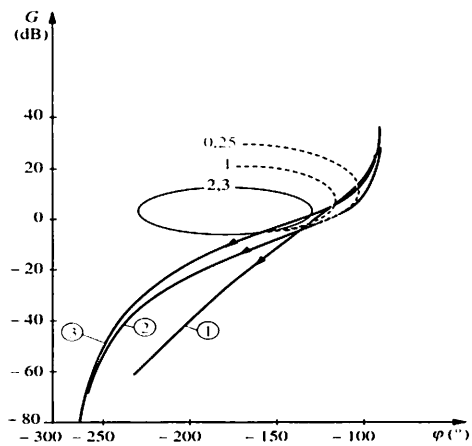
Les formules habituelles (voir annexe page 127) liant λ et Q , ainsi que λ et D_1 , pour un second ordre, conduisent aux résultats :

$$D_{1,1} = 18 \% ; D_{1,2} = 8,9 \% ; D_{1,3} = 26,7 \%$$

Ces valeurs sont conformes aux courbes tracées au simulateur.

Sur l'abaque de Black, les courbes 2 et 3 sont voisines et confirment également la validité de la transformation évoquée à la question 3. On retiendra cependant que la réduction de l'ordre du système par ce moyen aboutit à diminuer légèrement l'amortissement. Il est alors possible de compenser par une valeur de α supérieure. La diminution de l'ordre d'un système, dans un but de simplification des calculs, sera abordé en détail dans Régulation tome 3.

Fig. 5



Les systèmes industriels de type intégrateur (classe ≥ 1) constituent une complication particulière pour le technicien de régulation. L'identification présente de nombreux obstacles, notamment si elle est réalisée en chaîne ouverte. Le réglage de tels systèmes décrits par un modèle de Broïda (voir chap. 18) soulève des difficultés spécifiques de ces dispositifs.

Le critère de Naslin, appliqué à un système intégrateur, permet de montrer le caractère général de celui-ci et offre un réglage de mise en œuvre rapide.

On rappelle que la fonction de transfert doit être représentable sous la forme d'une fraction rationnelle, ce qui conduit à utiliser le modèle de

$$\text{Strejc } H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^n}.$$

1 Réglage à partir de l'identification en chaîne ouverte

La mise en œuvre est analogue à celle évoquée dans le chapitre précédent et ne soulève aucune difficulté particulière a priori. A partir de l'expression de la fonction de transfert $H(p)$ du système en chaîne ouverte, on calcule la fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée, compte tenu de la structure du régulateur.

A partir des coefficients du polynôme caractéristique, on calcule les rapports caractéristiques.

Exemple : Pour un système admettant pour fonction de transfert réglante $H(p) = \frac{0,04}{p(1 + 10p)}$ on choisit un régulateur de structure mixte de fonction de transfert :

$$C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(p) = 25(1 + 10p)T_i p^2 + A(1 + T_i p + T_d \cdot T_i p^2) \\ \text{ou } P(p) = 250T_i p^3 + (25 + AT_d)T_i p^2 + AT_i p + A$$

On obtient donc deux rapports $\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_2 \cdot a_0}$ et $\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_3 \cdot a_1}$. Cela permet de

conclure qu'une structure PID peut présenter des difficultés mathématiques (3 inconnues), tandis qu'une structure PI est suffisante et aboutit à un système simple à résoudre.

Pour une valeur $\alpha = 2$ on trouve :

