

C. SERMONDADE
A. TOUSSAINT
sous la direction de
R. MÉRAT & R. MOREAU

CONIL JEAN-PIERRE
18 LES NVX HORIZONS
78990 ELANCOURT
JP.CONIL@FREESURF.FR

Régulation

Tome 1

Régulation élémentaire,
notions de base,
éléments de régulation

BTS

NATHAN

Sommaire

1. But de la régulation	4
2. Moyens de la régulation. Observation d'un procédé	10
3. Moyens de la régulation. Commande d'un procédé	16
4. Terminologie. Représentation normalisée	20
5. Schéma fonctionnel	26
6. Caractéristiques statiques d'un système	28
7. Relevé expérimental des caractéristiques statiques	32
8. Dynamique d'un système	36
9. Système du 1 ^{er} ordre : 1. Étude temporelle	42
10. Système du 1 ^{er} ordre : 2. Fonctions de transfert	48
11. Système du 2 ^e ordre : 1. Étude temporelle	52
12. Système du 2 ^e ordre : 2. Fonctions de transfert	56
13. Autres modèles : 1. Systèmes stables	62
14. Autres modèles : 2. Systèmes instables	70
15. Systèmes commandés en chaîne fermée : 1. Étude statique 1	74
16. Systèmes commandés en chaîne fermée : 2. Étude statique 2	76
17. Systèmes commandés en chaîne fermée : 3. Étude dynamique 1	82
18. Systèmes commandés en chaîne fermée : 4. Étude dynamique 2	86
19. Systèmes commandés en chaîne fermée : 5. Étude dynamique 3	90
20. Structures des régulateurs	98
21. Technologie des régulateurs	104
22. Boucle de régulation. Fonctions de transfert	108
23. Nombres complexes. Utilisation	114
24. Transformée de Laplace. Utilisation	120

Ce livre s'adresse aux techniciens de la régulation qui ont besoin de disposer rapidement d'informations théoriques ou pratiques. Il est plus généralement destiné à tous ceux qui souhaitent se familiariser avec la régulation, sans se limiter aux asservissements. Ce livre est le premier d'une série qui présentera l'ensemble de la régulation et du contrôle-commande des installations industrielles.

Utilisant un formalisme mathématique allégé, il regroupe les résultats essentiels de la régulation : à ce titre, il peut constituer un aide mémoire très utile aux étudiants et aux auditeurs de la formation permanente.

Le technicien ou l'étudiant, qui désire retrouver un résultat ou une explication, est immédiatement dirigé par la table des matières vers le sujet qui l'intéresse. Pour celui qui désire bien maîtriser les lois de la régulation, les difficultés sont réparties entre des chapitres courts, qui constituent une suite d'étapes simples. Après chacune d'elles les connaissances peuvent être contrôlées et confortées avant de passer à la suivante. Cette démarche qui apporte simultanément progressivité et assurance en soi sera certainement appréciée de tous ceux que l'étude des sciences intéresse.

La présentation retenue doit permettre un accès facile à l'information recherchée et un apprentissage aisé. En effet, à chaque notion importante correspond un chapitre. Le lecteur y trouve un thème accompagné d'exemples. La plupart des chapitres sont accompagnés d'exercices avec leurs solutions (proposées pour des échelles de temps réduites pour simplifier). Le contenu de chaque chapitre reste toujours simple, les auteurs ayant choisi de privilégier l'observation et l'exploitation d'expériences personnelles plutôt que l'exposé de théories et le recours systématique aux mathématiques.

Les connaissances acquises, indépendantes des technologies en perpétuelle évolution, peuvent suffire pour une bonne maîtrise des nombreux équipements de régulation, dans les domaines les plus variés.

Elles peuvent permettre aux techniciens de conception, d'installation, de maintenance et de conduite de compléter des connaissances parfois empiriques, que les contraintes modernes de qualité de production imposent de réactualiser.

1 Définition d'un procédé

Pour le technicien de la régulation, un procédé de production au sens large est un ensemble complexe d'appareillages fonctionnant dans un but précis : l'obtention de produits ou de services. Son fonctionnement dépend d'un certain nombre de paramètres qui, avec des poids variables, influent sur le but visé. Le mot « procédé » devient, en régulation, un terme générique utilisé pour tout dispositif.

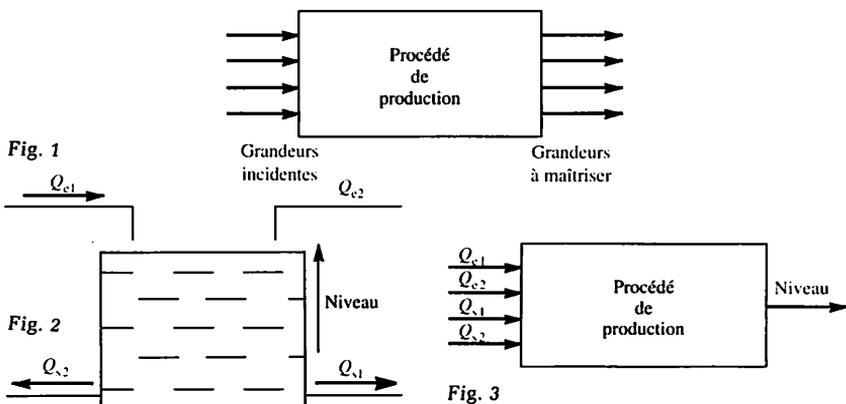
L'objectif global d'un procédé est généralement caractérisé au moyen d'une ou plusieurs grandeurs mesurables dont la maîtrise permet d'atteindre le but recherché.

Avant de vouloir réaliser la régulation d'un procédé, il faut donc commencer par faire l'inventaire de toutes les grandeurs à maîtriser. Il faut ensuite rechercher toutes les grandeurs incidentes, c'est-à-dire susceptibles de modifier les grandeurs à maîtriser (fig. 1).

Stockage de produit liquide

Ce stockage est réalisé dans un bac de section constante (fig. 2). Le produit arrive par deux canalisations dont les débits (variables au cours du temps) sont appelés Q_{e1} et Q_{e2} . Il est évacué par deux autres canalisations dont les débits (variables également) sont Q_{s1} et Q_{s2} .

Cet ensemble constitue un procédé élémentaire dont le but final est de stocker temporairement un certain volume de produit, de façon à



satisfaire instantanément une demande. On doit maîtriser un volume de produit minimal dans ce bac. Avec un bac à section constante, une seule grandeur est à maîtriser : le niveau de produit dans le bac.

Les grandeurs incidentes sont donc les débits d'entrée et de sortie : Q_{e1} , Q_{e2} , Q_{s1} , Q_{s2} (fig. 3).

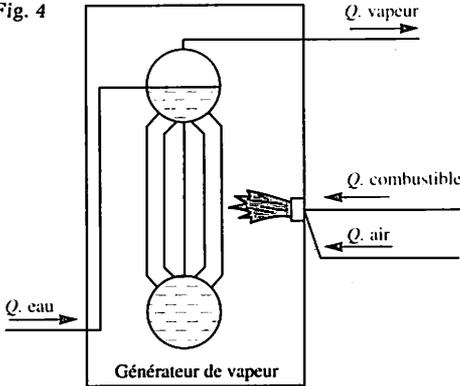
Générateur de vapeur (chaudière)

La plupart des réactions chimiques industrielles nécessitent d'être réalisées à des températures élevées. Il faut donc disposer d'un fluide caloporteur permettant de chauffer les réacteurs chimiques. Une

chaudière (fig. 4) constitue donc, au sens de la régulation, un procédé dont le but final est la production de vapeur d'eau avec des caractéristiques énergétiques constantes.

La contrainte énergétique impose de maîtriser deux grandeurs : la pression et la température de la vapeur fournie aux utilisateurs.

Fig. 4



Les grandeurs incidentes sont notamment les débits des fluides : Q_{vapeur} , Q_{eau} , $Q_{\text{combustible}}$, Q_{air} , la pression au foyer, le niveau d'eau dans le ballon, ...

Moteur électrique à excitation indépendante

Dans les installations industrielles, les transferts de matières nécessitent des moteurs électriques pouvant être des machines à courant continu (commande de laminoirs...).

Le but final de tels procédés est d'entraîner le rotor des moteurs à une vitesse de rotation désirée. La seule grandeur à maîtriser est ici la vitesse de rotation $\Omega(t)$.

Les grandeurs incidentes sont : la tension U d'alimentation de l'induit, l'intensité j du courant d'excitation, le moment du couple résistant de la charge (fig. 5).

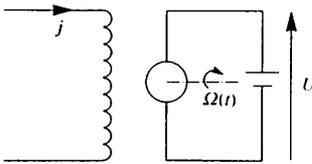


Fig. 5

2 Régulation

La régulation a pour ambition de garantir un fonctionnement du procédé conforme à l'objectif final, en imposant des ajustements, suivant des lois d'évolution choisies par le concepteur, lorsqu'un écart par rapport à cet objectif est décelé.

Pour atteindre ce résultat, que la régulation soit *manuelle*, c'est-à-dire réalisée par un opérateur humain, ou qu'elle soit *automatique*, c'est-à-dire réalisée par un dispositif autonome, trois étapes essentielles peuvent être distinguées :

- l'observation des grandeurs à maîtriser ;
- la détection éventuelle d'un écart par rapport à l'objectif (étape de réflexion) ;
- l'action sur une ou plusieurs grandeurs incidentes.

La suite de ces trois étapes définit une chaîne dite de régulation.

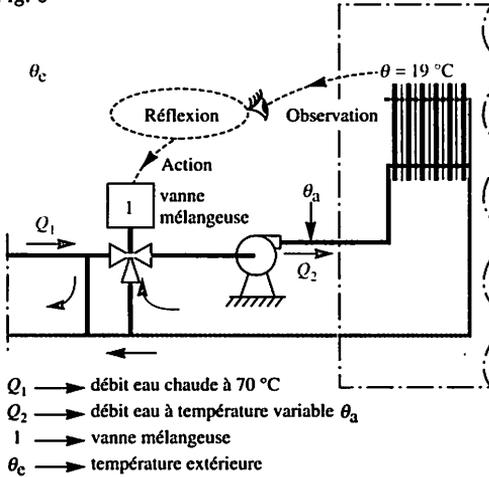
Remarques : Du fait de l'évolution des conditions économiques d'exploitation, les spécifications des produits sont de plus en plus précises et le contrôle et la régulation interviennent aussi bien en cours de fabrication qu'à son terme.

Au-delà des problèmes de productivité, la régulation doit assurer :
 - la sécurité des personnes et du matériel ;
 - la qualité du produit ou du service.

Régulation de température

Le confort physiologique dans un local d'habitation nécessite notamment un contrôle de sa température ; celle-ci doit rester sensiblement constante et ne pas dépasser la valeur des normes en vigueur.

Fig. 6



Chaîne fermée

Le but final du procédé est de maintenir la température d'une pièce à 19 °C. Ce résultat doit être obtenu par action sur une vanne mélangeuse à trois voies (fig. 6). Grâce à cette dernière, en mélangeant de l'eau chaude (provenant d'une chaudière) et de l'eau froide revenant du radiateur, on modifie l'apport calorifique et l'on fait évoluer la température θ_a de l'eau dans le radiateur (la pompe permet d'obtenir un débit Q_2 constant).

La régulation peut être décrite en distinguant les trois phases suivantes :

- observation : la température θ de la pièce est mesurée par le dispositif d'observation ;
- détection de l'écart éventuel et réflexion sur les lois d'évolution à mettre en œuvre ;
- action : ouverture de la vanne (1) modifiant θ_a et donc ultérieurement θ .

La chaîne ainsi constituée est dite *fermée* car toute action sur la vanne (1) entraîne une variation de la grandeur observée θ . Réciproquement, toute détection d'une variation de θ (due à des grandeurs incidentes) entraîne une action sur la vanne.

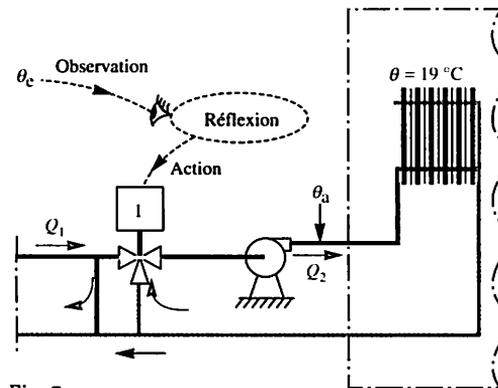


Fig. 7

Chaîne ouverte

Le but final est le même que dans l'exemple précédent (fig. 7). Connaissant les caractéristiques de la pièce (volume, coefficient d'isolation, situation) il est possible d'estimer le débit calorifique (énergie calorifique à fournir chaque seconde) nécessaire au maintien

de la température à 19 °C. En effet, cet apport est essentiellement fonction de la température extérieure θ_e .

Dans ce cas, à une température θ_e , on fera correspondre une température θ_a du fluide.

Les trois phases de la régulation deviennent les suivantes :

- observation : la température extérieure θ_e est mesurée;
- prise en compte (manuelle ou automatique) de la loi liant θ_e au débit calorifique;
- action : ouverture de la vanne (1) modifiant θ_a et ultérieurement θ .

La chaîne ainsi constituée est dite ouverte car l'action ne modifie pas la grandeur observée. Dans ces conditions, l'objectif final n'est pas garanti.

Régulation à programme

Cette régulation plus élaborée peut avoir plusieurs objectifs comme, par exemple, maintenir la température à 19 °C de 8 h à 19 h les jours ouvrables et réaliser la mise en sécurité « hors gel » le reste du temps (fig. 8).

Les trois phases sont de nouveau présentes et sont :

- observation : θ_e et θ_r (température de retour d'eau), calendrier, horloge;
- prise en compte des lois liant les divers paramètres;
- actions : ouverture de la vanne(1), rotation de la pompe.

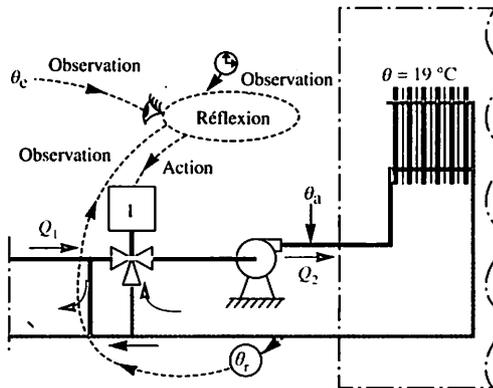


Fig. 8

Ces 3 exemples mettent en évidence que la régulation d'installations complexes, formés d'un certain nombre de procédés simples comme ceux décrits ci-dessus, nécessite un dispositif de réflexion dépassant les capacités (et la vigilance) d'un opérateur humain. Les régulations industrielles sont donc automatiques, l'homme intervenant essentiellement en supervision du dispositif automatique.

Exercices résolus

- 1 Un bac de stockage, de section constante S , reçoit successivement des produits de natures différentes. On désire connaître la quantité de matière de chaque produit en cours de stockage afin d'assurer une gestion des transferts des produits (fig. 9). On appelle Q_e et Q_s respectivement les débits de produit entrant et sortant. Établir une analyse du procédé permettant d'identifier les grandeurs à maîtriser et les grandeurs incidentes.

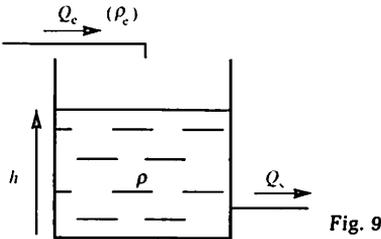


Fig. 9

Solution :

But final : connaître la masse M et le volume V du produit (grandeurs à maîtriser).

Les grandeurs réellement observables sont :

- soit le niveau h et la masse M du stockeur (technologiquement difficile à obtenir par pesée);
- soit le niveau h et la masse volumique ρ du produit (méthode plus facile à mettre en œuvre).

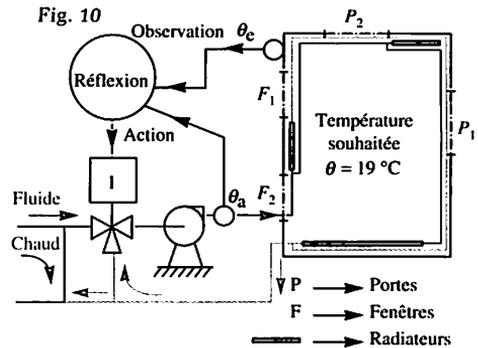
De ces deux mesures on déduira la masse M . En effet on a la relation : $M = S \cdot h \cdot \rho$ donc $M = k \cdot \rho \cdot h$ ou k est une constante caractéristique du bac. Les grandeurs incidentes sont les débits Q_e et Q_s , la masse volumique ρ .

- 2 On désire assurer le chauffage d'un bâtiment industriel afin d'obtenir une température de 19°C sous réserve que les conditions normales d'occupation soient respectées (portes et fenêtres fermées, ventilation normale). Quelle type de régulation faut-il choisir ?

Solution :

Indépendamment de la difficulté de

réalisation de l'organe de détection et de décision, la plus grande difficulté réside dans le choix de la grandeur à observer et dans l'implantation de l'organe de mesure ! La question est alors : dans quelle partie du bâtiment faut-il mesurer la température ? Compte tenu des difficultés signalées on choisit habituellement une régulation en chaîne ouverte : on ne prend en compte que la température extérieure (fig. 10).



- Observation : la température extérieure θ_e .
- Action : modification de la température d'entrée θ_a .

Dans ce cas la puissance calorifique distribuée est uniquement fonction de la température extérieure θ_e et donc indépendante des autres grandeurs incidentes (liées par exemple au fait que des fenêtres sont ouvertes...). La température de 19°C ne sera obtenue que de manière approchée et de plus, uniquement dans des conditions normales d'utilisation du bâtiment.

Afin d'améliorer ce type de régulation, on peut observer également la température θ_a afin d'agir sur la vanne de mélange (1) de façon à respecter la relation représentée à la figure 11.

La régulation pourra être localement améliorée (pièce par pièce) en équipant de vannes thermostatiques un certain nombre de radiateurs (régulation en chaîne fermée locale).

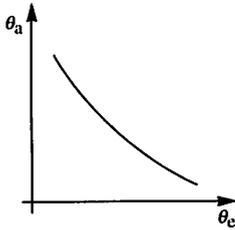


Fig. 11

- Chaîne ouverte :
Observation de Q_A .
Action sur Q_B (ainsi à x_A correspondra y_B ou réciproquement).

3 Un réacteur chimique simplifié est utilisé pour la réaction chimique complète suivante (fig. 12) :

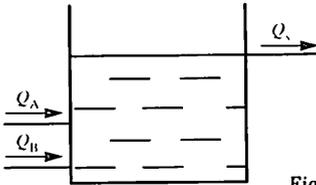
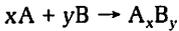


Fig. 12



La sortie du produit obtenu s'effectue par « trop-plein ». La réaction est supposée très rapide et la température est considérée comme constante.

Déterminer les grandeurs à maîtriser pour assurer la qualité du produit ainsi que les diverses possibilités de régulation.

Solution :

L'objectif de qualité impose une réaction dans les conditions stœchiométriques, c'est-à-dire sans excès de l'un des réactifs.

Grandeur observée : composition du produit fini (traces de A ou B) ou toute grandeur liée à la présence de ce produit comme par exemple le pH de la solution finale.

Grandeurs incidentes : la qualité des réactifs, les débits Q_A et Q_B des produits A et B.

Propositions de régulation :

- Chaîne fermée :

Observation du pH.

Action sur Q_A (à Q_B fixé) ou sur Q_B (à Q_A fixé).

4 Les principales réactions chimiques doivent être réalisées à température fixe. Les réacteurs chimiques sont donc thermostatés par un fluide caloporteur, généralement de l'eau chaude en provenance d'un échangeur de chaleur (fig. 13).

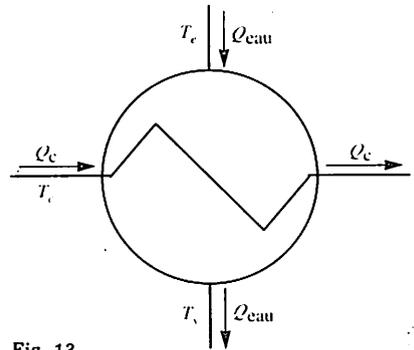


Fig. 13

L'apport calorifique nécessaire à l'échangeur est fourni par un liquide primaire chaud, de débit Q_C et de température T_C .

Déterminer les grandeurs à maîtriser pour assurer la température T_S ainsi que les diverses possibilités de régulation.

Solution :

L'objectif de température doit être obtenu quel que soit le débit d'eau Q_{eau} .

Grandeur observée : la température T_S en sortie de l'échangeur.

Grandeurs incidentes : les débits Q_{eau} et Q_C , les températures T_e et T_C .

Propositions de régulation :

Chaîne fermée :

Observation de T_S

Action sur Q_C (avec éventuellement prise en compte de Q_{eau} , T_e et T_C en chaîne ouverte).

1 Introduction

Dans un procédé industriel, les grandeurs physiques qu'il est utile de contrôler ne sont généralement pas directement observables (niveau dans une cuve fermée, température et pression d'un fluide dans une canalisation...). Afin d'obtenir des informations fiables et quantifiables pour ce contrôle, il est indispensable de disposer de grandeurs physiques auxiliaires, dont les variations seront en rapport avec celles de ces grandeurs à maîtriser. Cela impose l'utilisation d'un *appareil de mesure* spécifique de chaque grandeur à observer.

Mesure d'une grandeur

En régulation, la mesure d'une grandeur est souvent ramenée à l'obtention d'une grandeur image, qui reproduit très fidèlement les variations de la grandeur précédente dite primaire. La grandeur image, ou secondaire, doit être facilement exploitable, afin de permettre d'élaborer un signal représentatif de la valeur de la grandeur mesurée. Ce signal devra être d'une nature telle qu'il puisse éventuellement être transmis sur une grande distance afin d'être utilisé par un dispositif de régulation placé dans une salle de contrôle.

Les principales grandeurs à mesurer sont :

- la pression, le débit, la température pour un fluide en mouvement dans une canalisation ;
- le niveau, la masse volumique, le pH pour un fluide stocké dans un réacteur ;
- la vitesse, l'accélération, le déplacement pour des organes mécaniques en mouvement.

La mesure pourra être *locale*. L'appareil de mesure sera alors essentiellement constitué :

- d'un *capteur*, élément sensible à la grandeur que l'on veut mesurer ;
- d'un *indicateur*, dispositif commandé par le capteur et qui permet la visualisation de la mesure au point où elle est opérée.

Communément, l'ensemble est appelé *indicateur*.

Exemples d'indicateurs : thermomètre pour une mesure de température (fig. 1), débitmètre à flotteur (rotamètre) pour une mesure de débit de liquide (fig. 2).

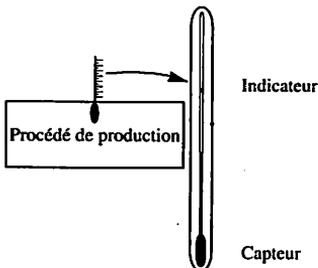


Fig. 1

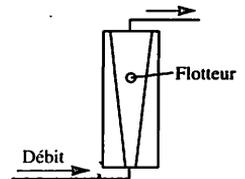


Fig. 2

La mesure pourra être transmise à distance. Dans ce cas, l'appareil de mesure doit souvent servir de convertisseur de signal afin qu'il délivre une information qui puisse être véhiculée à distance. Il est alors essentiellement constitué :

- d'un capteur ;
- d'un transmetteur, dispositif permettant d'élaborer un signal image de la mesure.

Communément, l'ensemble est appelé transmetteur.

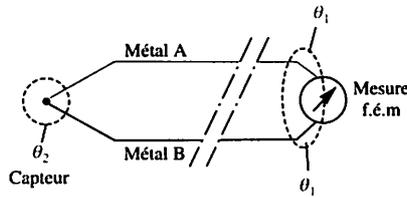


Fig. 3

Exemples :

Les mesures de températures sont souvent réalisées au moyen d'un couple thermo-électrique (fig. 3). Constitué de la jonction (ou soudure) de deux conducteurs métalliques de nature différente, le couple thermo-électrique génère une force électromotrice fonction de la nature de ces matériaux et de la différence de température éventuelle entre les deux soudures, l'une étant alors appelée soudure chaude (température θ_2) et l'autre soudure froide (température θ_1). La présence d'un troisième métal (pour les contacts avec un galvanomètre par exemple) est sans influence sur la mesure si les deux contacts avec ce troisième métal sont à température constante et identique. Dans le cas contraire il convient d'effectuer une correction de température. Dans tous les cas on prend en compte le fait que θ_1 n'est pas 0°C en effectuant une correction, dite de soudure froide, qui impose d'utiliser les tables des constructeurs, fournies pour $\theta_1 = 0^\circ\text{C}$.

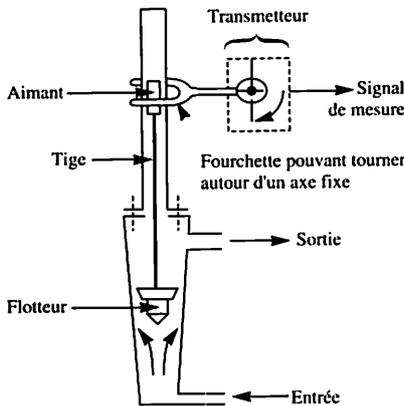


Fig. 4

Le débitmètre à flotteur peut être muni d'une tige terminée par un aimant (fig. 4) qui commande la rotation d'une « fourchette » aimantée autour d'un axe fixe. Aux déplacements de cette fourchette, un dispositif transmetteur fait correspondre un signal transmissible, par exemple une tension fournie par un montage potentiométrique.

2 Signaux transmis

Industriellement la nature d'un signal est déterminée par son aptitude à être transmis sur de longues distances, en subissant le moins de distorsion et en conservant un niveau d'énergie compatible avec un rapport signal/bruit important.

On distingue les signaux *pneumatiques* (l'information est véhiculée par la pression de l'air dans une canalisation) et les signaux *électriques* (l'information est véhiculée par une tension ou une intensité de courant). Ces derniers, plus commodes, voient leur utilisation se généraliser, mais ils ne peuvent pas toujours être employés pour des raisons de sécurité, notamment en atmosphère déflagrante.

Les niveaux extrêmes des signaux transmis sont normalisés. Ils correspondent aux valeurs extrêmes de la grandeur à mesurer qui définissent l'échelle du transmetteur et qui caractérisent chaque transmetteur. Pour rationaliser l'étude de tous les dispositifs de mesure, on raisonne en pourcentage de l'échelle du transmetteur.

Par exemple, pour un transmetteur de température entre 500 °C et 1 000 °C, l'échelle est de 500 °C (1 000 °C-500 °C) et les valeurs 500 °C et 1 000 °C correspondent respectivement à 0 % et à 100 % de l'échelle du transmetteur.

La table de correspondance générale des transmetteurs est la suivante (tableau 1) :

Échelle du transmetteur		0 %	100 %
Valeurs extrêmes {	des signaux pneumatiques	0,2 bar	1 bar
	des signaux électriques	4 mA 0 mA 0 V 1 V	20 mA 20 mA 10 V 5 V

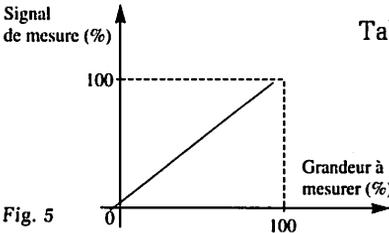


Tableau 1

Dans la plupart des cas, on cherche à obtenir une relation linéaire entre la grandeur primaire à mesurer et le signal de mesure (*sensibilité constante*) (fig. 5).

3 Caractéristiques du dispositif de mesure

En fonction des performances attendues, ce dispositif doit être choisi avec soin. Parmi ces caractéristiques principales citons :

- la précision et la linéarité... (mesurer une température de four de 900 °C à 1 °C près est difficile).
- le domaine d'utilisation (un débit de lait ne se mesure pas comme un débit d'essence);

- les conditions d'emploi (une sonde classique de pH-mètre ne résiste pas à une pression de 15 bars).

Exemple : On désire mesurer la température d'un four entre 500 °C et 1000 °C à l'aide d'un couple thermo-électrique platine/platine-rhodié. On suppose la soudure froide à 0 °C. Les tables des constructeurs donnent alors, en fonction de la température de soudure chaude, les indications rassemblées dans le tableau suivant (tableau 2) :

Température (°C)	Pourcentage de l'échelle de mesure (%)	f.é.m. (mV)	Pourcentage pour le signal du transmetteur (%)
500	0	4,221	0
750	50	6,790	47,9
1 000	100	9,579	100

Tableau 2

Ce tableau fait apparaître que, dans le domaine d'utilisation, les variations du signal du transmetteur (si elles sont proportionnelles à celles de la f.é.m) ne varient pas linéairement par rapport aux variations de la température. Au moyen d'un dispositif interne au transmetteur (tableau de correspondance $e \leftrightarrow M$ de la fig. 6) il est donc nécessaire de linéariser le signal en fonction de la variation de température.

Remarque : Dans certains cas, pour des grandeurs complexes, il n'existe pas d'instrument de mesure. A partir de mesures plus élémentaires il faut alors élaborer une « image » de cette grandeur par calcul.

Tel est le cas pour la puissance calorifique d'un brûleur à gaz, qui est obtenue en faisant le produit du débit volumique Q_v de gaz par le pouvoir calorifique inférieur (ou PCI) de ce gaz, deux grandeurs mesurables.

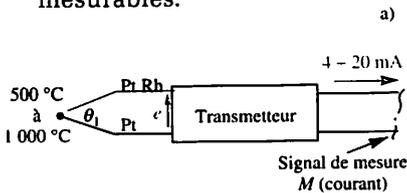
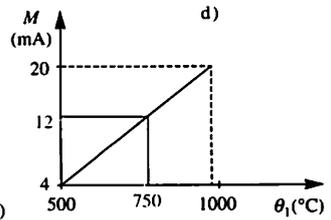
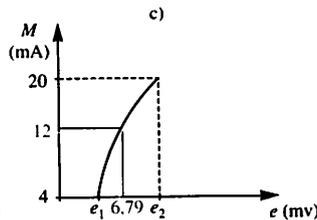
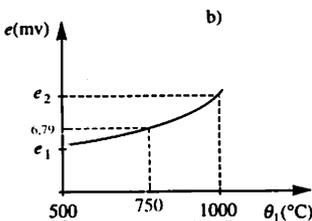


Fig. 6. Courbe de correspondance $e \leftrightarrow M$: à partir de la courbe $e(\theta_1)$, la courbe de la figure c permet une relation linéaire $\theta_1 \leftrightarrow M$.



Exercices résolus

1 Mesure de température par sonde à résistance.

On désire mesurer une température variable entre 0 °C et 100 °C à l'aide d'une sonde à résistance (fig. 7) reliée à un pont de Wheatstone alimenté à courant constant (fig. 8).

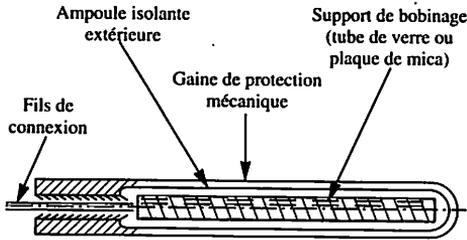
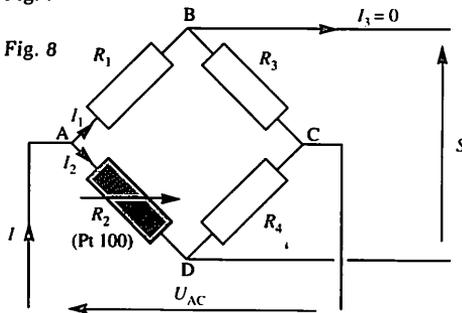


Fig. 7



Les caractéristiques de la sonde sont les suivantes : sonde de platine type Pt 100 dont la résistance (entre 0 °C et 100 °C) est approximativement donnée par la relation :

$$R_\theta = R_0 (1 + 3,91 \cdot 10^{-3} \theta - 6 \cdot 10^{-7} \theta^2) \quad (1)$$

en désignant par :

R_θ la valeur de la résistance R_2 de la sonde à θ °C

R_0 la valeur de la résistance de la sonde à 0 °C : $R_0 = 100 \Omega$.

1. Calculer les valeurs R_{50} , R_{100} de la résistance de la sonde à 50 °C, 100 °C.

2. On désire réaliser un transmetteur délivrant un signal S (tension U_{BD}) variable de 0 à 50 mV lorsque la température de la sonde varie de 0 à 100 °C. Déterminer la valeur commune aux trois résistances R_1 , R_3 et R_4 .

3. Calculer l'intensité I du courant constant d'alimentation.

4. Calculer la valeur du signal S lorsque la température est 50 °C.

5. Le transmetteur est-il linéaire ?

Solution :

1. Calcul des valeurs R_{50} , R_{100}

Par application directe de la relation (1) on trouve :

$$R_{50} = 119,4 \Omega ; \quad R_{100} = 138,5 \Omega$$

2. Valeur commune de R_1 , R_3 et R_4

Pour $\theta = 0$ °C on désire obtenir : $S = 0$ mV. Le pont de Wheatstone doit donc être équilibré. Il débite dans un circuit de résistance infinie ($I_3 = 0$). Il est en équilibre à 0 °C si :

$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$.

La valeur commune aux 3 résistances est donc :

$$R_1 = R_3 = R_4 = 100 \Omega$$

3. Détermination de l'intensité I

Par définition : $S = U_{BD}$

avec : $S = U_{BC} + U_{CD} = U_{BC} - U_{DC}$

En appliquant la loi d'Ohm à R_3 et R_4 on obtient : $S = R_3 I_1 - R_4 I_2$ (2)

En appliquant la loi d'Ohm aux deux branches A, B, C et A, D, C on peut écrire :

$$U_{AC} = (R_1 + R_3) I_1 = (R_2 + R_4) I_2$$

$$\text{donc : } I_1 = \frac{I_2 (R_2 + R_4)}{R_1 + R_3}$$

D'après la loi des nœuds appliquée au point A : $I_2 = I - I_1$ (3) et donc :

$$I_1 = \frac{(I - I_1)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_3} = \frac{I(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

La relation (3) permet aussi d'obtenir :

$$I_2 = \frac{I(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

D'où l'intensité I cherchée :

$$I = \frac{S(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{R_3(R_2 + R_4) - R_4(R_1 + R_3)} \quad (4)$$

Pour $\theta = 100\text{ }^\circ\text{C}$, $S = 50\text{ mV}$,
 $R_2 = 138,5\ \Omega$ et $R_1 = R_3 = R_4 = 100\ \Omega$:

$$I = \left(\frac{0,05}{8,78} \right) \text{ A} \quad \text{soit : } \boxed{I = 5,7\text{ mA}}$$

4. Valeur de S pour $\theta = 50\text{ }^\circ\text{C}$

Dans ce cas, $R_2 = 119,4\ \Omega$ et avec la formule établie on obtient

$$\boxed{S = 26,3\text{ mV}}$$

5. Linéarité du transmetteur

Le dispositif ne délivre pas un signal S proportionnel à la variation de température. Ce transmetteur n'est pas linéaire.

Solution :

1. Montage 2 fils

La relation (4) de l'exercice précédent peut s'écrire :

$$S = I \frac{R_3(R_2 + R_4) - R_4(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

En tenant compte des conditions d'installation, la résistance dans la branche AD devient égale à : $R_2 + 2R_L$. Comme $R_1 = R_3 = R_4 = R = 100\ \Omega$ l'expression de S devient :

$$S = 100I \frac{R_2 - 100 + 2R_L}{300 + R_2 + 2R_L} \quad (5)$$

2. Montage 3 fils

On note que le troisième fil permet de déplacer le sommet A du pont et ainsi de répartir les résistances de ligne entre les branches AB et AD. Ces deux branches présentent des résistances égales à : $R_1 + R_L$ et $R_2 + R_L$. La nouvelle expression de S est :

$$S = 100I \frac{R_2 - 100}{300 + R_2 + 2R_L} \quad (6)$$

3. Choix du montage

L'expression (5) montre, au numérateur, que le terme $2 \cdot R_L$ devient non négligeable devant le terme $R_2 - 100$, en particulier pour les températures proches de $0\text{ }^\circ\text{C}$ où ce terme est faible. L'existence de R_L , et sa variation avec la température, entraîne une erreur de mesure. En revanche l'expression (6) fait apparaître un terme $2 \cdot R_L$ uniquement au dénominateur, où il peut généralement être négligé devant la somme $300 + R_2$ qui est toujours supérieure à $400\ \Omega$. Le montage 3 fils est donc systématiquement employé au niveau industriel.

On ne confondra pas les montages 2 ou 3 fils d'un capteur avec l'emploi du terme 2 ou 4 fils qui concerne l'emploi de certains transmetteurs.

2 Industriellement, la distance entre la sonde R_2 et le pont de mesure nécessite l'utilisation d'un câble de liaison de longueur adéquate. On désire étudier l'influence de la résistance R_L de chaque fil dans les deux cas suivants : montage 2 fils (fig. 9) et montage 3 fils (fig. 10).

1. Déterminer la nouvelle expression de S pour le montage 2 fils.
2. Déterminer la nouvelle expression de S pour le montage 3 fils.
3. Quel montage permet le mieux de négliger l'influence de R_L ?

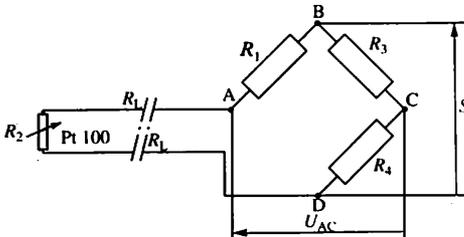


Fig. 9. Montage 2 fils.

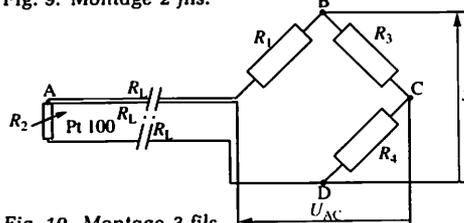


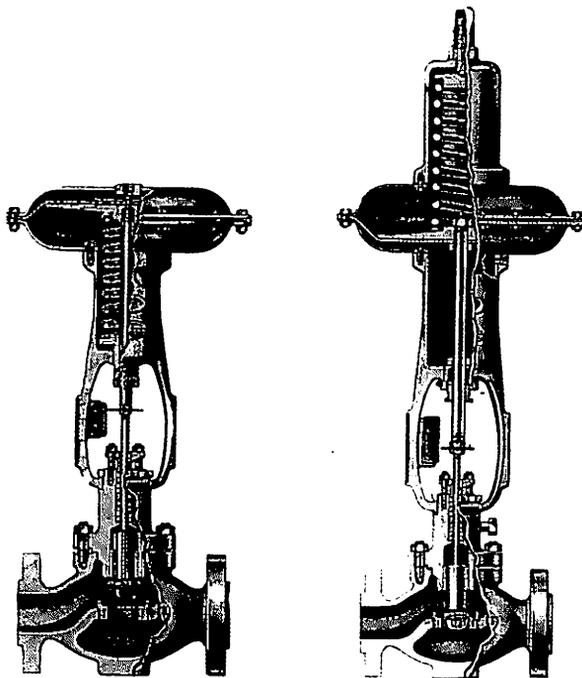
Fig. 10. Montage 3 fils.

Lorsque les grandeurs à maîtriser s'écartent des valeurs désirées, il est nécessaire d'agir sur certaines grandeurs incidentes convenablement choisies; on utilise alors des appareils appelés *actionneurs*.

Pour modifier un débit ou une pression de fluide on utilise des vannes. Pour régler un courant électrique on peut être conduit à commander une alimentation de puissance à thyristors.

1 Vannes progressives à commande pneumatique

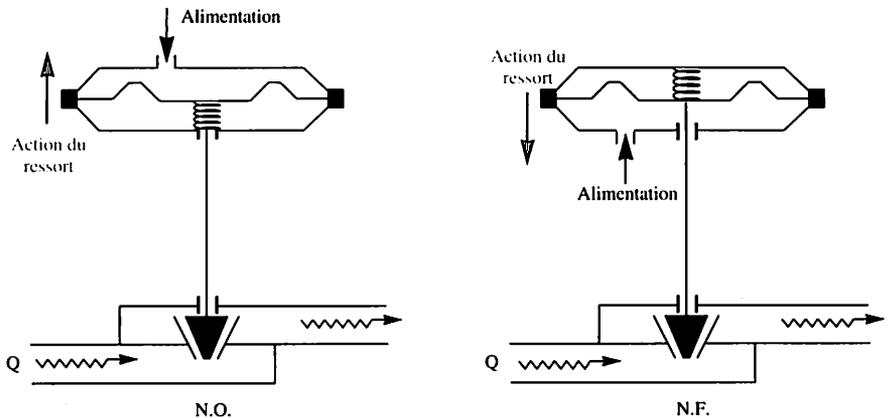
A l'aide d'un signal pneumatique, appelé signal de commande, on provoque le déplacement de la tige d'un clapet permettant le passage de plus ou moins de fluide. Suivant le montage de l'ensemble membrane-ressort on peut obtenir une vanne qui s'ouvre ou qui se ferme lorsque la pression du signal de commande augmente (fig. 1).



Type 37-21000

Type 38-21000

Fig. 1. Documentation Masoneilan.



Représentation élémentaire de deux vannes.

On distingue les deux sortes de vannes par la position du clapet en l'absence de signal de commande :

- Vanne N.F. (normalement fermée) pour une vanne dont l'ouverture augmente quand l'amplitude du signal de commande croît (les techniciens disent aussi parfois Vanne Signal Ouvre).
- Vanne N.O. (normalement ouverte) pour une vanne qui se ferme d'autant plus que le signal de commande augmente (les techniciens disent aussi parfois Vanne Signal Ferme).

Dans un souci de rationalisation des signaux véhiculés dans une installation, les signaux de commande sont au même gabarit que les signaux de mesure (voir tableau 1, chap. 2).

Les vannes étant essentiellement réalisées en technologie pneumatique et les salles de contrôle émettant surtout des signaux électriques (4 à 20 mA), il faut disposer de blocs convertisseurs électriques-pneumatiques. On note que la faible puissance transportée par les signaux de commande et la puissance importante nécessaire au déplacement du clapet d'une vanne imposent une amplification de puissance au niveau de l'actionneur.

Le choix du sens d'action de la vanne est essentiellement dicté par les contraintes de sécurité de l'installation : lors d'un défaut de l'alimentation en puissance électrique ou pneumatique, l'installation doit se mettre en position de repli, pour laquelle la sécurité des personnes et des biens est assurée.

Dans le cas d'un tel défaut on est donc, par exemple, conduit à isoler un réacteur en fermant ses vannes d'arrivée, de départ et de chauffe, et à ouvrir les vannes de dégazage et de refroidissement. Le défaut le plus classique étant une rupture de l'arrivée de l'air utilisé par l'instrumentation, on désigne aussi parfois le sens d'action des vannes par les termes : Ouvert Par Manque d'Air (O.P.M.A.) et Fermé Par Manque d'Air (F.P.M.A.).

Dans la quasi-totalité des cas une vanne F.P.M.A. est de type N.F., une vanne O.P.M.A. est de type N.O. Pour éviter certaines ambiguïtés,

dans cet ouvrage on n'utilisera que les termes N.F. et N.O., qui indiquent le lien avec le signal de commande, indépendamment de la position de repli.

2 Autres actionneurs progressifs

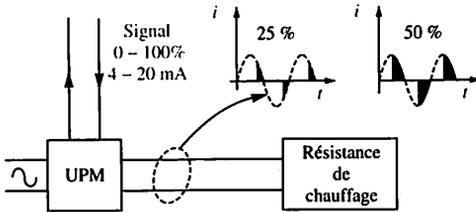


Fig. 2. Schéma simplifié d'une UPM.

La grande souplesse apportée par les grandeurs électriques les font de plus en plus choisir comme grandeurs incidentes à commander. On utilise alors des Unités de Puissance dites Mixtes (ou U.P.M.) car elles peuvent être commandées aussi bien par un signal continu (4-20 mA par exemple) que par un signal binaire périodique modulé en durée (souvent 0-10 V) (fig. 2 et 3) appelé signal logique par de nombreux constructeurs.

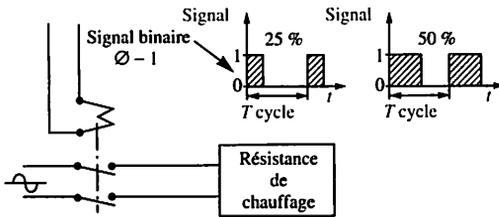


Fig. 3. L'unité de puissance peut être un simple relais électromécanique.

3 Vannes Tout ou Rien (T.O.R.)

Le contrôle de certains organes de sécurité nécessite souvent de disposer uniquement des deux états : ouvert ou fermé. De telles vannes se représentent naturellement de façon différente (voir chapitre 4).

Il faut signaler que l'usage des vannes progressives est onéreux et que, dans certains cas bien précis, il est économiquement judicieux d'adopter des vannes T.O.R., commandées en modulation de durée.

4 Choix d'un organe de puissance

Au-delà de considérations économiques liées au coût de l'actionneur et au choix stratégique du type de grandeur commandée (par exemple électrique), ce problème est majeur pour le technicien de régulation. En effet il serait vain de vouloir utiliser des techniques avancées de contrôle-commande si les organes de mesure et de commande n'ont pas été choisis en adéquation avec le procédé et en fonction des conditions d'exploitation imposées. En particulier l'actionneur doit

permettre d'assurer la sécurité d'une installation : en zone déflagrante cela conduit souvent à exclure les actionneurs électriques. Compte tenu de leur grande souplesse d'utilisation, les vannes restent industriellement les actionneurs les plus utilisés, surtout lorsque des puissances importantes sont mises en jeu. Sans entrer dans des considérations trop techniques, on peut se sensibiliser aux contraintes de fonctionnement des vannes :

- le fluide véhiculé peut être corrosif (attaque progressive du corps de la vanne), cristallisable (dépôts), chargé de particules solides (érosion, encrassement), maintenu sous des pressions et des températures variables.
- les conditions d'écoulement sont fonction des débits (laminaires, turbulents, ...)
- l'environnement peut être la cause de dysfonctionnements, en particulier à cause de vibrations de la conduite ou d'une température variable dilatant les matériaux et entraînant des fuites.
- la forme du clapet et son mouvement par rapport à l'orifice (siège) peuvent influencer son comportement en cours d'utilisation.

• Notion de CV

Afin de pouvoir choisir et comparer les capacités des différentes vannes, on utilise la notion de coefficient de vanne ou CV.

Sa définition, établie à partir des unités anglaises, peut être transposée pour les unités légales.

Pour un *fluide incompressible*, le coefficient CV est égal à 1,156 fois le débit d'eau à 4 °C exprimé en mètres cubes par heure, traversant la vanne sous une différence de pression (ΔP) de 1 bar (10^5 Pa). Plus généralement : $CV = 1,156 \cdot Q_v \cdot \sqrt{d/\Delta P}$ où d représente la densité du fluide par rapport à l'eau ($d = 1$ pour l'eau). On exprime ΔP en bar et Q_v en mètres cubes par heure.

En général, le CV est donné pour l'ouverture maximale de la vanne : on parle alors de CV maximal.

Pour un *fluide compressible*, une distinction est faite entre vapeur d'eau et gaz, les relations tenant compte des pressions en amont et en aval, et de la température.

• Notion de rangeabilité (coefficient de réglage) r d'une vanne

Par définition $r = \frac{CV_{\max i}}{CV_{\min i}}$ ce qui revient au rapport du débit maximal

contrôlable au débit minimal **contrôlable** (à ne pas confondre avec le débit maximal et le débit minimal).

Ce coefficient est important pour le choix d'une vanne de régulation car il permet de déterminer la plage de fonctionnement normale de la vanne.

L'installation, la mise en service, l'exploitation et la maintenance des installations industrielles nécessitent une représentation symbolique normalisée des divers procédés élémentaires d'une installation complexe. Les symboles employés sont utilisés tant au niveau des documents manipulés par le technicien d'installation qu'au niveau des tableaux de contrôle ou synoptiques manipulés par les agents d'exploitation.

Il existe une normalisation générale mais on ne s'étonnera pas de l'existence de variantes en fonction du secteur d'activité (chimie, pétrochimie, EDF...) ou même de l'entreprise.

1 Schéma du procédé

Pour tous les corps de métier on utilise le Plan de Circulation des Fluides (P.C.F.) qui est un schéma faisant apparaître les éléments, matériels et flux de fluides, nécessaires au fonctionnement du procédé. Ce schéma comprend notamment :

- les appareils : cuves, réacteurs, tuyaux...;
- la nature et le sens d'écoulement des fluides ;
- les organes de puissance : pompes, agitateurs motorisés...;
- l'indication des grandeurs utiles.

Deux procédés élémentaires, correspondant à des dispositifs usuels, échangeurs et bac de stockage, sont représentés figures 1 et 2.

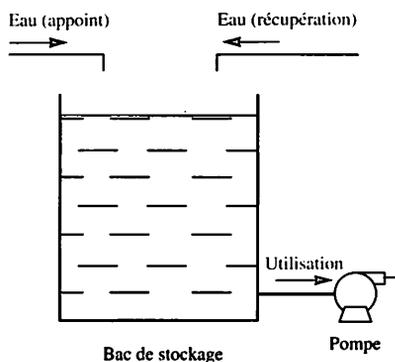
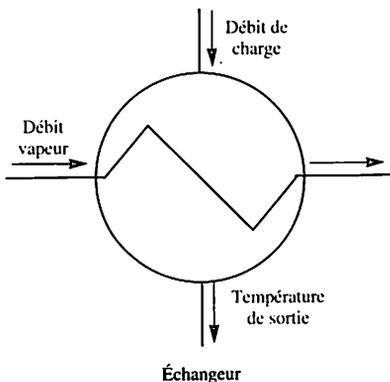


Fig. 1. Échangeur.

Fig. 2. Bac de stockage.

Il est souvent nécessaire de réchauffer (ou refroidir) un fluide pour obtenir les conditions réactionnelles optimales pour le rendement d'une réaction chimique. Pour des raisons économiques ou écologiques, il est également courant de devoir stocker avant réemploi certains produits de récupération de réactions chimiques.

Le P.C.F. d'une installation est certes un outil utile mais il est insuffisant car il n'indique pas les moyens de contrôle-commande du procédé. On le complète donc par l'indication de tous les dispositifs permettant l'observation et la commande du procédé, que l'on désigne habituellement par le terme d'instruments.

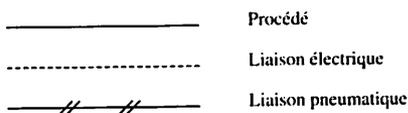
2 Schéma T.I.

Ce schéma représente les tuyauteries et les instruments (d'où le sigle T.I.). C'est un schéma P.C.F. instrumenté, c'est-à-dire complété par les appareils de mesure (organes d'observation), les appareils de contrôle et de calcul (organes de réflexion), les actionneurs (organes d'action), les liaisons entre ces divers appareils.

Tous ces éléments ont une représentation normalisée :

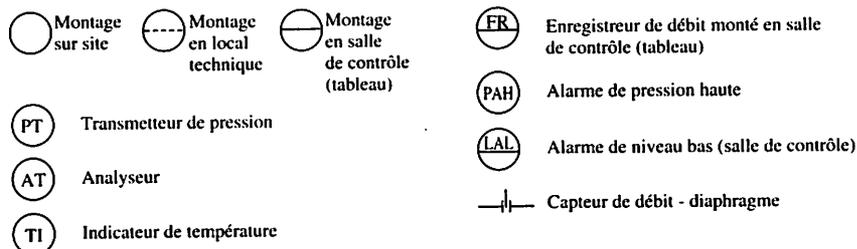
- la représentation des liaisons est donnée figure 3 ;

Fig. 3



- la représentation des appareils de mesure utilise un cercle, avec indication de la localisation de l'appareil. Ce cercle contient une désignation de l'appareil, conforme à la règle suivante (fig. 4) :

Fig. 4



la première lettre indique la grandeur primaire mesurée :

P : pression ; F : débit (flow) ; T : température ; L : niveau (level) ; A : analyse (mesure spéciale) ; PD : pression différentielle (écart entre deux pressions) ;

les lettres suivantes indiquent le type d'appareil et/ou la fonction : T : transmetteur ; I : indicateur ; A : alarme ; S : sécurité ; R : enregistreur.

Le niveau actif peut également être indiqué : L : bas (low) ; H : haut.

Dans les exemples fournis figure 4 on note la représentation particulière du capteur de débit utilisant un diaphragme, qui est une cloison transversale dans une canalisation.

Un indice terminal permet de distinguer des appareils de même fonction.

- la représentation des appareils de calcul est opérée en ajoutant le symbole Y à côté de l'indication de la grandeur primaire traitée et indiquant la fonction réalisée dans le cadre réservé (fig. 5).

Dans cet exemple on indique une extraction de racine carrée sur un débit, en local technique.



Fig. 5

Les principales fonctions sont :
 Σ : sommateur; X : multiplicateur; A/R : module avance/re-tard;

$\sqrt{\quad}$: extracteur de racine carrée;

\int : intégrateur;

- la représentation des action-neurs est fournie figuré 6. On note qu'une vanne de régulation progressive est toujours associée à un émetteur de signal de commande. Pour l'instant celui-ci est représenté par le symbole HIC (Human Indicator Command).

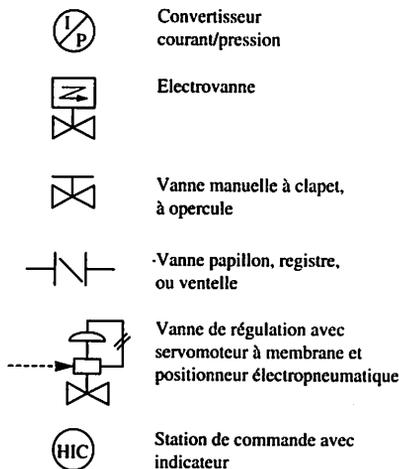


Fig. 6

La représentation des régulateurs et le repérage des vannes sont traités au chapitre 15.

Exemples :

Le schéma de la figure 7 indique l'instrumentation complète qui permet la maîtrise de la température de sortie de l'échangeur. Il faut pouvoir mesurer : la température de sortie du fluide, le débit du fluide à réchauffer, qui peut varier et peut donc être une grandeur d'influence sur la température; le débit de fluide caloporteur (ce qui est moins évident) car celui-ci peut varier en fonction de la pression disponible de vapeur, même si l'ouverture de vanne est constante.

La vanne associée à sa station de commande permet d'agir sur la grandeur incidente la plus influente sur la température de sortie.

Le schéma de la figure 8 indique l'instrumentation complète qui permet la maîtrise du niveau dans le bac de stockage.

Il faut pouvoir mesurer le niveau, enregistrer ses variations et il faut pouvoir anticiper des actions de sécurité en cas d'alarme de niveau trop bas ou trop haut (débordement).

Le débit d'eau de récupération est trop variable et aléatoire pour pouvoir être une information utile pour le maintien du niveau.

En revanche, la vanne associée à sa station de commande permet de faire l'appoint en cas de récupération insuffisante.

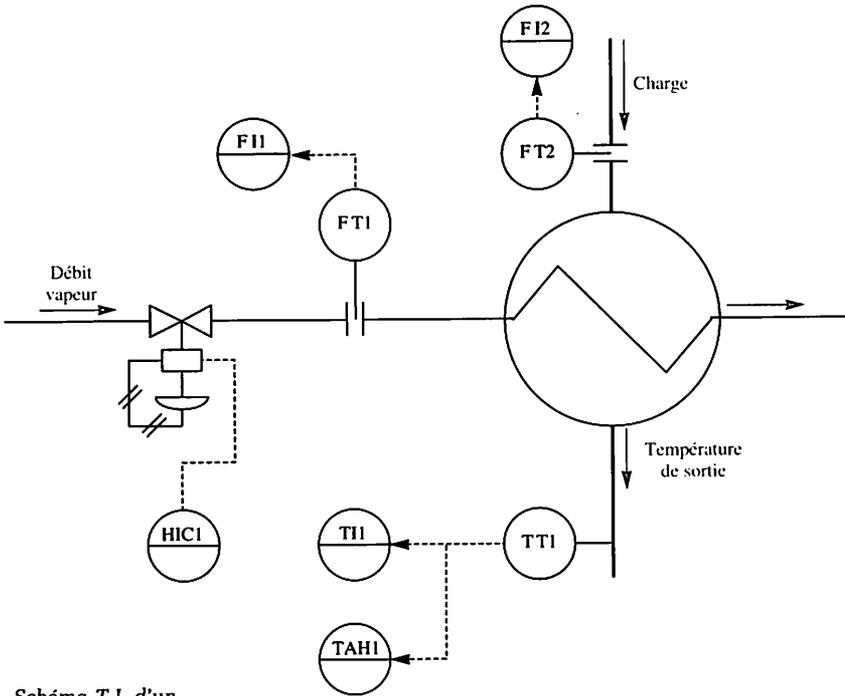


Fig. 7. Schéma T.I. d'un échangeur.

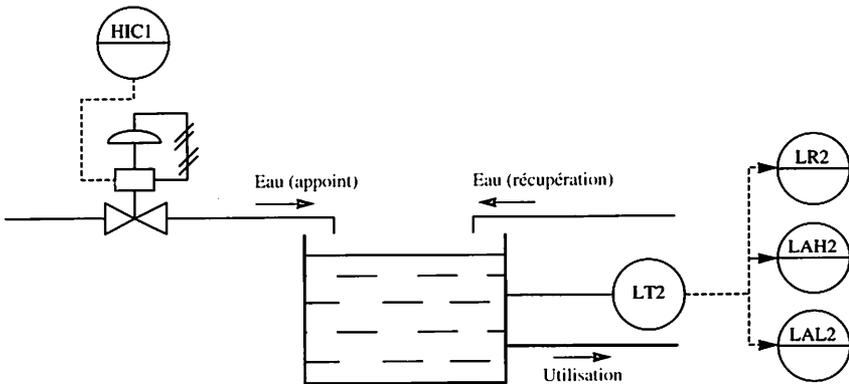


Fig. 8. Schéma T.I. d'un bac de stockage.

Exercices résolus

1 On désire mesurer le débit d'un gaz homogène circulant dans une conduite. On utilise comme capteur un organe déprimogène et un transmetteur de pression différentielle. On précise qu'un organe déprimogène est un diaphragme placé dans une canalisation pour engendrer une différence de pression entre l'amont et l'aval de ce diaphragme. Cette différence de pression est notée ΔP . Ce type de capteur est courant et fiable car il ne comporte pas de pièces mobiles.

En mécanique des fluides on montre que le débit volumique Q_v est lié à ΔP et à la masse volumique ρ du fluide

par la relation $Q_v = k \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$ où k représente une constante caractéristique du capteur.

La pression P et la température T du gaz étant variables, l'utilisation de la formule précédente ne donne qu'une valeur approchée du débit volumique. On réalise donc un ajustement pour ramener par calcul le gaz, supposé parfait, dans les conditions normales : $T_0 = 0^\circ\text{C}$ et $P_0 = 1 \text{ bar}$.

Le débit volumique se note alors Q_{v0} et s'appelle le débit corrigé en pression et température et s'exprime souvent en mètres cubes par heure (m^3/h) dans les conditions normales (ce que le langage technique a transformé en «normaux mètres cubes par heure», désignation non normalisée et donc interdite).

On suppose disponible un transmetteur de différence de pression ΔP , un transmetteur de température, un transmetteur de pression et tous les modules de calculs.

1. Établir la relation liant Q_{v0} à ΔP , P et T
2. Établir le schéma T.I de l'ensemble de mesure corrigée

Solution :

1. Expression de Q_{v0}

Soit m la masse d'un gaz occupant le

volume V sous la pression P et à la température T . Par définition sa masse volumique est égale à : $\rho = \frac{m}{V}$

D'après l'équation d'état des gaz parfait si M est la masse molaire du gaz :

$$PV = nRT \text{ avec } n = \frac{m}{M}$$

$$\text{D'où : } PV = \frac{m}{M} RT$$

$$\text{et donc : } \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$$

ρ dépend donc de la nature du gaz par M . Pour un gaz homogène donné, ρ est donc proportionnelle à P et inversement proportionnelle à T .

Dans les conditions normales :

$$\rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$$

$$\text{D'où : } \rho = \rho_0 \cdot \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}$$

Compte tenu que Q_{v0} et Q_v sont des débits volumiques (volume/seconde), on montre facilement, à partir de

$$PV = nRT, \text{ que : } Q_{v0} = Q_v \cdot \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}$$

On peut donc remplacer Q_v par sa définition et ρ par $\left(\rho_0 \cdot \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}\right)$

On obtient :

$$Q_{v0} = k \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho_0 \cdot \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}} \cdot \frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T}}$$

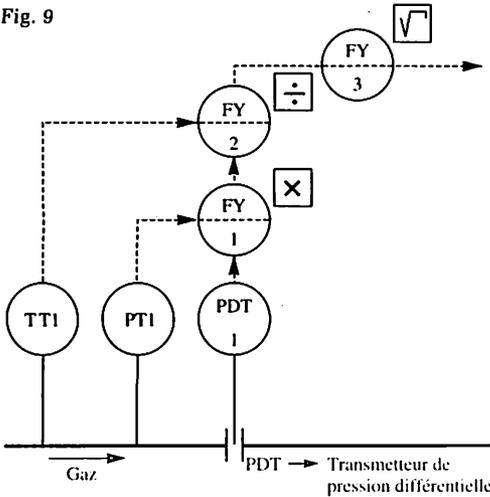
Donc : $Q_{v0} = k \sqrt{\frac{\Delta P \cdot P}{\rho_0 T}} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{P_0}}$. Comme ρ_0, P_0, T_0 sont des constantes il vient :

$$Q_{v0} = K \sqrt{\frac{\Delta P \cdot P}{T}}$$

2. Schéma T.I.

Il est représenté figure 9, le signal S est l'image de Q_{v0} .

Fig. 9



2

Dans l'exercice précédent, le schéma T.I. correspond à la stratégie à mettre en œuvre avec les technologies classiques. Avec les systèmes numériques de contrôle-commande (SNCC), la stratégie est différente. Tous les transmetteurs sont raccordés à des modules d'entrées qui convertissent les signaux normalisés (par exemple 4-20 mA) en informations numériques au gabarit 0-1 ou 0-100. Connaissant les échelles des transmetteurs, le technicien peut alors convertir ces informations en unités physiques, ce qui permet directement leur affichage (et l'emploi des formules).

On désire réaliser un module permettant le calcul du débit volumique corrigé, dans les conditions suivantes : la pression P varie de 8 à 12 bar, la température T varie de 300 à 423 K et ΔP varie entre 0 et 100 mbar.

1. En supposant que les échelles des transmetteurs sont choisies de façon à couvrir exactement toutes les plages de variations, fournir la relation liant chaque grandeur physique et son image E provenant d'un module d'entrée, exprimée en pourcentage de l'échelle du transmetteur.

2. Sachant que le débit corrigé extrême, mesuré au banc, est de $30 \text{ m}^3/\text{h}$, déterminer le coefficient K de la formule de l'exercice précédent.

3. Proposer une réalisation.

Solution :

1. Configuration des entrées

On a les correspondances suivantes :

E_i	T	P	ΔP
0 %	300 K	$8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	0 Pa
100 %	423 K	$12 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	10^4 Pa

Dans les trois cas on est ramené au calcul de l'équation d'une droite passant par deux points. D'où :

$$T = 300 + 1,23 \cdot E_1;$$

$$P = 8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 \cdot E_2; \quad \Delta P = 100 E_3$$

2. Calcul de K

Sachant que $Q_{v0} = K \sqrt{\frac{\Delta P \cdot P}{T}}$, le débit maximal est obtenu pour $\Delta P = 10^4 \text{ Pa}$, $P = 12 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T = 300 \text{ K}$:

$$K = \frac{Q_{v0} \sqrt{T}}{\sqrt{\Delta P \cdot P}} = \frac{30 \sqrt{300}}{\sqrt{10^4 \times 12 \cdot 10^5}}$$

$$K = 4,7 \cdot 10^{-3}$$

3. Réalisation (fig. 10)

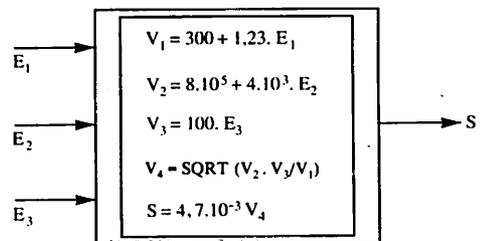


Fig. 10 V_i : variable interne

Les schémas T.I. (Tuyauteries et Instruments) sont toujours relativement complexes et ne permettent pas facilement au technicien de régulation d'élaborer une stratégie de régulation pour le procédé représenté. Un second schéma dit fonctionnel, plus dépouillé, où ne figurent plus que les grandeurs à maîtriser et les grandeurs incidentes est nécessaire.

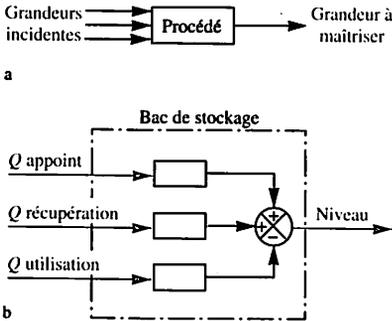


Fig. 1 a) Schéma fonctionnel global.

b) Schéma fonctionnel détaillé.

On constate en particulier qu'un schéma fonctionnel doit indiquer les sens d'action de chaque grandeur incidente, vis-à-vis de la grandeur à maîtriser considérée. Dans le cas de l'exemple de la figure 1, une augmentation du débit d'utilisation entraîne une diminution du niveau, ce qui justifie le signe moins au niveau du sommateur.

Lorsqu'un procédé, même élémentaire, comporte plusieurs grandeurs à maîtriser, on utilise autant de schémas qu'il y a de grandeurs à maîtriser. Cette méthode revient à considérer ces grandeurs comme indépendantes, même si, en fait, elles ne le sont pas. Le couplage entre ces grandeurs sera explicité en faisant figurer les unes comme grandeurs incidentes des autres. Le schéma fonctionnel du bac précédemment étudié au chapitre 4 est donné figure 1.

1 Hypothèse de la monoboucle simple de régulation

La stratégie de régulation la plus simple consiste à commander une seule grandeur incidente par grandeur à maîtriser. Cette grandeur commandée sera appelée grandeur réglante (G_R).

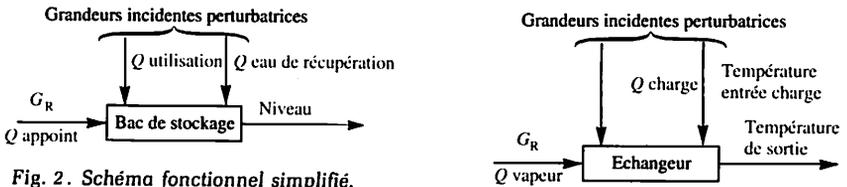


Fig. 2. Schéma fonctionnel simplifié.

Son choix doit être judicieux et tenir compte notamment :

- des impératifs de sécurité,
- du « poids » de l'influence de cette grandeur sur la grandeur à maîtriser,
- de sa rapidité d'action,
- de la liberté d'action sur cette grandeur, qui ne peut donc pas être une grandeur à maîtriser d'une autre boucle de régulation.

Compte tenu du rôle particulier de la grandeur réglante, vis-à-vis de l'évolution de la grandeur à maîtriser, on est conduit à représenter la grandeur réglante choisie comme indiqué sur le schéma de la figure 2, les autres grandeurs incidentes étant représentées latéralement et s'appelant désormais **perturbations**. En effet toute variation de ces grandeurs va modifier la grandeur à maîtriser malgré le dispositif de commande. Le choix d'une grandeur réglante est, pour le technicien de régulation, une étape très délicate car fondamentale pour les performances de la régulation mise en œuvre par la suite. Dans le cas d'un réacteur chimique contenant un équilibre liquide-vapeur, il est souvent plus intéressant de contrôler la température du liquide en agissant sur la pression de vapeur qu'en chauffant avec une puissance de chauffe réglable. Ce choix est une application de notions de thermodynamique, que tout technicien doit connaître.

2 Terminologie

Dans le schéma de la figure 7 du chapitre 4 le débit de vapeur constitue la grandeur réglante (ou grandeur de réglage). Le signal délivré par la station HIC1, qui pilote la vanne, est le signal de réglage. On aboutit donc au schéma de la figure 3.

Les schémas fonctionnels sont parfois appelés schémas-blocs ou schémas synoptiques. On évitera ces terminologies car, notamment le terme synoptique, a une autre signification en salle de contrôle.

3 Exemple de schéma fonctionnel détaillé

Si l'on reprend l'exemple de l'échangeur de chaleur du chapitre 4, l'instrumentation de la figure 7 ne met pas en évidence l'ensemble des grandeurs incidentes. En effet la température de l'eau à l'entrée de l'échangeur et la température de la vapeur sont également des grandeurs pouvant modifier la température de sortie. Elles ne sont pas prises en compte, au niveau de l'instrumentation car le schéma TI de l'échangeur ne représente pas l'ensemble de l'installation. La vapeur utilisée provient en fait d'un générateur de vapeur dont les deux grandeurs à maîtriser sont la pression et la température de vapeur. Le bon fonctionnement supposé de cette chaudière permet d'ignorer, en

première approximation, l'influence de la température de vapeur sur l'échangeur. En ce qui concerne l'eau, souvent elle provient de réservoirs (ou bûches) de stockage à température ambiante, donc à peu près constante. Le schéma fonctionnel est donc celui de la figure 3.

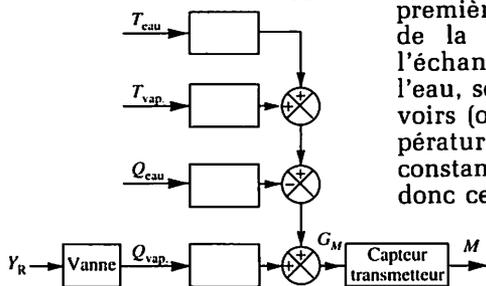


Fig. 3

1 Définitions

Pour traduire le principe de causalité entre grandeurs à maîtriser et grandeurs incidentes, l'utilisation des schémas fonctionnels impose un nouveau vocabulaire. Les grandeurs observées d'un procédé sont appelées *grandeurs de sortie*, les grandeurs incidentes (grandeur réglante et perturbations) sont les *grandeurs d'entrée*.

Parmi les grandeurs de sortie on s'intéresse aux grandeurs à maîtriser G_M aussi appelées *grandeurs réglées*.

Le chapitre 5 a évoqué la stratégie élémentaire mise en œuvre pour la régulation d'un procédé comportant plusieurs grandeurs à maîtriser : à chacune d'elles, on fait correspondre une grandeur unique, appelée grandeur réglante G_R , que l'on choisit de commander par un actionneur pour ramener la grandeur à maîtriser à la valeur désirée, les autres grandeurs incidentes G_I étant considérées comme des perturbations. Une telle association, grandeur réglée-grandeur réglante, définit un *système élémentaire*.

Un procédé peut être considéré comme une juxtaposition de systèmes, qui représentent les plus petites entités prises en compte pour une régulation. L'hypothèse de la monoboucle simple consiste à décomposer chaque procédé en autant de systèmes qu'il y a de grandeurs à maîtriser, tous les systèmes étant considérés comme indépendants pour une première approche, malgré les couplages dus aux grandeurs perturbatrices.

Une caractéristique statique d'un système donne les valeurs d'une grandeur de sortie du système en fonction de celles d'une grandeur d'entrée, en régime permanent, les autres grandeurs d'entrée étant maintenues à des valeurs constantes déterminées. Celles-ci pouvant être considérées comme des paramètres, on dispose en fait d'un réseau de *caractéristiques statiques* du système.

Les courbes les plus intéressantes lient la grandeur réglée à la grandeur réglante; elles sont parfois appelées *caractéristiques statiques de transfert réglant*. Dans la pratique, l'appellation caractéristique statique, sans indication particulière, désigne toujours l'une de ces courbes.

Dans tous les cas :

- la grandeur réglée du système (température, pression...) est repré-

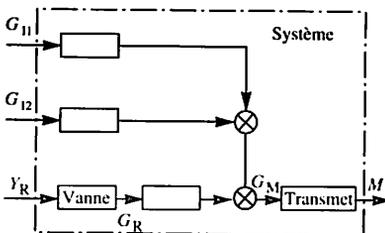
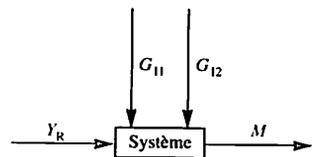


Fig. 1



sentée par un signal de mesure M , ou signal de sortie, exprimé en pourcentage de l'échelle du transmetteur;

- la grandeur réglante (débit de vapeur...) est pilotée par un signal de commande Y_R , exprimé également en pourcentage. Les caractéristiques du système « englobant », par nécessité, les caractéristiques du transmetteur et celles de l'actionneur. La figure 1 fournit un schéma fonctionnel de système, sous forme détaillée puis simplifiée.

Il faut savoir que la mesure peut parfois se noter X ou PV (process value).

2 Caractéristique typique hors perturbation

Pour la plupart des systèmes, il est possible de simplifier le réseau de caractéristiques pour mieux faire apparaître le lien entre la grandeur réglante et la grandeur réglée. Pour le moment, on suppose les perturbations dans un état standard, qui est celui le plus couramment observé. La prise en compte de leurs variations est envisagée dans un paragraphe ultérieur.

En général, on obtient une caractéristique dont l'allure est proche de l'une des trois courbes de la figure 2. Dans la pratique on obtient rarement une droite.

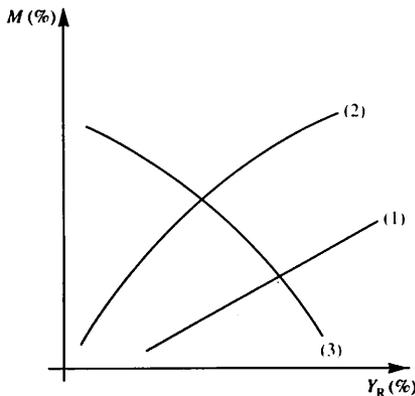


Fig. 2. Exemples de caractéristiques statiques. Les grandeurs G_1 et G_2 sont maintenues constantes.

(1) : caractéristiques linéaire croissante.

(2) : caractéristique croissante non linéaire.

(3) : caractéristique décroissante non linéaire.

Le type de la caractéristique (croissante ou décroissante) influe sur le choix d'un éventuel régulateur (chap. 16).

Exemple 1 : vanne de réglage

La plupart des procédés de fabrication étant commandés par des vannes progressives, il est primordial de connaître les principales allures des caractéristiques statiques de cette sorte d'actionneur. La grandeur mesurée est le débit volumique Q_v à travers la vanne, donné par la relation :

$$Q_v = kS \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

en désignant par : Q_v le débit volumique (m^3/s)
 k un coefficient constant, dépendant des unités employées

S la section de passage du fluide (m^2)
 ΔP la différence de pression aux bornes de la vanne (Pa)
 ρ la masse volumique du fluide (kg/m^3)

Le système est représenté figure 3 (schéma T.I. et schéma fonctionnel).

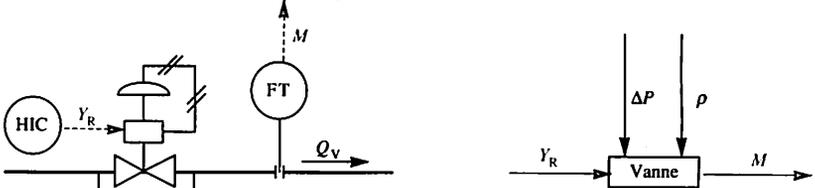


Fig. 3

Avec des grandeurs incidentes perturbatrices ΔP et ρ maintenues constantes, la caractéristique statique liant M et Y_R est uniquement fonction de la relation entre la section de passage S et le signal de commande Y_R . Cette caractéristique est appelée *caractéristique intrinsèque* de la vanne.

Suivant la réalisation technologique, trois allures sont possibles (fig. 4) :

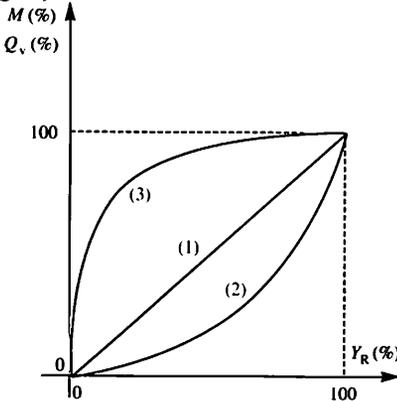


Fig. 4. Caractéristiques intrinsèques dite : (1) linéaire, (2) « égal pourcentage », (3) à ouverture rapide.

- courbe (1) : caractéristique linéaire,
- courbe (2) : caractéristique à allure exponentielle, dite « égal pourcentage »,
- courbe (3) : caractéristique à allure logarithmique, dite « à ouverture rapide ».

L'utilisation d'une vanne inadéquate (en particulier surdimensionnée) est la cause principale de la non-linéarité des caractéristiques des procédés.

Exemple 2 : mélange en ligne

Dans les industries de raffinage et en chimie industrielle, par commodité, certaines opérations de mélange sont réalisées directement sur les lignes de transfert reliant les unités de fabrication aux bacs de stockage (fig. 5). On parle alors de mélange en ligne.

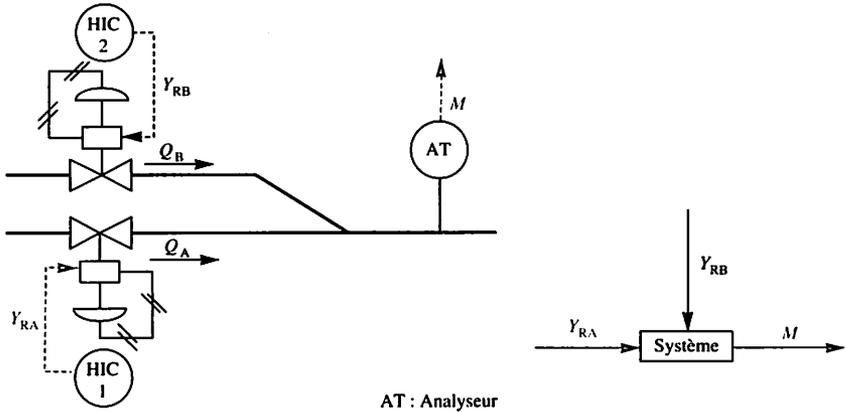


Fig. 5

Pour les conditions de fonctionnement suivantes :

- utilisation de vannes dont les caractéristiques, après installation sur le procédé, peuvent être considérées comme linéaires,
- débit Q_B maintenu par une commande Y_{RB} égale à 20 %, on peut donner la relation liant, en régime établi, la grandeur réglante Y_{RA} et le pourcentage M de produit A dans le mélange :

$$M(\%) = \frac{Y_{RA}}{Y_{RA} + Y_{RB}} \times 100 = \frac{Y_{RA}}{Y_{RA} + 20} \times 100$$

C'est l'équation de la caractéristique statique (fig. 6). Cette caractéristique n'est pas linéaire, bien que les vannes soient à caractéristiques linéaires.

Dans un chapitre ultérieur on verra que plus la caractéristique d'un système est proche d'une droite, plus la régulation est aisée. Par un choix judicieux de la caractéristique de la vanne, on peut améliorer la caractéristique globale du système afin de se rapprocher de cette situation.

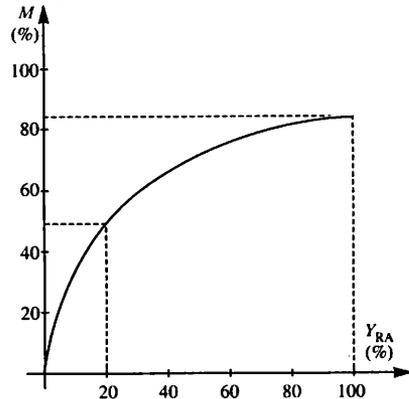


Fig. 6. Caractéristique statique du mélange en ligne, pour $Y_{RB} = 20\%$. On constate que l'adoption d'une vanne à caractéristique linéaire n'induit pas une caractéristique linéaire du système complet. Bien au contraire, dans le cas présent pour obtenir une caractéristique globale linéaire, il convient d'utiliser une vanne « égal pourcentage » qui introduit une non-linéarité complémentaire dans la chaîne.

1 Influence d'une perturbation

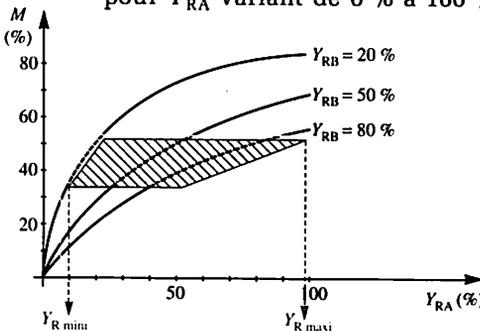
Les variations, aléatoires ou non, des grandeurs incidentes perturbatrices modifiant la grandeur de sortie, on est conduit à tracer le réseau complet des caractéristiques, pour quantifier leur influence.

L'exemple du mélange en ligne du chapitre précédent se prête bien à cette étude puisque la perturbation est le signal de commande Y_{RB} que l'on peut maîtriser. On parle alors de perturbations déterministes pour les distinguer de celles qui sont purement aléatoires.

A l'aide de la relation donnée précédemment :

$M(\%) = \frac{Y_{RA}}{Y_{RA} + Y_{RB}} \times 100$, on peut tracer les courbes représentatives de

la fonction $M(Y_{RA})$, pour trois valeurs de Y_{RB} (20 %, 50 %, 80 %) et pour Y_{RA} variant de 0 % à 100 % (fig. 1).



$Y_{RB} \backslash Y_{RA}$	20	40	60	80	100
20	50	66,7	75	80	83,3
50	28,6	44,4	54,5	61,5	66,7
80	20	33,3	42,9	50	55,6

Fig. 1

Cette étude met en évidence :

- la non-linéarité du système,
- l'influence de la perturbation,
- la zone de fonctionnement probable qui dépend des valeurs extrêmes de la perturbation et de la puissance de commande disponible, caractérisée par les valeurs $Y_{R\text{mini}}$ et $Y_{R\text{maxi}}$.

2 Relevé expérimental

Dans la pratique, les relations liant les grandeurs caractérisant un procédé industriel sont complexes et souvent imparfaitement connues à cause des conditions d'exploitation, de l'usure du matériel, etc. Le relevé expérimental, effectué sur le site de production, en liaison avec les agents d'exploitation, reste le moyen le plus utilisé, même si cette méthode est souvent longue, peu précise et difficile à mettre en œuvre à cause des contraintes de production et de sécurité.

Ces essais se font en régime permanent appelé équilibre statique en régulation, en attendant suffisamment longtemps pour que la sortie, c'est-à-dire le signal M , se stabilise après le régime transitoire dû à une petite variation du signal de commande Y_R et en vérifiant les valeurs des perturbations à chaque relevé de point.

Généralement, plusieurs essais sont nécessaires pour disposer de suffisamment de points fiables.

3 Point de fonctionnement

En régulation industrielle, un des cas les plus fréquents est celui de la régulation de maintien. En agissant sur la valeur du signal de commande Y_R , on cherche à maintenir la grandeur de sortie à une valeur désirée et donc M à une valeur que l'on appellera bientôt la consigne.

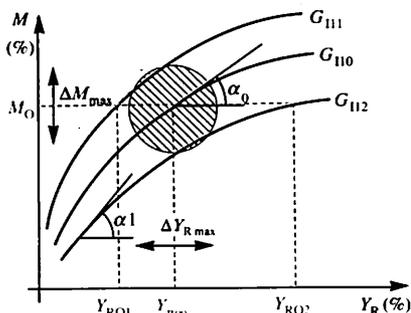


Fig. 2

$y_R = \Delta Y_R$ du signal de commande déplace le point de fonctionnement sur la caractéristique correspondant à G_{110} et engendre une variation $m = \Delta M$ du signal de mesure.

De même, à signal de commande Y_{R0} constant, une évolution de la grandeur d'influence G_i provoque également une variation $m' = \Delta M'$ du signal de mesure.

Dans les deux cas, les variations étant de faible amplitude dans la zone d'évolution, on peut assimiler les portions de courbes caractéristiques à des segments de droites d'angle de pente α_0 .

Dans ce domaine d'évolution, le système peut être considéré comme linéaire.

On définit alors le gain statique K par le rapport suivant :

$$K = \frac{m}{v_R} = \frac{\Delta M}{\Delta Y_R}$$

Pour le point de fonctionnement considéré figure 2, on a : $K = \tan \alpha_0$, si l'on adopte les mêmes échelles sur les deux axes.