$$A = 1,25$$

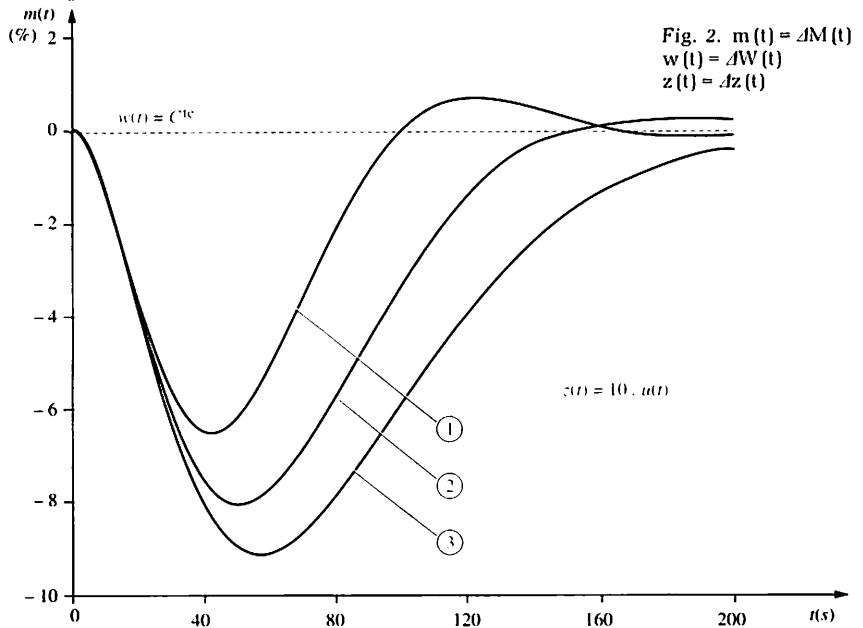
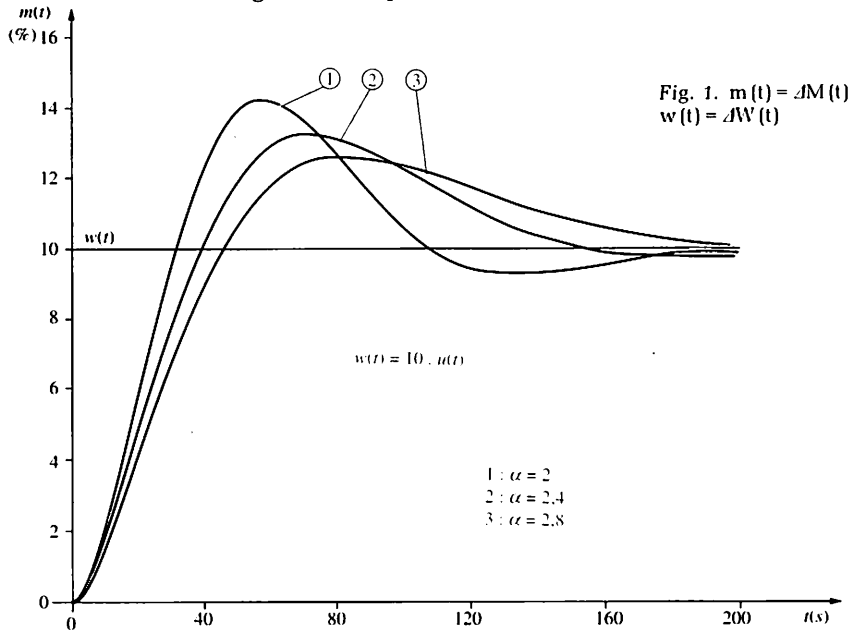
et

$$T_i = 40 \text{ s}$$

Choix de la valeur de α

Les remarques du chapitre 18 montrent qu'une tentative de minimisation du premier dépassement conduit à un temps de réponse trop important. Il est donc illusoire de choisir une valeur trop grande

pour α . Pour les trois valeurs $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2,4$ et $\alpha_3 = 2,8$ les réponses à un échelon de consigne sont représentées à la figure 1.



Comportement en régulation de maintien

Pour une fonction de transfert réglante $H_z(p) = -H(p)$, les réponses à un échelon de perturbation $z(t) = 10u(t)$ sont représentées figure 2, pour les trois valeurs de α précédentes. On constate qu'un réglage «dur», tel que le numéro 1, peut être considéré comme satisfaisant en régulation de maintien. De nouveau apparaît la difficulté d'obtenir un réglage optimal en régulation de maintien et en asservissement.

L'allure de l'évolution de la mesure peut surprendre puisque le phénomène de «compensation» des surfaces évoqué au chapitre 18 ne semble plus être réalisé. En fait, si un système possède deux fonctions $H(p)$ et $H_z(p)$ de classe 1, il présente un écart statique en régulation P, pour un échelon de perturbation (problème évoqué déjà au chapitre 22, Régulation 1). Une régulation de maintien avec une précision statique parfaite nécessite donc une action intégrale dans le régulateur.

L'hypothèse $H_z(p)$ et $H(p)$ de même classe est courante dans la pratique et se retrouve notamment dans les régulations de niveau, la perturbation étant la commande de soutirage.

Tableau de réglage

Pour un régulateur PID de structure mixte fonctionnant en régulation de maintien, et pour une valeur $\alpha = 2$, on peut établir le tableau de réglage suivant :

Régulation paramètres	PI	PID
$X_p \%$	$200n\kappa\tau$	$200n \cdot \kappa\tau \frac{(n-1)^2}{n^2}$
T_i	$4n\tau$	$4(n-1)\tau$
T_d		$2 \frac{n-1}{n} \tau$

On rappelle que n représente l'ordre de $H(p)$, fonction de transfert réglante du système et que les formules précédentes suppose n supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$).