On note que K est un nombre sans unité, car obtenu comme rapport de pourcentages.

L'angle de pente α dépend du point de fonctionnement choisi et donc K n'est pas constant ; en général un système est donc non linéaire, mais il est toujours possible de l'assimiler à un système *localement linéaire*, ce qui permet alors d'utiliser un formalisme mathématique comme les transformées complexes et les transformées de Laplace (voir chapitres 23 et 24).

Le point de fonctionnement est le point d'intersection de la droite verticale correspondant à une commande fixe Y_{R0} et de la caractéristique du réseau correspondant à l'état actuel des perturbations (fig. 2). Ce point a pour coordonnées (Y_{R00}, M_0, G_{110}) . Pour une valeur désirée M_0 on trouve différentes valeurs de Y_R , suivant l'état des perturbations.

- Linéarisation de la caractéristique du système autour d'un point de fonctionnement.

A partir d'un point de fonctionnement (Y_{R00}, M_0, G_{110}) , une petite variation

Exercice résolu

Dans l'industrie chimique, il est fréquent d'avoir à neutraliser des effluents acides ou basiques résultant de certaines réactions de fabrication. Les réactions de neutralisation s'effectuent en plusieurs étapes, dans plusieurs bacs successifs qui sont souvent maintenus à niveau constant par un simple système de débordement.

Habituellement, une fraction du mélange obtenu est réinjectée dans le bac de neutralisation qui le précède, afin d'obtenir un effet « tampon ». Cet effet permet de limiter la variation du pH lors d'une injection de produit neutralisant. Une vanne de régulation permet de maîtriser le débit de recyclage. Elle offre également la possibilité d'opérer un recyclage total en cas de pH hors limites.

Le dispositif utilisé est représenté figure 3; Q_{e1} représente le débit du liquide en provenance du bac amont, Q_{e2} le débit du produit neutralisant. On désire établir les caractéristiques statiques fournissant le signal de débit M en fonction de la commande Y_R de la vanne, pour différentes valeurs de la masse volumique ρ du liquide contenu dans le bac.

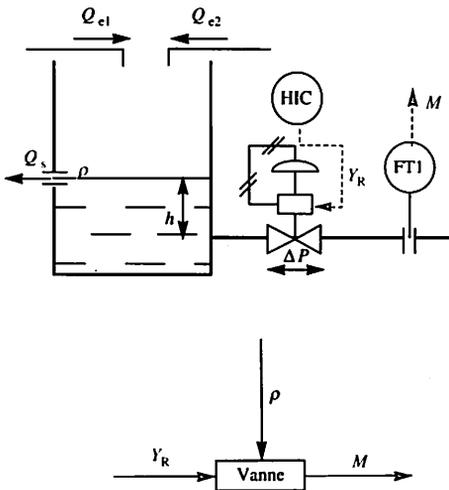


Fig. 3

On désigne par :

Q_m , le débit massique (kilogrammes par seconde) dont le signal image est M en pourcentage;

h , la hauteur de liquide au-dessus de l'extraction est constante et égale à 2 mètres;

Y_R , le signal de commande d'une vanne linéaire, exprimé en pourcentage;

ρ , la masse volumique du liquide (kilogrammes par mètre cube) comprise entre 800 kg/m^3 et 1200 kg/m^3 ;

ΔP , la différence de pression aux bornes de la vanne en pascals. La pression en aval de la vanne est prise égale à la pression atmosphérique.

Le débit massique à travers une vanne linéaire est donné par la relation :

$$Q_m = \rho Q_v = \rho Y_R k \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} = Y_R k \sqrt{\Delta P \cdot \rho}$$

Les pertes de charge sont considérées comme négligeables. Le point de fonctionnement typique correspond aux valeurs suivantes : $Y_{R0} = 50 \%$;

$$Q_m = 900 \text{ kg/h}; \rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Dans ces conditions :

1. Déterminer le coefficient de débit k .
2. Établir l'étendue de mesure minimale du transmetteur de débit FT1 en tenant compte des perturbations extrêmes, garantissant ainsi le fonctionnement sur toute la plage de variation
3. En déduire la valeur M_0 du signal de mesure correspondant au point de fonctionnement choisi.
4. Tracer les caractéristiques statiques pour $\rho = 800, 1000$ et 1200 kg/m^3 .
5. Déterminer le coefficient de débit CV de la vanne à pleine ouverture.

Solution :

1. Détermination du coefficient k

De la relation : $Q_m = Y_R k \sqrt{\Delta P \cdot \rho}$ on

$$\text{tire : } k = \frac{Q_m}{Y_R \sqrt{\Delta P \cdot \rho}}$$

Application numérique :

$$Q_m = 0,25 \text{ kg/s}; Y_R = 50 \%$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3;$$

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot h = 10^3 \times 9,81 \times 2 = 19620 \text{ Pa}$$

et : $k = 11,3 \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$

2. Étendue de mesure minimale de FT1

Elle doit permettre l'indication du débit avec la valeur maximale de ρ soit : $\rho_{\max} = 1200 \text{ kg/m}^3$.

D'après la première question :

$$Q_m = 11,3 \cdot 10^{-7} Y_R \sqrt{\Delta P \cdot \rho}$$

Pour l'ouverture complète $Y_R = 100 \%$.

$$\Delta P_{\max} = \rho_{\max} \cdot g \cdot h = 1200 \times 9,81 \times 2 = 23,5 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

On trouve : $Q_m = 0,60 \text{ kg/s}$.

Ce débit maximal définit l'échelle du transmetteur c'est-à-dire l'étendue de mesure minimale du transmetteur de débit FT1.

3. Valeur M_0 du signal mesure

La valeur $Q_m = 0,60 \text{ kg/s}$ représente 100 % de l'échelle du transmetteur. Donc la valeur $Q_m = 900 \text{ kg/h}$, soit $Q_m = 0,25 \text{ kg/s}$, représente 41,7 % de cette échelle.

4. Tracé des caractéristiques

Le signal M , exprimé en pourcentage, peut s'écrire, d'après la question 3 :

$$M = k' Y_R \sqrt{\Delta P \cdot \rho}$$

avec : $k' = \frac{100}{0,6} \times 11,3 \cdot 10^{-7}$

D'où : $k' = 18,83 \cdot 10^{-5}$

D'après l'échelle du transmetteur :

- pour $\rho = 800 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow M = 0,667 Y_R$
(toutes valeurs en pourcentage)

- pour $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow M = 0,834 Y_R$

- pour $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow M = Y_R$.

Les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 4.

Dans la pratique, l'échelle du transmetteur est souvent surdimensionnée, de façon à pouvoir fournir une indi-

cation fiable même en cas de soutirage forcé par une pompe, en fonctionnement de sécurité.

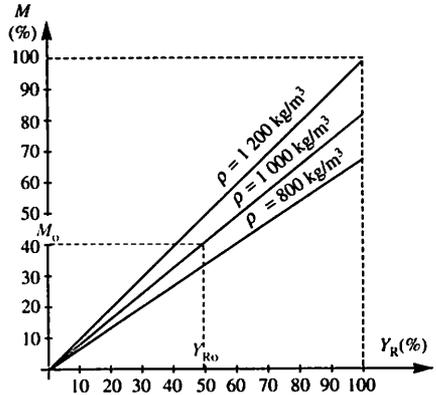


Fig. 4

5. Coefficient CV

Défini au chapitre 3, ce coefficient est donné par la relation :

$$CV = 1,156 \cdot Q_V \cdot \sqrt{\frac{d}{\Delta P}}$$

Dans le cas particulier de cette étude,

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot h \text{ et } \rho Q_V = Y_R k \sqrt{\rho^2 \cdot g \cdot h}$$

On peut noter que le débit volumique est indépendant de la masse volumique ρ car $Q_V = Y_R k \sqrt{g \cdot h}$.

Le calcul de $Q_{V \max}$ peut donc être réalisé pour une masse volumique quelconque, par exemple $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$.

On obtient :

$$Q_{V \max} = \frac{Q_{m \max}}{\rho} = \frac{0,60 \times 3600}{1200} = 1,8 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot h = 1200 \times 9,81 \times 2 = 23544 \text{ Pa} = 0,235 \text{ bar}$$

$$CV = 1,156 \times 1,8 \cdot \sqrt{\frac{1,2}{0,235}} = 4,7$$

Dans la pratique on choisit une vanne caractérisée par un coefficient CV supérieur pour assurer un fonctionnement satisfaisant de la vanne.

1 Fonctions de transfert

Les deux chapitres précédents ont mis en évidence qu'il est possible, par modèle de connaissance ou expérimentalement, de déterminer la relation entre une grandeur de sortie et une grandeur d'entrée, à condition d'être en régime permanent.

Ces informations ne suffisent plus lorsqu'il s'agit d'obtenir, d'un opérateur humain ou d'un système automatique, une réaction sur une des grandeurs d'entrée afin de combattre l'effet d'une variation d'une grandeur perturbatrice.

Le problème est alors souvent celui-ci : faut-il réagir brutalement sur la grandeur réglante, ou faut-il doser l'action en imposant à la variation y_R du signal de commande une loi d'évolution adaptée au système ?

La connaissance de la relation qui lie à chaque instant l'évolution d'une grandeur de sortie $S(t)$ à la variation d'une des grandeurs d'entrée $E(t)$ correspondante devient indispensable. Parce que cette relation dépend de toutes les grandeurs physiques caractérisant le procédé, on adopte la même démarche qu'au chapitre 6 : on recherche une relation entre $S(t)$ et $E(t)$, les autres grandeurs pouvant être considérées comme constantes.

Cette relation notée $S(t) = \mathcal{F}[E(t)]$ est appelée fonction de transfert du système.

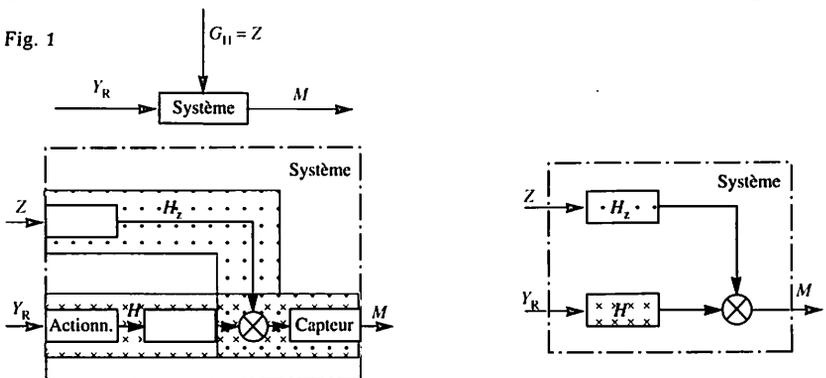
Bien que la connaissance complète d'un système nécessite la connaissance de toutes les fonctions de transfert liant une grandeur de sortie aux grandeurs d'entrée qui l'influencent, on réduit le plus souvent l'étude à la recherche de la fonction de transfert liant la grandeur réglée $M(t)$ à la grandeur réglante $Y_R(t)$, et parfois à la recherche de celle liant la grandeur réglée à la perturbation la plus influente $Z(t)$.

Cela conduit à définir :

- la fonction de transfert réglante H : $M(t) = H[Y_R(t)]$

- la fonction de transfert perturbatrice H_Z : $M(t) = H_Z[Z(t)]$

La connaissance de H , et parfois de H_Z , est à la base de la réflexion permettant la mise en œuvre d'une stratégie de commande (fig. 1).



L'expérience montre que les fonctions de transfert peuvent être exprimées au moyen d'équations différentielles plus ou moins complexes. Souvent on peut les simplifier en reliant entre elles des variations de faible amplitude, qui correspondent à des évolutions autour d'un point de fonctionnement.

Si l'on pose : $Y_R = Y_{R0} + y_R$; $M = M_0 + m$; $Z = Z_0 + z$, la fonction de transfert réglante et la fonction de transfert perturbatrice sont exprimées par les relations suivantes : $m(t) = H[y_R(t)]$ et $m(t) = H_z[z(t)]$ (fig. 2)

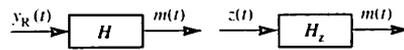


Fig. 2

Elles peuvent généralement être décrites par des équations différentielles linéaires à coefficients constants de la forme normalisée suivante :

$$a_n \frac{d^n m}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dm}{dt} + m(t) = b_m \frac{d^m y_R}{dt^m} + \dots + b_0 y_R(t)$$

où le deuxième membre est une combinaison linéaire de $y_R(t)$ et de ses dérivées successives.

Le système est alors dit d'ordre n , celui de la dérivée d'ordre le plus grand sur $m(t)$.

2 Détermination d'une fonction de transfert

Dans un certain nombre de cas, comme par exemple en électricité ou en mécanique, il est possible, grâce aux lois de la physique, de déterminer les fonctions de transfert liant différentes grandeurs caractérisant un système (voir exercice résolu).

En revanche, dans la majorité des cas, une approche théorique est difficile, voire impossible. Il faut alors chercher à déterminer expérimentalement les fonctions de transfert, à partir de l'analyse des signaux de sortie obtenus pour des signaux d'entrée particuliers.

On distingue deux approches : la *méthode temporelle* et la *méthode fréquentielle*.

Analyse temporelle

On impose une variation à la grandeur d'entrée $E(t)$ du système (dans la mesure où celle-ci est commandable) et on enregistre l'évolution de la grandeur de sortie $S(t)$ que l'on cherche à relier à $E(t)$. On obtient donc un régime transitoire que l'on compare à celui de différents systèmes, régis par des équations différentielles simples, pour la même sorte de sollicitation. Par similitude, on définit ainsi l'équation la plus « proche » du système étudié.

Cette comparaison, que l'on appelle *identification*, est traitée aux chapitres 9 à 14, et dans Étapes, Régulation 2.

Trois sortes de sollicitation sont utilisées : l'échelon, la rampe et l'impulsion de Dirac.

Réponse transitoire à un échelon

L'échelon est défini comme la limite du signal représenté figure 3, lorsque Δt tend vers zéro.

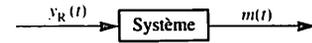
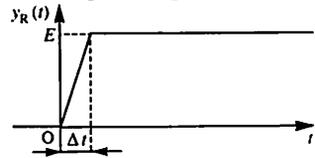


Fig. 3

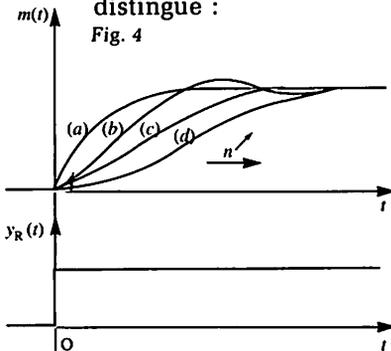


Si $E = 1$ (dans une échelle quelconque) on parle d'échelon unité, ou de fonction de Heaveside, noté $u(t)$ (voir chapitre 24) et la courbe de sortie est appelée réponse indicielle.

Cette sollicitation est très employée industriellement car la réponse obtenue est facilement exploitable. En particulier, elle peut être utilisée pour adopter des paramètres de réglage pour un régulateur. Dans la pratique, pour rester dans l'hypothèse linéaire et pour respecter les contraintes de production, l'amplitude de l'échelon est limitée à 10 % de l'échelle du signal de commande. Exemple : $y_R(t) = 5u(t)$

En fonction de la réponse à un échelon de commande y_R , on distingue :

Fig. 4



a) les systèmes naturellement stables

Une variation «finie» de l'entrée entraîne une variation «finie» de la sortie. L'allure de leur réponse indicielle est fournie figure 4. Ces courbes sont les solutions, lorsque $y_R(t)$ subit une variation en échelon, d'équations différentielles de la forme :

$$a_n \frac{d^n m}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dm}{dt} + m(t) = K y_R(t) \quad (a_0 = 1)$$

Le système est dit d'ordre n (celui de la dérivée d'ordre le plus grand) et de classe 0 (pas d'intégration portant sur $y_R(t)$) : en régime permanent $m(\infty) = \text{constante}$.

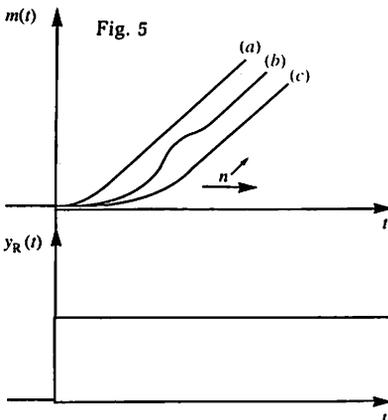
b) les systèmes naturellement instables

Une variation «finie» de l'entrée entraîne une variation «infinie» de la sortie. L'allure de leur réponse indicielle est fournie à la figure 5.

Ces courbes sont les solutions, lorsque $y_R(t)$ subit une variation en échelon, d'équations différentielles de la forme :

$$a_n \frac{d^n m}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dm}{dt} + m(t) = K \int y_R(t) dt$$

Fig. 5



Le système est d'ordre $n+1$ et de classe 1 (une d'intégration) car, par dérivation, on aboutit à l'équation suivante :

$$a_n \frac{d^{n+1} m}{dt^{n+1}} + \dots + a_1 \frac{d^2 m}{dt^2} + \frac{dm}{dt} = Ky_R(t)$$

qui ne comporte plus de terme en $m(t)$. En régime permanent de sollicitation $y_R(t)$ on obtient ($t = \infty$) : $\left(\frac{dm}{dt}\right)_{t=\infty} = \text{constante}$.

Réponse transitoire à une impulsion de Dirac

Cette sollicitation est difficile à réaliser physiquement. Cependant les techniques numériques actuelles permettent de reconstituer facilement la réponse d'un système à une telle sollicitation appelée *réponse impulsionnelle*.

L'impulsion de Dirac, que l'on note $\delta(t)$, peut mathématiquement se définir comme la dérivée de l'échelon unité.

La figure 6 permet d'appréhender cette fonction, lorsque Δt tend vers zéro.

Par définition : $\delta(t) = 0$ sauf à l'instant

$$t=0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = u(t) = 1.$$

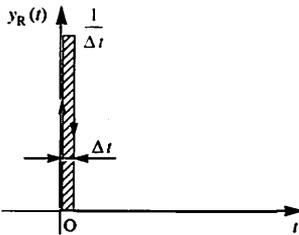


Fig. 6

Analyse fréquentielle

On impose une variation sinusoïdale à la grandeur d'entrée ($y_R(t) = A \sin \omega t$) et on enregistre l'évolution de la grandeur de sortie que l'on cherche à relier à la grandeur d'entrée (fig. 7). Ce signal est maintenu suffisamment longtemps pour que le régime transitoire disparaisse. L'étude s'effectue donc en régime permanent. Pour diverses valeurs de la pulsation ω , on relève l'amplitude m du signal de sortie et son déphasage ϕ par rapport au signal d'entrée.

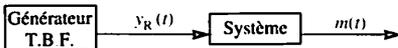


Fig. 7

Ces relevés permettent alors de tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert isochrone liant $M(j\omega)$ à $Y_R(j\omega)$ (chap. 25).

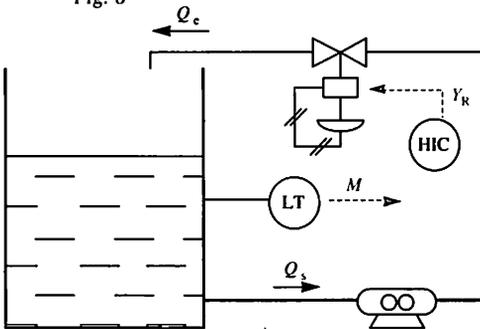
L'analyse fréquentielle, également dénommée *analyse harmonique*, est une méthode expérimentale peu utilisée industriellement pour une identification.

L'utilisation de la fonction de transfert isochrone demeure cependant indispensable pour un grand nombre d'études théoriques, notamment pour celle de la stabilité des boucles de régulation.

Exercice résolu

L'industrie chimique a souvent recours au stockage intermédiaire de liquides qui peuvent être des produits de récupération ou des réactifs de base. Suivant le procédé, le soutirage en fond de cuve peut être naturel ou forcé, c'est-à-dire assisté par une pompe. Cet exercice concerne un bac à soutirage forcé par pompe (fig. 8).

Fig. 8



Les caractéristiques de l'installation sont les suivantes :

- le réservoir a une section S de $0,50 \text{ m}^2$;
- l'échelle du transmetteur de niveau LT est égale à $1,0 \text{ m}$. On peut noter que le zéro du transmetteur peut ne pas correspondre au fond de la cuve;
- la vanne de type NF, à caractéristique linéaire, permet un débit maximal $Q_{e \text{ maxi}} = 1,5 \text{ m}^3/\text{h}$ lorsque son ouverture atteint 100% . Le débit de sortie Q_s est maintenu constant et égal à $0,60 \text{ m}^3/\text{h}$ grâce à une pompe volumétrique.

La relation liant une variation $q_e(t)$ du débit d'entrée $Q_e(t)$ à une variation $y_R(t)$ du signal de commande de la vanne est :

$$\tau \frac{dq_e}{dt} + q_e(t) = K y_R(t) \quad (1)$$

en désignant par τ une constante homogène à une durée de 30 secondes , par K le gain statique, et si y_R et q_e sont exprimés en pourcentage de leur valeur maximale.

Le point de fonctionnement initial est défini par : $Q_{s0} = 0,60 \text{ m}^3/\text{h}$; signal de mesure : $M_0 = 50 \%$

1. Déterminer quel débit d'entrée Q_{e0} permet d'obtenir un point de fonctionnement stable.
2. Calculer la valeur de K .
3. Déterminer la valeur de Y_{R0} .
4. Établir la relation liant la variation $m(t)$ de l'image du niveau et la variation $q_e(t)$ autour du point de fonctionnement qui lui a donné naissance, ces deux grandeurs étant exprimées en pourcentages.
5. Établir la relation liant la variation $m(t)$ de l'image du niveau et la variation $y_R(t)$ autour du point de fonctionnement qui lui a donné naissance.
6. En déduire la fonction de transfert isochrone du système considéré.
7. Conclusions sur le contrôle-commande.

Solution :

1. Débit d'entrée Q_{e0}

On peut supposer incompressible le liquide stocké. Si le niveau, dont M_0 est une image, est fixe, le volume contenu dans le bac est constant : le débit d'entrée Q_{e0} est donc égal au débit de sortie Q_{s0} . Donc :

$$Q_{e0} = 0,60 \text{ m}^3/\text{h}$$

2. Détermination de K

L'équation différentielle (1) admet une solution particulière simple :

$$q_e(t) = \text{constante. Donc : } \frac{dq_e}{dt} = 0$$

L'équation (1) se simplifie et s'écrit :

$$q_e(t) = K y_R(t) \quad (2)$$

où K est donc le gain statique (chap. 4), pente de la caractéristique statique, autour du point de fonctionnement.

On rappelle que la vanne est à caractéristique linéaire (chap. 4) : le gain statique de la vanne est donc constant sur toute l'étendue d'échelle de l'actionneur et on peut, exceptionnellement, confondre q_e avec Q_e et y_R avec Y_R .

Le débit $Q_{e \text{ maxi}} = 1,5 \text{ m}^3/\text{h}$, correspondant à 100 % de son échelle, étant obtenu pour une valeur y_R de 100 %

on tire : $K = 1$

3. Détermination de Y_{R0}

Le point de fonctionnement correspond à $Q_{s0} = 0,60 \text{ m}^3/\text{h}$, c'est-à-dire à 40 % de l'échelle. La relation (2), applicable à toute l'échelle, peut s'écrire : $Q_{e0} = KY_{R0}$

soit $Y_{R0} = \frac{Q_{e0}}{K}$. Donc : $Y_{R0} = 40 \%$

4. Relation liant $m(t)$ à $q_e(t)$

Le débit de soutirage étant constant, toute variation de niveau est due à une différence entre le débit d'entrée Q_e et le débit de sortie Q_s . Si le débit d'entrée subit une variation $q_e(t)$, celle-ci engendre une augmentation du volume égale à :

$$v(t) = \int_0^t q_e(t) \cdot dt$$

La variation m de niveau obtenue est telle que : $v = mS$. D'où la relation cherchée :

$$mS = \int_0^t q_e(t) \cdot dt$$

$$\text{ou : } m(t) = \frac{1}{S} \int_0^t q_e(t) \cdot dt \quad (3)$$

avec m en mètres, S en mètres carrés et q_e en mètres cubes par seconde.

Si l'on choisit d'exprimer q_e en mètres cubes par heure, on modifie la relation (3) par un facteur d'échelle :

$$m(t) = \frac{1}{3600 S} \int_0^t q_e(t) \cdot dt \quad (4)$$

Si l'on choisit d'exprimer q_e et $m(t)$ en pourcentages, on modifie la relation (4) par un second facteur d'échelle. La correspondance à prendre en compte est la suivante :

En effet 1 m \leftrightarrow 100 %
1,5 $\text{m}^3/\text{h} \leftrightarrow$ 100 %

Donc :

$$m(t) = \frac{1}{3600 \times 0,666S} \int_0^t q_e(t) \cdot dt$$

soit : $m(t) = k \int_0^t q_e(t) \cdot dt$ (5) avec

$$k = 834 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

5. Relation liant $m(t)$ à $y_R(t)$

D'après la relation (5) $q_e(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{dm(t)}{dt}$

donc également : $\frac{dq_e(t)}{dt} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2m(t)}{dt^2}$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$\tau \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2m(t)}{dt^2} + \frac{1}{k} \cdot \frac{dm(t)}{dt} = Ky_R(t)$$

On obtient un système naturellement instable d'ordre 2 et de classe 1. Par intégration on obtient ($K = 1$) :

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = k \int_0^t y_R(t) dt \quad (6)$$

6. Fonction de transfert isochrone

D'après le chapitre 23, on peut transformer l'équation différentielle (6) :

$$\tau j\omega M(j\omega) + M(j\omega) = \frac{kY_R(j\omega)}{j\omega}$$

$$\text{donc : } H(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{Y_R(j\omega)} = \frac{k}{j\omega(1 + \tau j\omega)}$$

7. Conclusions sur le contrôle-commande

Le système étudié est donc de classe 1 et d'ordre 2. Le fait que le système soit intégrateur (classe 1) pose essentiellement deux problèmes :

- le réglage d'un régulateur assurant le contrôle automatique du niveau sera délicat et devra être réalisé avec soin. Dans cette optique la connaissance précise des valeurs numériques des coefficients k et τ est essentielle, qu'elle soit obtenue par le calcul ou expérimentalement.

- si pour une raison quelconque, le régulateur est commuté en position « Manuel », le signal de commande de vanne Y_R est bloqué à une valeur fixe. Si à cet instant $Q_e \neq Q_s$, le niveau évoluera vers 0 % ou 100 %, déclenchant ainsi les alarmes de sécurité.

1 Définitions

On sait que, pour les systèmes étudiés, la relation qui lie les évolutions au cours du temps de deux grandeurs interdépendantes est une équation différentielle. Même si l'on simplifie l'étude de ces équations en ne considérant que de petites variations des grandeurs, ce qui permet de ne considérer que des équations linéaires et à coefficients constants, leur résolution mathématique n'en présente pas moins une difficulté importante. Heureusement l'expérience industrielle montre que seules deux équations différentielles peuvent être prises en compte : celle du premier ordre et celle du second ordre. Au chapitre 13 on verra que toute équation d'ordre plus élevé peut se décomposer selon ces deux équations dites de base.

Un système est dit du 1^{er} ordre si la relation liant une variation $s(t)$ de la grandeur de sortie à la variation $e(t)$ du signal d'entrée qui lui a donné naissance est régie par une équation différentielle du 1^{er} ordre que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (1)$$

τ est la constante de temps du système et s'exprime en secondes ; K est le gain statique du système.

Dans la majorité des cas, le nombre K est sans unité car il correspond au rapport de la variation $s(t) = m(t)$ du signal de mesure, image d'une grandeur physique et de la variation $e(t) = y_R(t)$ d'un signal de commande (fig. 1), ces deux variations étant toutes deux des pourcentages.

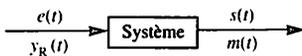


Fig. 1

2 Exemples

Dipôle R.C.

Le dipôle capacitif formé par l'association en série d'une résistance R et d'un condensateur parfait de capacité C est soumis à une tension variable $e(t)$ qui constitue le signal d'entrée. La tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur constitue le signal de sortie $s(t)$ (fig. 2).

Compte tenu des conventions adoptées pour les grandeurs électriques, la loi des mailles s'écrit :

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) \quad \text{avec : } u_R = Ri \quad \text{et :}$$

$$u_C = \frac{q}{C}$$

$$\text{Or puisque : } i = \frac{dq}{dt}, \text{ il vient : } i = C \frac{du_C}{dt}$$

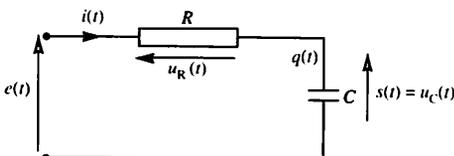


Fig. 2

L'équation différentielle est donc : $e(t) = R \left[C \frac{du_C(t)}{dt} \right] + u_C(t)$ ce que

l'on peut écrire : $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$ avec : $\tau = RC$ et $K = 1$.

Remarque très importante : En technologie d'instrumentation de régulation il est souvent utile de pouvoir représenter un dispositif physique tel que le dipôle RC précédent comme un système «bouclé» (fig. 3). On peut montrer facilement qu'un tel «schéma fonctionnel technologique» permet de retrouver l'équation différentielle initiale :

- relation tension-courant pour une résistance : $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$

- relation courant-tension pour un condensateur : $s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$

- définition d'un soustracteur (ou comparateur) : $u_R(t) = e(t) - s(t)$.

On retrouve, par élimination de $i(t)$ et $u_R(t)$:

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

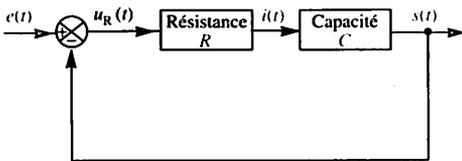


Fig. 3

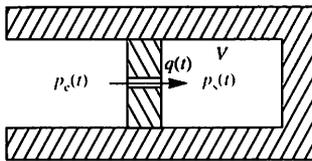


Fig. 4

Association restriction - volume

Un tel dispositif est représenté figure 4. Une enceinte close de volume V constant est en communication avec un dispositif extérieur à la pression $p_e(t)$, par l'intermédiaire d'un diaphragme de section réduite, communément appelé restriction. Une telle restriction s'oppose à un équilibre instantané des pressions $p_s(t)$ et $p_e(t)$, lorsque cette dernière évolue.

On réalise l'analogie suivante entre grandeurs électriques et grandeurs mécaniques :

$p_e(t) \rightarrow e(t)$; $p_s(t) \rightarrow s(t)$; débit entrant $q(t) \rightarrow i(t)$

En mécanique des fluides on montre que :

$$\tau \frac{dp_s(t)}{dt} + p_s(t) = p_e(t)$$

où τ est une constante exprimée en secondes.

Le «schéma fonctionnel technologique» est fourni figure 5.

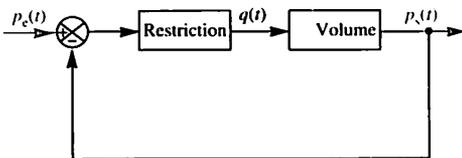


Fig. 5

3 Analyse temporelle

Réponse transitoire à un échelon (réponse indicielle)

Par définition, il faut réaliser un échelon sur le signal d'entrée, à partir d'un point de fonctionnement stable, et déterminer l'évolution du signal de sortie.

Les signaux $e(t)$ et $s(t)$ étant des variations par rapport à un point de fonctionnement initial stable, l'instant $t=0$ est déterminé par les

conditions initiales : $[s(t)]_0 = 0$; $\left[\frac{ds(t)}{dt}\right]_0 = 0$. Pour simplifier on suppose que l'échelon est d'amplitude unité donc à l'instant $t=0$, $e(t)$ passe de 0 à 1. Pour t positif l'équation (1) peut s'écrire :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K$$

La résolution mathématique de cette équation fournit le signal $s(t)$:

$$s(t) = K(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2)$$

Ce signal croît en fonction du temps (fig. 6) et tend asymptotiquement vers la valeur K . Si l'échelon sur $e(t)$ est d'amplitude E la valeur finale est KE .

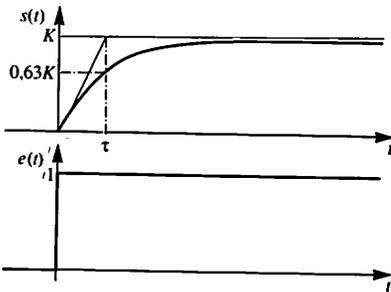


Fig. 6

Citons deux points caractéristiques de la réponse indicielle :

- Pour $t = \tau$; $s(\tau) = 0,63K$ (c'est-à-dire 63 % de la valeur finale).

- Pour $t = 3\tau$; $s(3\tau) = 0,95K$ (c'est-à-dire 95 % de la valeur finale).

La réponse indicielle présente un point anguleux pour $t=0$ et la tangente à la courbe à cet instant est inclinée. Cette tangente coupe l'asymptote horizontale à la courbe en un point d'abscisse τ .

Réponse transitoire à une rampe

Il faut réaliser une rampe linéaire sur le signal d'entrée, à partir d'un point de fonctionnement stable, et déterminer l'évolution du signal de sortie.

Les signaux $e(t)$ et $s(t)$ étant des variations par rapport à un point de fonctionnement initial stable, l'instant $t=0$ est déterminé par les

conditions initiales : $[s(t)]_0 = 0$ et $\left[\frac{ds(t)}{dt}\right]_0 = 0$. Pour obtenir un résultat

général on suppose que l'équation de la rampe est de la forme :

$$e(t) = k \cdot t \cdot u(t)$$

Si t est exprimé en secondes, et $e(t)$ en pourcentage, le coefficient k (à ne pas confondre avec le gain statique K) s'exprime avec une unité dont le symbole est $(\% s^{-1})$.

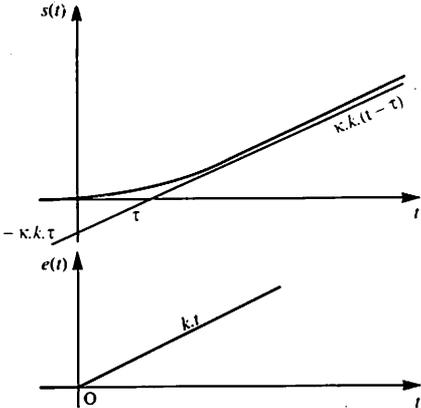


Fig. 7

La résolution mathématique de l'équation $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.k.t.u(t)$ fournit le signal $s(t)$:

$$s(t) = Kk\tau(e^{-t/\tau} - 1) + Kkt \quad (3)$$

Ce signal croît fonction du temps (fig. 7) et tend asymptotiquement vers la droite $s(t) = Kk(t - \tau)$.

La courbe correspondant à la réponse présente une tangente horizontale à l'instant $t = 0$. On remarque que, pour l'instant t , la dérivée de la fonction (3) redonne la fonction (2), si $k = 1$.

Réponse transitoire à une impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac, que l'on note $\delta(t)$, est difficile à réaliser physiquement. On peut cependant mathématiquement la définir comme la dérivée de l'échelon unité.

Si l'on considère l'équation fournissant la réponse indicielle :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ku(t) \quad (4)$$

Par dérivation de la relation (4) on obtient :

$$\tau \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} = K\delta(t) \quad (5)$$

Si l'on effectue un changement de variable en posant $s' = \frac{ds(t)}{dt}$, l'équation (5) peut s'écrire : $\tau \frac{ds'(t)}{dt} + s'(t) = K\delta(t)$

dont la solution $s'(t)$ est la réponse cherchée. D'après le changement de variable $s' = \frac{ds(t)}{dt}$, on voit que $s'(t)$ est mathématiquement la dérivée de la réponse indicielle. La réponse impulsionnelle est donc (fig. 8) :

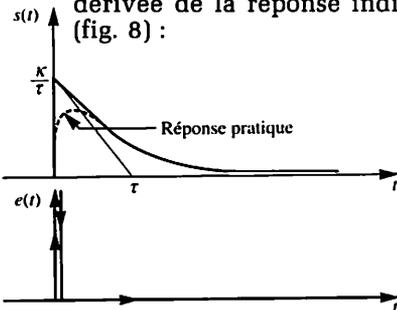


Fig. 8

$$s(t) = \left(\frac{K}{\tau}\right) e^{-t/\tau}$$

Exercice résolu

Le schéma de la figure 9 représente un bac de récupération. Le produit de récupération d'une colonne à distiller de débit Q_A se combine à un apport extérieur de débit Q_B , piloté par une vanne solénoïde en tout ou rien. Les deux produits sont considérés comme ayant la même masse volumique ρ . L'ouverture de la vanne solénoïde est commandée par un relais à seuil, déclenché sur une alarme de niveau bas. D'une façon générale, le problème est d'étudier les variations de niveau lors d'une ouverture de la vanne tout ou rien. On suppose que le soutirage en fond de bac est naturel, réglé par une vanne commandée manuellement. La pression en aval de la vanne est la pression atmosphérique, la pression en amont est celle du liquide au niveau du soutirage.

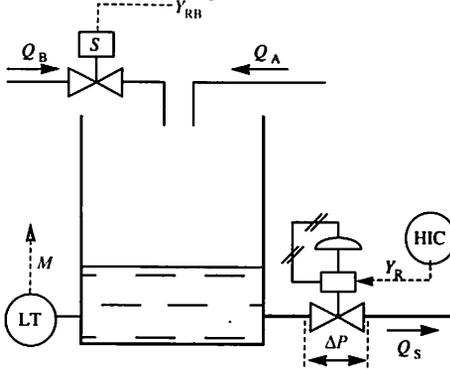


Fig. 9

On rappelle que le débit volumique à travers une vanne linéaire est donné par la relation :

$$Q_v = Y_R k \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} \quad \text{soit} \quad Q_v = Y_R k' \sqrt{\Delta P}$$

si la masse volumique est constante. On admet que, dans cette relation, le coefficient k' est tel que Q_v , Y_R , ΔP sont exprimés en pourcentage (centième de leur échelle de variation maximale).

Le point de fonctionnement initial correspond aux valeurs suivantes :

$M_0 = 25 \%$, image du niveau du liquide dans la cuve, au-dessus de l'extraction, $Y_{R0} = 50 \%$, valeur correspondant à un débit de sortie $Q_{s0} = 50 \%$, $Q_{A0} = 50 \%$, exprimé dans la même échelle que Q_s , $Q_{B0} = 0 \%$, exprimé dans la même échelle que Q_s .

- Déterminer la relation entre le débit Q_s et la différence de pression ΔP aux bornes de la vanne, pour un signal de commande Y_R fixe (régime statique).
- Représenter graphiquement la relation $Q_s = f(\Delta P)$.
- En déduire le gain statique K , pour le point de fonctionnement choisi.
- Déterminer, pour ce même point de fonctionnement, la relation liant une variation du débit $q_B(t)$ aux variations $m(t)$ du niveau et $q_s(t)$ du débit de sortie qu'elle engendre. En déduire que la relation liant $m(t)$ à $q_B(t)$ est une équation différentielle du 1^{er} ordre de constante de temps τ .
- Pour une variation $q_B(t) = 10u(t)$ et une constante de temps du bac $\tau = 100$ s, représenter graphiquement $m(t)$ et $q_B(t)$.
- L'hypothèse linéaire est-elle vraie sur cet intervalle de variation de $q_B(t)$?

Solution :

1. Relation entre Q_s et ΔP

Si h est la hauteur d'eau entre la vanne et la surface libre du bac, on peut écrire, d'après le principe fondamental de l'hydrostatique,

$$\Delta P = P_i - P_{atm} = h\rho g.$$

ΔP est donc ici uniquement proportionnelle à la hauteur d'eau, d'image M . Pour $M = 25 \%$ on peut donc écrire que $\Delta P = 25 \%$ de son échelle de variation maximale.

Le débit Q_s cherché est donné par la relation : $Q_s = Y_R k' \sqrt{\Delta P}$. Pour le point de fonctionnement indiqué on trouve :

$$k' = \frac{Q_s}{Y_R \sqrt{\Delta P}} = \frac{50}{50 \sqrt{25}} = 0,2$$

Donc $Q_s = 10\sqrt{\Delta P}$ (toutes les grandeurs sont des pourcentages).

2. Représentation graphique de $Q_s = f(\Delta P)$

D'après la question précédente ΔP et M exprimés sous forme de pourcentages sont égaux. La courbe représentative est fournie figure 10.

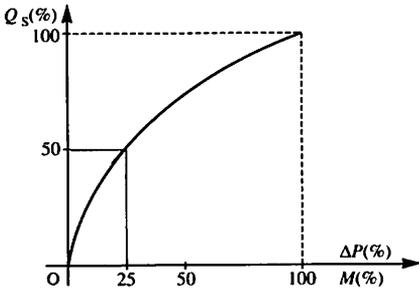


Fig. 10

3. Gain statique K_1 pour le point de fonctionnement choisi

Par définition $K_1 = \left[\frac{dQ_s}{dM} \right]_{\Delta P = 25\%}$

donc : $K_1 = \left[\frac{5}{\sqrt{\Delta P}} \right]_{\Delta P = 25\%}$ soit : $K_1 = 1$

Autour de ce point de fonctionnement, une variation de X % de ΔP (donc de M) entraîne une variation $q_s(t)$ numériquement égale du débit :

$\Rightarrow q_s(t) = m(t)$

4. Équation différentielle liant $m(t)$ à $q_B(t)$

D'après la relation (4) de l'exercice corrigé du chapitre précédent, on peut écrire $m(t)$ sous la forme :

$m(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t q_o(t) \cdot dt$

où τ est homogène à une durée et où $q_o(t)$ représente le «solde» (valeur algébrique) des débits entrants soit :

$q_o(t) = q_B(t) - q_s(t)$.

Donc : $m(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t [q_B(t) - q_s(t)] dt$

ou : $\tau \frac{dm(t)}{dt} = q_B(t) - q_s(t)$.

Or : $q_s(t) = m(t)$.

D'où : $\tau \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = q_B(t)$

Le «schéma fonctionnel technologique» correspondant est fourni figure 11.

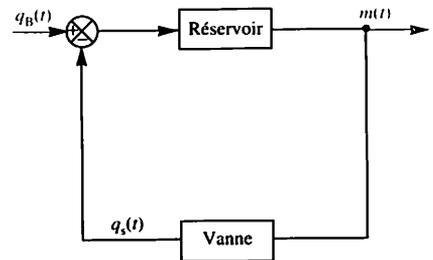


Fig. 11

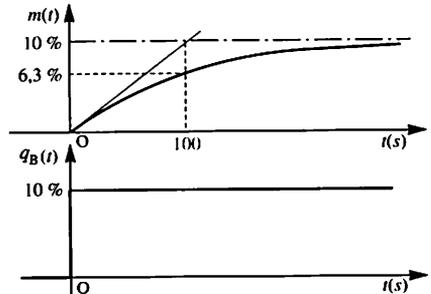


Fig. 12

5. Représentation graphique.

Voir figure 12.

6. Validité de l'hypothèse linéaire

Si $m(t)$ varie de 10 %, sur la caractéristique statique de la figure 10, le coefficient K_1 peut être calculé pour ce nouveau point de fonctionnement final.

$K_1 = \left[\frac{5}{\sqrt{\Delta P}} \right]_{\Delta P = 35\%}$ $K_1 = 0,84 \neq 1$

On voit donc que l'hypothèse linéaire est grossière, pour une variation de 10 % de q_B .

1 Introduction

L'identification d'un système passe par la détermination de la relation qui lie les évolutions au cours du temps de deux grandeurs interdépendantes. Dans la pratique, si l'on ne considère que de petites variations des grandeurs, on aboutit à une équation différentielle linéaire et à coefficients constants.

Cependant la détermination de la fonction de transfert sous sa forme temporelle n'est pas très pratique en régulation. En effet, le système est toujours associé à un système de commande automatique, lui-même régi par une équation différentielle.

Or il n'existe pas d'outils mathématiques permettant de déterminer, dans le domaine temporel, l'équation différentielle d'une association de deux systèmes à partir de leur équation différentielle respective. En revanche, les transformations (complexe ou de Laplace) des équations différentielles (voir chap. 23 et 24) permettent facilement cette détermination : la fonction de transfert de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert des deux systèmes associés en série. Ainsi les outils de base de la régulation sont les deux fonctions de transfert, isochrone et isomorphe, d'un système. La première s'utilise lorsque les signaux véhiculés sont périodiques, la deuxième s'impose lorsque ces signaux sont quelconques.

2 Fonction de transfert isochrone

Pour l'écriture des nombres complexes utilisée dans cet ouvrage, voir la remarque du paragraphe 4 du chapitre 23.

La transformation complexe (chap. 23) permet d'obtenir directement la fonction de transfert isochrone d'un système régi par l'équation suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Si l'on appelle \underline{S} le nombre complexe associé à la variation sinusoidale $s(t)$, on peut écrire : $\tau \cdot j\omega \cdot \underline{S} + \underline{S} = K\underline{E}$

La fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$

d'un système du 1^{er} ordre normalisé est donc :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}$$

Diagramme de Bode

La représentation de cette fonction de transfert dans un diagramme de Bode est abordée dans le chapitre 23 (voir également l'exercice résolu de ce chapitre). On rappelle les principaux résultats :

Son module est égal à : $H = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$; son argument est donné par la relation $\varphi = -\arctan \tau\omega$.

$G = 20 \lg \left(\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right) = 20 \lg K - 10 \lg(1 + \tau^2 \omega^2)$ et : $\varphi = -\arctan \tau\omega$

Les courbes de gain et de phase se construisent au moyen des résultats suivants :

$$\omega \ll \omega_c = \frac{1}{\tau} \Rightarrow G \simeq 20 \lg K \quad \text{et} \quad \varphi \simeq 0$$

$$\omega \gg \omega_c = \frac{1}{\tau} \Rightarrow G \simeq 20 \lg K - 20 \lg \tau \omega \quad \text{et} \quad \varphi \simeq -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

$$\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau} \Rightarrow G = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{2} = 20 \lg K - 3 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \varphi \simeq -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

Ces valeurs servent à construire le tracé asymptotique de Bode :

La courbe de gain est constituée de deux demi-droites de pente 0 pour l'une et -20 dB/décade pour l'autre.

La courbe de phase admet deux asymptotes à 0° et -90° .

On constate que la courbe de gain est en général assez proche du tracé asymptotique constitué de deux demi-droites, grâce au choix d'une graduation logarithmique sur l'axe horizontal. Le point d'intersection

de ces deux demi-droites correspond à $\omega_c = \frac{1}{\tau}$. Cette valeur est appelée *pulsation de coupure*.

Pour cette pulsation la courbe réelle est située à -3 dB au-dessous des asymptotes et l'asymptote inclinée ($\omega \rightarrow \infty$) a une pente de -6 dB/octave ou -20 dB/décade

Pour $\tau = 20 \text{ s}$ les deux courbes sont fournies figure 1

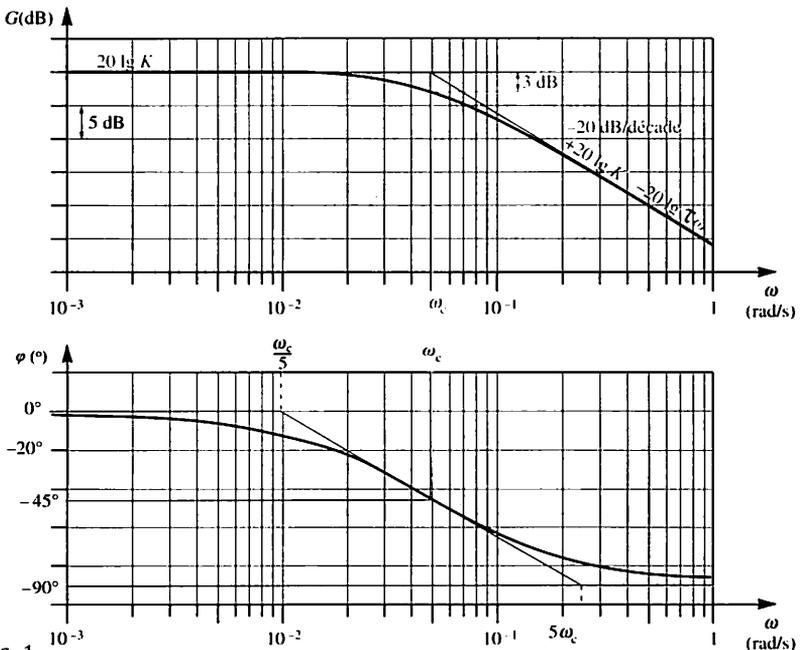


Fig. 1

Cependant ce système de représentation, utile en électronique, est mal commode en régulation où le déphasage φ entre le signal d'entrée et le signal de sortie joue un rôle plus important qu'en électronique (qui néglige souvent la courbe de phase).

Diagramme de Nyquist

Dans le plan complexe, le lieu de Nyquist d'une fonction de transfert $H(j\omega)$ est la courbe qui représente la suite des positions de l'image de $H(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à l'infini. Ce système de représentation est surtout utile pour l'étude de la stabilité des systèmes bouclés. Pour un système du 1^{er} ordre, la courbe représentative de $H(j\omega)$ est un demi-cercle (fig. 2).

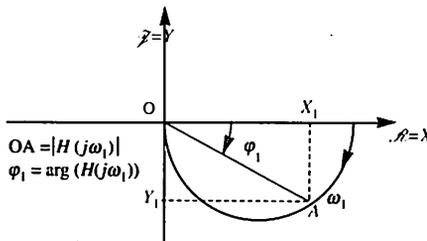


Fig. 2

En effet si : $H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}$, alors : $H(j\omega) = X + jY$, avec $X = \frac{K}{1 + \tau^2 \omega^2}$

et $Y = -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2 \omega^2}$ et l'on peut montrer, en éliminant la variable $\tau\omega$

entre X et Y que ces deux grandeurs satisfont à l'équation d'un cercle.

Diagramme de Black

Le diagramme de Black est un système de représentation des fonctions de transfert complexes où l'on porte :

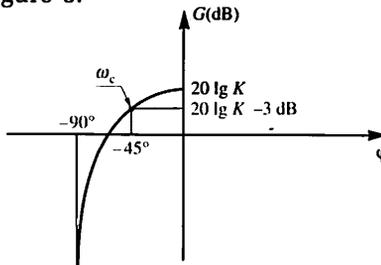
en ordonnée, le gain logarithmique, exprimé en décibels (dB),

en abscisse, l'argument φ du nombre complexe (en radians, ou plus souvent en degrés).

Le lieu de Black d'une fonction de transfert $H(j\omega)$, dans un diagramme de Black, est la courbe représentant la suite des positions de l'image de $H(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à l'infini.

Pour un système du 1^{er} ordre, la courbe représentative de $H(j\omega)$ est fournie figure 3.

Fig. 3



3 Fonction de transfert isomorphe

La fonction de transfert isomorphe d'un système régi par l'équation :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

peut être obtenue directement en utilisant la transformation de Laplace (chap 24) :

$$\tau pS(p) + S(p) = KE(p)$$

La fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ d'un système du 1^{er} ordre normalisé s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Remarque : Industriellement, si l'on ne rencontre pas de systèmes réels admettant exactement cette fonction de transfert, certains s'en rapprochent et peuvent, sans difficulté, être étudiés à partir de cette fonction. C'est le cas notamment des vannes de réglages où la relation entre le débit et le signal de commande peut être assimilée à une relation différentielle du 1^{er} ordre.

4 Exemple

Examinons le cas d'un réacteur chimique clos, de volume V_{\max} et de surface extérieure S , constitué d'une enveloppe métallique, conductrice de la chaleur. On peut admettre que sa paroi est toujours à la température T du contenu et que sa capacité thermique massique est négligeable devant celle du produit contenu.

Il contient un volume V de liquide de masse volumique ρ , de capacité thermique massique C . Il est chauffé par un fluide caloporteur, apportant une puissance de chauffe P , variable de 0 à P_{\max} .

La réaction chimique ne dégage pas d'énergie et les pertes de puissance (par conduction et convection) de ce réacteur sont données pour la relation $P_p = k \cdot S \cdot (T - T_a)$ où T_a représente la température ambiante extérieure.

En raisonnant sur un intervalle de temps dt petit, on peut écrire :

$$[P - k \cdot S \cdot (T - T_a)] \cdot dt = m \cdot C \cdot dT$$

On aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\rho \cdot V \cdot C}{k \cdot S} \cdot \frac{dT'}{dt} + T' = \frac{P}{k \cdot S}$$

avec $T' = T - T_a$.

Cette équation est bien du premier ordre; elle sera exploitée par la suite.

1 Définitions

Comme les systèmes du 1^{er} ordre, ceux du second ordre sont courants dans les installations industrielles. De surcroît, on verra dans un chapitre ultérieur que tout système bouclé, naturellement ou par l'intermédiaire d'un régulateur, peut souvent être comparé à un système du 2^e ordre dit équivalent.

Un système est dit du 2^e ordre si la relation liant une variation $s(t)$ de la grandeur de sortie à la variation $e(t)$ du signal d'entrée qui lui a donné naissance est une équation différentielle du 2^e ordre que l'on peut mettre sous la forme normalisée suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (1)$$

ω_0 est appelée la pulsation propre du système non amorti : elle s'exprime en radians par seconde (rad/s),

K est le gain statique du système,

λ , nombre en général positif, est le coefficient d'amortissement.

Comme pour un système du 1^{er} ordre, dans la majorité des cas (fig. 1)

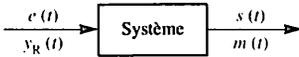


Fig. 1

$e(t) = y_R(t)$ est la variation d'un signal de commande (%) et $s(t) = m(t)$ est la variation du signal de mesure, image d'une grandeur physique (%). Le coefficient K est alors sans unité.

2 Exemple : dipôle R, L, C

Le dipôle formé par l'association en série d'une résistance R , d'un condensateur parfait de capacité C , d'une bobine parfaite d'inductance L , est soumis à une tension variable $e(t)$ qui constitue le signal d'entrée. La tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur constitue le signal de sortie $s(t)$ (fig. 2).

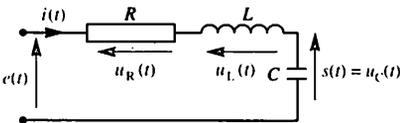


Fig. 2

avec : $u_R = Ri$; $u_L = L \frac{di}{dt}$; $u_C = \frac{q}{C}$ et $i = \frac{dq}{dt}$ donc : $i = C \frac{du_C}{dt}$

On peut donc écrire : $e(t) = R \left[C \frac{du_C(t)}{dt} \right] + L \left[C \frac{d^2u_C}{dt^2} \right] + u_C(t)$

ou : $LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t)$

Compte tenu des conventions adoptées pour les grandeurs électriques, la loi des mailles se traduit par la relation :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

On peut mettre cette relation sous la forme normalisée en posant :

$$\frac{2\lambda}{\omega_0} = RC \text{ (constante de temps en secondes); } \frac{1}{\omega_0^2} = LC \text{ et } K = 1$$

soit :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} ; \quad \boxed{\lambda = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2L\omega_0}} ; \quad \boxed{K = 1}$$

3 Analyse temporelle

On cherche la réponse transitoire à un échelon (réponse indicielle) Par définition il faut réaliser un échelon sur le signal d'entrée, à partir d'un point de fonctionnement stable, et déterminer l'évolution du signal de sortie.

Les signaux $e(t)$ et $s(t)$ étant des variations par rapport à un point de fonctionnement initial stable, l'instant $t=0$ est déterminé par les

$$\text{conditions initiales : } [s(t)]_0 = 0; \quad \left[\frac{ds(t)}{dt} \right]_0 = 0 \quad (2).$$

Pour simplifier on suppose que l'échelon est d'amplitude unité, donc à l'instant $t=0$ le signal $e(t)$ passe de 0 à 1.

Compte tenu des notations adoptées, pour t positif, l'équation peut s'écrire :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \quad (3)$$

La résolution mathématique de cette équation fait intervenir l'équation caractéristique associée à l'équation (1), à savoir :

$$\frac{1}{\omega_0^2} r^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} r + 1 = 0 \text{ soit : } r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad (4)$$

Les racines de cette équation du 2^e degré interviennent pour déterminer $s(t)$. On distingue trois cas liés au fait que le discriminant $\Delta = (2\lambda\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\lambda^2 - 1)$ peut être positif, nul ou négatif.

Régime apériodique : $\Delta > 0$ et $\lambda > 1$.

L'équation (4) admet deux racines réelles :

$$r_1 = -\lambda\omega_0 + \omega_0 \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda\omega_0 - \omega_0 \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

La solution générale de l'équation (2) est alors : $s(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + K$.

Les coefficients A et B sont déterminés par les conditions initiales (2) :

Une formulation possible est alors, avec : $\omega = \omega_0 \sqrt{\lambda^2 - 1}$:

$$s(t) = K \left[1 - \frac{\lambda\omega_0}{2\omega} e^{-\lambda\omega_0 t} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) - \frac{1}{2} e^{-\lambda\omega_0 t} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \right]$$

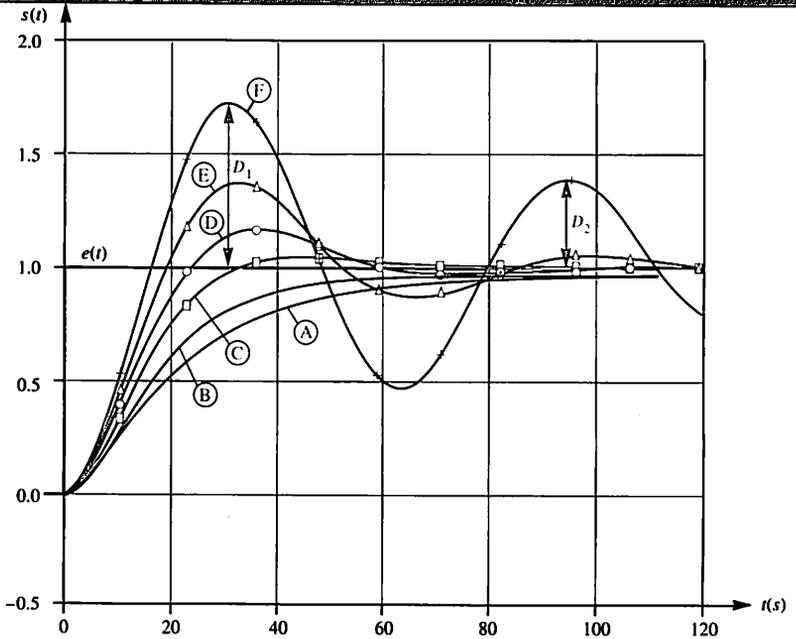


Fig. 3

La réponse indicielle est fournie figure 3 (courbe A).

Régime critique : $\Delta = 0$ et $\lambda = 1$

L'équation (4) admet une racine réelle double $r = -\omega_0$

La solution générale de l'équation (2) est alors :

$$s(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + K$$

Avec les conditions initiales (2) on obtient :

$$s(t) = K[1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t)]$$

La réponse indicielle est fournie figure 3 (courbe B). On parle alors de réponse à **amortissement critique**.

Régime pseudopériodique : $\Delta < 0$ et $\lambda < 1$

L'équation (4) admet deux racines complexes $r_1 = -\lambda\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$

et : $r_2 = -\lambda\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$

La solution générale de l'équation (2) est alors :

$$s(t) = e^{-\lambda\omega_0 t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) + K$$

Les coefficients A et B sont déterminés par les conditions initiales (2).

Une formulation possible, avec la pseudo-pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$ est alors :

$$s(t) = K \left[1 - e^{-\lambda\omega_0 t} \left(\cos \omega t + \frac{\lambda\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$$

La figure 3 fournit les principales réponses indicielles pour $\omega_0 = 0,1$ rad/s et pour les valeurs suivantes du coefficient d'amortissement λ : $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (courbe C), $\lambda = 0,5$ (courbe D), $\lambda = 0,3$ (courbe E),

$\lambda = 0,1$ (courbe F).

On parle alors de réponse pseudopériodique ou sous-amortie.

Résultats essentiels à retenir pour le régime pseudopériodique.

L'amortissement est fonction de λ .

La pseudopériode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dépend également de λ car $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}$.

On appelle constante de temps principale τ_p la constante de temps de

l'enveloppe de la courbe $s(t)$ ce qui revient à écrire : $e^{-\lambda\omega_0 t} = e^{-\frac{t}{\tau_p}}$. Cette constante τ_p est un élément d'appréciation de l'amortissement.

Le temps de réponse à $\pm 5\%$ de la valeur finale est égal à $3\tau_p = \frac{3}{\lambda\omega_0}$

Le premier dépassement D_1 , exprimé en pourcentage de la variation finale, est égal à :

$$D_1 = 100 e^{-\lambda\pi/\sqrt{1-\lambda^2}} \quad \text{ce qui s'écrit aussi :} \quad D_1 = 100 \exp - \left[\frac{\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right]$$

ce qui, pour $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donne : $D_1 = 5\%$

Le rapport des deux premiers dépassements est égal à :

$$\frac{D_2}{D_1} = e^{-2\lambda\pi/\sqrt{1-\lambda^2}} \quad \text{ce qui s'écrit aussi :} \quad \exp - \left[\frac{2\lambda\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right]$$

Remarque : Lorsque $\lambda = 0$, on est en présence d'un système oscillant entrevenu, comme par exemple un oscillateur harmonique L, C. Cette situation peut se rencontrer en cas de mauvais réglage d'une boucle de régulation. On dit alors que le système est instable (les professionnels parlent alors de « pompage » de la boucle de régulation). Un tel cas doit absolument être évité pour ne pas endommager l'installation.

1 Fonction de transfert isochrone

La transformation complexe (chap. 23) permet directement d'obtenir la fonction de transfert isochrone d'un système régi par l'équation :

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right) \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \left(\frac{2\lambda}{\omega_0}\right) \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right) (j\omega)^2 \underline{S} + \left(\frac{2\lambda}{\omega_0}\right) (j\omega) \underline{S} + \underline{S} = K\underline{E}$$

La fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$ d'un système du 2^e ordre normalisé s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\lambda \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Si l'on pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ (pulsation réduite) on obtient une expression plus simple de cette fonction :

$$H(ju) = \frac{K}{1 - u^2 + j2\lambda u}$$

Son module est égal à : $H = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\lambda^2 u^2}}$.

Son argument est donné par la relation : $\varphi = -\arctan \left[\frac{2\lambda u}{1 - u^2} \right]$

Diagramme de Bode

Il faut considérer les trois cas comme précédemment, selon la valeur de λ . Pour simplifier, on adopte $K = 1$ dans l'étude qui suit.

- $\lambda > 1$: le système peut se réduire à la mise en série de deux systèmes du premier ordre de constantes de temps τ_1 et τ_2 différentes (fig. 1).

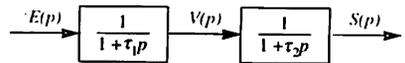


Fig. 1

Exemple

Si deux systèmes du 1^{er} ordre se trouvent en série, et si leurs fonctions

de transfert respectives sont : $F_1(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{1 + \tau_1 j\omega}$ et :

$F_2(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{V(j\omega)} = \frac{1}{1 + \tau_2 j\omega}$ avec : $\tau_1 = 20$ s et $\tau_2 = 5$ s, la fonction de

transfert totale est : $H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$

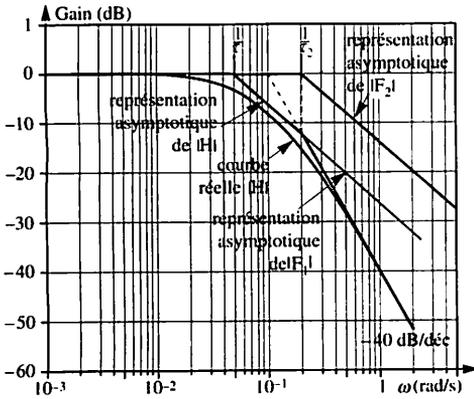


Fig. 2 a

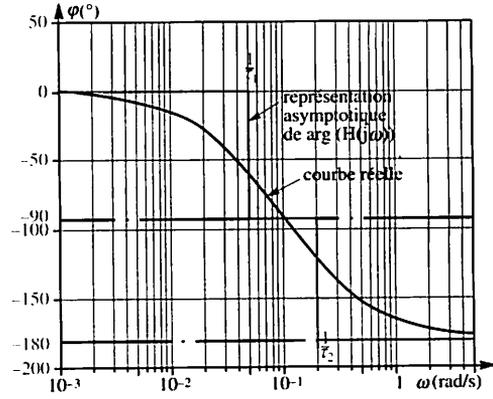


Fig. 2 b

soit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - 100\omega^2 + 25j\omega}$$

$H(j\omega)$ est assimilable à une fonction du 2^e ordre avec : $\omega_0 = 0,1$ rad/s et $\lambda = 1,25$

D'après les propriétés des nombres complexes si $\underline{X} = [X, \varphi]$, $\underline{X}_1 = [X_1, \varphi_1]$, $\underline{X}_2 = [X_2, \varphi_2]$ alors $\underline{X} = \underline{X}_1 \cdot \underline{X}_2$ aboutit à : $[X, \varphi] = [X_1 \cdot X_2, \varphi_1 + \varphi_2]$.

Le diagramme asymptotique s'obtient par « addition » des diagrammes asymptotiques des deux fonctions du 1^{er} ordre (fig. 2 a et b, fig. 3 a et b courbes A). Lorsque ω tend vers l'infini, la courbe de gain admet une asymptote de pente -40 dB/décade tandis que la courbe de phase tend vers -180° .

- $\lambda = 1$: le système peut se réduire à la mise en série de deux systèmes du premier ordre de même constante de temps τ .

Exemple

Avec, en série, deux systèmes du 1^{er} ordre admettant la même constante de temps $\tau_1 = \tau_2 = 10$ s, la fonction de transfert de l'ensemble s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - 100\omega^2 + 20j\omega}$$

Elle est assimilable à une fonction du 2^e ordre avec : $\omega_0 = 0,1$ rad/s et $\lambda = 1$.

Les deux diagrammes asymptotiques sont confondus. Pour $\omega = \frac{1}{\tau}$,

l'atténuation de la courbe réelle est de -6 dB par rapport au point de cassure (fig. 3 a et b courbes B).

- $\lambda < 1$: plusieurs courbes sont à envisager suivant les valeurs de λ :

- $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$: on obtient la courbe de gain C, dite courbe « maximalement » plate. La pulsation de coupure à -3 dB se confond avec ω_0 ;
- $\frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < 1$: on obtient des courbes intermédiaires entre B et C, la pulsation de coupure à -3 dB est inférieure à ω_0 ;
- $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$: la courbe de gain présente un pic de résonance à la pulsation $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda^2}$

On définit également un facteur de résonance :
$$Q = \frac{1}{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}$$

tel que : $20 \lg Q = \frac{G(\omega_R)}{G(0)}$. Dans le cas considéré : $K=1$ et $20 \lg Q = G_{\max}$.
 Les courbes (fig. 3 a et b) D, E, F correspondent respectivement à $\lambda = 0,5; 0,3; 0,1$

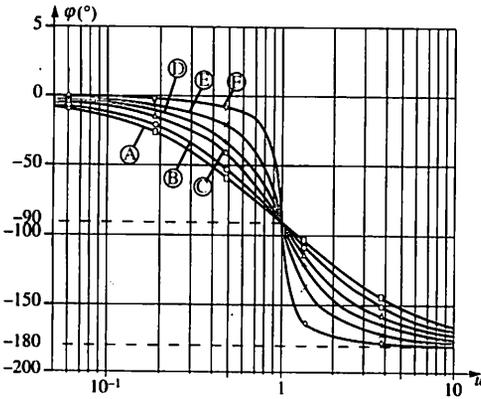


Fig. 3 a

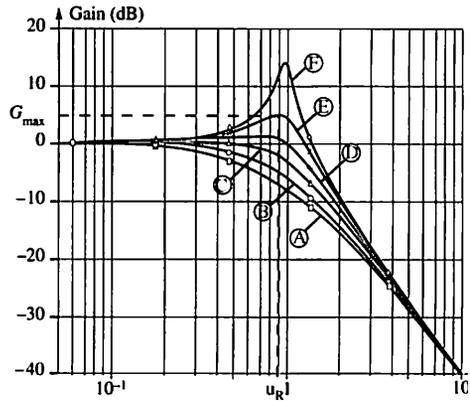


Fig. 3 b

La fréquence de coupure est alors supérieure à ω_0 .

Remarque très importante : $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$: connaissant Q et ω_R on obtient facilement ω_0 et λ par les deux expressions :

$$\lambda^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{2} \quad \text{et :} \quad \omega_0^2 = \frac{\omega_R^2}{1 - 2\lambda^2}$$

2 Fonction de transfert isomorphe

La fonction de transfert isomorphe d'un système régi par l'équation :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

peut être obtenue directement en utilisant la transformation de Laplace (voir chap. 24) :

$$\frac{1}{\omega_0^2} p^2 S(p) + \frac{2\lambda}{\omega_0} p S(p) + S(p) = KE(p)$$

La fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ d'un système du 2^e ordre normalisé s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\lambda p}{\omega_0} + 1}$$

Remarque : Industriellement, si l'on ne rencontre pas de systèmes réels admettant exactement cette fonction de transfert, certains s'en rapprochent et peuvent, sans difficulté, être étudiés à partir de cette fonction. C'est le cas notamment des boucles de régulation en chaîne fermée où la relation entre la consigne et la mesure peut souvent être assimilée à une relation différentielle du 2^e ordre.

En effet la réponse indicielle d'une boucle de régulation, en particulier lorsque le réglage du régulateur est mal calculé, présente souvent une allure pseudopériodique proche de celles des courbes de la figure 3 du chapitre 11.

La détermination du premier dépassement D_1 permet de connaître le coefficient d'amortissement λ d'un système équivalent du second ordre.

La pseudopériode T permet alors d'en déduire la pulsation ω_0 .

D'une manière analogue un certain nombre de calculs, utilisant la transformée de Laplace, aboutissent à des fonctions de transfert sous forme de fractions rationnelles, dont le dénominateur peut être mis sous la forme :

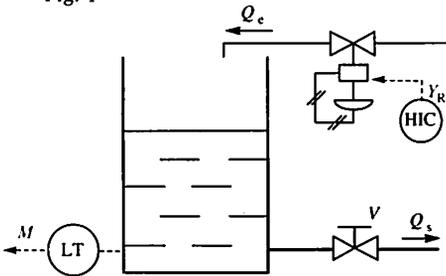
$$\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1.$$

Sans nier l'influence des termes du numérateur, on peut montrer que l'amortissement de ces fonctions de transfert peut être étudié comme celui d'un second ordre, par l'intermédiaire du coefficient λ .

Exercice résolu

Dans l'exercice résolu du chapitre 9 on s'est intéressé à la relation entre le niveau d'un bac à soutirage naturel et le débit d'une vanne d'alimentation T.O.R. Dans ce cas on peut faire subir à ce débit une variation instantanée en échelon. Pour compléter cette étude on aborde le cas où la vanne constitue un système du 1^{er} ordre qui ne permet pas une variation en échelon du débit. Le schéma T.I. est fourni figure 4. Le point de fonctionnement initial du système stable est défini par les valeurs suivantes : M_0 , Y_{R0} , Q_{e0} , Q_{s0} . Chaque grandeur est un pourcentage de sa variation maximale ou de l'échelle de son transmetteur.

Fig. 4



On rappelle (voir l'exercice résolu du chap. 9) que la vitesse de variation du niveau $m(t)$ dans le réservoir peut s'exprimer, en fonction des débits d'entrée $q_e(t)$ et de sortie $q_s(t)$, par l'équation :

$$\tau_1 \frac{dm(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t) \quad \text{avec ici :}$$

$$\tau_1 = 40 \text{ s} \quad (1)$$

On rappelle (voir l'exercice résolu du chap. 8) que la relation liant une variation $q_e(t)$ du débit d'entrée $Q_e(t)$ à une variation $y_R(t)$ du signal de commande d'une vanne est :

$$\tau_2 \frac{dq_e(t)}{dt} + q_e(t) = K y_R(t) \quad (2)$$

avec : $\tau_2 = 20 \text{ s}$, $K = 1$, y_R et q_e étant des pourcentages de leur valeur maximale. Pour un système à soutirage naturel, la variation du débit de sortie $q_s(t)$

est proportionnelle à la variation de niveau $m(t)$. Dans le cas considéré de la vanne manuelle V , on admet que :

$$q_s(t) = 0,2 m(t) \quad (3)$$

1. Établir la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)}$$

2. Établir le schéma fonctionnel technologique correspondant.

3. Déterminer la réponse indicielle $m(t)$ pour un échelon de commande $y_R(t) = 10u(t)$.

4. Représenter graphiquement les variations de $m(t)$. L'hypothèse linéaire est-elle vraie sur cet intervalle de variation de $m(t)$?

5. Conclusions sur le contrôle-commande.

Solution :

1. Fonction de transfert $H(p)$

La transformation de Laplace de l'équation (2) donne :

$$\tau_2 \cdot p Q_e(p) + Q_e(p) = K Y_R(p)$$

La première fonction de transfert cherchée est donc :

$$H_1(p) = \frac{Q_e(p)}{Y_R(p)} = \frac{1}{1 + 20p} \quad (4)$$

Si l'on reporte la relation (3) dans la relation (1) on obtient l'équation :

$$\tau_1 \frac{dm(t)}{dt} = q_e(t) - 0,2 m(t)$$

$$\text{ou : } 5\tau_1 \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = 5q_e(t)$$

qui est caractéristique d'un système du 1^{er} ordre. Par transformation de Laplace on obtient :

$$200p \cdot M(p) + M(p) = 5Q_e(p)$$

Cette relation permet de définir la seconde fonction de transfert :

$$H_2(p) = \frac{M(p)}{Q_e(p)} = \frac{5}{1 + 200p} \quad (5)$$

Par définition la fonction de transfert cherchée est :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{M(p)}{Q_c(p)} \cdot \frac{Q_c(p)}{Y_R(p)}$$

Soit :

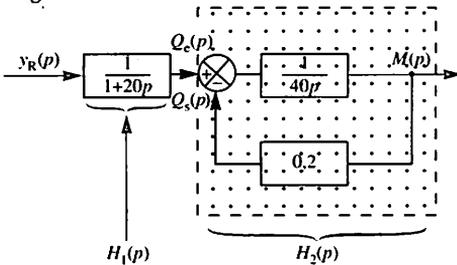
$$H(p) = \frac{5}{(1 + 20p) \cdot (1 + 200p)} \quad (6)$$

Cette fonction de transfert correspond à un système du 2^e ordre avec un coefficient d'amortissement $\lambda > 1$

2. Schéma fonctionnel technologique

Il est obtenu à partir des relations (3), (4) et (5). Il est fourni figure 5.

Fig. 5



3. Réponse indicielle $m(t)$

Deux approches sont possibles :

On peut soit utiliser l'inversion de Laplace, après avoir déterminé $M(p) = H(p) \cdot Y_R(p)$, soit rechercher l'équation différentielle du 2^e ordre, à partir de la relation (6), puis utiliser les résultats du paragraphe 3. On choisit cette dernière méthode.

$$F(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{5}{(1 + 20p) \cdot (1 + 200p)}$$

$$= \frac{5}{(4000p^2 + 220p + 1)}$$

donc :

$$M(p) \cdot (4000p^2 + 220p + 1) = 5Y_R(p)$$

L'équation différentielle correspondant à cette relation est la suivante :

$$4000 \frac{d^2m(t)}{dt^2} + 220 \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = 5Y_R(t) = 50,$$

à partir de $t > 0$.

La solution générale est donc de la forme :

$$m(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + 50$$

avec : $r_1 = -0,005$ et $r_2 = -0,05$.

Recherche des constantes d'intégration A et B.

D'après les conditions initiales, à l'instant $t = 0$ on a : $m(t) = 0$ ainsi que

$$\frac{dm(t)}{dt} = 0 \text{ donc : } A + B + 50 = 0$$

$$A \cdot r_1 + B \cdot r_2 = 0$$

Les solutions de ce système sont :

$$A = -55,5 \text{ et } B = 5,55$$

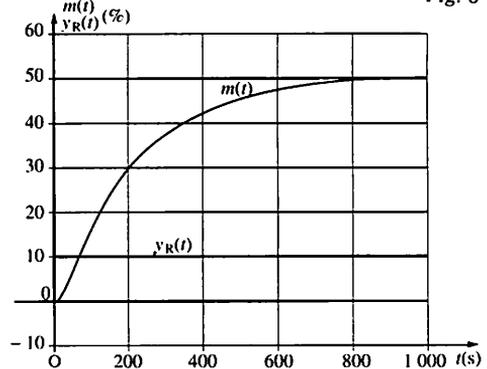
donc :

$$m(t) = -55,5 e^{-0,005t} + 5,55 e^{-0,05t} + 50$$

4. Représentation graphique de $m(t)$

Les représentations de $m(t)$ et $y_R(t)$ sont fournies figure 6. Si $m(t)$ varie de 50 %, les résultats de l'exercice résolu du chapitre 9 montrent que l'hypothèse linéaire est très grossière.

Fig. 6



5. Conclusions sur le contrôle-commande

L'exercice du chapitre 8 (contrôle du niveau d'un bac à soutirage fixé) a mis en évidence les difficultés induites par un système intégrateur.

Dans le présent exercice le problème ne se pose plus, bien que l'on ait encore un contrôle de niveau sur un bac. En effet l'existence d'un soutirage naturel implique que toute augmentation du niveau entraîne une augmentation de pression en fond de cuve. Il en résulte une augmentation de Q_s et une stabilisation « naturelle » du niveau.

1 Notion de modèle

Jusqu' alors on n'a considéré que des systèmes dont l'évolution dynamique, autour d'un point de fonctionnement, est régie par une équation différentielle du 1^{er} ordre ou du 2^e ordre. Malheureusement la réalité industrielle ne permet que rarement d'obtenir exactement des systèmes aussi simples. Que se passe-t-il par exemple, pour le procédé étudié à l'exercice résolu du chapitre 8, si la loi d'écoulement à travers la vanne est modifiée, en particulier à faible ouverture car, alors, la vitesse de passage est élevée ?

Dans la pratique on n'a pas l'ambition de décrire d'une façon mathématiquement exacte le procédé considéré, mais on souhaite seulement en trouver une représentation idéalisée, qui soit la plus proche possible du comportement réel et dont la fonction de transfert soit relativement simple.

Lorsqu'on a pu trouver une telle représentation on dit que l'on a modélisé le système, ou que l'on a obtenu un *modèle équivalent*.

Lorsque ce modèle peut être déterminé à partir des lois générales de la physique, on parle de *modèle de connaissance*. Lorsque la modélisation ne peut être effectuée qu'à partir d'essais expérimentaux sur le site de production, on parle de *modèle expérimental*.

L'art de la régulation est de pouvoir trouver des modèles simples, à usage général, issus des deux modèles fondamentaux dits du 1^{er} ordre et du 2^e ordre.

Le présent chapitre est consacré aux modèles utilisés dans la pratique industrielle.

2 Modèle de Broïda

Étude d'un mélange en ligne

Ce procédé, partiellement étudié au chapitre 6, permet le mélange de deux constituants A et B (fig. 1). Pour obtenir un mélange parfaitement homogène, la ligne doit avoir une longueur minimale L . Le signal de mesure M , obtenu par un analyseur (analyseur spécifique, densimètre, etc.), est l'image du pourcentage du constituant A dans le mélange.

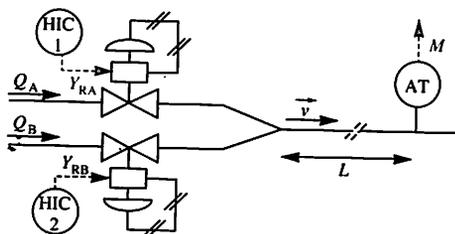


Fig. 1

En régime établi les débits Q_A , Q_B et le pourcentage M de produit A dans le mélange sont liés par la relation :

$$M = \frac{Q_A}{Q_A + Q_B} \times 100 \quad (1)$$

toutes les grandeurs étant exprimées en pourcentage de leur échelle de variation.

Si l'on utilise des vannes dont les caractéristiques, après installation sur le procédé, peuvent être considérées comme linéaires, la relation (1) peut être écrite en fonction des signaux de commande Y_{RA} et Y_{RB} :

$$M = \frac{Y_{RA}}{Y_{RA} + Y_{RB}} \times 100 \quad (2)$$

Au chapitre 6 on a montré que la caractéristique statique liant M et Y_{RA} n'est pas linéaire, et que le gain statique K autour d'un point de fonctionnement dépend de celui-ci.

Toutefois la caractéristique dynamique liant une variation m du signal de mesure à la variation y_{RA} du signal de commande qui lui a donné naissance peut être décomposée, à partir des éléments du procédé, sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_{RA}(p)} = K \cdot H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)$$

avec $M(p)$ la transformée de Laplace de $m(t)$ et $Y_{RA}(p)$ la transformée de Laplace de $y_{RA}(t)$ et en représentant par :

- $H_1(p)$ la fonction de transfert isomorphe de la vanne réglant le débit Q_A (voir chap. 8, exercice résolu) :

$$H_1(p) = \frac{Q_A(p)}{Y_{RA}(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

- $H_2(p)$ la fonction de transfert de l'analyseur AT. Si sa réponse est considérée comme immédiate : $H_2(p) = 1$

- $H_3(p)$ la fonction de transfert de la ligne. Celle-ci introduit un retard T , fonction de la longueur L et de la vitesse v du mélange : $T = \frac{L}{v}$

D'après la propriété des fonctions retardées (voir chap. 24), sa fonction de transfert est :

$$H_3(p) = \frac{M(p)}{Q_A(p)} = e^{-Tp}$$

On aboutit globalement à :

$$H(p) = \frac{K e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

C'est la fonction de transfert d'un modèle dit de Broïda (fig. 2).

Pour permettre une identification d'un procédé inconnu à un modèle de Broïda, il faut connaître les réponses temporelles et fréquentielles de ce modèle.

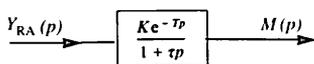


Fig. 2. Modèle de Broïda.

La réponse indicielle à un échelon de commande de 10 pour cent est fournie figure 3, pour une valeur $K = 1$.

La réponse fréquentielle, sous forme d'un diagramme de Bode, est fournie figures 4 et 5, pour $K = 1$, $T = 20$ s et $\tau = 10$ s.

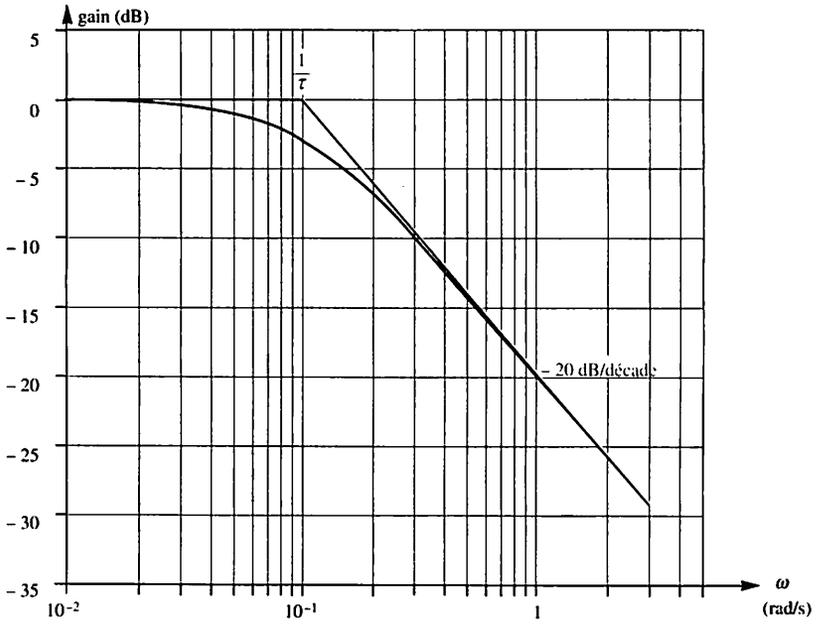


Fig. 4

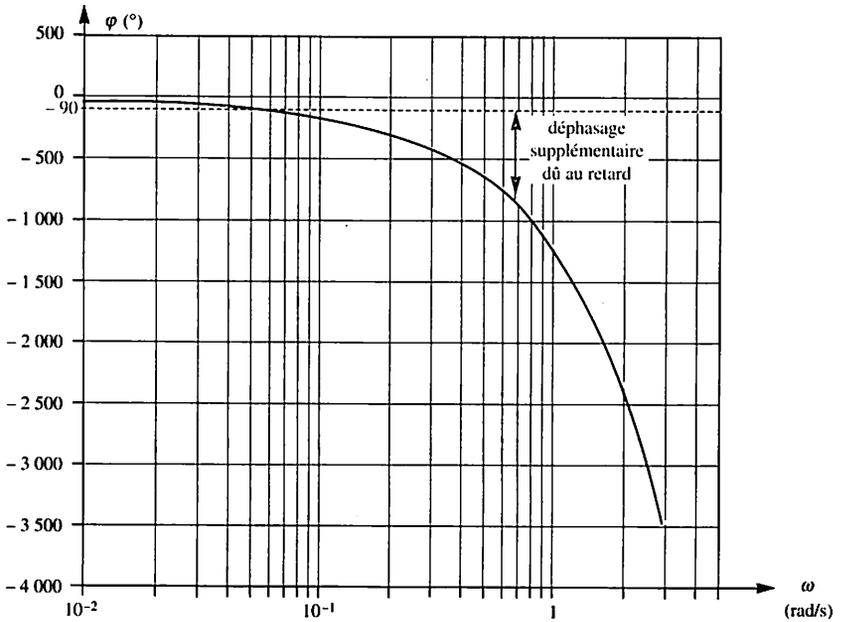


Fig. 5

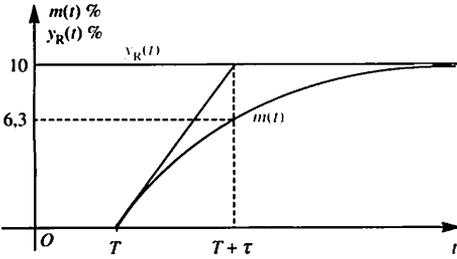


Fig. 3

La courbe de gain est identique à celle d'un système du 1^{er} ordre, car $e^{-Tj\omega} = \cos \omega T - j \sin \omega T$ a pour module 1. En revanche, la courbe de phase est fortement modifiée car la phase φ de la fonction de transfert est telle que $\varphi = -\omega T - \arctan \tau\omega$.