2 Réglage à partir de l'identification en chaîne fermée

Elle a été décrite aux chapitres 1 et 3. On en rappelle les résultats essentiels.

La fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée est identifiée, sous la forme d'un modèle de Strejc : $F(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$ avec $K = 1$ consé-

quence d'une précision statique parfaite. Or $H(p) = \frac{F(p)}{C(p) \cdot [1 - F(p)]}$

Le régulateur étant à action proportionnelle seule, on peut écrire :

$$C(p) = A = \frac{100}{X_{p1}}. \text{ On obtient donc : } H(p) = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{(1 + \tau p)^n - 1}$$

L'application du critère de Naslin à cette expression de $H(p)$ permet d'obtenir un réglage en fonction de $F(p)$, fonction de transfert en chaîne fermée plus facile à obtenir.

Pour un régulateur PID de structure mixte et pour une valeur $\alpha = 2$, on peut établir le tableau de réglage suivant :

Régulation paramètres	PI	PID
$X_p \%$	$\frac{n-1}{n} X_{p1}$	$\frac{(n-2)^2}{n(n-1)} X_{p1}$
T_i	$2(n-1)\tau$	$2(n-2)\tau$
T_d		$\frac{n-2}{n-1} \cdot \tau$

On précise qu'ici n représente l'ordre de $F(p)$, fonction de transfert en chaîne fermée et que les formules ci-dessus supposent n supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$) en régulation PID.

3 Conclusions sur la méthode de Naslin

Cette technique peut apparaître comme relativement sophistiquée, en particulier au niveau des calculs mis en jeu. De plus on peut lui reprocher de n'être valable que pour des procédés à fonction de transfert polynomiale, ce qui exclut les dispositifs physiques comportant un temps mort naturel.

En ce qui concerne le premier point, il est important de signaler que certaines méthodes modernes d'élaboration de correcteurs spécifiques font appel à la notion de polynôme d'amortissement et qu'il est important d'en connaître le principe.

Pour le second point, on peut montrer, moyennant une approximation minime, qu'il est toujours possible de transformer un modèle de Broïda en un modèle de Strejc équivalent. Lorsque cette transformation n'est pas possible, on constate que l'on quitte le domaine d'utilisation des régulateurs PID et que des correcteurs spécifiques sont mis en œuvre.

Enfin le critère de Naslin peut être considéré comme le complément « naturel » des critères algébriques de stabilité, puisqu'ils sont aussi basés sur l'usage du polynôme caractéristique. La seule véritable critique que l'on puisse faire au réglage de Naslin est d'aboutir souvent (voir exercice résolu du chapitre précédent) à des valeurs importantes de l'action dérivée.

Exercice résolu

On se propose de régler un système physique de classe 1 à l'aide d'un régulateur de structure mixte. Une identification préalable du système en chaîne ouverte a permis de déterminer les fonctions de transfert réglante et perturbatrice, soit :

$$H(p) = \frac{1}{25p(1+10p)^2}$$

$$\text{et : } H_z(p) = \frac{1}{25p(1+10p)}$$

On désire déterminer les paramètres de réglage par la méthode de Naslin, pour $\alpha = 2$.

Identifiée en chaîne fermée en régulation P, avec $X_{p1} = 250\%$, la réponse indicielle a fourni les indications suivantes : $T_u = 16$ s ; $T_a = 77$ s (voir chapitre 2).

1. Déterminer le réglage PID.
2. Identifier la fonction de transfert $F(p)$ sous forme d'un modèle de Strejc, à partir de sa réponse indicielle.
3. Déterminer le réglage PID correspondant.
4. Comparer les deux réglages.
5. Analyser les réponses obtenues sur simulateur, pour un échelon de consigne puis un échelon de perturbation, autour du point de fonctionnement suivant : $M_0 = W_0 = 50\%$; $Y_{R0} = Z_0 = 50\%$.

Solution :

1. Réglage PID à partir de $H(p)$

Pour $\alpha = 2$ les paramètres se déduisent du tableau du paragraphe 1. Pour $n = 2$, on obtient :

$$X_p = 200n\kappa\tau \frac{(n-1)^2}{n^2} \Rightarrow X_p = 40\% ;$$

$$T_i = 4(n-1)\tau \Rightarrow T_i = 40 \text{ s} ;$$

$$T_d = 2 \frac{n-1}{n\tau} \tau \Rightarrow T_d = 10 \text{ s} .$$

2. Identification

En utilisant le nomogramme en annexe page 122, on relève :

$$\frac{T_u}{T_a} = 0,208 \Rightarrow n \approx 3 \text{ et } \tau \approx 20 \text{ s} .$$

$$\text{d'où : } F(p) \approx \frac{1}{(1+20p)^3} .$$

3. Réglage PID à partir du modèle de Strejc de $F(p)$

Les coefficients, issus des résultats du paragraphe 2, sont :

$$X_p = \frac{(n-2)^2}{n(n-1)} X_{p1} \Rightarrow X_p = 41\% ;$$

$$T_i = 2(n-2)\tau \Rightarrow T_i = 40 \text{ s} ;$$

$$T_d = \frac{n-2}{n-1} \tau \Rightarrow T_d = 10 \text{ s} .$$

4. Comparaison

Ces résultats pratiquement identiques aux précédents valident les deux méthodes de réglage et confirment l'intérêt de l'identification en chaîne fermée.

5. Analyse des réponses

La réponse de la boucle de régulation à un échelon de consigne est fournie figure 3, ainsi que l'évolution de la variation $y_R(t)$ du signal réglant.

On constate un dépassement important dû à la valeur de α et à l'influence des termes du numérateur de $F(p)$, termes qui n'apparaissent pas dans le modèle de Strejc obtenu à la question 2.

D'une part la simulation est réalisée avec un signal réglant Y_R limité à 0 et 100 %, soit $\pm 50\%$ par rapport à Y_{R0} . D'autre part l'action dérivée sur l'écart ε est responsable de la variation brutale sur Y_R , au niveau du repère 1. Une action dérivée sur la mesure permet d'éviter cette saturation.

La réponse à un échelon de perturbation, fournie figure 4, confirme qu'un réglage dur est souvent souhaitable en régulation de maintien.

On retiendra donc que le choix optimal de la valeur du coefficient d'amortissement α doit se faire essentiellement en fonction du mode de fonctionnement prévu pour la boucle : régulation ou asservissement.

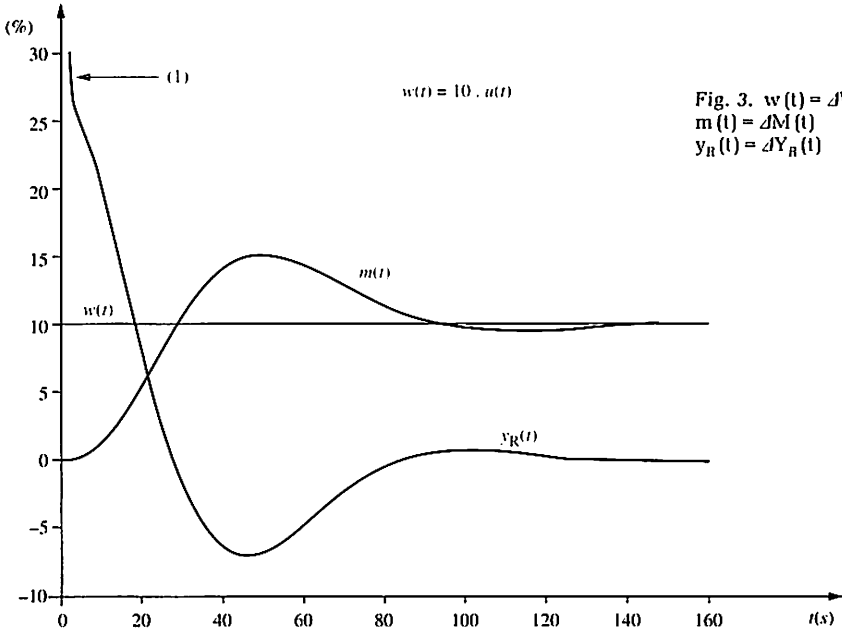


Fig. 3. $w(t) = \mathcal{M}(t)$
 $m(t) = \mathcal{M}(t)$
 $y_R(t) = \mathcal{Y}_R(t)$