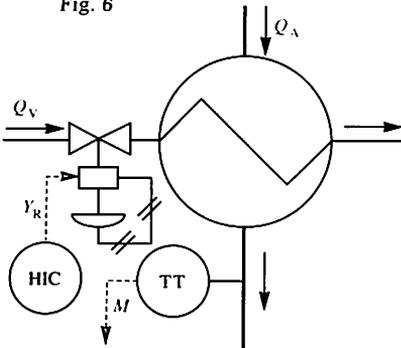
3 Modèle de Strejc

Étude d'un échangeur

La recherche d'un modèle de connaissance pour l'échangeur de la figure 6, c'est-à-dire la relation liant $m(t)$ à $y_R(t)$ variations respectives de M et Y_R , aboutit à une fonction de transfert isomorphe de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + a_2 p + a_3 p^2 + \dots + a_n p^{n-1})}$$

Fig. 6



où la constante de temps τ_1 est introduite par la vanne, et où les autres constantes a_i (pour $i \neq 1$) sont dues à l'échangeur.

Pour la plupart des installations, cette fonction de transfert peut être assimilée au produit de n fonctions de transfert du 1^{er} ordre, de constantes de temps τ identiques, soit :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$$

Cette fonction de transfert correspond au modèle de Strejc.

Les réponses indicielles, à un échelon de commande de 10 pour cent, sont fournies figure 7 pour différentes valeurs de l'ordre n , pour une valeur $K = 1$ et $\tau = 10$ s.

Les réponses fréquentielles correspondantes, sous forme d'un diagramme de Bode, sont fournies figures 8 et 9, pour $K = 1$ et $\tau = 10$ s.

Remarque : Lorsque $\omega \rightarrow \infty$ le gain logarithmique admet une asymptote de pente $-20n$ décibels par décade, où n représente l'ordre du système. Les pentes sont souvent notées $-n$ pour $-20n$.

De la même manière, les courbes de phase admettent des asymptotes horizontales d'équation $(-90n)^\circ$.

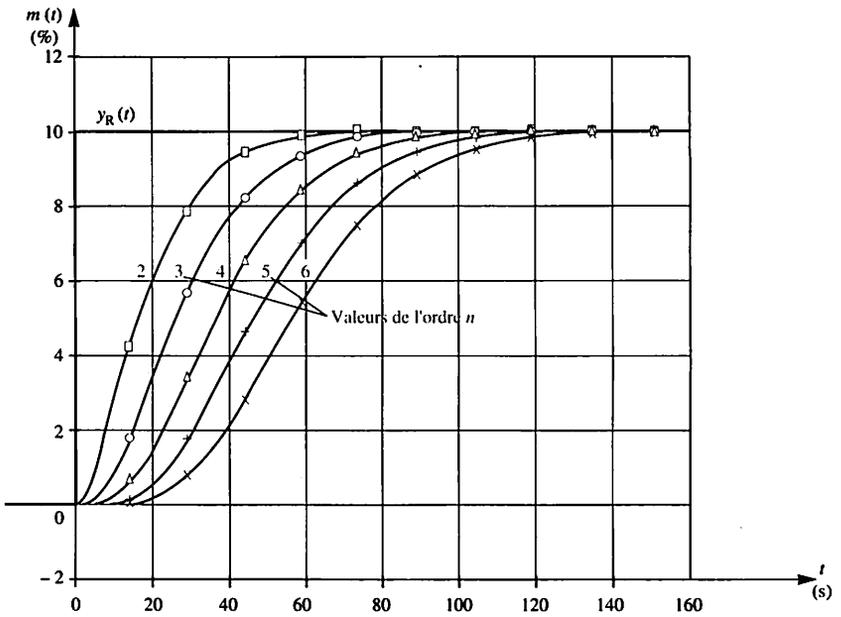


Fig. 7

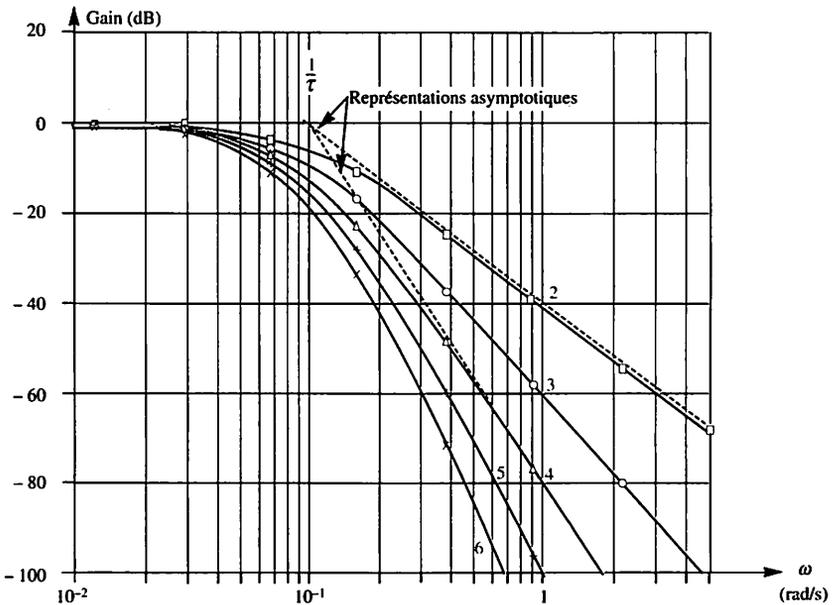


Fig. 8. Le paramètre porté à côté de chaque courbe correspond à la valeur de n associée à cette courbe.

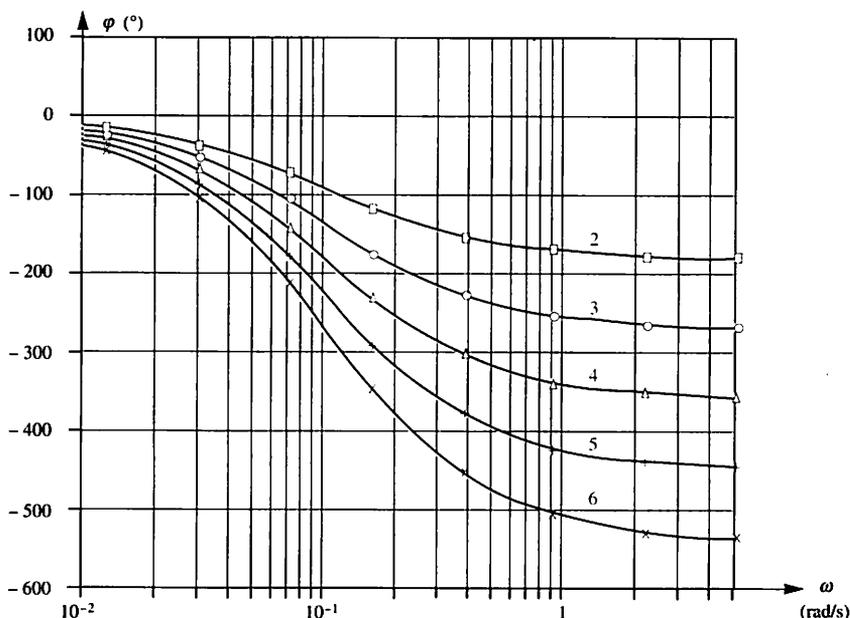


Fig. 9

4 Autres modèles

La documentation technique présente des modèles de plus en plus sophistiqués, dans le but louable de représenter le plus fidèlement possible le comportement du système physique réel. En particulier les modèles polynomiaux permettent d'approcher la fonction de transfert par une fraction rationnelle de la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } m \leq n$$

Si ce type de modèle présente un intérêt certain dans l'étude des servomécanismes, ils sont généralement inadaptés dans le domaine de la régulation. En effet la régulation s'intéresse à des systèmes fortement non linéaires, dont la dynamique évolue au cours du temps. A titre d'exemples on peut citer les phénomènes classiques de dépôt de calcaire dans les tubulures de chauffage d'un réacteur chimique ou de « blindage », c'est-à-dire de dépôt de glace, à l'intérieur d'un réacteur que l'on refroidit. Ces deux phénomènes aboutissent à une forte modification du coefficient d'échange thermique du procédé, entraînant un changement important du gain statique K et du temps mort (ou retard) T .

Il convient donc d'adopter un modèle simple et de mettre en œuvre une stratégie de régulation prenant en compte les modifications citées ci-dessus.

Exercice résolu

On désire étudier le mélange en ligne de deux produits liquides (voir fig. 1). On veut particulièrement connaître la fonction de transfert du procédé, pour différents points de fonctionnement. Cette installation doit assurer une qualité de mélange correspondant à 50 % de produit A dans le mélange, lorsque le débit de charge Q_c varie de 20 à 100 %. On précise que celui-ci est défini par : $Q_c \% = \frac{Q_A \% + Q_B \%}{2}$

Le procédé est défini par les données suivantes : les deux vannes sont identiques, à caractéristiques supposées linéaires. Elles ont donc une fonction de transfert modélisée par :

$$H_1(p) = \frac{Q_A(p)}{Y_{RA}(p)} = \frac{1}{1 + 10p}$$

On exprime les durées en secondes et les autres grandeurs sont des pourcentages de valeurs maximales.

Le débit maximal de ces vannes à 100 % d'ouverture est de 500 l/h.

La conduite a une longueur $L = 10$ m, un diamètre intérieur $d = 20$ mm. On appelle S sa section. L'analyseur est supposé n'introduire aucun retard.

Le point de fonctionnement désiré est défini par : $M = 50\%$ ce qui, d'après les relations (1) et (2) correspond à $Q_A = Q_B = Y_{RA} = Y_{RB}$

- Rappeler la relation liant la mesure M et le signal de commande Y_{RA} , le signal de commande Y_{RB} étant considéré comme un paramètre. Toutes ces grandeurs sont exprimées en pourcentages.
- Pour $Y_{RB} = 20, 50$ et 80% , tracer les caractéristiques statiques.
- Calculer le gain statique K au point de fonctionnement désiré.
- Déterminer le temps mort T du système en fonction du débit de charge Q_c .
- Représenter T en fonction de Q_c , sur l'intervalle de 20 à 100 %.
- En déduire la fonction de trans-

fert isomorphe $H(p) = \frac{M(p)}{Y_{RA}(p)}$, pour un débit de charge de 50 %.

7. Que devient cette fonction de transfert si le débit de charge Q_c varie ? On envisagera les cas où M reste à 50 %, le signal de perturbation Y_{RB} valant 20 % et 80 %.

Solution :

1. Relation liant M et Y_{RA}

La relation (2) donne :

$$M = \frac{Y_{RA}}{Y_{RA} + Y_{RB}} \times 100$$

2. Tracé des caractéristiques statiques

Les courbes sont représentées figure 10. On rappelle que le système est non linéaire.

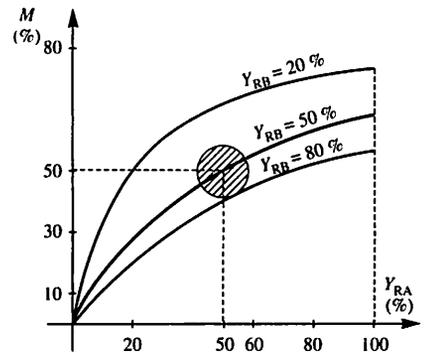


Fig. 10

3. Calcul du gain statique K

Il peut être déterminé graphiquement ou par le calcul. Par définition

$K = \frac{dM}{dY_{RA}}$. Pour le point considéré :

$K = \frac{5000}{(Y_{R1} + 50)^2}$ avec $Y_{R1} = 50\%$ on

obtient : $K = 0,5$

4. Détermination du temps mort T

Ce temps mort correspond à un temps de transit dans la canalisation : $T = \frac{L}{v}$

Par définition la vitesse d'écoulement, en mètres par seconde, est donnée

par : $v = \frac{Q'_c}{S}$ où Q'_c est le débit en mètres cubes par seconde et S la section en mètres carrés

$$\left(S = \frac{\pi d^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \right)$$

Un débit Q_c de 100 % correspond à 1 000 l/h = 1 m³/h. La relation entre Q_c et Q'_c est donc :

$$Q'_c = \frac{0,01 Q_c}{3600} \text{ d'où } v = \frac{0,01 Q_c}{1,13}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{T = \frac{1130}{Q_c}} \quad \left\{ \begin{array}{l} T \text{ en secondes} \\ Q_c \text{ en pourcentage.} \end{array} \right.$$

5. Représentation de T en fonction de Q_c

Elle est fournie figure 11. On vérifie que T diminue lorsque le débit augmente.

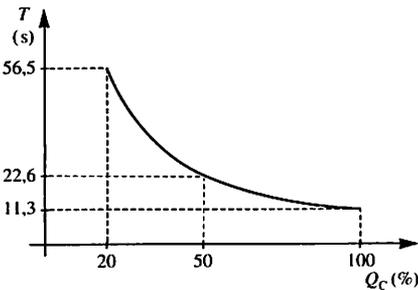


Fig. 11

6. Fonction de transfert

La vanne introduit une constante de temps de 10 s. La canalisation introduit un temps mort de 22,6 s, en application de la formule précédente, avec $Q_c = 50$ %. On obtient donc :

$$\boxed{H(p) = \frac{0,5e^{-22,6p}}{1 + 10p}}$$

On verra ultérieurement que la difficulté de régulation peut s'exprimer par

le rapport $\frac{T}{\tau}$. Dans le cas présent cette difficulté est très grande.

7. Modification de $H(p)$

Pour $Q_c = 20$ % et $M = 50$ %, on

obtient :
$$\boxed{H(p) = \frac{1,25e^{-56,5p}}{1 + 10p}}$$

Pour $Q_c = 80$ % et $M = 50$ %, on

obtient :
$$\boxed{H(p) = \frac{0,31e^{-14,1p}}{1 + 10p}}$$

On remarque que les conditions d'exploitation vont fortement modifier le gain statique et le temps mort. Pour la régulation d'un tel procédé on est conduit à définir un critère important concernant la stratégie de régulation : la robustesse.

Un système de régulation robuste est capable d'assurer une qualité de régulation relativement constante lorsque la fonction de transfert se modifie fortement.

Remarque

Le contrôle-commande du dispositif précédent présentera de grandes difficultés pour deux raisons :

- le rapport T/τ est défavorable : $T/\tau > 0,3$. Cette valeur est souvent considérée comme la limite de la régulation classique PID (voir chapitres ultérieurs).

- les paramètres K et T sont variables selon le point de fonctionnement. Or les méthodes de réglage des régulateurs aboutissent à des coefficients de réglage calculés à partir des coefficients du modèle. On comprend donc qu'un réglage correct pour un point de fonctionnement risque d'être inadapté pour un autre. On retiendra que la solution la plus judicieuse consiste à utiliser un régulateur adaptatif, dont on pourra modifier les coefficients de réglage, en fonction de divers paramètres (le débit de charge dans le cas présent).

1 Introduction

De tels systèmes ont une fonction de transfert isomorphe qui fait apparaître l'opérateur d'intégration $\frac{1}{p}$. Ces dispositifs sont donc également appelés systèmes intégrateurs.

Étude d'un bac de récupération

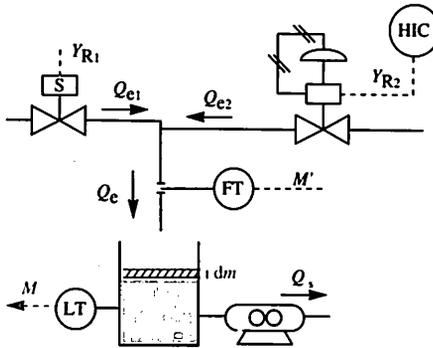


Fig. 1. Q_{e1} : débit du fluide d'appoint.
 Q_{e2} : débit du fluide de récupération.

Les contraintes de traitement des rejets imposent que le débit Q_s de ces rejets soit constant : cet objectif est atteint au moyen d'une pompe volumétrique. Les contraintes de sécurité imposent que le niveau dans la cuve, d'image M , soit parfaitement contrôlé.

Le remplissage du bac est réalisé avec le fluide de récupération, dont le débit est Q_{e2} , éventuellement complété, en cas d'insuffisance, par un apport de secours de débit Q_{e1} .

Une stratégie de régulation nécessite donc la connaissance de deux fonctions de transfert :

$$H_1(p) = \frac{M(p)}{Y_{R1}(p)} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{M(p)}{Y_{R2}(p)}$$

Détermination de $H_1(p)$ par la méthode de connaissance.

Le point de fonctionnement stable initial est : $Y_{R1} = 0$ ($Q_{e1} = 0$) et $Q_s = Q_{e2}$. La commande de l'électrovanne est activée (passage de 0 à 100 % de Y_{R1}), établissant une variation de débit $q_{e1}(t)$ correspondant à un échelon de $3 \text{ m}^3/\text{h}$ soit 10 % de l'échelle du transmetteur de débit FT qui est $0 - 30 \text{ m}^3/\text{h}$. L'échelle du transmetteur de niveau est $0 - 1 \text{ m}$.

On rappelle les résultats de l'exercice corrigé du chapitre 8 :

$$m(t) = \frac{1}{S} \cdot \int_0^t q_{e1}(t) \cdot dt \quad (3)$$

Ce dispositif (fig. 1) a partiellement été étudié en exercice au chapitre 9. La réalisation industrielle est plus complexe. Les grandeurs Q_{e1} et Q_{e2} représentent les débits d'un apport extérieur et d'un produit de récupération d'une colonne à distiller. L'apport extérieur est réglé au moyen d'une vanne solénoïde (électrovanne) pilotée en tout ou rien. Les deux produits sont considérés comme ayant la même masse volumique ρ et la section S du bac est égale à 1 m^2 .

avec m en mètres, S en mètres carrés et q_{e1} en mètres cubes par seconde.

Si l'on choisit d'exprimer q_{e1} et $m(t)$ en pourcentages de l'échelle de leur transmetteur, on modifie la relation (3) par deux facteurs d'échelle. La correspondance à prendre en compte est la suivante :

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &\Leftrightarrow 100 \% \text{ de } M \\ 3 \text{ m}^3/\text{h} &\Leftrightarrow 10 \% \text{ de } Q_e \text{ ou de } M' \end{aligned}$$

Donc :
$$m(t) = \frac{1}{(3600 \times 0,0333 \text{ S})} \int_0^t q_{e1}(t) dt$$

soit :
$$m(t) = k \int_0^t q_{e1}(t) \cdot dt \quad (4) \quad \text{avec : } k = 8,34 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Puisqu'une variation de 100 % de Y_{R1} entraîne une variation de 10 % de Q_e la relation liant $m(t)$ à la variation $y_{R1}(t)$ est :

$$m(t) = k' \int_0^t y_{R1}(t) \cdot dt \quad \text{avec : } k' = 834 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad (5)$$

Le coefficient d'intégration k' , homogène à l'inverse d'un temps, est parfois noté $\frac{1}{\tau_i}$; le nombre τ_i est appelé la constante de temps d'intégration (exprimée en secondes, minutes ou heures).

On déduit directement : $H_1(p) = \frac{k'}{p}$ caractéristique d'un système de classe 1 et d'ordre 1.

La réponse indicielle, à un échelon de commande $Y_{R1} = 100\%$ est fournie figure 2.

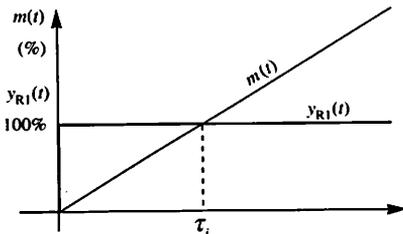


Fig. 2

- Détermination de $H_2(p)$ par la méthode de connaissance.

A partir du même point de fonctionnement, on sollicite le système par un échelon y_{R2} , alors que $Y_{R1} = 0$. L'étude est analogue, la vanne introduisant une constante de temps τ . Le coefficient d'intégration devient k'' , qui dépend du débit maximal, valeur de Q_{e2} pour $Y_{R2} = 100\%$.

On aboutit à : $H_2(p) = \frac{k''}{p(1 + \tau p)}$ qui caractérise un système de classe 1 et d'ordre 2.

La réponse indicielle, à un échelon de commande $Y_{R2} = 1\%$ est fournie figure 3, courbe a. Son équation temporelle peut être rapidement déterminée par inversion de Laplace de :

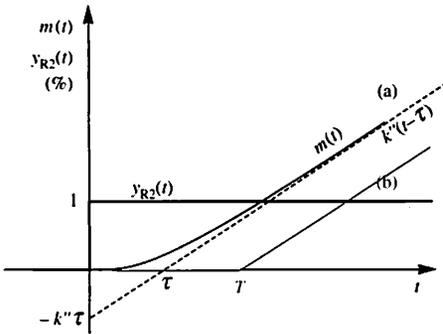


Fig. 3. si $T = \tau$, on conçoit que l'on puisse approcher la courbe (a) par la courbe (b).

$$M(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{k''}{p(1 + \tau p)} = \frac{k''}{p^2(1 + \tau p)}$$

ce qui donne :

$$m(t) = k'' \tau (e^{-t/\tau} - 1) + k'' t$$

2 Généralisation

Sur des installations industrielles il est possible de trouver des systèmes intégrateurs répondant aux fonctions de transferts suivantes :

- modèle de Strejc $H(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)^n}$. Les réponses indicielles de tels

systèmes sont fournies figure 4.

- modèle de Broïda $H(p) = \frac{ke^{-\tau p}}{p}$. La réponse indicielle d'un tel

système est fournie figure 3, courbe b.

Remarque très importante : on prendra garde de ne jamais confondre un gain statique, noté K et sans unité, avec une constante d'intégration, notée k et exprimée sous forme de l'inverse d'un temps.

Réponses fréquentielles des systèmes intégrateurs

Lorsque ω tend vers 0, le gain logarithmique admet une asymptote de pente $-20n$ décibels par décade, où n représente la classe du système. De la même manière, les courbes de phase admettent des asymptotes horizontales de $(-90n)^\circ$.

Les diagrammes de Bode de systèmes intégrateurs de Strejc sont fournis figures 5 et 6.

Les courbes correspondent à : $k = 0,5 \text{ min}^{-1}$, $\tau = 10 \text{ min}$, $n = 2, 3, 4, 5$ et 6.

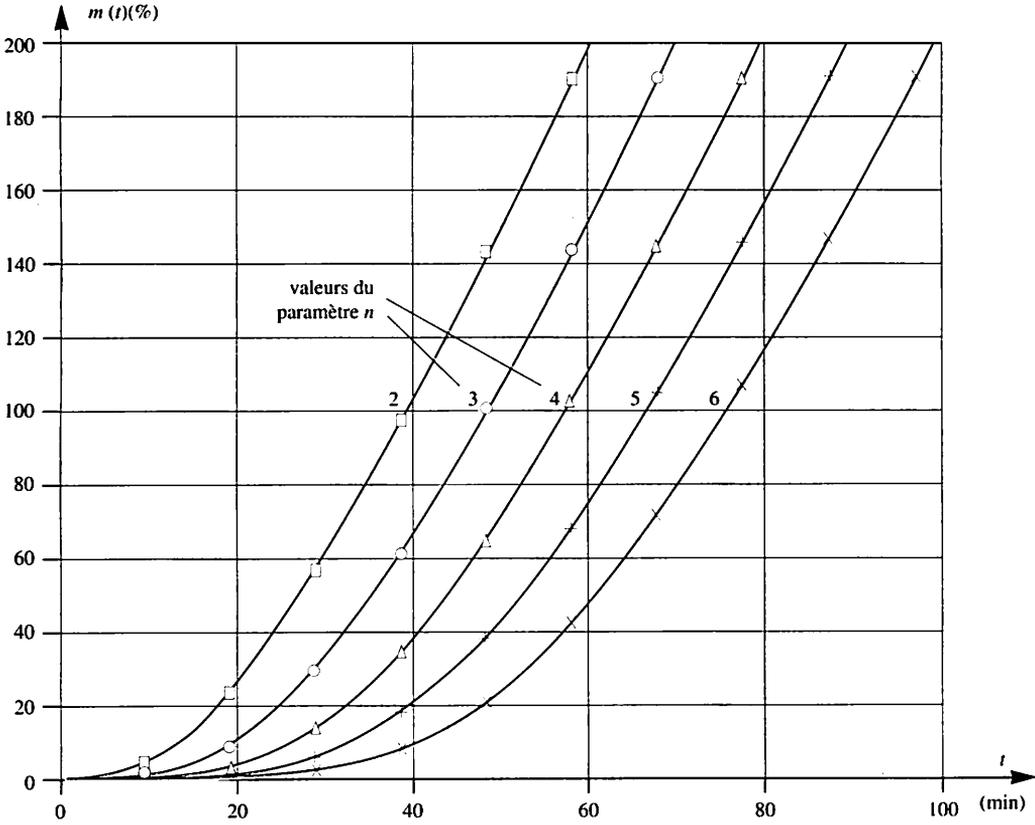


Fig. 4

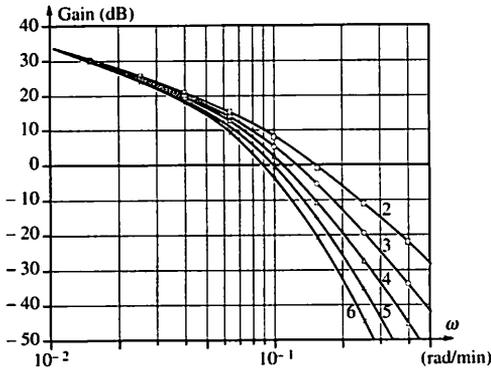


Fig. 5

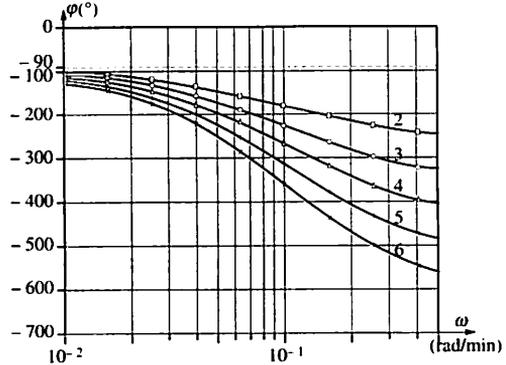


Fig. 6

1 Définitions

Un système commandé est dit en chaîne fermée si une variation du signal de mesure M , image de la grandeur à maîtriser, entraîne une modification du signal de commande Y_R et réciproquement.

On retrouve encore les trois étapes essentielles, déjà distinguées au chapitre 1 (fig. 1) : l'observation de M , la réflexion, l'action sur le signal de commande Y_R .

Le problème de ce type de régulation est donc de mesurer la grandeur à maîtriser (observation), de la comparer à l'objectif à atteindre et, par une loi de commande appropriée (réflexion), d'agir sur la grandeur réglante du système (action).

Ce fonctionnement en « circuit fermé » explique que l'on parle souvent de boucle de régulation. La figure 2 fait apparaître les deux éléments de la boucle : le système physique et le système de régulation.

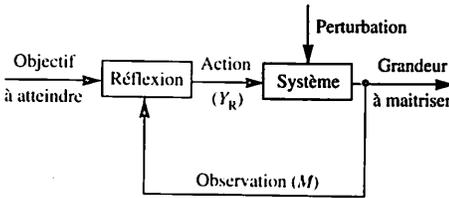


Fig. 1

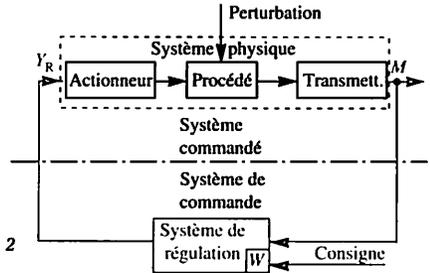


Fig. 2

Terminologie

- **Système de régulation** : le dispositif automatique le plus simple s'appelle un régulateur.

Sur les schémas T.I. il se représente par la lettre *C* (*controler*). Ainsi un « FIC » est un régulateur indicateur de débit. La vanne progressive associée pour la commande est repérée en rappelant la fonction du régulateur. Par exemple, la vanne de réglage du FIC précédent serait notée FCV.

Consigne : en toute rigueur la consigne désigne la valeur W désirée pour la grandeur à maîtriser. Par abus de langage, le mot consigne désigne également souvent un signal exprimé dans la même unité que le signal de mesure.

Il faut savoir que la consigne peut parfois se noter *SP* (*set point*).

Le but de la régulation est d'obtenir, le plus souvent possible, l'égalité : $M = W$, en modifiant le signal réglant Y_R . Deux étapes peuvent être distinguées pour atteindre cet objectif :

- l'étude statique permet d'étudier cet objectif, dans l'hypothèse où toutes les grandeurs d'influence du procédé ont des valeurs constantes (souvent obtenues au bout d'un régime transitoire plus ou moins long).
- l'étude dynamique qui permet d'étudier cet objectif, lorsque les diverses grandeurs d'influence subissent des variations au cours du temps.

Le présent chapitre s'intéresse à la première étude, réalisée en exploitant les résultats du chapitre 7 concernant les caractéristiques statiques d'un système.

2 Exploitation des caractéristiques statiques d'un système

Le système représenté figure 3 a été étudié dans le chapitre 13. Le point de fonctionnement choisi reste : $W_0 = M_0 = 50\%$, $Z_0 = Y_{RB} = Q_B = 50\%$, $Y_{RA} = Y_{RO} = 50\%$.

En régime établi les caractéristiques ont pour équation :

$$M(\%) = \frac{100Y_R}{Y_R + Z}$$

Afin de faciliter la compréhension de l'action du régulateur, les caractéristiques statiques d'un système seront désormais représentées sous la forme de courbes représentatives d'équation $Y_R = f(M)$ (fig. 4). A partir du point de fonctionnement $X_0(M_0, Y_{RO}, Z_0)$, une variation de la perturbation Z , de 50 % à 80 %, provoque un déplacement du point de fonctionnement de X_0 à X_1 , entraînant une variation de la mesure $m = \Delta M = M_1 - M_0 = M - W_0$ (écart mesure/consigne).

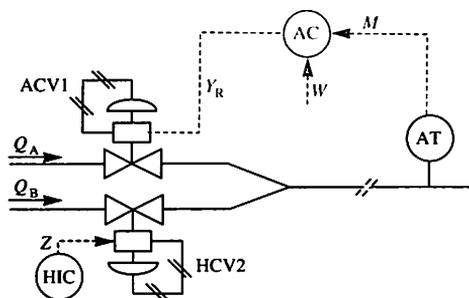


Fig. 3

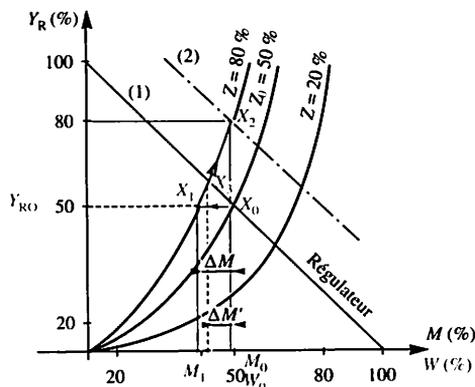


Fig. 4

La seule façon d'annuler l'écart m est de modifier le signal Y_R , en fonction de m , afin de ramener le point de fonctionnement en X_2 . Cette modification peut être réalisée manuellement par un conducteur d'installation, à condition qu'il soit présent devant un instrument de mesure et qu'il dispose d'un moyen de générer un signal de commande.

On constate tout de suite le caractère grossier de ce type de réaction : l'opérateur humain ne sait pas à un instant donné si la modification de commande qu'il va effectuer compensera totalement la perturbation. Il est donc conduit à procéder par tâtonnements, par petites retouches successives.

L'objectif $M = W$ n'est donc assuré qu'imparfaitement. De plus, ce type de commande nécessite la présence permanente d'un opérateur.

Le rôle du régulateur est de modifier automatiquement le signal Y_R lorsque la mesure s'écarte de sa valeur de consigne. La relation préprogrammée dans le régulateur, liant Y_R à M et W , peut être plus ou moins complexe. Dans le cas le plus simple cette relation n'est pas différentielle et peut donc être représentée, dans un diagramme $Y_R = f(M)$, par une courbe appelée caractéristique statique du régulateur.

Le point de fonctionnement de la boucle de régulation est l'intersection de la caractéristique statique du système de régulation et de celle du système physique, représentées dans le même système d'axes de coordonnées $Y_R = f(M)$ (voir fig. 4. chap. 15).

1 Régulateur à caractéristique fixe

L'idée la plus élémentaire est d'établir une relation linéaire entre Y_R et m , de la forme $Y_R = A'm + B'$ (1). En régime établi la consigne W_0 étant constante, cette relation peut s'écrire :

$$Y_R = AM + B \quad (2)$$

Les coefficients A et B sont des constantes indépendantes du temps, A sans unité et B sous forme d'un pourcentage.

Le régulateur est dit à action proportionnelle (ou de type P) car toute variation de M entraîne une modification proportionnelle de Y_R . Dans le système d'axes (M, Y_R) , la relation (2) peut se représenter par une droite, dont la pente est numériquement égale à A . Comme pour le gain statique K d'un système, on note que A est un nombre sans unité, car obtenu comme rapport de pourcentages.

Sur la figure 4 du chapitre 15 la caractéristique du régulateur est représentée avec les valeurs suivantes : $A = -1$ et $B = 100\%$. L'intersection de cette droite et de la caractéristique du système physique pour $Z = 50\%$ est le point de fonctionnement X_0 de la boucle ; il correspond au point de fonctionnement recherché pour le système.

Influence des perturbations

Pour une variation de la perturbation Z de 50% à 80% , le point de fonctionnement, qui doit toujours appartenir aux deux caractéristiques statiques, passe de X_0 à X_3 . La variation de mesure est alors $m' = M_3 - M_0$, inférieure à la variation m obtenue à commande fixe Y_{R0} . Pour que la régulation soit parfaite, il faudrait obtenir $X_3 = X_2$ donc que la caractéristique du régulateur soit une droite verticale passant par le point X_2 .

Cette solution consiste à réaliser une régulation tout ou rien, qui est un cas particulier de régulateur à action proportionnelle, A ayant une valeur infinie. Ce type de régulation élémentaire ne permet pas d'obtenir une mesure constante au cours du temps : il sera étudié dans un chapitre ultérieur.

On peut cependant noter que dans le cas de l'action proportionnelle, plus $|A|$ est important, plus l'écart résiduel entre M et W_0 est faible.

caractéristique du régulateur, que l'on appellera désormais amplification ou coefficient d'action proportionnelle.

On montre facilement que : $|A| = \frac{100}{X_p}$.

La relation (2) est applicable pour une consigne fixe W_0 . Si l'on veut pouvoir modifier la valeur de la consigne, on reprend l'expression (1), que l'on écrit sous la forme :

$$Y_R = A(M - W) + Y_{R0}$$

où Y_{R0} représente une constante, réglable par l'utilisateur, appelée talon ou bias. Pour obtenir une régulation parfaite Y_{R0} doit être réglé à la valeur de l'ordonnée du point de fonctionnement recherché.

Équation temporelle du régulateur

On adopte habituellement l'équation suivante :

$$Y_R = \pm A(M - W) + Y_{R0}$$

Le signe double \pm permet de prendre en compte les deux sens d'action, le coefficient d'amplification A devenant une constante positive. Cette relation est souvent notée : $Y_R = A \cdot \varepsilon + Y_{R0}$ (3),

relation où ε représente l'écart généralisé mesure/consigne. Le sens d'action est pris en compte au niveau du schéma fonctionnel, dans le cas d'une action inverse figure 2. Dans la pratique, selon les constructeurs, le paramètre de réglage accessible à l'utilisateur est A ou X_p . Pour de petites variations autour d'un point de fonctionnement, cette relation devient : $y_R = A \cdot \varepsilon$

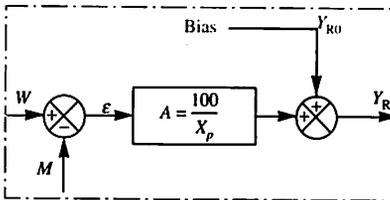


Fig. 2

Fonctions de transfert

L'équation (3) permet de définir la fonction de transfert isochrone de la partie correctrice du régulateur :

$$C(j\omega) = \frac{Y_R(j\omega)}{\varepsilon(j\omega)} = A$$

De même la fonction de transfert isomorphe est : $C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A$

Choix du point de fonctionnement : réglage du bias

Suivant les constructeurs, les régulateurs de type P peuvent être prévus pour les conditions de fonctionnement suivantes :

- soit $Y_{R0} = 0$: on parle alors de bande proportionnelle décentrée, car la zone de réglage est entièrement à gauche ou à droite de la consigne.
- soit $Y_{R0} = 50\%$: on parle alors de bande proportionnelle centrée, car la zone de réglage se trouve également répartie de part et d'autre de la consigne.
- soit Y_{R0} ajustable.

Dans tous les cas le point de fonctionnement obtenu ne garantit pas $M = W$ lorsque les perturbations modifient la caractéristique statique du système.

2 Régulateur à caractéristique mobile

Le choix d'un biais constant, en régulation de type P, aboutit à un écart résiduel ε plus ou moins grand selon l'évolution de la caractéristique du système au cours du temps et suivant la valeur de X_p .

L'idéal serait de pouvoir modifier automatiquement le biais Y_{R0} , tant que ε n'est pas nul. La caractéristique du régulateur subit alors un déplacement parallèlement à elle-même, représenté par le passage de la courbe (1) à la courbe (2) sur la figure 4 du chapitre 15. Le point de fonctionnement passe alors automatiquement de X_0 à X_2 , garantissant ainsi $M = W$ au régime statique.

Cette caractéristique « glissante » du régulateur peut être obtenue de deux façons.

- Le talon est élaboré à partir d'un signal extérieur au régulateur, généralement image de la perturbation principale. On parle alors de régulateur PZ, permettant une régulation auxiliaire en chaîne ouverte.
- Le talon est élaboré à partir de l'intégrale du signal d'écart ε , auquel cas on parle de régulateur à action proportionnelle et intégrale, ou de type PI. Le schéma fonctionnel de ce régulateur est fourni figure 3. Les deux contributions au signal de sortie Y_R sont notées Y_p et Y_i pour rappeler l'origine des signaux de correction. L'étage intégrateur introduit une constante de temps T_i appelée constante de temps d'action intégrale, exprimée en secondes ou minutes suivant les constructeurs. C'est un paramètre de réglage du régulateur.

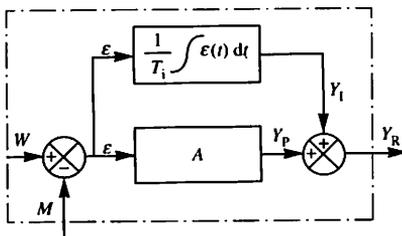


Fig. 3.

Schéma fonctionnel d'un régulateur utilisant une action intégrale pour obtenir un biais automatique permettant d'annuler ε .

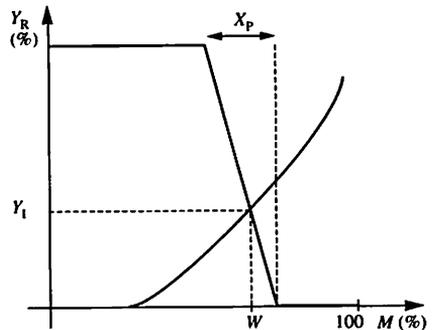


Fig. 4
A l'équilibre statique $Y_p = 0$ et l'action intégrale réalise le talon Y_i permettant une précision statique parfaite $M = W$.

Exercice résolu

Dans le mélangeur en ligne de la figure 3 du chapitre 15, les deux vannes sont à caractéristiques linéaires : ACV1 est de type normalement ouverte (NO), HCV2 est de type normalement fermée (NF). On désire le point de fonctionnement suivant : $W_0 = 50\%$, pour un débit $Q_B = Z_0 = 50\%$. Compte tenu de l'installation, ce débit peut varier dans l'intervalle $40\% - 60\%$.

Le régulateur AC est de type P avec bias réglable. Le transmetteur fournit une image proportionnelle au pourcentage de produit A dans le mélange. Chaque grandeur est exprimée en pourcentage de sa variation maximale ou de l'échelle de son transmetteur.