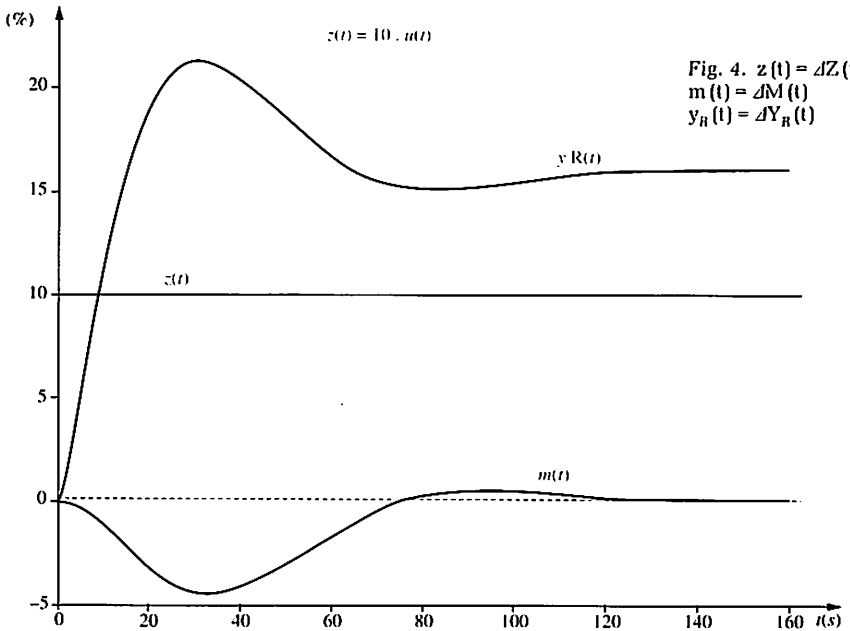
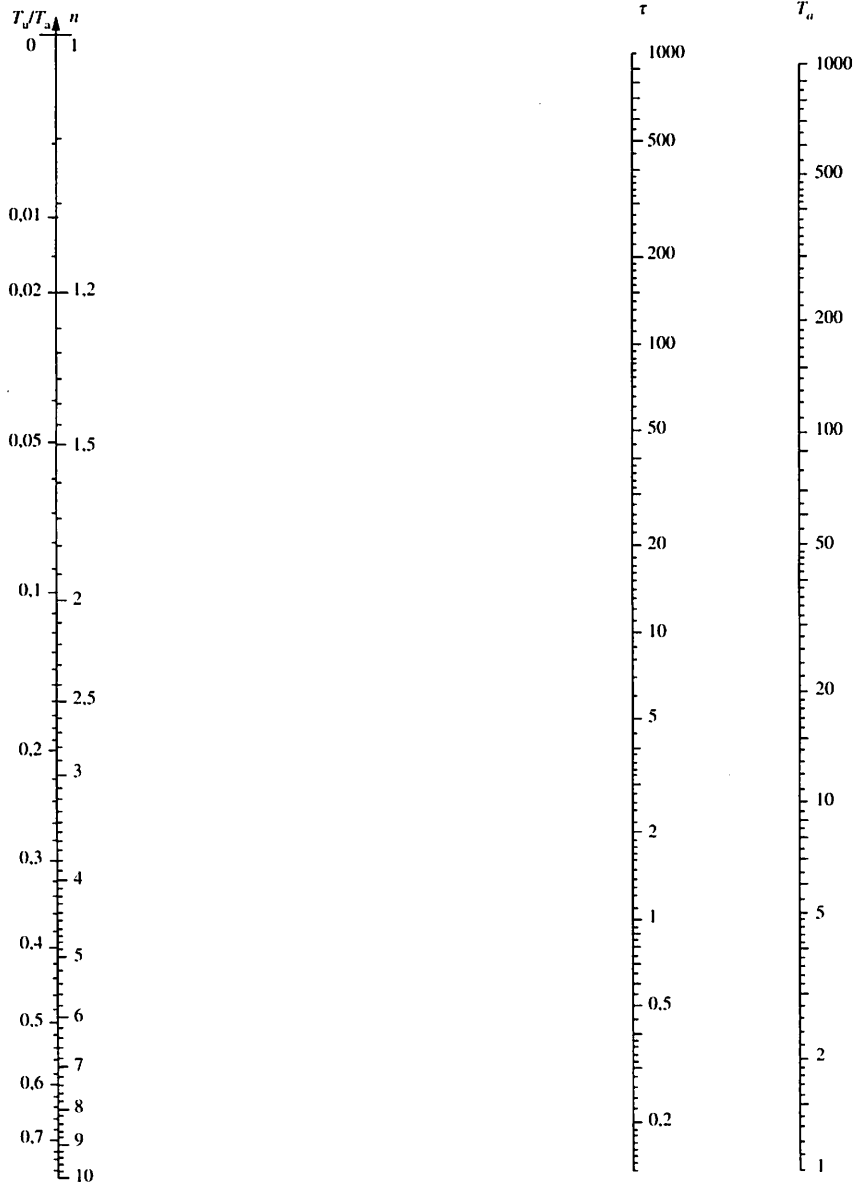
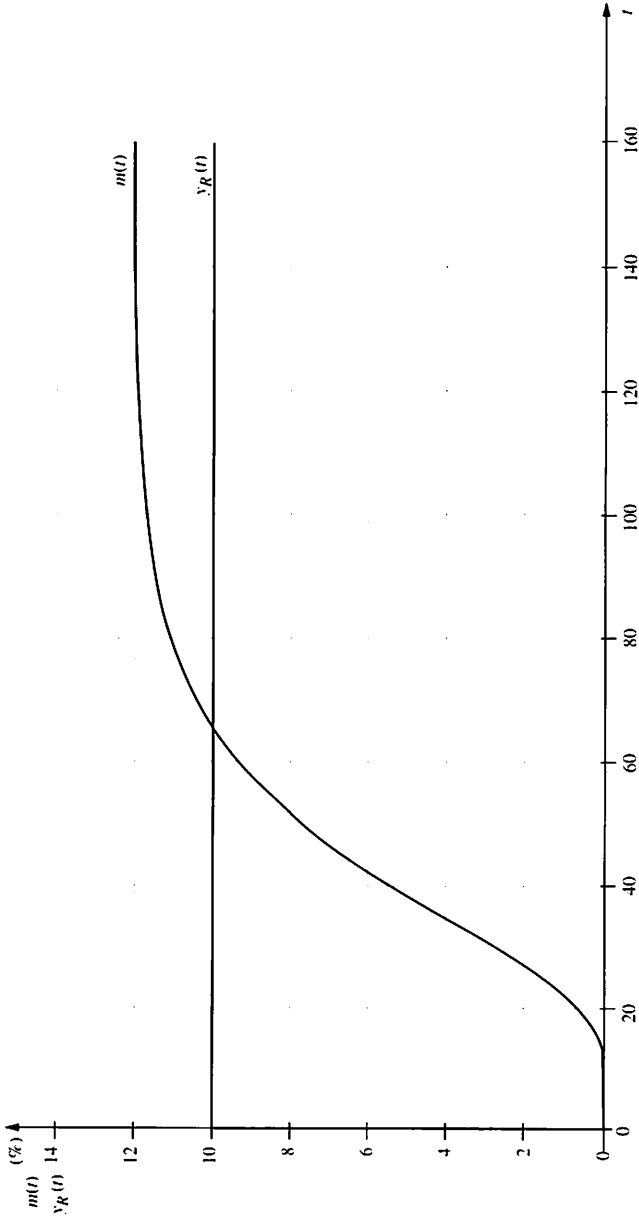


Fig. 4. $z(t) = \mathcal{M}(t)$
 $m(t) = \mathcal{M}(t)$
 $y_R(t) = \mathcal{Y}_R(t)$

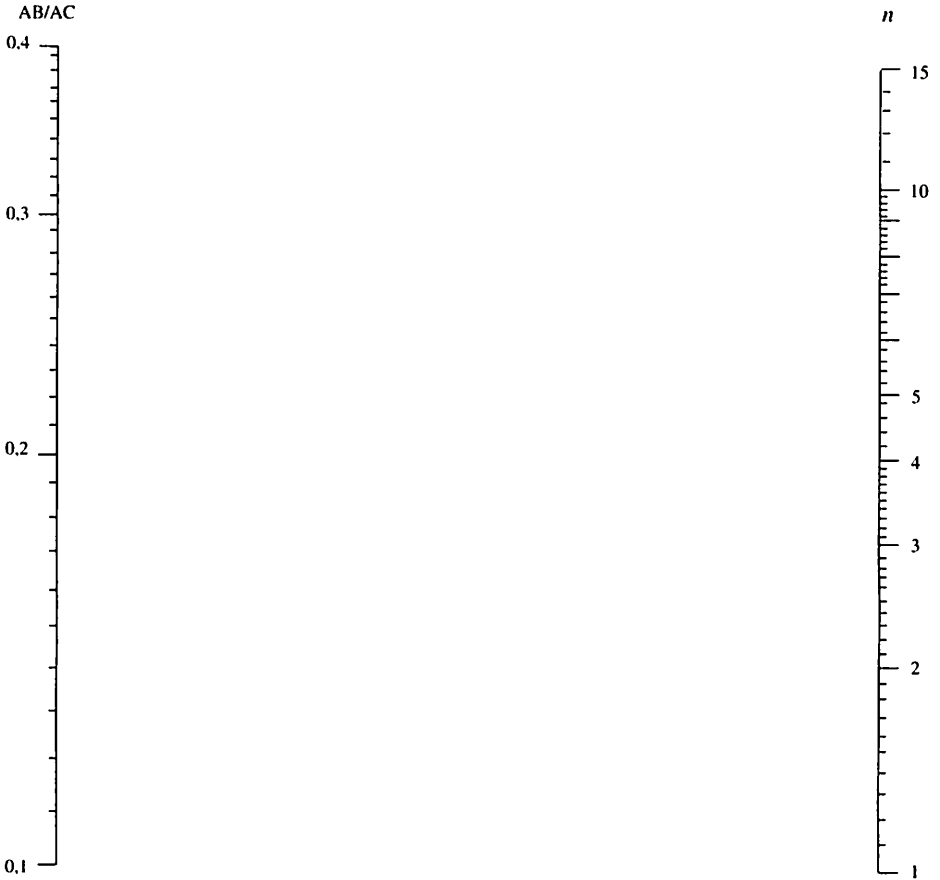
1 Nomogramme : système naturellement stable en chaîne ouverte