- Déterminer le sens d'action du régulateur AC.
- Établir les équations des caractéristiques statiques du système physique $Y_R = f(M, Z)$ pour M variant de 45% à 55% , la perturbation Z prenant les valeurs 40% , 50% et 60% .
- Représenter graphiquement ces trois caractéristiques.
- Situer le point de fonctionnement sur le graphe et en déduire la valeur du bias à adopter sur ce régulateur.
- Rappeler l'équation du régulateur.
- Déterminer la bande proportionnelle X_p à adopter afin que l'écart résiduel maximal ε ne dépasse pas 1% lorsque le débit Q_B varie de $\pm 10\%$ autour de sa valeur nominale.
- La valeur relativement faible de X_p obtenue à la question 6 peut conduire à une instabilité de la boucle de régulation, car le système comporte un temps mort T important. On préfère donc essayer de compenser la perturbation Z , mesurable, par un bias ajustable fonction de Z . Déterminer la fonction correspondante $Y_{R0} = f(Z)$.
- Établir le schéma fonctionnel du régulateur PZ, valable pour $W_0 = 50\%$.
- Que faire pour conserver cette compensation lorsque W varie ?

Solution :

1. Sens d'action du régulateur

A partir d'une augmentation de la mesure M , le signal de sortie Y_R du régulateur doit évoluer de telle sorte que le débit Q_A diminue. La vanne ACV1 étant normalement ouverte, le signal Y_R doit donc augmenter afin de provoquer la fermeture partielle de la vanne. Il faut donc adopter un sens d'action direct.

2. Caractéristiques statiques

On retrouve les relations habituelles :

$$M(\%) = \frac{100Q_A}{Q_A + Q_B} = \frac{100Q_A}{Q_A + Z}$$

La vanne ACV1 étant normalement ouverte, sa loi de commande est : $Q_A(\%) = 100 - Y_R$. On obtient donc :

$$M(\%) = \frac{100(100 - Y_R)}{(100 - Y_R) + Z}$$

ou, en coordonnées (M, Y_R) :

$$Y_R = \frac{10^4 - M(100 + Z)}{100 - M}$$

3. Représentation graphique

Pour les 3 valeurs : $Z = 40\%$, 50% et 60% on obtient les courbes (1), (0) et (2) de la figure 4.

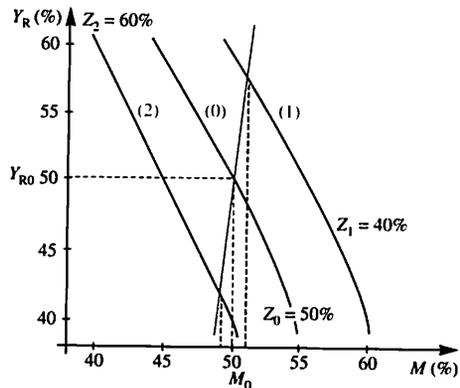


Fig. 4

4. Détermination du bias

Le point de fonctionnement $W_0 = 50\%$, sur la caractéristique nominale $Z = 50\%$ a pour ordonnée :

$$Y_R = 50\%$$

Cette valeur constitue le bias nécessaire pour assurer une précision statique parfaite, si $Z = 50\%$.

5. Équation du régulateur

Le régulateur est à action directe et son bias est de 50% . Son équation est donc :

$$Y_R = \frac{100}{X_p} \cdot (M - W) + 50$$

6. Bande proportionnelle limite

La détermination graphique, grossière mais suffisante, montre que pour $Z = 60\%$, la caractéristique du régulateur doit couper celle du procédé pour $M = 49\%$.

L'ordonnée du point est alors approximativement : $Y_R = 42\%$

La pente est donc égale à :

$$A_1 = \frac{50\% - 42\%}{1\%} = 8$$

$$X_{p1} = \frac{100}{A_1} = 12,5\%$$

Un raisonnement analogue pour $Z = 40\%$ conduit à :

$$A_2 = \frac{57,7\% - 50\%}{1\%} = 7,7, \quad \text{donc :}$$

$$X_{p2} = \frac{100}{A_2} = 13\%$$

Le calcul théorique aboutit à : $X_{p1} = 13\%$ et $X_{p2} = 11,9\%$. On adopte :

$$X_p = 12\%$$

Cette valeur garantit un écart inférieur à 1% dans les limites envisagées pour le débit Q_B . Elle pourra être revue à la hausse après l'étude dynamique.

7. Relation $Y_{R0} = f(Z)$

La relation de la question 2 est toujours utilisable : $Y_R = \frac{10^4 - M(100 + Z)}{100 - M}$.

Si l'on suppose que le bias Y_{R0} compense en permanence la perturbation Z , on peut écrire que $M = W_0 = 50\%$. La relation devient donc :

$Y_{R0} = 200 - (100 + Z)$ soit $Y_{R0} = 100 - Z$.

8. Schéma fonctionnel du régulateur

Il est fourni figure 5.

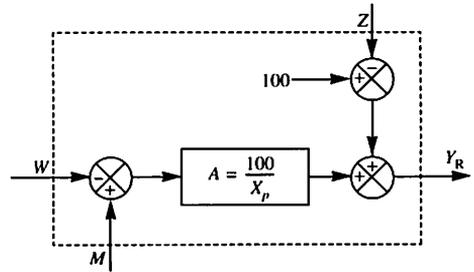


Fig. 5

9. Cas où W varie

Il faut reprendre la formule générale de la question 2. Si l'on suppose que le bias Y_{R0} compense en permanence la perturbation Z et les variations de W , on peut écrire que $M = W$. On obtient

$$\text{donc : } Y_{R0} = \frac{10^4 - W(100 + Z)}{100 - W} \quad \text{ou}$$

$$Y_{R0} = 100 - \frac{W \cdot Z}{100 - W}. \quad \text{Il est cependant}$$

évident que nos hypothèses ($M = W$ quel que soit le temps t) ne sont pas vraies et que le bias ne compensera pas exactement les variations de Z ou W , pendant les régimes transitoires. L'action proportionnelle jouera alors son rôle, tout en ne nécessitant plus une valeur trop faible de X_p .

1 Introduction

A partir des caractéristiques statiques d'un système et de la connaissance de la structure du régulateur associé, on a montré qu'il est possible de déterminer le point de fonctionnement de la boucle de régulation, à condition d'être en régime permanent.

Le premier enseignement du chapitre précédent est qu'une régulation avec action intégrale est nécessaire pour obtenir une précision statique parfaite, c'est-à-dire $M = W$.

Le deuxième enseignement est qu'une régulation de type P assure une régulation d'autant meilleure que son coefficient d'action proportionnelle A est grand.

Malheureusement ces informations sont insuffisantes, lorsqu'il s'agit d'assurer la condition mesure = consigne, quelles que soient les évolutions des grandeurs perturbatrices au cours du temps. Les contraintes deviennent multiples, avec parfois des solutions qui s'opposent. Tout l'art du réglage est de savoir choisir les paramètres du régulateur, à savoir A et T_i pour un régulateur de type PI, en fonction des contraintes qui peuvent être exprimées au moyen des questions suivantes :

- quelle précision statique recherche-t-on ?
- quelle rapidité de réaction est-il nécessaire d'obtenir en cas de perturbations, et pour quels types de perturbations ?
- quel amortissement recherche-t-on, en cas de brusque variation de consigne ?
- les choix adoptés pour A et T_i sont-ils compatibles avec les contraintes de sécurité et la durée de vie des organes de réglage ?

Les méthodes de réglages seront abordées dans Étapes. Régulation 2. Pour l'instant, on se propose plus simplement de connaître l'influence des valeurs de A (en régulation proportionnelle) sur l'évolution du signal de mesure M et du signal réglant Y_R , pour les deux sollicitations traditionnelles d'une boucle de régulation :

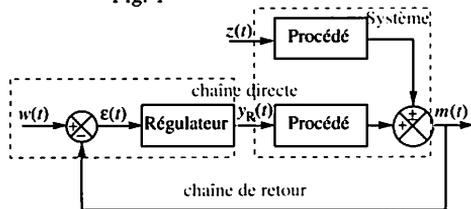
- variation de consigne, dans le cas d'un asservissement ou régulation de correspondance.
- variation d'un signal de perturbation principal, dans le cas d'une régulation dite de maintien et pour laquelle la consigne W garde une valeur fixe.

L'objectif est d'acquérir des « réflexes » simples, en l'absence de tout calcul.

2 Schéma fonctionnel d'une boucle de régulation

Celui-ci est rappelé figure 1. Tous les signaux indiqués sur cette figure représentent de petites variations par rapport à un point de fonctionnement, conformément aux notations vues au chapitre 8. Les deux sollicitations précédemment citées correspondent à des échelons d'amplitude limitée, pour que l'hypothèse linéaire reste approximativement justifiée.

Fig. 1



On étudie l'évolution $m(t)$ de M à :

$$w(t) = 10u(t) \text{ avec } z(t) = 0$$

$$z(t) = 10u(t) \text{ avec } w(t) = 0$$

On note que les réponses peuvent permettre d'identifier les fonctions de transfert F et F_Z liant m à w et z , le régulateur étant en service.

3 Étude d'une régulation de débit

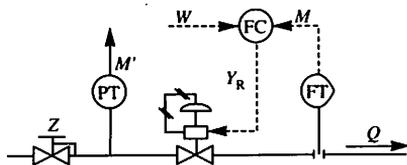


Fig. 2

Le dispositif physique étudié est représenté figure 2. La vanne de régulation est à caractéristique linéaire et normalement fermée (NF). Autour du point de fonctionnement étudié, elle introduit une constante de temps $\tau = 10$ s. Le détendeur, en amont de la vanne de régulation, permet de faire varier la pression dont l'image est M' . On introduit ainsi une fonction de transfert perturbatrice de constante de temps $\tau' = 10$ s.

Les deux fonctions de transfert H et H_Z (voir chap. 8) sont du 1^{er} ordre. Compte tenu des éléments du procédé, le régulateur est à sens d'action inverse.

Régulation à action proportionnelle (type P)

- Les réponses indicielles à $w(t) = 10u(t)$ avec $z(t) = 0$, pour les valeurs $A = 1, 2, 4, 8, 12$ du coefficient d'action proportionnel, sont fournies figure 3.

Ces réponses sont du 1^{er} ordre, avec une constante de temps τ'' qui diminue lorsque A augmente. On peut vérifier graphiquement que

$$\tau'' = \frac{\tau}{(1 + A)}$$

On en déduit que, pour un procédé du 1^{er} ordre associé à un régulateur P, la rapidité de réaction augmente avec A . On constate de même que l'écart résiduel ε est d'autant plus faible que A est grand.

La figure 4 donne les variations $y_R(t)$ du signal réglant, pour les valeurs précédentes de A . Ces courbes théoriques permettent de vérifier qu'il sera utopique d'espérer augmenter indéfiniment la vitesse de réaction de la boucle de régulation. En effet, notamment pour $A = 12$, on constate que $y_R(t)$ prend des valeurs supérieures à 100 % ce qui est impossible sur un régulateur réel. Sur ceux-ci la sortie réglante évolue nécessairement entre 0 % et 100 %. Cette saturation du signal de sortie impose au technicien d'utiliser une amplification limitée, compatible avec la réalité industrielle. La plupart du temps, en fonctionnement en asservissement, on limitera τ'' au quart de la valeur de τ .

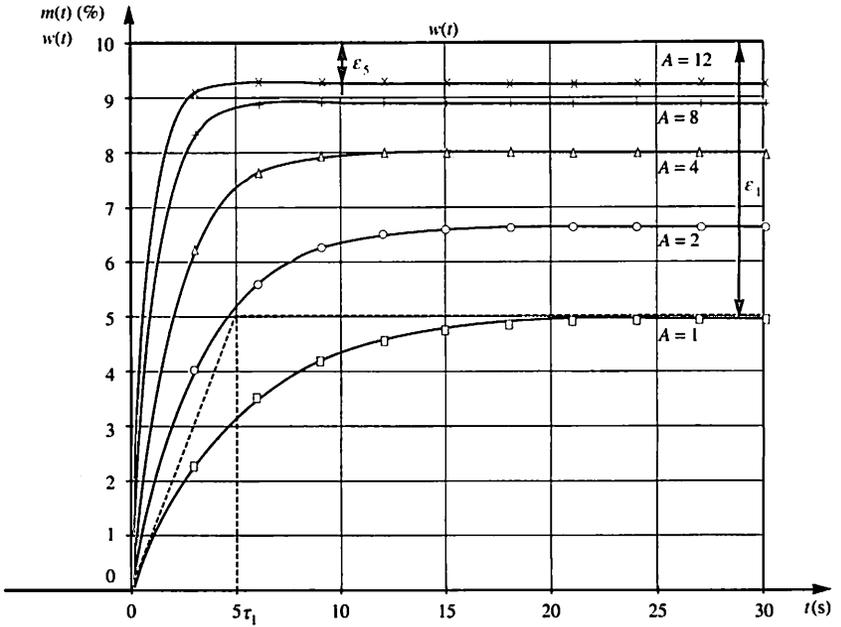


Fig. 3

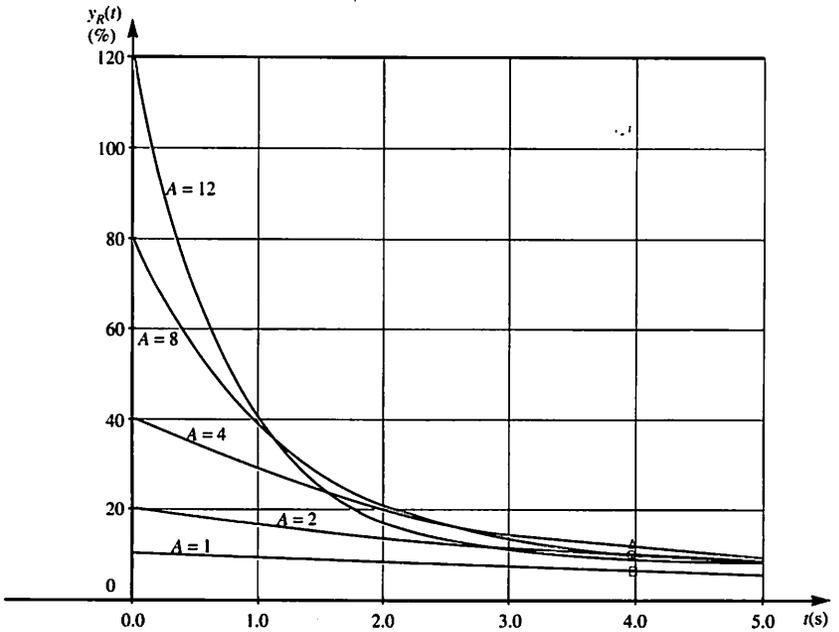


Fig. 4

- Les réponses indicielles à $z(t) = 10u(t)$ avec $w(t) = 0$, pour les valeurs $A = 1, 2, 4, 8, 12$ du coefficient d'action proportionnel, sont fournies figure 5. Elles correspondent à un poids positif de $z(t)$ sur $m(t)$ (voir fig. 1). Ces réponses sont du 1^{er} ordre, avec une amplitude ε qui diminue lorsque A augmente.

De tels résultats porteraient à croire qu'une grande amplification est nécessaire pour aboutir à des performances statiques et dynamiques intéressantes. Malheureusement, dans la pratique, des valeurs élevées de A (supérieures à 4) aboutissent à des régimes transitoires sur Y_R dommageables pour la vanne, entraînant une usure prématurée et des fonctionnements en saturation de la vanne.

Sauf pour une boucle ne nécessitant pas une bonne précision statique, il faut envisager un régulateur ayant une action intégrale.

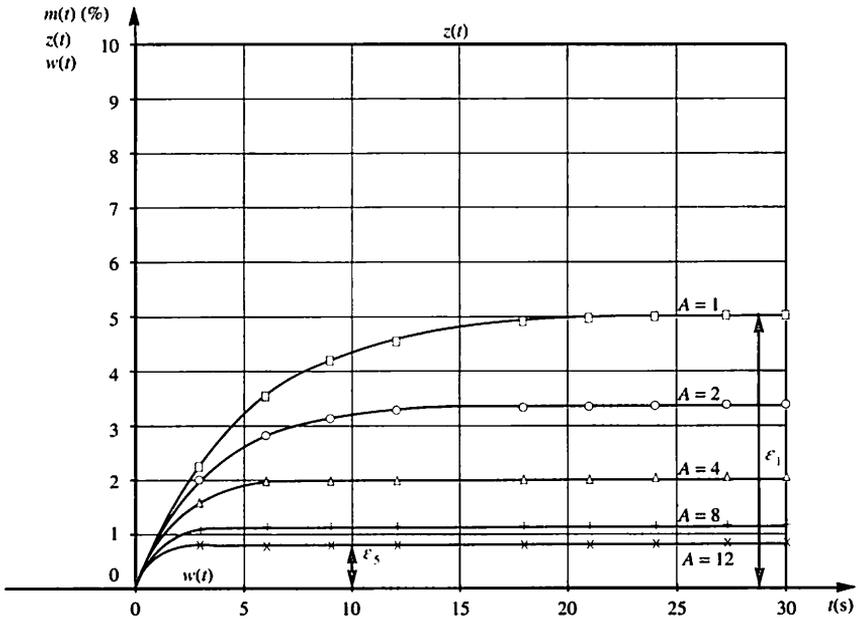


Fig. 5

L'étude de la stabilité des systèmes bouclés et l'étude des techniques de réglage des régulateurs, abordées dans Régulation 2, montrent que l'action proportionnelle doit être conservée pour régler la stabilité d'une boucle de régulation.

La précision statique d'un système bouclé doit être assurée par l'emploi d'une action intégrale, avec des contraintes qui sont abordées au chapitre suivant.

On se propose maintenant de connaître l'influence des valeurs de A et de T_i sur l'évolution du signal de mesure M et du signal réglant Y_R , pour les deux sollicitations traditionnelles d'une boucle de régulation déjà vues au chapitre précédent.

Le dispositif physique étudié est celui représenté par la figure 2 du chapitre précédent. On rappelle que $\tau = 10$ s. Compte tenu des contraintes d'utilisation, on désire maintenant obtenir une précision statique parfaite ainsi qu'une bonne compensation des perturbations. La mesure de débit étant utilisée dans une stratégie de régulation, on désire en outre que ses variations au cours du temps ne soient pas caractérisées par un régime pseudopériodique.

1 Régulation à action proportionnelle et intégrale (type PI)

La structure d'un tel régulateur a été fournie au chapitre 16 à la figure 3. On rappelle que les deux contributions au signal de sortie Y_R sont notées Y_p et Y_i pour rappeler l'origine des signaux de correction. La sortie véritable Y_R peut donc être déterminée par $Y_R(t) = Y_p(t) + Y_i(t)$. Les figures fournissent en fait les variations y_p et y_i .

La constante de temps d'action intégrale T_i est exprimée en secondes.

Courbes 1 : $A = 0$ et $T_i = 40$ s ; Courbes 2 : $A = 1$ et $T_i = 40$ s ;

Courbes 3 : $A = 1$ et $T_i = 10$ s ; Courbes 4 : $A = 0$ et $T_i = 10$ s ;

On note que le réglage $A = 0$ aboutit à un régulateur à action intégrale seule.

2 Observations

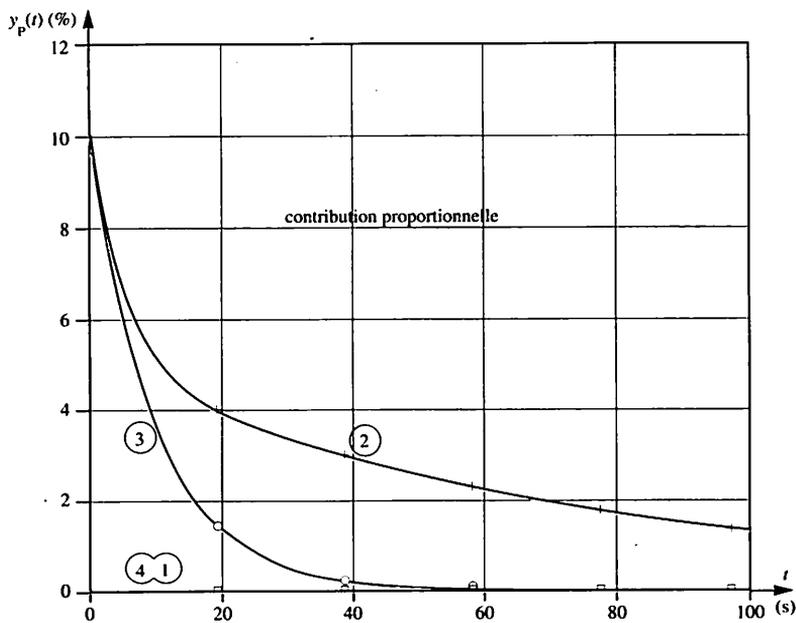
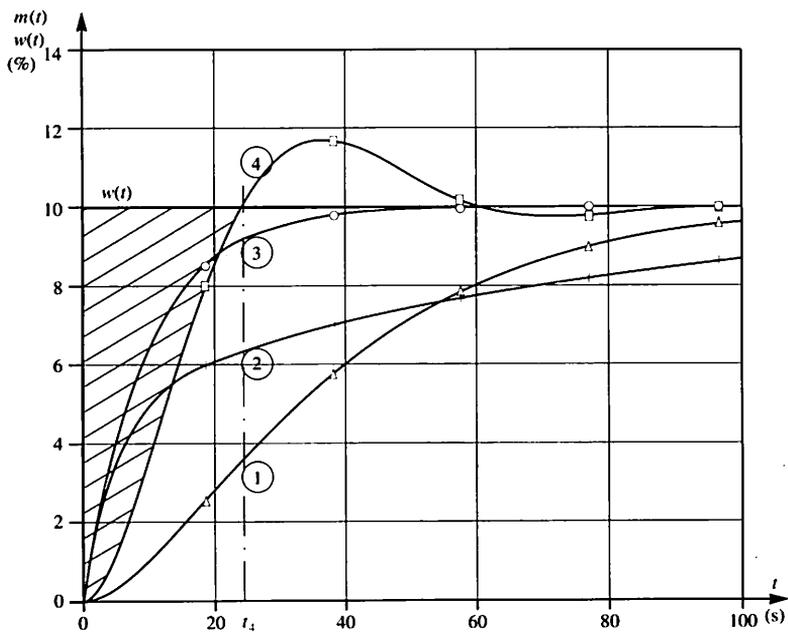
Réponse indicielle à l'échelon $w(t) = 10u(t)$ avec $z(t) = 0$

Pour les couples de valeurs ci-dessus de A et T_i les réponses sont fournies figures 1, 2, 3.

- Courbes 1 : On note sur la figure 1 que la réponse $m(t)$ obtenue manque de rapidité et que le temps de stabilisation pour retourner à la nouvelle consigne est grand devant τ . La réponse indicielle obtenue a une allure de 2^e ordre sur-amorti.
- Courbes 4 : l'augmentation de l'action intégrale, obtenue par diminution de T_i , n'apporte pas de véritables améliorations. La réponse indicielle obtenue a une allure de 2^e ordre sous-amorti, ce qui n'est pas recherché.

Dans ce dernier cas il est intéressant de noter qu'à l'instant t_4 , qui repère le passage de $m(t)$ à la valeur de consigne, le signal y_i est maximal (fig. 3) car il est proportionnel à l'aire hachurée sur la figure 1. Or le maximum V obtenu est supérieur à la valeur d'équilibre, à savoir 10 %, ce qui explique le dépassement observé.

On conservera en mémoire que l'action intégrale, bénéfique du point de vue statique, introduit un retard temporel dans les régimes transitoires et qu'elle ne doit jamais être utilisée seule.



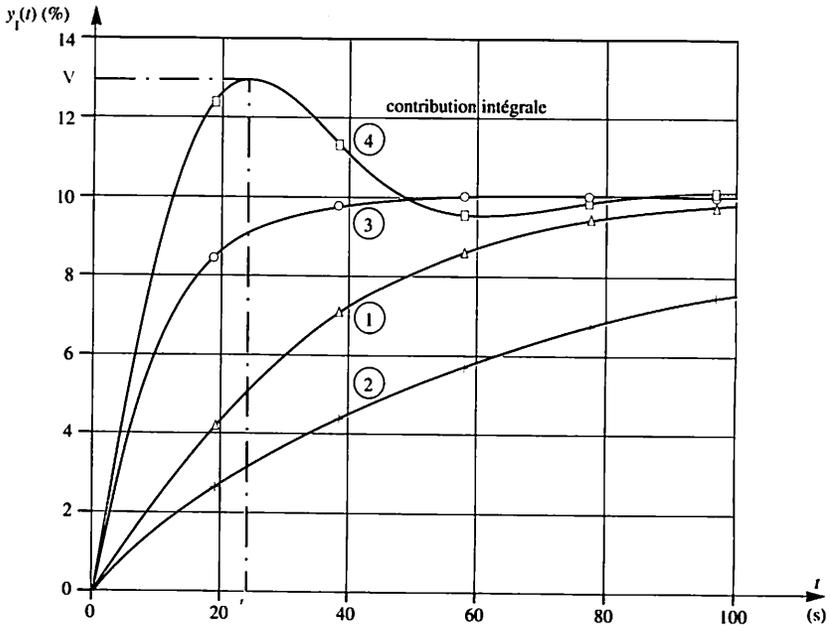


Fig. 3

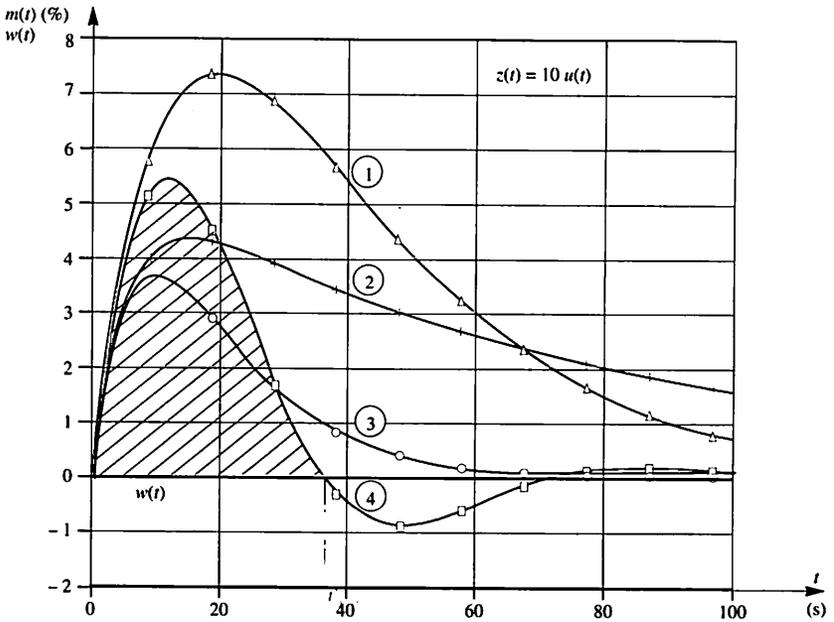


Fig. 4

- Courbes 2 : la présence de l'action P améliore légèrement la réponse, mais le signal y_i n'augmente pas suffisamment vite pour prendre le relais de y_p , lorsque celui-ci diminue.
- Courbes 3 : l'augmentation de l'action intégrale aboutit à une réponse « optimale », rapide et sans dépassement. La réponse indicielle obtenue a une allure de 2^e ordre avec amortissement critique. On remarque que ce réglage correspond à : $T_i = \tau$

Réponse indicielle à l'échelon $z(t) = 10u(t)$ avec $w(t) = 0$

Les courbes obtenues confirment les résultats précédents (fig 4, 5 et 6). Les quatre essais précédents montrent qu'un dosage précis des actions P et I est nécessaire pour assurer des performances correctes.

On retiendra que ces deux actions se complètent au cours du temps : pour ε important c'est l'action P qui prédomine. Lors du retour à l'équilibre, avec ε qui diminue, c'est l'action I qui « termine » le travail.

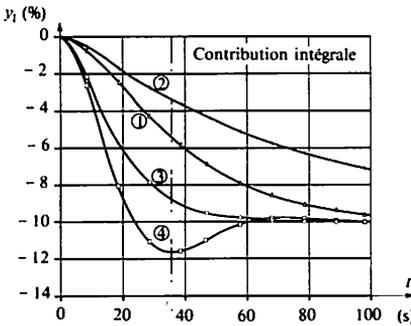


Fig. 5

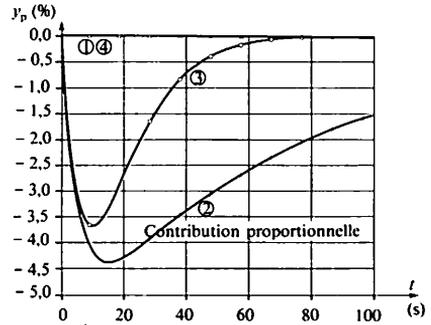


Fig. 6

Conclusions

Les techniques de réglage d'un système bouclé sont traitées en détail dans Régulation 2, chapitres 14 à 20.

Les observations des figures précédentes dégagent les contraintes à prendre en compte :

- Quels types de réponse désire-t-on en chaîne fermée, vis-à-vis d'un échelon de consigne ou vis-à-vis d'un échelon de perturbation ?
- Quelle est la fonction de transfert réglante du procédé ?
- Quelles sont les limites du signal de réglage Y_R que peut supporter le procédé ?

On comprend donc qu'un réglage soit nécessairement un compromis.

Le dispositif physique étudié est représenté figure 1. Il réalise une régulation de température sur un échangeur. La vanne de régulation est à caractéristique linéaire et normalement fermée (NF). Autour du point de fonctionnement étudié, la fonction de transfert $H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{1}{(1 + 10p)^2}$ correspond à un modèle de Strejc. Compte tenu des éléments du procédé, le régulateur est à sens d'action inverse.

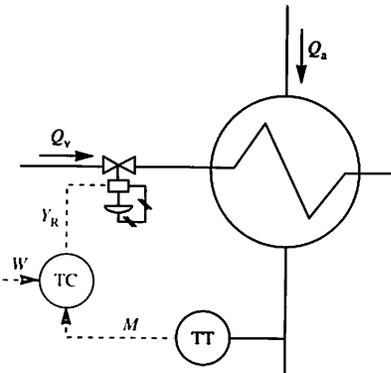


Fig. 1. Schéma TI d'un échangeur de chaleur. Le choix d'une vanne de type NF correspond à un échangeur chargé de réchauffer un fluide : en cas d'incident, on supprime la chauffe. Pour un échangeur chargé de refroidir un fluide (par exemple en sortie de colonne à distiller), il convient de choisir une vanne de type NO, assurant un refroidissement maximal.

1 Régulation à action proportionnelle et intégrale (type PI)

On étudie la réponse indicielle à l'échelon $w(t) = 10u(t)$ avec $z(t) = 0$. Pour les couples de valeurs suivants de A et T_i les réponses sont fournies figures 2, 3 et 4.

- Courbes 1 : $A = 2$ et $T_i = 0$ s. Courbes 4 : $A = 2$ et $T_i = 10$ s.

On note que le réglage $T_i = 0$ aboutit à un régulateur à action proportionnelle seule, chez la plupart des constructeurs.

Les courbes obtenues confirment les résultats de l'étude précédente, en ce qui concerne la nécessité de l'action intégrale pour la précision statique. On constate cependant, dans les deux cas, une réponse de type sous-amorti, avec des dépassements indésirables dus à une valeur trop importante de y_R au croisement de la consigne.

Pour imaginer un nouveau type d'action il suffit de consulter les courbes figure 2. On constate que les variations de $\varepsilon(t) = w(t) - m(t)$ sont brutales à $t = 0$ ($\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{infini}$) puis que $\varepsilon(t)$ diminue, entraînant

une dérivée $\frac{d\varepsilon}{dt}$ négative.

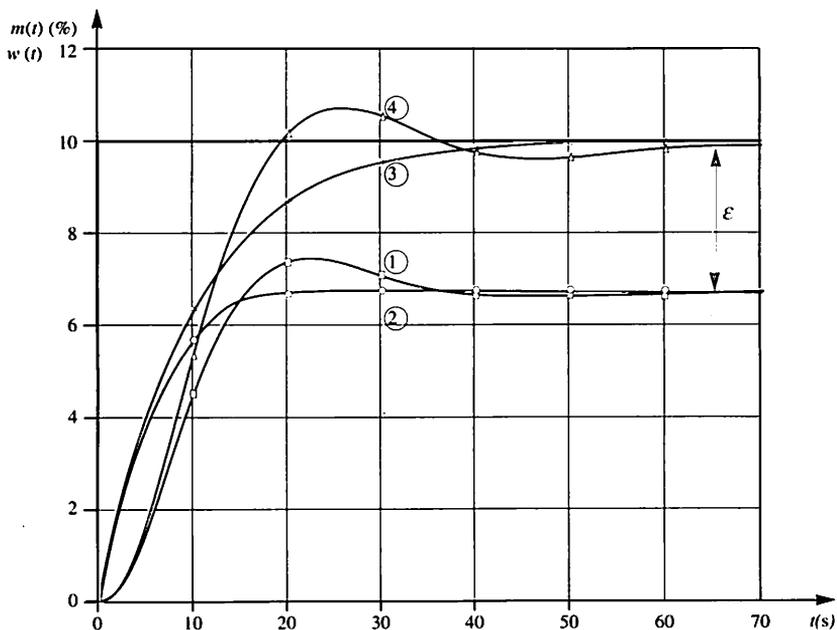


Fig. 2

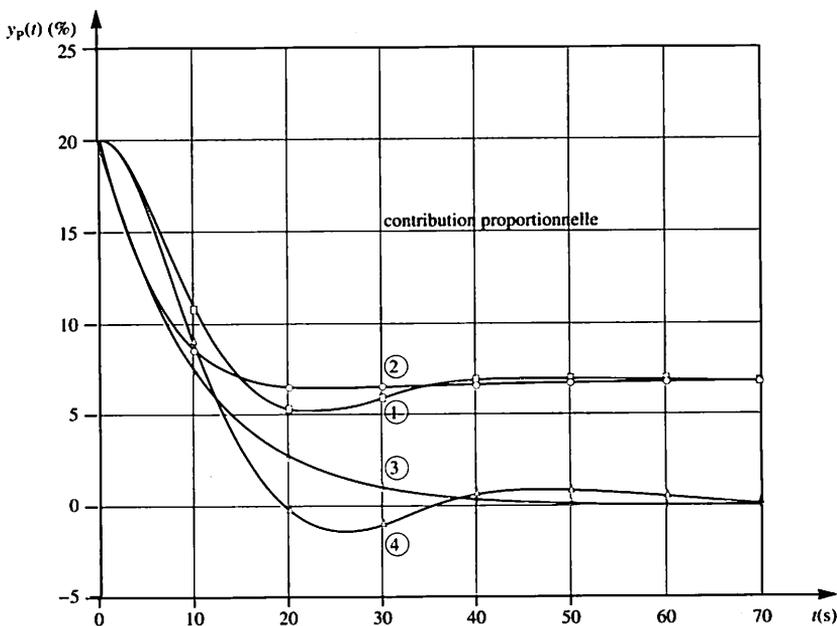


Fig. 3

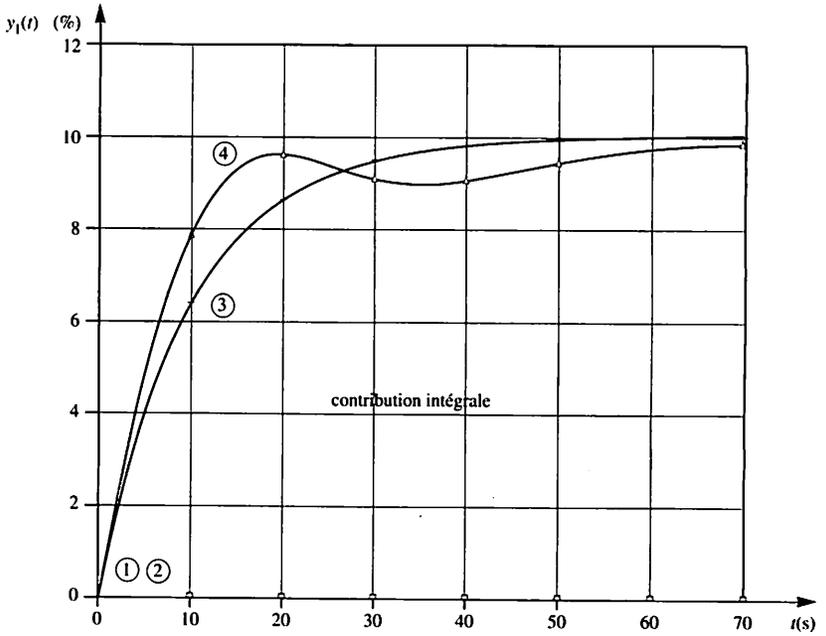


Fig. 4

Une action nouvelle, bâtie sur l'utilisation du signal $\frac{d\epsilon}{dt}$, permet donc une augmentation importante de y_R dès la modification de $w(t)$. En revanche, cette action, que l'on appelle action dérivée, permet par la suite de diminuer sensiblement l'excès de y_R puisque cette action est négative.

On obtient donc un régulateur à action proportionnelle, intégrale et dérivée, ou de type PID dont le schéma fonctionnel est fourni figure 5.

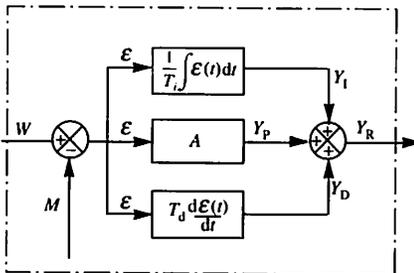


Fig. 5

L'étage dérivateur introduit une constante de temps T_d appelée constante de temps d'action dérivée, exprimée en secondes ou minutes suivant les constructeurs, et qui est un paramètre de réglage du régulateur.

2 Régulation à action proportionnelle, intégrale et dérivée (type P.I.D.)

On étudie la réponse indicielle à $w(t) = 10u(t)$ avec $z(t) = 0$.

Pour les couples de valeurs suivants de A et T_i les réponses sont fournies figures 2, 3, 4.

- Courbes 2 : $A = 2$, $T_i = 0$ s et $T_d = 10$ s; Courbes 3 : $A = 2$, $T_i = 10$ s et $T_d = 10$ s.

Les courbes obtenues figures 2, 3 et 4 confirment la contribution de l'action dérivée à l'augmentation de l'amortissement de la réponse. Ces résultats sont confirmés par l'allure du signal y_D figure 6.

On retiendra que ces trois actions se complètent au cours du temps : pour ε important c'est l'action P qui prédomine, avec un « coup de pouce » de l'action dérivée à l'instant 0^+ . Lors du retour à l'équilibre, avec ε qui diminue, c'est l'action I qui « termine » le travail, en étant freinée par l'action dérivée.

On retiendra également que l'action dérivée n'est nécessaire que pour les systèmes d'ordre élevé.

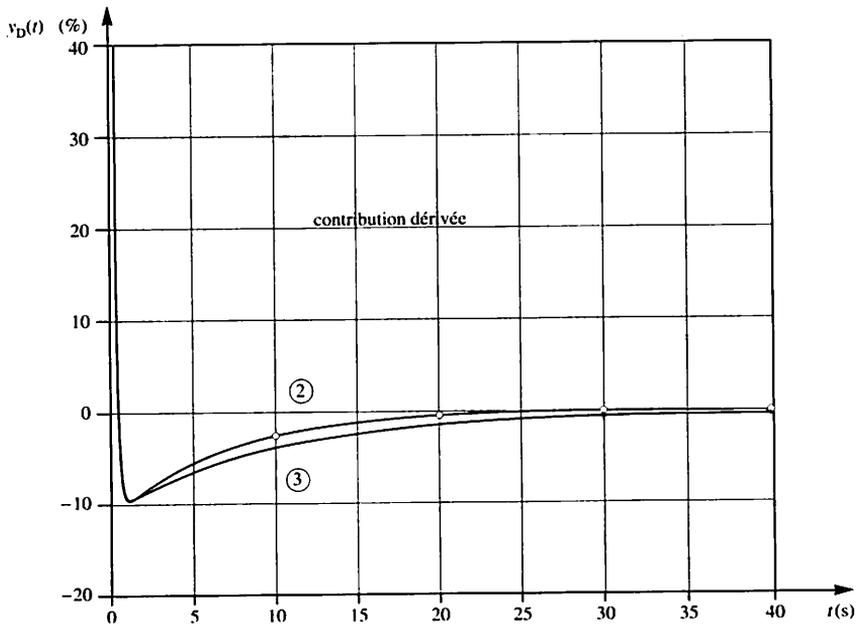


Fig. 6. Négative à partir de l'instant $t = 0^+$, l'action dérivée permet de diminuer Y_R et donc d'amortir ou supprimer le dépassement dû à l'action intégrale.

Exercices résolus

1 Pour les deux régulations de débit et de température abordées aux chapitres précédents, on se propose de tracer l'évolution des variations du signal réglant $y_R(t)$ à partir des variations des diverses contributions y_P, y_I et éventuellement y_D déjà fournies sous forme de courbes. Cette étude est très importante car, dans la pratique, seul ce signal est accessible au technicien qui ne peut pas toujours faire le lien avec les contributions P, I ou D. Pour la régulation de débit :

1. Tracer les courbes

$$y_R(t) = y_P(t) + y_I(t)$$

correspondant aux figures 2 et 3 (chapitre 18), courbes 2 et 3.

2. Analyser ces courbes en les comparant notamment à celles fournissant l'évolution du signal mesure.

Pour la régulation de température :

3. Tracer les courbes

$$y_R(t) = y_P(t) + y_I(t) + y_D(t)$$

correspondant aux figures 3, 4 et 6 (chap. 19), courbes 1 à 4.

4. Analyser ces courbes en les comparant notamment à celles fournissant l'évolution du signal mesure.

Solution :

1. Courbes $y_R(t) = y_P(t) + y_I(t)$

Les courbes se déduisent graphiquement des courbes citées. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

	t	0 ⁺	10	20	30	40
Courbe 2	y_R	10	6,8	6,7	7,1	7,45
Courbe 3	y_R	10	10	10	10	10

	t	50	60	70	80
Courbe 2	y_R	7,8	8,1	8,3	8,5
Courbe 3	y_R	10	10	10	10

Les courbes sont tracées figure 7.

2. Analyse des courbes

La courbe 2 reflète bien l'inadéquation des réglages, notamment l'insuffisance de l'action intégrale.

La courbe 3 reflète bien la complémentarité de l'action intégrale, face à la diminution de la contribution proportionnelle. Le cas particulier obtenu, dû aux valeurs adoptées, fournit une variation $y_R(t) = w(t)$, le régulateur étant en position automatique.

Si le résultat est déjà satisfaisant, on verra que l'on peut « durcir » l'action proportionnelle, en adoptant une valeur supérieure pour A, afin d'obtenir un temps de montée plus court.