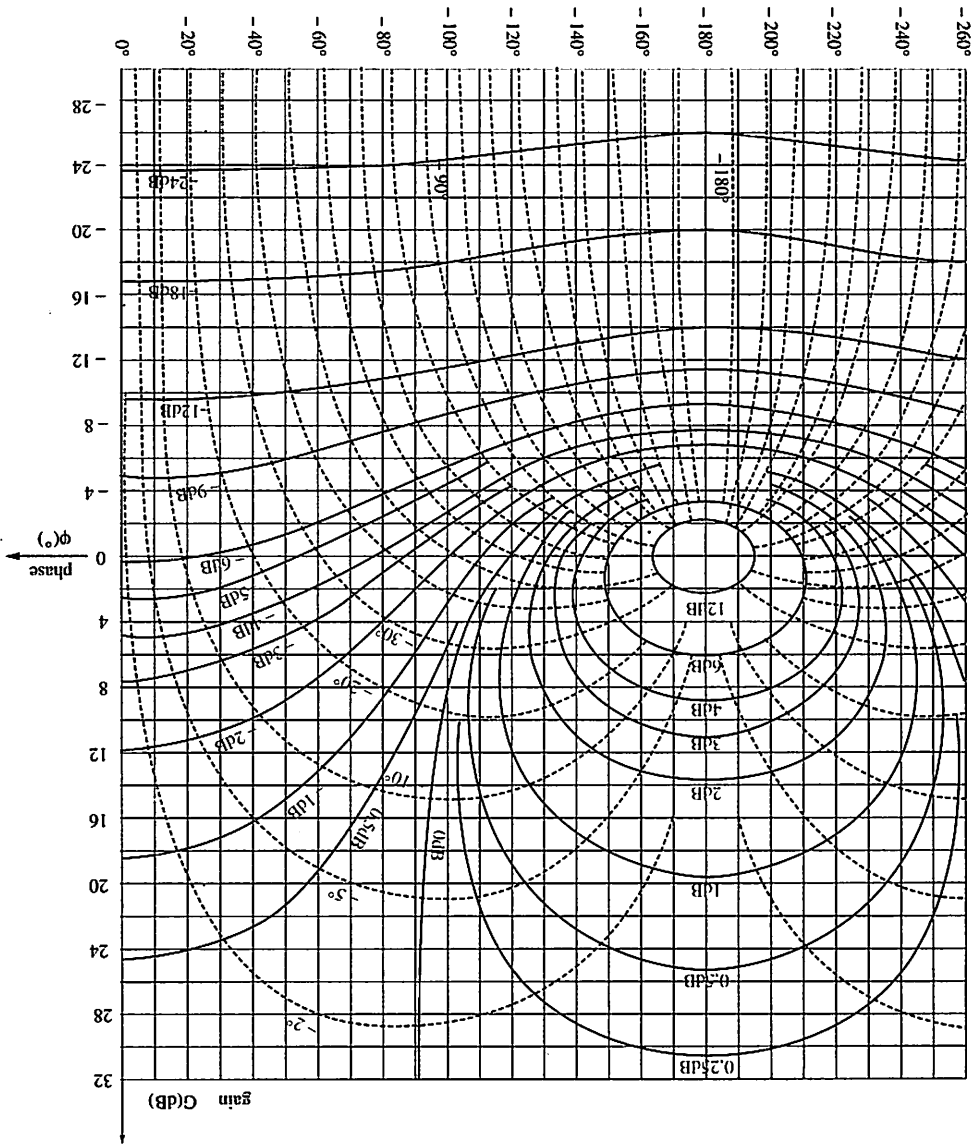
2 Réponse indicielle d'un système naturellement stable