3. Courbes $y_R(t) = y_P(t) + y_I(t) + y_D(t)$
Les courbes sont fournies figure 8, et sont obtenues par addition des différentes contributions.

4. Analyse des courbes

Courbes 1 et 2 : On note l'influence de l'action dérivée qui remplace une action importante, durant 10 s (courbe 1), par une action plus importante, mais pendant une durée plus courte d'environ 1 s (courbe 2). Cela explique le temps de montée plus court et le dépassement négligeable de la courbe 2 de la figure 2.

Courbes 3 et 4 : Le raisonnement est identique en ce qui concerne l'action bénéfique de l'action dérivée. On notera simplement que l'action intégrale (courbe 4) provoque une action importante, durant 20 s.

Le réglage peut encore être amélioré.

2 On reprend la régulation de débit, avec la réponse $m(t)$ obtenue à la figure 1, courbe 4, chapitre 18. Cette réponse correspond à une régulation à action intégrale seule. La courbe obtenue a une allure de réponse indicielle de système du 2^e ordre sous-amorti. On désire déterminer un modèle du 2^e ordre de la fonction de transfert en chaîne fermée (fig. 9), sous la forme :

$$F(p) = \frac{M(p)}{W(p)} = \frac{K}{p^2 + \frac{2\lambda p}{\omega_0} + 1}$$

Une vue agrandie de la réponse indicielle est fournie figure 10.

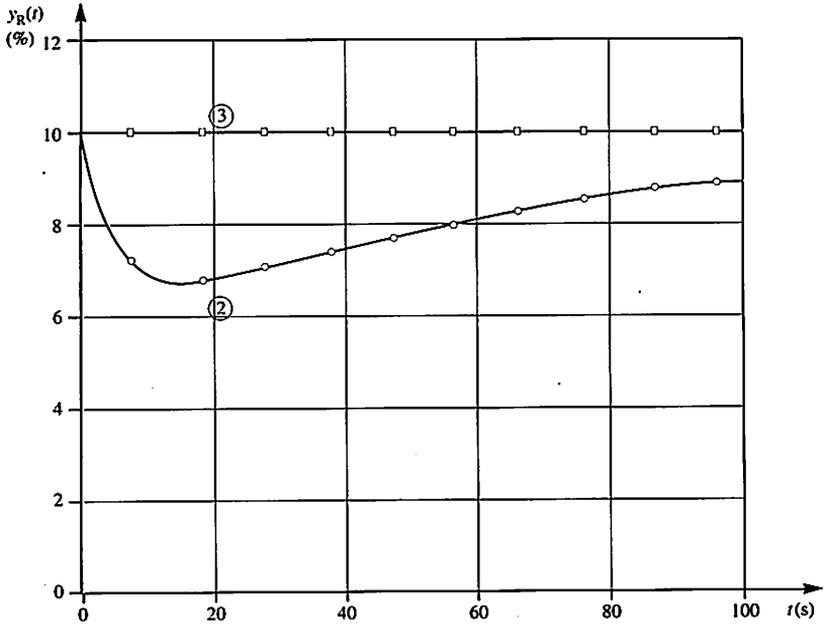


Fig. 7

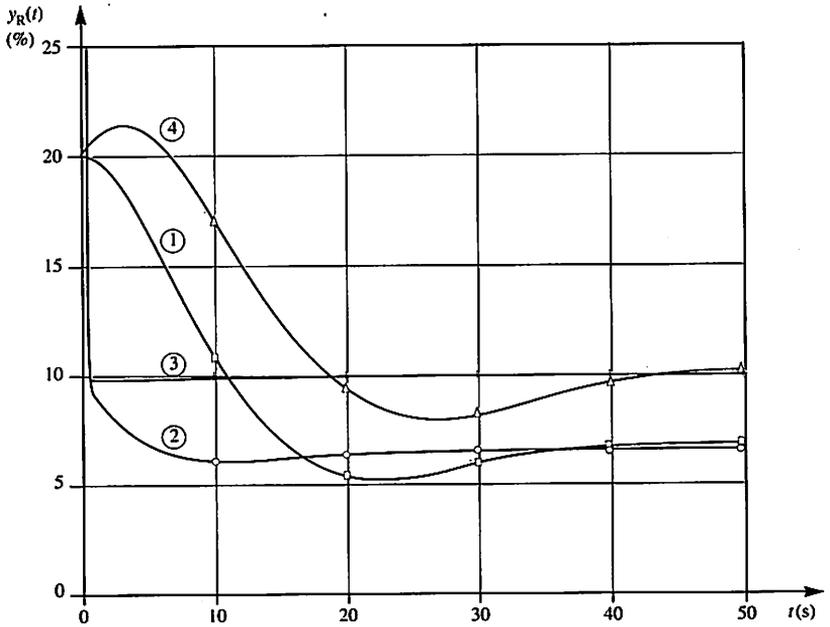


Fig. 8

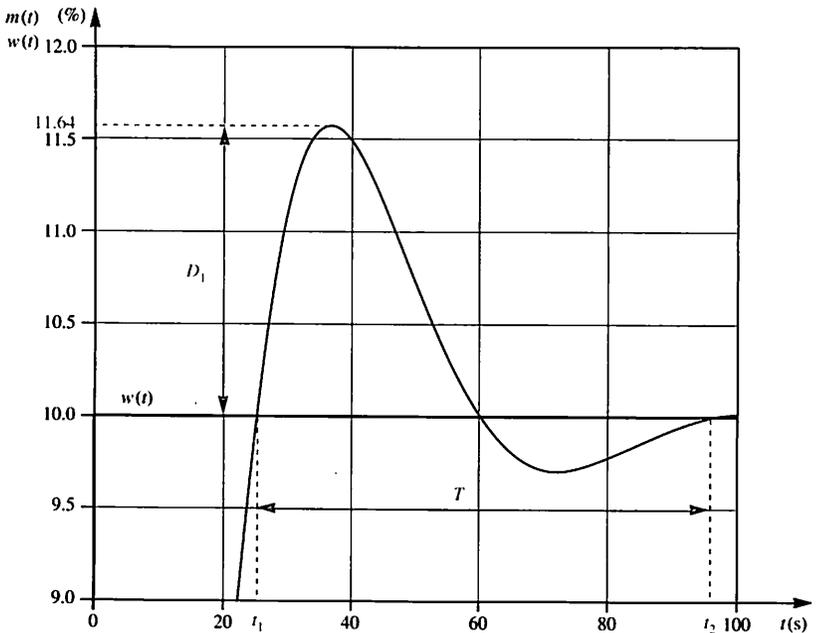


Fig. 10

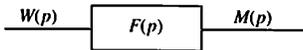


Fig. 9

1. Déterminer le gain statique K .
2. Déterminer le coefficient d'amortissement λ .
3. Déterminer la pulsation propre du système non amorti ω_0 .
4. On désire également déterminer un modèle équivalent pour la réponse de la courbe 3 de la figure 1, du chapitre 18. L'allure de cette courbe suggère un modèle de la forme :

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Déterminer graphiquement les valeurs de K et τ .

5. Pour les deux modèles précédents, tracer les réponses indicielles à un saut de consigne $W(p) = \frac{10}{p}$ (soit $w(t) = 10u(t)$) et comparer celles-ci avec les réponses réelles.

Solution :

1. Gain statique K

Pour une variation $w(t) = 10u(t)$ en échelon, la mesure $m(t)$ se stabilise à $m(t = \infty) = 10\%$, après un régime transitoire pseudo-oscillant.

Au statisme on obtient donc :

$$K = \frac{m(t = \infty)}{w(t = \infty)} = 1$$

2. Coefficient d'amortissement λ

La réponse indicielle étant pseudopériodique, on peut mettre en évidence le premier dépassement D_1 . On détermine graphiquement :

$$D_1 = \frac{(11,64 - 10)}{10} = 0,164 \text{ soit } 16,4\%$$

Or d'après les résultats du chapitre 7,

$$D_1 = 100 \exp - \left[\frac{\lambda \pi}{\sqrt{(1 - \lambda^2)}} \right]$$

L'équation à résoudre est donc :

$$\exp - \left[\frac{\lambda \pi}{\sqrt{(1 - \lambda^2)}} \right] = 0,164. \text{ Cette équation}$$

aboutit à la résolution d'une équation du second degré en λ . La seule racine qui corresponde à une solution physiquement observable est

$$\lambda = 0,498 \approx 0,5$$

3. Pulsation propre ω_0

La réponse indicielle étant pseudopériodique, on peut mettre en évidence la pseudopériode T . On détermine graphiquement : $T = t_2 - t_1 = 72$ s. Or, d'après les résultats du chapitre 7, la pseudopériode est égale à :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ avec : } \omega = \omega_0 \sqrt{(1 - \lambda^2)}$$

On obtient donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{72} = 0,0873 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Or : } \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{0,0873}{\sqrt{0,75}} = 0,1007 \text{ rad/s}$$

soit environ : $\omega_0 = 0,1 \text{ rad/s}$

La fonction de transfert isomorphe du modèle équivalent du 2^o ordre est donc :

$$F(p) = \frac{M(p)}{W(p)} = \frac{1}{100p^2 + 10p + 1}$$

4. Modèle du premier ordre

Pour $\omega(t) = 10 u(t)$, la variation $m(t)$ de la mesure se stabilise à 10 % donc le gain statique est égal à : $K = 1$. La constante de temps peut se lire directement sur la courbe car elle correspond au temps nécessaire pour atteindre 63 % de la limite finale. On obtient : $\tau \approx 10$ s.

5. Réponses indicielles

Elles peuvent être écrites directement, à partir des formules des chapitres 9 et 11.

$$s_1(t) = 10 [1 - e^{-0,05t} (\cos 0,087t + 0,57 \sin 0,087t)]$$

$$s_2(t) = 10 (1 - e^{-t/10}).$$

Les courbes correspondantes coïncident avec les courbes initiales sur la figure 9).

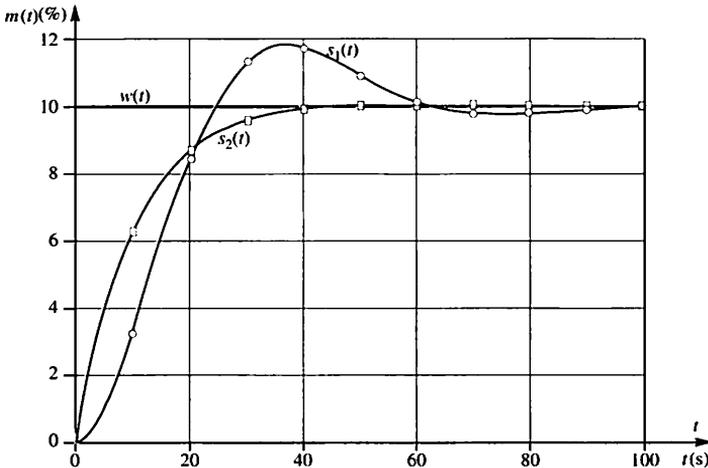


Fig. 9

Le régulateur PID est l'élément primordial d'une boucle de régulation élémentaire. Sa mise en service sur un site industriel nécessite une parfaite connaissance de ses fonctionnalités de la part du technicien d'exploitation. Celui-ci devra connaître :

- la structure interne du régulateur, ce qui lui permettra de bien maîtriser la loi de commande réalisée et de bâtir un réglage précis des actions proportionnelle, intégrale et dérivée.
 - les auxiliaires de mise en œuvre qui permettent au conducteur d'installation de piloter son procédé, tant en commande manuelle qu'en commande automatique, tout en garantissant la sécurité des personnes et des matériels.
 - les particularités propres à chaque régulateur, qui sont en perpétuelle évolution avec le développement de la technologie numérique.
- Le présent chapitre se propose de décrire un régulateur P.I.D. «standard», indépendamment des variantes qui peuvent ensuite être prises en compte à l'aide de la documentation des constructeurs.

1 Structures

La structure d'un régulateur décrit la loi de commande du régulateur. Celle-ci est la relation liant le signal de commande Y_R au signal d'écart généralisé ε . Cette relation est caractérisée par une équation temporelle et une fonction de transfert. Dans la pratique, c'est un filtre que l'on nomme souvent étage correcteur du régulateur, ce qui permet de noter $C(p)$ sa fonction de transfert isomorphe (fig 1).

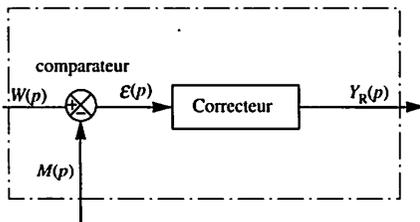


Fig. 1

La fonction de transfert $C(p)$ est indépendante du sens d'action du régulateur. Celui-ci est pris en compte au niveau de l'étage comparateur du régulateur. Les régulateurs à action inverse sont souvent pris comme exemple car il sont industriellement plus nombreux.

Il faut noter que les lois élémentaires PID mises en jeu sont linéaires et donc, que les relations sont applicables tant au niveau de petites variations que de signaux de plus forte amplitude.

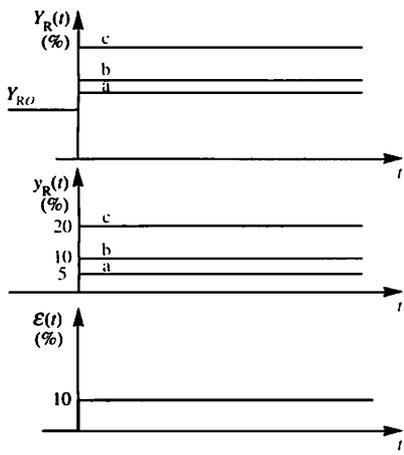
Avant de décrire les structures complexes, on va rappeler les trois fonctions élémentaires.

Correcteur à action proportionnelle (voir chap. 16)

C'est un simple amplificateur/décaleur.

Son équation temporelle est : $Y_R = A \cdot \varepsilon + Y_{R0}$ où l'on représente :

- par Y_{R0} un bias ajustable, nécessaire uniquement en régulation de type P.



a: $X_p = 200\%$
 b: $X_p = 100\%$
 c: $X_p = 50\%$

Fig. 2

- par A l'amplification ou coefficient d'action proportionnel, avec $A = \frac{100}{X_p}$, X_p étant la bande proportionnelle du régulateur.

Pour de petites variations autour d'un point de fonctionnement, cette relation devient :

$$y_R = A \cdot \varepsilon$$

La fonction de transfert isomorphe est :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A = \frac{100}{X_p}$$

Pour différentes valeurs de X_p , les variations de Y_R sont représentées figure 2, pour une variation $\varepsilon(t) = 10u(t)$.

Correcteur à action intégrale

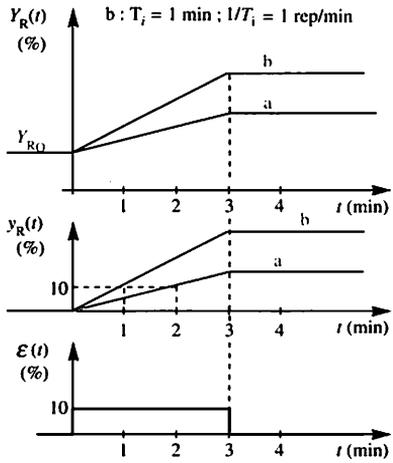
Son équation temporelle est :

$$Y_R = \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t \varepsilon(t) dt = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t \varepsilon(t) dt + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^0 \varepsilon(t) dt$$

Fig. 3

a : $T_i = 2 \text{ min}$; $1/T_i = 0,5 \text{ rep/min}$

b : $T_i = 1 \text{ min}$; $1/T_i = 1 \text{ rep/min}$



Le dernier terme constitue un talon Y_{RO} variable tenant compte de l'historique de fonctionnement du régulateur, le premier terme étant une variation y_R . T_i constitue la constante de temps d'action intégrale, exprimée en secondes ou minutes.

Pour un grand nombre de constructeurs le coefficient de réglage accessible est $\frac{1}{T_i}$,

souvent appelé coefficient d'action intégrale et noté K_i . Celui-ci s'exprime normalement en secondes à la puissance moins un (s^{-1}) ou en minutes à la puissance moins un (min^{-1}). Cependant on donne couramment K_i en répétitions par minute (rep/min) car la valeur de T_i représente le temps nécessaire au signal de sortie Y_R pour répéter (reproduire) la valeur de la variation ε lorsque celle-ci est constante.

Pour $T_i = 20 \text{ s}$, soit $T_i = \frac{1}{3} \text{ min}$, on dit que K_i vaut 3 rep/min (voir figure 3).

La fonction de transfert isomorphe est : $C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i \cdot p}$

Pour différentes valeurs de T_i , les variations de Y_R sont représentées figure 3, pour une variation $\varepsilon(t) = 10u(t) - 10u(t - 3)$ le temps étant exprimé en minutes.

On vérifie que la sortie y_R ne s'annule pas lorsque ε est égal à zéro et que ce type de correction introduit un retard temporel par rapport à une contribution proportionnelle.

Correcteur à action dérivée

Son équation temporelle est :

$$Y_R = T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

T_d constitue la constante de temps d'action dérivée, exprimée en secondes ou minutes. Pour un grand nombre de constructeurs le coefficient de réglage accessible est souvent appelé coefficient d'action dérivée et est noté K_d , avec $K_d = T_d$.

La fonction de transfert isomorphe est : $C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = T_d \cdot p$

Cette fonction étant physiquement irréalisable, les actions dérivées sont réalisées sous la forme filtrée suivante :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{T_d p}{1 + \tau p}$$

La constante de temps τ est alors souvent de la forme $\tau = \frac{T_d}{N}$ avec N entier (ex : 10).

2 Les trois structures de base

La structure parallèle

C'est la structure la plus simple, les trois corrections élémentaires étant indépendantes. Les systèmes numériques de contrôle-commande l'utilisent presque systématiquement.

Son équation temporelle est :

$$Y_R = A\varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int_{-\infty}^0 \varepsilon(t) dt$$

La fonction de transfert isomorphe est :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$$

Son schéma fonctionnel est rappelé figure 4.

La structure mixte

C'est la structure la plus répandue pour les régulateurs locaux, en technologie électronique ou numérique. Son équation temporelle est :

$$Y_R = A \left[\varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right] + \frac{A}{T_i} \int_{-\infty}^0 \varepsilon(t) dt$$

La fonction de transfert isomorphe est :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \left[1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right]$$

Son schéma fonctionnel est fourni figure 5. Cette structure introduit un couplage entre les trois actions puisque A est en facteur : $K_i = \frac{A}{T_i}$ et $K_d = A \cdot T_d$.

On se souviendra que les principales méthodes de réglage sont prévues pour cette structure.

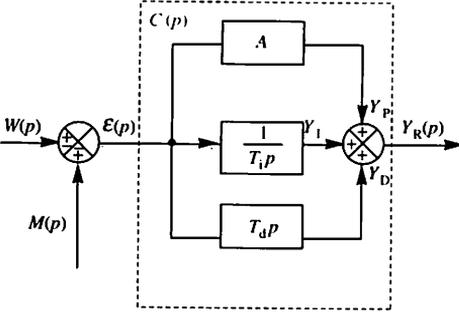


Fig. 4

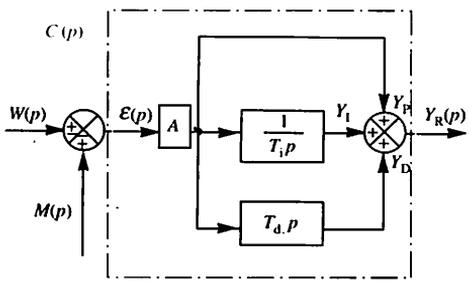


Fig. 5

La structure série

C'est historiquement la plus ancienne car utilisée en technologie pneumatique. Elle peut être considérée comme une variante de la structure mixte. Son équation temporelle est :

$$Y_R = A \left[\varepsilon \left(1 + \frac{T_d}{T_i} \right) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right] + \frac{A}{T_i} \int_{-\infty}^0 \varepsilon(t) dt$$

Compte tenu du terme d'intercorrélacion $\left(1 + \frac{T_d}{T_i} \right)$ la fonction de

transfert isomorphe est :

$$C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = A \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) \cdot (1 + T_d \cdot p)$$

Un des schémas fonctionnels possibles est fourni figure 6.

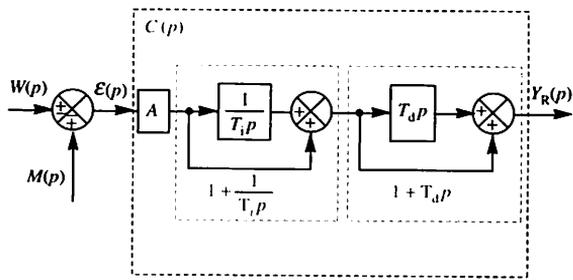


Fig. 6

Exercices résolus

1 On désire établir l'influence du réglage des actions proportionnelle et intégrale sur la réponse indicielle Y_R de deux régulateurs PI de structures différentes :

a) structure parallèle :

$$C_1(p) = \frac{100}{X_p} + \frac{1}{T_i \cdot p}$$

b) structure série ou mixte :

$$C_2(p) = \frac{100}{X_p} \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$$

Les signaux sont exprimés en pourcentages et le temps en minutes.

Les régulateurs sont placés en sens d'action inverse, la mesure est réglée à zéro, et on réalise un échelon de 0 à 10 % sur la consigne interne W_i . En fait, on applique un échelon sur le signal d'écart $\varepsilon(t) = 10u(t)$. On adopte les réglages suivants :

courbe	X_p (%)	T_i (min)
1	100	1
2	200	0,5
3	50	2
4	100	2

1. Pour chaque structure, établir l'équation temporelle littérale $Y_R(t)$.

2. Établir, sous forme d'un tableau, les huit lois de commande $Y_R(t)$ et tracer les courbes correspondantes sur un même diagramme.

Solution :

1. **Équation temporelle $Y_R(t)$**

Pour le premier régulateur, la transformation de Laplace inverse de

$$Y_{R1}(p) = \left(\frac{100}{X_p} + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) \cdot \varepsilon(p)$$

aboutit à l'équation temporelle :

$$Y_{R1}(t) = \frac{100}{X_p} \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt$$

Or $\varepsilon(t) = 10u(t)$. L'équation précédente

$$\text{devient donc : } Y_{R1}(t) = \frac{10^3}{X_p} + \frac{10}{T_i} \cdot t.$$

De même, pour le deuxième régulateur, on obtient :

$$Y_{R2}(t) = \frac{10^3}{X_p} + \frac{10^3}{T_i X_p} \cdot t.$$

2. **Résultats :**

Courbe	$Y_{R1}(t)$	$Y_{R2}(t)$
1	$10 + 10t$	$10 + 10t$
2	$5 + 20t$	$5 + 10t$
3	$20 + 5t$	$20 + 10t$
4	$10 + 5t$	$10 + 5t$

Les courbes sont fournies figure 7.

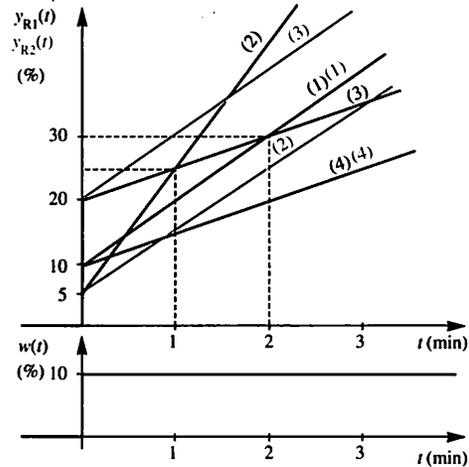


Fig. 7

2 On désire établir l'influence du réglage des actions proportionnelle et dérivée sur la réponse indicielle Y_R de deux régulateurs PD de structures différentes (dérivée sur ε).

a) structure parallèle :

$$C_1(p) = \frac{100}{X_p} + T_d \cdot p$$

b) structure série ou mixte :

$$C_2(p) = \frac{100}{X_p} \cdot (1 + T_d \cdot p)$$

Les signaux sont exprimés en pourcentages et le temps en secondes.

Les régulateurs sont placés en sens d'action inverse, la mesure est réglée à zéro, et on réalise une rampe d'équation $w(t) = 0,5t \cdot u(t)$ sur la consigne interne W_1 . En fait, on applique une rampe sur le signal d'écart $\varepsilon(t) = 0,5t \cdot u(t)$. On adopte les réglages suivants :

courbe	X_p (%)	T_d (s)
1	100	5
2	50	10
3	50	5
4	100	10

1. Pour chaque structure, établir l'équation temporelle $Y_R = f(t)$.
2. Établir, sous forme d'un tableau, les huit lois de commande $Y_R = f(t)$. Tracer les courbes correspondantes sur un même diagramme.

Solution :

1. Équation temporelle $Y_R = f(t)$

Pour le premier régulateur, la transformation de Laplace inverse de

$$Y_{R1}(p) = \left(\frac{100}{X_p} + T_d \cdot p \right) \cdot \varepsilon(p)$$
 aboutit à

l'équation temporelle

$$Y_{R1}(t) = \frac{100}{X_p} \varepsilon(t) + T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

Or $\varepsilon(t) = 0,5t \cdot u(t)$. L'équation précédente devient donc :

$$Y_{R1}(t) = \frac{50t}{X_p} + 0,5T_d$$

De même, pour le deuxième régulateur, on obtient : $Y_{R2}(t) = \frac{50t}{X_p} + \frac{50T_d}{X_p}$

2. Résultats :

Courbe	$Y_{R1}(t)$	$Y_{R2}(t)$
1	$0,5t + 2,5$	$0,5t + 2,5$
2	$t + 5$	$t + 10$
3	$t + 2,5$	$t + 5$
4	$0,5t + 5$	$0,5t + 5$

Les courbes sont fournies figure 8.

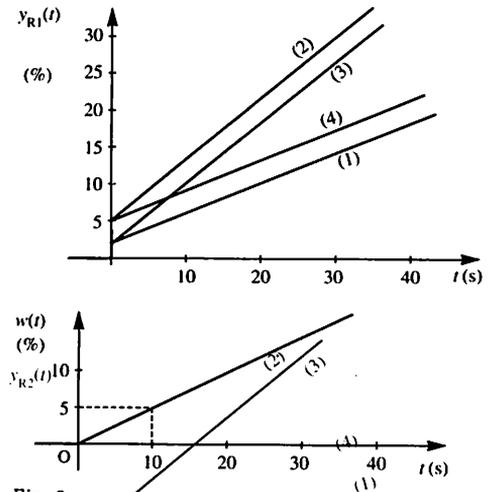


Fig. 8

Conclusion : le technicien de mise en service doit donc se persuader de ne pas régler un régulateur sans connaître sa structure, car les mêmes notations, T_i et T_d , correspondent à des paramètres différents selon qu'on se trouve dans une structure ou dans une autre. La structure générale d'un régulateur est donc souvent notée :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p$$

K_p = coefficient d'action proportionnelle ($K_p = A$).

K_i = coefficient d'action intégrale

$\left(\frac{1}{T_i} \text{ ou } \frac{A}{T_i} \text{ selon la structure} \right)$.

K_d = coefficient d'action dérivée (T_d ou $A \cdot T_d$ selon la structure).

Ce chapitre décrit les principales fonctionnalités présentes sur tout régulateur, quelle que soit la technologie utilisée. On peut les classer en deux grandes familles, selon qu'elles sont destinées à l'opérateur de conduite ou au technicien de régulation. La figure ci-contre regroupe, sur la face avant du régulateur, les fonctionnalités opératives destinées au contrôle et, sur la face latérale, les fonctionnalités de mise en œuvre destinées à la configuration. La position des contacts correspond au mode automatique qui est le fonctionnement normal du régulateur.

1 Fonctionnalités opératives

- Les modules de visualisation

L'opérateur de conduite dispose des visualisations, en barregraphes, de la mesure M , de la consigne W et de la commande Y_R .

- Normalement la consigne est en position « consigne interne » W_i , que l'opérateur peut modifier par deux boutons-poussoirs. Cependant, les stratégies complexes de régulation nécessitent que la consigne utilisée puisse provenir d'un bloc de calcul extérieur au régulateur. Celui-ci est alors en position « consigne externe » W_o .

La commutation $W_i \leftrightarrow W_o$ est accessible en face avant, un témoin lumineux activé indiquant à l'opérateur que la consigne n'est plus modifiable depuis la face avant.

- Normalement un régulateur est en position automatique, c'est-à-dire en position pour le calcul de Y_R à partir du signal d'écart ε . Cependant lors des phases de démarrage d'installation, lors d'incidents, l'opérateur doit pouvoir faire évoluer le signal réglant Y_R en toute liberté : le régulateur dispose donc d'une position « conduite manuelle », où il fait fonction de générateur de signal réglant ajustable par l'opérateur. Dans ce but une commutation $AUTO \leftrightarrow MANU$ est accessible en face avant, un témoin lumineux activé indiquant à l'opérateur que la commande est modifiable depuis la face avant par deux boutons-poussoirs. Un appui sur la touche ayant une main comme pictogramme commute en « MANU », un appui sur la touche ayant une boucle comme pictogramme commute en « AUTO ».

Remarques

Transfert AUTO/MANU

Les commutations dans les deux sens doivent s'effectuer sans « à-coup », c'est-à-dire que $Y_{R\text{ manu}} = Y_{R\text{ auto}}$ à l'instant de commutation. Ces transferts sont actuellement automatisés par un dispositif de recopie de signal

Mode « consigne suivieuse »

Lorsque le régulateur est en mode manuel, l'opérateur agit sur le signal réglant selon les contraintes imposées. Dans ces conditions, la mesure M évolue et ne correspond plus à la consigne interne W_i . Au moment du passage en mode automatique qui suit, le signal d'écart ε peut être important et il peut modifier le signal Y_R de façon significative et intempestive.

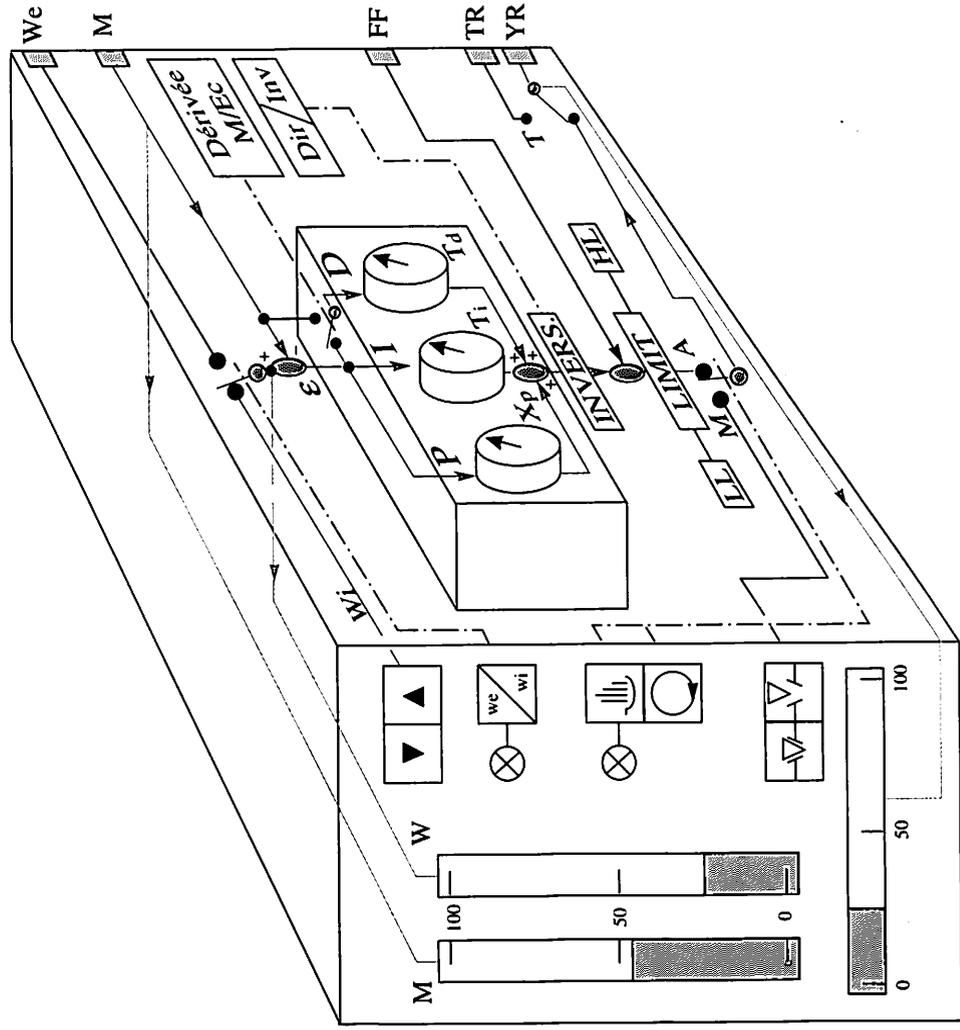


Fig. 1

Représentation simplifiée d'un régulateur :

- la face avant regroupe les fonctionnalités nécessaires à la conduite du procédé;
- la face latérale regroupe les fonctionnalités accessibles au technicien de régulation.

Pour éviter cette variation, sur de nombreux régulateurs il est possible de forcer la consigne interne à prendre pour valeur celle de la mesure, dès que le régulateur est en mode manuel.

2 Fonctionnalités de mise en œuvre

Elles sont réservées au technicien chargé de l'installation. On retrouve essentiellement :

- les auxiliaires de réglages c'est-à-dire les valeurs des actions P, I et D;
 - les paramètres de mode de fonctionnement, inverse ou direct, ainsi que le choix de l'action dérivée sur l'écart ou la mesure;
 - les auxiliaires de limitation haute (HL) et basse (LL) sur Y_R , en mode automatique. Une limitation basse de 10 % permet par exemple de maintenir un débit d'air de ventilation dans un four, même en l'absence de combustion;
 - la prise en compte éventuelle d'un biais externe permettant une régulation auxiliaire en chaîne ouverte. Le symbole FF signifie Feed-Forward c'est-à-dire chaîne a priori;
 - le passage en mode sortie forcée, la commande Y_R recopiant alors le signal connecté sur l'entrée TR, abréviation du mot Tracking. Ce dispositif permet en particulier de changer de stratégie de régulation en cours de fonctionnement, plusieurs régulateurs pouvant être connectés au même organe de commande.
- D'autres fonctionnalités, non représentées dans la figure 1, sont éventuellement disponibles. On peut citer :
- les alarmes sur la mesure, sur l'écart ε , sur la vitesse de variation de la mesure;
 - les limitations sur la vitesse du signal réglant (slew rate);
 - le choix du signal d'entrée : 4-20 mA, 0-20 mA, 10-50 mV, etc.;
 - le choix du signal réglant : continu, modulé, etc.;
 - la programmation de la consigne.

Certaines de ces fonctionnalités seront étudiées ultérieurement, lors de la résolution de problèmes spécifiques.

On trouvera ci-joint des extraits de la documentation technique du régulateur 900 HP publiée avec l'aimable autorisation de la société EURO THERM.

SPÉCIFICATIONS TECHNIQUES

Face avant

Affichage : Matrice par points (80 × 64)
 Taille de l'afficheur : 48 × 39 mm
 Résolution : ± 1 digit le moins significatif
 Boutons poussoirs : 6 boutons tactiles
 Calibration : Meilleure que ± 0,1 % du maximum d'échelle

Paramètre de contrôle

Commande Auto/Manu : Passage sans à coup d'une commande à l'autre
 Consigne locale/distance : 2 consignes indépendantes (interne/externe) ou bien correction sur la consigne

Rampe sur la consigne : Si cette fonction est validée, la consigne variera de sa valeur initiale jusqu'à sa nouvelle valeur à une vitesse déterminée lors de la configuration.

ENTRÉES (1 ou 2)

Généralités

Impédance d'entrée : $> 100 \text{ M}\Omega$
Échantillonnage : 20 fois par seconde pour un régulateur mono-boucle
10 fois par seconde pour un régulateur bi-boucle
Courant de rupture capteur : $0,125 \text{ }\mu\text{A}$

Thermocouple

Standard : Standard Français (NF C42321 et NF E18001)- Anglais (BS4937)- Allemand (DIN 43710)- Américain (ASTM E230)
Linéarisation : Meilleure que $\pm 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$ pour les thermocouples standard
Compensation de soudure froide : Interne ou externe - Variable sur une gamme de $0 \text{ à } 100 \text{ }^\circ\text{C}$
Taux de réjection de la compensation : $> 30:1$ une minute après que la température ambiante soit stabilisée dans une gamme de soudure froide interne comprise entre $0 \text{ et } 45 \text{ }^\circ\text{C}$

Sonde à résistance

Standard : Standard Anglais (BS 1904)- Allemand (DIN 43760)- Japonais (JIS 100)
Linéarisation : Meilleure que $\pm 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$ pour les sondes à résistance standard
Connexions 3 fils-compensation automatique des résistances de ligne

Linéaire

Entrée maximale en tension : 20 V pour une échelle $-10 \text{ à } +10 \text{ V}$
Entrée maximale en courant : 20 mA (Appareil livré avec un shunt de 5 Ohms)

SORTIE RÉGULATION (4 AU MAXIMUM)

Relais

2 ampères - 264 V (alternatif) sur charge résistive

Triac

1 A - 264 V sur charge résistive. Tension minimale 85 V (valeur efficace)

Logique isolée

Isolé 20 mA sous 18 V minimum
Temps de cycle : Réglable de $0,1 \text{ à } 999$ secondes à 50% de puissance — (pour les relais $3 \text{ à } 999$ secondes)

Sortie analogique

Isolée : $0 - 10 \text{ V}$ (20 mA max) ou $0 - 20 \text{ mA}$ (18 V minimum). Les décalages sont réalisés par logiciel au moment de la configuration (exemple : $4 - 20 \text{ mA}$)
Isolation : Sortie 1 isolée par rapport à la sortie 2 et au reste de l'appareil, répond aux normes d'isolation IEC 348, UL 1092, VDE 411 et BS 4743.

PARAMÈTRES DE RÉGULATION

Bande proportionnelle : $0,1 \text{ à } 999 \%$ de l'étendue d'affichage
Temps d'intégrale : off, $1 \text{ à } 9999$ secondes ou $150,0$ minutes
Intégrale manuelle : -100 ou $0 \text{ à } +100 \%$ (validée automatiquement quand l'intégrale est à off)
Temps de dérivée : off, $0,1 \text{ à } 999,9$ secondes ou $15,0$ minutes
Bande proportionnelle à action anticipée ou retardée : off, $0,1$ au maximum d'affichage
Temps de cycle pour les 2 sorties : $0,1 \text{ à } 999$ secondes (pour une sortie relais, 3 secondes minimum)
Gain relatif : $0,1 \text{ à } 10 \%$ de la bande proportionnelle
Bande morte : $-5 \text{ à } +5 \%$ de la bande proportionnelle
Puissance en cas de rupture capteur : $0 - 100 \%$ (Sortie 1 seulement) ou $-100 \text{ à } +100 \%$ (Sorties 1 et 2)

CONSIGNE ANALOGIQUE

Gamme : Pour un maximum de 20 V , étendue comprise entre -10 et $+10 \text{ V}$.
Pour un maximum de 1 V , étendue comprise entre $0 - 1 \text{ V}$ ou $0 - 10 \text{ mA}$ ou $0 - 20 \text{ mA}$.
Impédance d'entrée : $> 100 \text{ M}\Omega$
Configuration : En pleine échelle ou correction de consigne ou limitation de puissance
Précision : Calibration : $\pm 0,25 \%$ de la pleine échelle
Échantillonnage : 10 fois par seconde
Filtre : $0,1 \text{ à } 999,9$ secondes

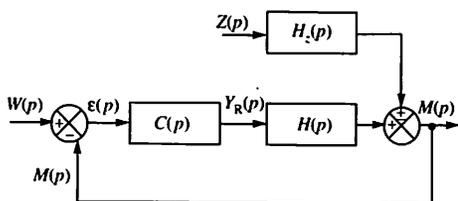
ALARMES (2 ou 4)

Relais : $264 \text{ V} - 2 \text{ A}$ maximum (3 A maximum pour module double relais) sur charge résistive - Tension minimum de commutation 50 V
Courant de fuite du circuit de protection RC 2 mA sous 264 V à 60 Hz
Hystérésis : $0,1 \text{ à } 50 \%$ de son échelle
Type : Pleine échelle (haute ou basse), déviation (haute ou basse), bande, vitesse de changement de la mesure et rupture capteur

L'étude des systèmes commandés en chaîne fermée montre l'interdépendance entre la fonction de transfert du procédé, celle du régulateur et les performances de la boucle, en particulier au niveau du dépassement et de la rapidité de la réponse indicielle.

A présent on se propose d'établir des relations littérales entre les diverses grandeurs prises en compte dans une boucle de régulation. Au chapitre 8, on a vu que la grandeur réglée $M(t)$ de la majorité des systèmes dépend de deux grandeurs incidentes (voir chap. 8 fig. 1) : la grandeur réglante, pilotée par le signal $Y_R(t)$, et la perturbation principale $Z(t)$.

Fig. 1



On a été conduit à définir deux fonctions de transfert :

- la fonction de transfert réglante $H(p)$: $M(p) = H(p) \cdot Y_R(p)$.
 - la fonction de transfert perturbatrice $H_z(p)$: $M(p) = \pm H_z(p) \cdot Z(p)$.
- Une boucle de régulation peut donc être modélisée par le schéma fonctionnel de la figure 1.

1 Les deux fonctions de transfert d'un système bouclé

Cette étude porte sur un régulateur à action inverse. Cela ne nuit pas à la généralité des résultats car un régulateur à action directe, relié à un procédé à caractéristique « descendante », donc à gain statique négatif, peut toujours être représenté sous la forme d'un régulateur à action inverse ; c'est la valeur absolue du gain statique du procédé qui doit alors être prise en compte. Les diverses relations utilisables sont :

$$M(p) = H(p) \cdot Y_R(p) \pm H_z(p) \cdot Z(p) \quad (1)$$

$$Y_R(p) = C(p) \cdot [W(p) - M(p)] \quad (2)$$

Par substitution de (2) dans (1), puis factorisation de $M(p)$ il vient :

$$M(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot W(p) \pm \frac{H_z(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot Z(p) \quad (3)$$

Pour simplifier cette expression on définit la fonction de transfert en chaîne ouverte $T(p)$:

$$T(p) = C(p) \cdot H(p)$$

La relation (3) devient alors : $M(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \cdot W(p) \pm \frac{H_z(p)}{1 + T(p)} \cdot Z(p)$

On peut donc définir deux fonctions de transfert $F(p)$ et $F_z(p)$ par :

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \quad \text{et} \quad F_z(p) = \pm \frac{H_z(p)}{1 + T(p)}$$

On obtient finalement : $M(p) = F(p) \cdot W(p) \pm F_z(p) \cdot Z(p)$ (4)

Le premier terme, souvent appelé terme d'asservissement, est utile pour étudier la boucle de régulation lorsque la consigne varie, c'est-à-dire en régulation de correspondance.