3 Nomogramme : système intégrateur en chaîne ouverte



4 Abaque de Nichols



Principaux symboles utilisés

Procédé :

ρ : masse volumique d'un fluide
 S : surface d'un bac
 Q : débit (ex. : Q_e débit entrant, Q_v débit volumique, Q_m débit massique)

Système :

τ : constante de temps
 n : ordre d'un système
 K : gain statique d'un système stable
 M : signal de mesure
 Z : signal perturbateur principal

Second ordre :

λ : coefficient d'amortissement
 ω : pulsation (ex. : ω_0 pulsation propre; ω_R pulsation de résonance; ω_c ou ω_0 pulsation de coupure)

Régulateur :

ε : signal d'écart mesure/consigne
 W : signal consigne (ex. : W_e consigne externe)
 Y_R : signal réglant (de sortie) d'un régulateur
 A : amplification d'un régulateur
 T_i : constante de temps d'action intégrale
 K_p : coefficient d'action proportionnelle ($K_p = A$)
 K_d : coefficient d'action dérivée (T_d ou $A \cdot T_d$ suivant la structure du régulateur)

Fonction de transfert :

G : gain logarithmique
 $H(p)$: fonction de transfert isomorphe du procédé seul
 $C(p)$: fonction de transfert du régulateur
 $F(p)$: fonction de transfert en chaîne fermée
 $P(p)$: polynôme caractéristique. Numérateur de la fraction rationnelle $1 + T(p)$

Performances :

D_1 : premier dépassement

Signaux :

$u(t)$: échelon d'amplitude unitaire

θ : température

G : grandeur (ex. : G_R grandeur réglante; G_I grandeur incidente)

T : temps mort (ou temps de retard)

k : gain dynamique d'un système intégrateur

$m = \Delta M$: petite variation de mesure
 $z = \Delta Z$: petite variation de Z

Q : facteur de résonance

$w = \Delta W$: petite variation de consigne
 $y_R = \Delta Y_R$: petite variation de signal réglant

X_p : bande proportionnelle ($X_p = 100/A$)

T_d : constante de temps d'action dérivée

K_i : coefficient d'action intégrale ($1/T_i$ ou A/T_i suivant la structure du régulateur)

φ : phase ou déphasage (degrés ou radians)

$H(j\omega)$: fonction de transfert isochrone du procédé seul

$T(p) = C(p) \cdot H(p)$: fonction de transfert en chaîne ouverte

T_R : temps de réponse à $\pm 5\%$

$\delta(t)$: dérivée de $u(t)$

Principaux résultats du tome 1

Système du 1^{er} ordre normalisé

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t); \quad H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}; \quad T_R = 3\tau$$

Système du 2^e ordre normalisé

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t); \quad H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1}$$

$$T_R \simeq 3\tau_p = \frac{3}{\lambda \omega_0}$$

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda^2}$$

$$Q = \frac{1}{2\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}}$$

$$\lambda^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{2}$$

$$D_1 = 100e^{\frac{-\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}}$$

$$\lambda = \frac{\ln\left(\frac{100}{D_1}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{100}{D_1}\right)}}$$

Autres systèmes

- Modèles de Broïda : système stable $H(p) = K \frac{e^{-T_p}}{1 + \tau p}$

système intégrateur $H(p) = k \frac{e^{-T_p}}{p}$

- Modèles de Strejc : système stable $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$

système intégrateur $H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^n}$

Régulateurs PID

- Structure série $C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) (1 + T_d \cdot p)$

- Structure mixte $C(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p\right)$

- Structure parallèle $C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p$

Fonctions de transfert en chaîne fermée

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \quad F_z(p) = \pm \frac{H_z(p)}{1 + T(p)}$$

Édition : Isabelle Hannebicque
Coordination artistique : Danielle Capellazzi
Maquette : Studio Primart

N° d'Éditeur : 10111933 - Mai 2004
Imprimerie Chirat, 42540 Saint-Just-la-Pendue - N° 1236
Imprimé en France