Le second terme, souvent appelé terme de régulation, permet d'étudier la boucle de régulation lorsque la consigne est fixe, c'est-à-dire en régulation de maintien.

$F(p)$ est appelée fonction de transfert en chaîne fermée.

Remarques

Les expressions $F(p)$ et $F_z(p)$ comportent le même dénominateur. Lors de l'étude de la stabilité d'une boucle de régulation on peut ainsi montrer que la stabilité ne dépend que des racines de l'équation complexe : $1 + C(p) \cdot H(p) = 0$, c'est-à-dire des valeurs de p qui annulent cette expression.

Tout le formalisme développé suppose bien sûr que les deux fonctions de transfert $C(p)$ et $H(p)$ sont connues, et que le système physique est parfaitement identifié. Pour mettre en évidence l'intérêt de ces relations, on reprend les études réalisées aux chapitres 17 à 19.

Étude d'une régulation de débit

Les deux fonctions de transfert, du procédé sont (voir chap. 17) :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec : } \tau = 10 \text{ s}; \quad H_z(p) = \frac{1}{1 + \tau' p} \quad \text{avec : } \tau' = 10 \text{ s}$$

Régulation à action proportionnelle (type P)

La fonction de transfert du correcteur est : $C(p) = A$.

Dans ces conditions la relation (4) s'écrit :

$$M(p) = \frac{A/(1+A)}{1 + [\tau p/(1+A)]} \cdot W(p) + \frac{1/(1+A)}{1 + \tau p/(1+A)} \cdot Z(p)$$

Par inversion de Laplace on obtient l'équation différentielle du système :

$$\boxed{\frac{\tau}{1+A} \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = \frac{A}{1+A} \cdot w(t) + \frac{1}{1+A} \cdot z(t)}$$

C'est celle d'un système du premier ordre, de constante de temps

$$\tau'' = \frac{\tau}{1+A} \quad \text{et de gain statique } K'' = \frac{A}{1+A}.$$

- Réponse indicielle à l'échelon $w(t) = 10u(t)$ avec $z(t) = 0$.

$$M(p) = F(p) \cdot W(p) \quad \text{avec : } F(p) = \frac{K''}{1 + \tau'' p} \quad \text{et } W(p) = \frac{10}{p}$$

La réponse indicielle obéit donc à l'équation : $m(t) = 10K''(1 - e^{-t/\tau})$, ce qui confirme l'allure des courbes de la figure 3 du chapitre 17, notamment l'influence de A sur la précision et la rapidité de la boucle de régulation.

De plus la vitesse de variation $\frac{dm}{dt}$ à l'instant $t=0$ est égale à : $A \% s^{-1}$.

- Réponse indicielle à l'échelon $z(t) = 10u(t)$ avec $w(t) = 0$.

La réponse indicielle devient : $m(t) = \frac{10}{1+A}(1 - e^{-t/\tau})$, qui se traduit

par les courbes de la figure 5 du chapitre 17. Elles montrent notamment l'influence de A sur l'amplitude de l'écart résiduel.

La vitesse de variation $\frac{dm}{dt}$ à l'instant $t=0$ atteint : $1 \% s^{-1}$ et ne dépend pas de l'amplification du régulateur.

Régulation à action proportionnelle et intégrale (type PI)

La fonction de transfert du correcteur à structure parallèle est :

$$C(p) = A + \frac{1}{T_i \cdot p}$$

Dans ces conditions $F(p)$ et $F_Z(p)$ s'écrivent :

$$F(p) = \frac{1 + A \cdot T_i \cdot p}{1 + (1 + A) \cdot T_i \cdot p + 10 \cdot T_i \cdot p^2} \quad \text{et}$$

$$F_Z(p) = \frac{T_i \cdot p}{1 + (1 + A) \cdot T_i \cdot p + 10 \cdot T_i \cdot p^2}$$

- Courbes 1 : $A = 0$ et $T_i = 40$ s. Courbes 4 : $A = 0$ et $T_i = 10$ s (courbes 1 et 4, fig. 1, chap. 18). On rappelle que le réglage $A = 0$ aboutit à un régulateur à action intégrale seule.

- Réponse indicielle à $w(t) = 10u(t)$ avec $z(t) = 0$.

La fonction de transfert $F(p)$ se simplifie et peut s'identifier à un second ordre normalisé :

$$F(p) = \frac{1}{1 + T_i \cdot p + 10T_i \cdot p^2} \quad \text{de la forme :} \quad F(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\lambda p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Par identification directe on obtient :

$$\boxed{\frac{2\lambda}{\omega_0} = T_i}; \quad \boxed{\frac{1}{\omega_0^2} = 10T_i} \quad \text{et} \quad \boxed{K = 1}$$

Pour la courbe 1 de la figure 1 du chapitre 18 on trouve : $\omega_0 = 0,05$ rad/s et $\lambda = 1$. Ces valeurs confirment l'allure de la courbe obtenue, c'est-à-dire régime critique ($\lambda = 1$) et précision statique parfaite, lorsque t tend vers l'infini.

Pour la courbe 4 de la figure 1 on obtient : $\omega_0 = 0,1$ rad/s et $\lambda = 0,5$. Ces valeurs confirment l'allure de la courbe obtenue : régime pseudopériodique ($\lambda < 1$), avec un premier dépassement proche de 17 %, et une précision statique parfaite, lorsque t tend vers l'infini. On constate également que plus ω_0 est faible et plus la réponse est lente : le système est moins performant. Le seul paramètre de réglage disponible, l'action intégrale, ne permet pas un amortissement satisfaisant et une rapidité suffisante de la réponse indicielle.

- Réponse indicielle à $z(t) = 10u(t)$ avec $w(t) = 0$.

La fonction de transfert $F_Z(p) = \frac{T_i \cdot p}{1 + T_i \cdot p + 10T_i \cdot p^2}$ ne peut pas s'identifier exactement avec un second ordre normalisé mais l'allure des courbes obtenues à la figure 4 montre que l'on retrouve deux cas : l'un à réponse critique, l'autre à réponse pseudopériodique. Les deux fonctions $F(p)$ et $F_Z(p)$ présentant le même dénominateur on peut en déduire, pour l'instant sans démonstration, que l'amortissement d'une fonction de transfert dépend directement de son dénominateur.

Courbes 2 : $A = 1$ et $T_i = 40$ s. Courbes 3 : $A = 1$ et $T_i = 10$ s (courbes 2 et 3, fig. 1, chap. 18). L'étude ci-dessus montre qu'il faut pouvoir régler, pour un second ordre, λ et ω_0 séparément. Il faut donc introduire une action proportionnelle.

De nouveau les deux fonctions de transfert ne peuvent pas s'identifier exactement à un 2^e ordre normalisé (à cause des termes au numérateur) mais on peut raisonner uniquement avec les termes du dénominateur commun, c'est-à-dire : $1 + (1 + A) \cdot T_i \cdot p + 10T_i \cdot p^2$.

Par identification avec $1 + \frac{2\lambda p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$ on obtient :

$$\boxed{\frac{2\lambda}{\omega_0} = (1 + A)T_i} ; \quad \boxed{\frac{1}{\omega_0^2} = 10T_i}$$

La valeur adoptée pour T_i permet le réglage de ω_0 et, à T_i et ω_0 fixés, l'amplification A permet de régler l'amortissement λ .

Pour les courbes 3 on obtient : $\lambda = 1$ et $\omega_0 = 0,1$ rad/s.

Pour les courbes 2 on obtient : $\lambda = 2$ et $\omega_0 = 0,05$ rad/s.

Ces valeurs confirment les allures des courbes des figures 1 et 4 :

- les réponses 2 sont trop amorties ($\lambda > 1$) et trop lentes (ω_0 trop faible);
- les réponses 3 peuvent être considérées comme « optimales ».

On retiendra que si le dénominateur commun des deux fonctions de transfert peut se mettre sous la forme d'un 2^e ordre, en pratique on recherche un amortissement λ compris entre 1 et 0,7, la rapidité du système étant réglée par l'intermédiaire de ω_0 que l'on cherche à rendre élevée.

Exercice résolu

On se propose d'étudier les performances des régulations P, PI et PID sur un système intégrateur représenté figure 2. C'est une régulation de niveau dans un bac de stockage.

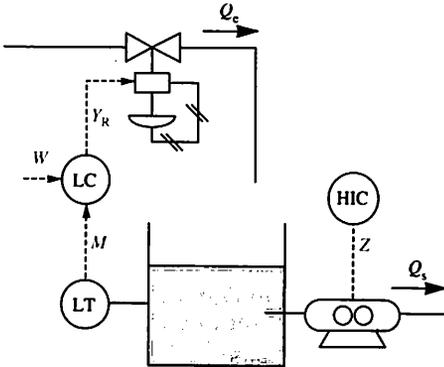


Fig. 2

Le signal de commande de soutirage constitue la perturbation Z , la grandeur réglante étant un débit d'eau Q_e , qui est piloté par une vanne de type NF dont on néglige la constante de temps. Autour d'un point de fonctionnement les deux fonctions de transfert $F(p)$ et $F_z(p)$ peuvent être modélisées par les relations suivantes :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{1}{25p}$$

$$\text{et : } H_z(p) = \frac{M(p)}{Z(p)} = \frac{-1}{25p}$$

Le correcteur est de type parallèle

$$C(p) = A + \frac{1}{T_i p} + T_d p.$$

1. Justifier le signe moins dans $F_z(p)$.
 2. Déterminer le sens d'action du régulateur.
 3. Déterminer le schéma fonctionnel complet du système.
 4. Le régulateur étant à action proportionnelle seule, avec $C(p) = A = 2$, établir la relation liant $m(t)$ à $w(t)$ et $z(t)$.
 5. Déterminer puis tracer les réponses à : $w(t) = 10u(t)$ avec $z(t) = 0$ et à : $z(t) = 10u(t)$ avec $w(t) = 0$
- Justifier l'allure des courbes obtenues.

6. Le régulateur étant à action PI, avec $C(p) = A + \frac{1}{T_i p}$, établir la relation liant

$M(p)$ à $W(p)$ et $Z(p)$.

7. Le régulateur peut-il être à action intégrale seule, avec $C(p) = \frac{1}{T_i p}$?

8. Le régulateur étant à action PI, en assimilant le dénominateur de $F(p)$ et $F_z(p)$ à celui d'un 2^e ordre normalisé, déduire le réglage permettant d'obtenir les performances suivantes :

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 0,05 \text{ rad/s.}$$

9. Pour ω_0 quelconque, établir la relation liant T_i et A lorsque $\lambda = 1$.

Solution :

1. Justification du signe de $F_z(p)$

$Y_R(t)$ = constante : une augmentation de $Z(t)$ provoque une diminution du niveau $M(t)$, d'où le signe moins dans le rapport des variations.

2. Sens d'action du régulateur

Lorsque la mesure $M(t)$ augmente, le signal de sortie $Y_R(t)$ du régulateur doit varier de manière à provoquer une diminution du débit $Q_e(t)$ qui est la grandeur d'entrée. La vanne étant de type NF, il faut donc que $Y_R(t)$ diminue. Le régulateur est donc à action inverse.

3. Schéma fonctionnel complet

Il est représenté figure 3.

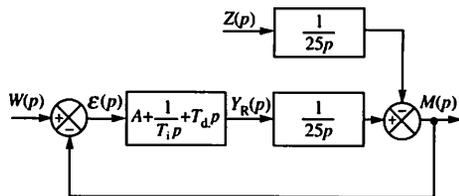


Fig. 3

4. Relation liant $m(t)$ à $w(t)$ et $z(t)$

A partir du schéma fonctionnel, on établit les relations suivantes :

$$M(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot W(p) + \frac{H_z(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} \cdot Z(p)$$

$$M(p) = \frac{1}{1 + \frac{25}{A} \cdot p} \cdot W(p) - \frac{\frac{1}{A}}{\left[1 + \frac{25}{A} \cdot p\right]} \cdot Z(p)$$

On reconnaît deux fonctions de transfert du 1^{er} ordre. Par inversion de Laplace on obtient :

$$\frac{25}{A} \cdot \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = w(t) - \frac{1}{A} \cdot z(t)$$

5. Réponses indicielles

Pour $w(t) = 10u(t)$ et $z(t) = 0$ on obtient

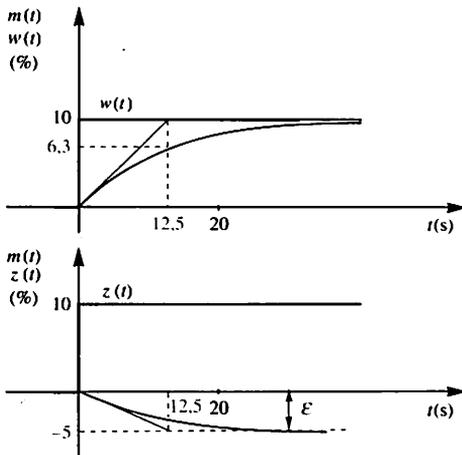
facilement : $m(t) = 10 \left(1 - e^{-\frac{t}{12.5}}\right)$

Pour $z(t) = 10u(t)$ et $w(t) = 0$ on trouve

de même : $m(t) = -5 \left(1 - e^{-\frac{t}{12.5}}\right)$

Les courbes sont fournies figure 4. Il existe un écart résiduel ε lorsque le système est soumis à une perturbation

Fig. 4



$z(t)$. Cet écart n'existe pas pour un saut de consigne, car le procédé est de classe 1, ce qui assure la contribution intégrale.

6. Relation en régulation PI

On obtient :

$$M(p) = \frac{1 + A \cdot T_i \cdot p}{1 + A \cdot T_i \cdot p + 25T_i \cdot p^2} \cdot W(p) - \frac{T_i \cdot p}{1 + A \cdot T_i \cdot p + 25T_i \cdot p^2} \cdot Z(p)$$

7. Régulation intégrale seule

Si l'on prend $A = 0$ dans la relation ci-dessus le dénominateur est de la forme :

$$1 + 25T_i \cdot p^2 \text{ ce qui correspond à } \lambda = 0$$

et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{25 \cdot T_i}}$

Il s'agit d'un système oscillant entretenu (pompage)

8. Réglage permettant d'obtenir $\lambda = 1$ et $\omega = 0,05 \text{ rad/s}$

Par identification avec le dénominateur d'un 2^e ordre il vient :

$$\frac{2\lambda}{\omega_0} = A T_i; \quad \frac{1}{\omega_0^2} = 25T_i; \text{ on aboutit donc}$$

$$\text{à : } T_i = 16 \text{ s} \text{ et } A = 2,5$$

9. Relation liant T_i et A lorsque $\lambda = 1$

On la déduit des expressions de λ et

$$\omega_0 : \lambda = \frac{A T_i}{2 \sqrt{25 T_i}} = 1 \Rightarrow T_i = \frac{100}{A^2}$$

Le régulateur peut donc s'imposer A ou T_i , et déduire l'autre paramètre par application de la formule précédente. Dans la pratique, le réglage PI d'un système intégrateur pur s'effectue avec un T_i assez grand.

$$\text{Si } H(p) = \frac{k}{p} \text{ on adapte } T_i \geq \frac{1}{k}$$

1 Représentation d'une grandeur sinusoïdale

A toute grandeur sinusoïdale $x(t) = X\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ on peut associer un nombre complexe noté \underline{X} (fig 1) :

- de module égal à X , valeur efficace de la grandeur x (à une échelle choisie arbitrairement);
- d'argument égal à φ , phase à l'instant $t = 0$ (appelée phase initiale) de x .

Dans le plan complexe, M représente l'image de ce nombre complexe \underline{X} qui peut s'écrire :

$$\underline{X} = [X, \varphi]$$

Le nombre complexe \underline{X} , qui est l'affixe complexe de M , sera appelé *amplitude complexe* de x .

Remarque : On utilise différentes expressions d'un nombre complexe \underline{X} de module X et d'argument φ :

- la forme trigonométrique ou polaire : $\underline{X} = [X, \varphi] = X e^{j\varphi}$;
- la forme algébrique : $\underline{X} = a + jb$ avec : $a = X \cos \varphi$, $b = X \sin \varphi$,

$$X = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

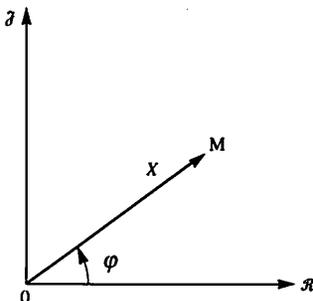


Fig. 1. Ox : axe des parties réelles; Oj : axe des parties imaginaires.

On peut donc définir une application (ou transformation) qui à toute grandeur $x(t)$ sinusoïdale associe un nombre complexe \underline{X} , ce que l'on écrira symboliquement :

$x(t) \rightarrow \underline{X}$ (lire : $x(t)$ a pour transformée \underline{X})
 Cette application de l'ensemble E des fonctions de la forme $x(t) = X\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ dans C sera communément appelée *transformation complexe*.

2 Propriétés de la transformation complexe

- C'est une transformation *linéaire*. En effet, on peut facilement montrer que si :

$$x(t) \rightarrow \underline{X} \quad \text{et} : \quad y(t) \rightarrow \underline{Y}$$

alors :

$$\lambda x(t) + \mu y(t) \rightarrow \lambda \underline{X} + \mu \underline{Y}$$

- Il existe une relation simple entre les amplitudes complexes d'une grandeur et de sa dérivée par rapport au temps. En effet la dérivée de $x(t) = X\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ par rapport à la variable t est :

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = X\omega\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$y(t)$ peut s'écrire également : $y(t) = x\omega\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ (1)

L'amplitude complexe de $x(t)$ est : $\underline{X} = [X, \varphi]$

L'amplitude complexe de $y(t)$ est : $\underline{Y} = [Y, \varphi']$

La relation (1) nous permet d'écrire, par identification : $\underline{Y} = \left[X\omega, \varphi + \frac{\pi}{2} \right]$

D'après les propriétés des nombres complexes, \underline{Y} peut s'écrire :

$$\underline{Y} = [X, \varphi] \cdot \left[\omega, \frac{\pi}{2} \right] = \underline{X} \left[\omega, \frac{\pi}{2} \right] \quad (2)$$

D'après la définition du nombre complexe imaginaire pur $j = \left[1, \frac{\pi}{2} \right]$ la

relation (2) peut aussi s'écrire : $\underline{Y} = \underline{X} \cdot (j\omega)$ ou $\underline{Y} = (j\omega) \cdot \underline{X}$

On constate qu'à l'opération de dérivation temporelle appliquée à $x(t)$ correspond une multiplication par $(j\omega)$ appliquée à l'amplitude complexe \underline{X} .

- De la propriété précédente, il résulte que :

si : $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ donc : $x(t) = \int y(t) \cdot dt$ alors : $\underline{Y} = (j\omega) \cdot \underline{X}$ et : $\underline{X} = \frac{\underline{Y}}{(j\omega)}$

On constate donc qu'à l'opération d'intégration temporelle sur $y(t)$ correspond une division par $(j\omega)$ sur l'amplitude complexe \underline{Y} .

3 Transformation complexe d'une équation différentielle

On ne considère que le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Exemple : deux grandeurs $x(t)$ et $y(t)$ sont liées par l'équation :

$$\frac{a}{dt^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{b}{dt} \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = lx(t) \quad (3)$$

a, b, c et l sont des constantes.

On montre mathématiquement que si $x(t)$ est de la forme $x(t) = X\sqrt{2} \sin(\omega t)$, fonction de phase initiale nulle, au bout d'un certain temps qui correspond à la durée d'un régime transitoire, $y(t)$ devient une fonction sinusoïdale de la forme :

$$y(t) = Y\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

C'est une propriété caractéristique des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Dans la relation (4) φ représente la phase initiale de $y(t)$ et, compte tenu du fait que la phase initiale de $x(t)$ est nulle, φ est également le déphasage de $y(t)$ par rapport à $x(t)$.

Les grandeurs $x(t)$ et $y(t)$ peuvent être associées à leurs amplitudes complexes respectives \underline{X} et \underline{Y} . Par transformation complexe, la relation (3) s'écrit alors : $a \cdot (j\omega)^2 \underline{Y} + b \cdot (j\omega) \underline{Y} + c \cdot \underline{Y} = l \underline{X}$ (5)

4 Fonction de transfert complexe entre deux grandeurs

Définition

Si à la grandeur dite d'entrée $x(t) = X\sqrt{2} \sin(\omega t)$ correspond la grandeur dite de sortie $y(t) = Y\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$, la fonction de transfert isochrone \underline{F} liant les deux grandeurs est le rapport des amplitudes complexes \underline{Y} et \underline{X} associées.

$$\underline{F} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$$

On parle aussi parfois de transmittance complexe mais ce terme est plutôt utilisé en électronique.

Remarque : notation courante en régulation

L'utilisation du soulignement dans l'écriture des grandeurs complexes étant parfois peu commode, et le risque d'oubli étant important, notamment dans les rapports, on utilise habituellement une autre notation. La relation précédente est écrite sous la forme suivante :

$$F(j\omega) = \frac{Y}{X}$$

Elle rappelle immédiatement que le nombre complexe considéré dépend de l'opérateur $(j\omega)$.

La relation (5) permet d'obtenir directement la fonction de transfert isochrone :

$$F(j\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{l}{a \cdot (j\omega)^2 + b \cdot j\omega + c} \quad (6)$$

On constate que l'ordre de l'équation différentielle est directement lié au degré en ω du dénominateur. En utilisant la propriété $j^2 = -1$, on présente plutôt $F(j\omega)$ sous la forme suivante, où la partie réelle est séparée de la partie imaginaire au dénominateur.

$$F(j\omega) = \frac{l}{(c - a\omega^2) + jb\omega} \quad (7)$$

5 Réponse fréquentielle

En régime sinusoïdal, la fonction de transfert associée à une équation différentielle dépend en général de la fréquence. La réponse fréquentielle est l'étude de l'évolution de la fonction de transfert $F(j\omega)$ en fonction de la fréquence f ou plus couramment de la pulsation ω puisque $F(j\omega)$ fait apparaître l'opérateur $(j\omega)$.

Comme $F(j\omega)$ est un nombre complexe, on est conduit à étudier comment varie, en fonction de ω , d'une part le module F de cette grandeur, d'autre part le déphasage φ de $y(t)$ par rapport à $x(t)$.

En pratique, au lieu de considérer F , on s'intéresse au gain logarithmique G défini par :

$$G = 20 \lg F$$

G est exprimé en décibels (symbole : dB)

-Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'une fonction de transfert est l'ensemble des deux courbes rendant compte du comportement de $F(j\omega)$ sur une plage étendue de pulsations ω (fig. 2).

L'une est la courbe de réponse en gain (ou courbe de gain).

L'autre représente les variations du déphasage φ . C'est la courbe de réponse en phase (ou courbe de phase). Les pulsations pouvant varier sur de très larges intervalles, elles sont placées sur un axe à graduation logarithmique.

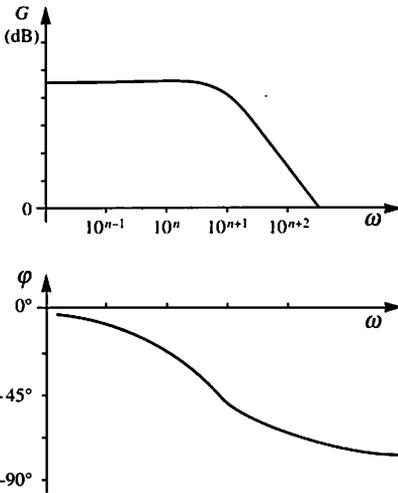


Fig. 2

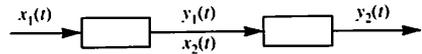


Fig. 3 a

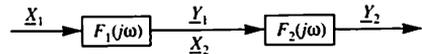


Fig. 3 b

6 Intérêt des fonctions de transfert complexes

Il sera courant en régulation d'utiliser des systèmes en cascade, c'est-à-dire tels que la grandeur de sortie $y_1(t)$ de l'un est la grandeur d'entrée $x_2(t)$ de l'autre (voir fig. 3 a). Il est alors important de pouvoir disposer de l'équation différentielle liant directement $x_1(t)$ et $y_2(t)$.

La connaissance des deux équations différentielles élémentaires liant respectivement $x_1(t)$ et $y_1(t)$ d'une part, $x_2(t)$ et $y_2(t)$ d'autre part, ne permet pas d'apporter une réponse. L'utilisation des fonctions de transfert isochrones $F_1(j\omega)$ et $F_2(j\omega)$ permet (voir fig. 3 b) de montrer

facilement que la fonction de transfert globale $F(j\omega) = \frac{Y_2}{X_1}$ est le produit des fonctions de transfert : $F(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$.

Exercice résolu

Étude d'un moteur d'asservissement

Un moteur d'asservissement, à courant continu et excitation indépendante, entraîne une dynamo tachymétrique en bout d'axe. Cette dernière délivre une tension électrique V proportionnelle à la fréquence n de rotation : 1,0 V correspond à 6,0 tr/s. L'induit du moteur est alimenté sous une tension U réglable de 0 à 10 V (fig. 3).

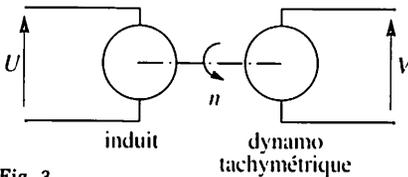


Fig. 3

Le modèle du moteur est représenté figure 4. Sa résistance interne r est égale à $1,0 \Omega$. On désigne par E sa force électromotrice qui est donnée

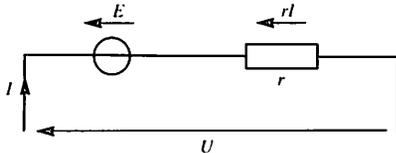


Fig. 4

par la relation $E = kn$ (1) avec $k = \frac{1}{12}$ (E en volts, n en tours par seconde).

Le moment du couple moteur C est tel

que : $C = k'I$ (2) avec : $k' = \frac{k}{2\pi}$. Le prin-

cipe fondamental de la mécanique de rotation appliqué au rotor du moteur (partie tournante de la machine) s'exprime par la relation :

$$J \cdot \frac{dn(t)}{dt} = \frac{C}{2\pi} \quad (3)$$

si J désigne le moment d'inertie du rotor : $J = 176 \cdot 10^{-6}$ uSI.

1. Si le moteur fonctionne à vide, c'est-à-dire sans entraîner de charge mécanique, et si l'on néglige les frottements

sur les paliers, montrer que le moteur est assimilable à un procédé régi par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dV(t)}{dt} + V(t) = 2U(t) \quad (4)$$

2. Quelle est la fréquence de rotation maximale n_{\max} du moteur ?

3. Quelle est la fonction de transfert complexe du moteur ?

4. Tracer le diagramme de Bode de cette fonction de transfert.

5. Quelles remarques peut-on faire sur l'allure de la courbe de gain ?

Solution :

1. Équation différentielle

Par report de (1) et (2) dans la relation traduisant la loi d'Ohm il vient :

$$U = kn + \frac{rC}{k'} = kn + \frac{2\pi}{k}C$$

On peut alors exprimer C en fonction

$$\text{de } n : C = \frac{(U - kn)k}{2\pi r}$$

En reportant dans (3) on obtient l'équation différentielle suivante :

$$J \frac{dn(t)}{dt} = \frac{(U - kn)k}{(2\pi)^2 r}$$

$$\text{soit : } J \frac{dn(t)}{dt} + \frac{k^2 n}{4\pi^2 r} = \frac{kU}{4\pi^2 r}$$

La vitesse n est liée à la tension V par la proportionnalité : $n = 6V$ (unités SI).

L'expression précédente s'écrit alors :

$$6J \frac{dV(t)}{dt} + \frac{6k^2}{4\pi^2 r} V = \frac{kU}{4\pi^2 r}$$

$$\text{ou : } \frac{4\pi^2 r J}{k^2} \cdot \frac{dV(t)}{dt} + V(t) = \frac{U}{6k}$$

Applications numériques : On trouve :

$$\tau = \frac{4\pi^2 r J}{k^2} = 1,0 \text{ s et : } \frac{1}{6k} = 2.$$

2. Fréquence de rotation maximale

Lorsque le moteur tourne à sa fréquence maximale, celle-ci est constante et correspond à une tension de commande $U = 10$ V.

$$n_{\max} = \text{Cte} \Rightarrow V_{\max} = \text{Cte} \Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = 0$$

L'équation différentielle se réduit à :
 $V(t) = 2U(t)$ donc : $V_{\max} = 2 \times 10 \text{ V}$ et :

$$n_{\max} = 120 \text{ tr/s}$$

3. Fonction de transfert complexe

Par transformation complexe la relation (1) devient :

$$j\omega \cdot V(j\omega) + V(j\omega) = 2U(j\omega)$$

La fonction de transfert est donc :

$$F(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{2}{1 + j\omega} \quad (2)$$

Son module est égal à : $F = \frac{2}{\sqrt{1 + \omega^2}}$;

son argument est donné par la relation : $\varphi = -\arctan \omega$

4. Diagramme de Bode

$$G = 20 \lg \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \omega^2}} \right)$$

$$\text{Soit : } G = 20 \lg 2 - 10 \lg (1 + \omega^2)$$

$$\text{et : } \varphi = -\arctan \omega$$

Pour tracer les courbes de gain et de phase on dispose des résultats suivants (on pose : $\omega_0 = \frac{1}{\tau} = 1 \text{ rad/s}$) :

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow G \simeq 20 \lg 2 \text{ et } \varphi \simeq 0$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow G \simeq 20 \lg 2 - 20 \lg \omega$$

$$\text{et } \varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow G \simeq 20 \lg \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$$

$$\text{et } \varphi \simeq -\frac{\pi}{4}$$

Ces valeurs servent à construire le tracé asymptotique de Bode :

- la courbe de gain est constituée de deux demi-droites de pente 0 et -6 dB/octave (fig. 5.a),
 - la courbe de phase admet deux asymptotes à 0° et -90° (fig. 5.b).
- Les courbes réelles passent par les points suivants :

ω	$\frac{\omega_0}{16}$	$\frac{\omega_0}{8}$	$\frac{\omega_0}{4}$	$\frac{\omega_0}{2}$
φ	-3,5°	-7°	-14°	-26,5°
$G \text{ (dB)}$	6	6	6	5

ω_0	$2\omega_0$	$4\omega_0$	$8\omega_0$	$16\omega_0$
-45°	-63,5°	-76°	-83°	-86,5°
3	-1	-6	-12	-18

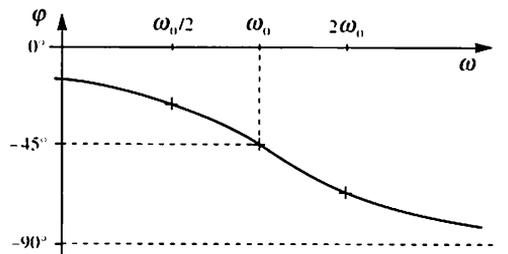
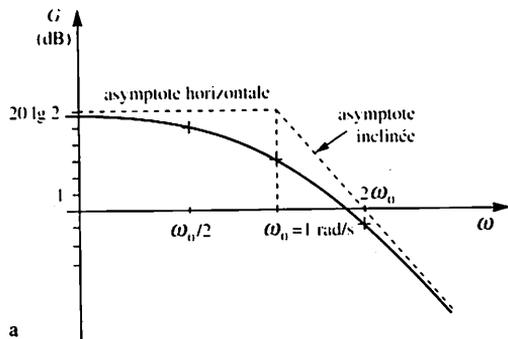


Fig. 5

5. Courbe de gain

En général elle est assez proche du tracé asymptotique. Pour $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$, appelée la pulsation de coupure, la courbe réelle est située à -3 dB au-dessous des asymptotes et l'asymptote inclinée (lorsque $\omega \rightarrow \infty$) a une pente de -6 dB/octave ou -20 dB/décade (une octave est l'intervalle entre une pulsation ω et la pulsation 2ω ; une décade est l'intervalle entre une pulsation ω et la pulsation 10ω .)

La transformation complexe constitue un outil puissant pour l'étude des boucles de régulation, notamment de leur stabilité, ainsi que pour la prédétermination de leurs performances, à l'aide des abaques de Hall et Black. Cependant l'application de cette transformation reste limitée aux cas où des signaux sinusoïdaux sont utilisés, ce qui est assez rare industriellement.

Le technicien de la régulation est, par exemple, plutôt préoccupé de connaître l'évolution d'un signal de mesure lorsqu'il réalise une variation brutale de consigne sur un régulateur en position automatique. Cette étude nécessite l'utilisation de la transformation de Laplace, d'usage plus général que la transformation complexe.

1 Transformation de Laplace

Définition

Soit $x(t)$ une fonction réelle du temps t (variable réelle définie pour $t > 0$) et p une variable complexe de la forme $p = \alpha + j\beta$. La transformée de Laplace de $x(t)$ est la fonction complexe :

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

La transformée $X(p)$ est aussi notée $\mathcal{L}[x(t)]$.

Nous admettrons que, pour les fonctions $x(t)$, définies pour $t > 0$, l'intégrale existe, c'est-à-dire qu'il leur correspond une transformée de Laplace unique, qui est un nombre complexe.

On définit ainsi une application qui à toute fonction $x(t)$, satisfaisant aux hypothèses précédentes, associe un nombre complexe $X(p)$ et qui est communément appelée transformée de Laplace. On écrit : $x(t) \rightarrow X(p)$ (lire : $x(t)$ a pour transformée $X(p)$).

Remarque : Nos hypothèses, apparemment limitatives, imposent que la fonction $x(t)$ soit définie pour $t > 0$. La notion d'instant zéro devient ici importante à définir. En fait, en régulation, les grandeurs dont on utilise la transformée ont des évolutions de faibles amplitudes par rapport à un point de fonctionnement stable. Dans la pratique, de telles variations sont nulles pour toute valeur de t inférieure ou égale à zéro. L'instant zéro est l'instant où un événement tel qu'un changement de consigne ou l'apparition d'une perturbation, provoque un écart non nul par rapport aux valeurs qui caractérisent le point de fonctionnement. Pour simplifier, on dit seulement que pour de telles grandeurs les conditions initiales sont nulles.

Calcul de la transformée de Laplace d'une fonction

On utilise des tables qui fournissent les transformées $X(p)$ de diverses fonctions $x(t)$ élémentaires (voir tableau page 127). Ces transformées font également partie de «bibliothèques» intégrées dans de nombreuses calculatrices du commerce.

2 Propriétés de la transformation de Laplace

- C'est une transformation linéaire. En effet on peut montrer que si :

$$x(t) \rightarrow X(p) \text{ et } y(t) \rightarrow Y(p) \text{ alors : } \lambda x(t) + \mu y(t) \rightarrow \lambda X(p) + \mu Y(p)$$

Cette propriété est utilisée pour trouver la transformée de Laplace de fonctions que l'on ne possède pas. Il suffit d'exprimer $x(t)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions dont les transformées de Laplace sont connues (voir exercice).

- Il existe une relation simple entre la transformée d'une grandeur $x(t)$ et la transformée de sa dérivée par rapport au temps : si $x(t) \rightarrow X(p)$ et : $y(t) \rightarrow Y(p)$ on peut montrer que :

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ alors } Y(p) = p \cdot X(p)$$

On va le vérifier sur un exemple : la fonction $x(t) = \sin \omega t$. D'après le tableau p. 126 : $x(t) = \sin \omega t \rightarrow X(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

La dérivée de $x(t)$ est : $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega \cdot \cos \omega t$. On appellera $Y(p)$ sa transformée de Laplace. D'après le tableau 1, à la fonction $\omega \cdot \cos \omega t$ on peut associer la transformée $\frac{\omega \cdot p}{p^2 + \omega^2}$. Donc : $Y(p) = \frac{p \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} = p \cdot X(p)$.

On constate qu'à l'opération de dérivation temporelle de $x(t)$ correspond une multiplication par p de la transformée de Laplace $X(p)$. Ce résultat est général.

De la propriété précédente, il résulte que si : $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ donc :

$$x(t) = \int_0^t y(u) \cdot du \text{ alors : } Y(p) = p \cdot X(p) \text{ et : } X(p) = \frac{Y(p)}{p}$$

On constate donc qu'à l'opération d'intégration temporelle de $y(t)$ correspond une division par p de la transformée de Laplace $Y(p)$.

Remarque : Fonctions « retardées »

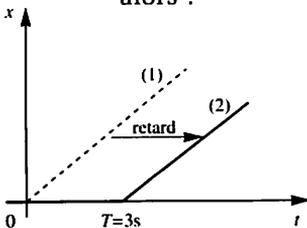
Si $x(t - T)$ représente une fonction définie non nulle à partir de $t > T$ alors :

$$x(t - T) \rightarrow e^{-pT} \cdot X(p) \text{ ou : } \mathcal{L}[x(t - T)] = e^{-pT} \cdot X(p)$$

Exemple : transformée de Laplace d'une « rampe » débutant à l'instant $T = 3$ s (fig. 1). Cette rampe peut être considérée comme en retard de $T = 3$ s par rapport à une rampe débutant à l'instant $t = 0$. Son équation temporelle est donc : $x(t) = t - T$ avec $t \geq T$.

$$\text{Donc sa transformée est : } \frac{e^{-Tp}}{p^2} = \frac{e^{-3p}}{p^2}$$

Fig. 1



3 Transformation de Laplace d'une équation différentielle

On ne considère que le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Deux grandeurs $x(t)$ et $y(t)$ sont liées par l'équation différentielle suivante (a, b, c, l sont des constantes).

$$a \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = lx(t) \quad (1)$$

En prenant la transformée de Laplace des deux membres de cette équation, et parce que cette transformée est unique, la relation (1) devient donc :

$$ap^2Y(p) + bpY(p) + cY(p) = lX(p) \quad (2)$$

Cette écriture ressemble à celle de la relation fournie par la transformation complexe de l'équation (1) : pour passer de l'une à l'autre, le nombre complexe p doit être remplacé par le nombre complexe $j\omega$ ou inversement (voir remarque au paragraphe suivant).

4 Fonction de transfert isomorphe entre deux grandeurs

Définition

Si à une grandeur dite d'entrée $x(t)$ correspond une grandeur dite de sortie $y(t)$, toutes deux nulles tant que $t \leq 0$, alors la fonction de transfert isomorphe $F(p)$ liant les deux grandeurs est le rapport des transformées $X(p)$ et $Y(p)$ associées.

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$F(p)$ est aussi appelée transmittance opérationnelle, en électronique surtout.

Application

Dans le cas de deux grandeurs $x(t)$ et $y(t)$ liées par la relation (1), la fonction de transfert isomorphe se déduit de la relation (2) :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{l}{ap^2 + bp + c}$$

L'ordre de l'équation différentielle est directement lié au degré en p du dénominateur. Dans la pratique, on ordonnera les polynômes en p suivant les puissances décroissantes de p .

Conséquence

Par la suite on utilisera le résultat suivant applicable uniquement aux fonctions de transfert : la fonction de transfert complexe est obtenue en remplaçant l'opérateur p par $j\omega$ dans la transformée de Laplace de cette fonction.

5 Transformation inverse

C'est une application caractéristique de la transformée de Laplace en régulation.

Souvent par identification expérimentale, par modèle de connaissances ou par calculs, on obtient une équation différentielle liant deux grandeurs d'une boucle de régulation comme, par exemple, les variations de la consigne $x(t)$ et de la mesure $y(t)$ pour une régulation en chaîne fermée. Connaissant une variation particulière $x(t)$ de la consigne, on veut alors déterminer l'évolution de $y(t)$ à partir de l'instant zéro, date d'application de $x(t)$. On réalise les associations suivantes :

Domaine temporel	Transformée de Laplace
	$x(t) \rightarrow X(p)$
Équation différentielle	$\rightarrow F(p)$
	$y(t) \rightarrow Y(p)$

Connaissant $x(t)$, les tables de transformées permettent de calculer $X(p)$. La transformation de l'équation différentielle fournit $F(p)$. On détermine alors $Y(p) : Y(p) = F(p) \cdot X(p)$

Il faut alors trouver $y(t)$ à partir de $Y(p)$. Cette opération constitue la transformation inverse de Laplace.

Dans la pratique, comme pour la transformation directe, on utilise les tables de transformées (tableau page 126, lu de la droite vers la gauche). Cela nécessite souvent d'écrire $Y(p)$ sous une forme telle que l'on puisse « reconnaître » facilement des fonctions du tableau, en annexe.

$Y(p)$ pouvant généralement s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle de la variable p , on est conduit à décomposer $Y(p)$ en éléments simples (voir exercice).

Exemple

Un système de fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{p^2 + 5p + 6}$ admet pour réponse indicielle : $Y(p) = H(p) \cdot X(p) = \frac{2}{p^2 + 5p + 6} \times \frac{1}{p}$

L'inversion de $Y(p)$ nécessite de décomposer son expression en éléments simples : $Y(p) = \frac{2}{p^2 + 5p + 6} \times \frac{1}{p} = \frac{2}{(p+2)(p+3)} \cdot \frac{1}{p}$ (3)

Il vient donc : $Y(p) = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p}$ (4)

La détermination des constantes A , B et C s'effectue en identifiant les expressions (3) et (4) : $A = -1$; $B = \frac{2}{3}$; $C = \frac{1}{3}$

La fonction $y(t)$ s'obtient alors directement.

Exercice résolu

Un four est chauffé par une résistance électrique contrôlée par une unité de puissance (voir chap. 3), elle-même commandée par un signal au gabarit 4-20 mA. Le transmetteur de température délivre un courant d'intensité au gabarit 4-20 mA pour une étendue d'échelle 0-500 °C.

Pour une commande fixe $Y_{R0} = 12,5 \%$, le signal de mesure $M(t)$ se stabilise au bout d'un certain temps à une valeur $M_0 = 25 \%$ qui correspond au point de fonctionnement. Autour de ce point, une identification préalable a permis de déterminer l'équation différentielle liant une petite variation $y_R(t)$ du signal de commande $Y_R(t)$ à la variation $m(t)$ qui en découle pour le signal de mesure $M(t)$:

$$400 \frac{dm(t)}{dt} + m(t) = 2 y_R(t) \quad (1)$$

1. Donner l'expression de la fonction de transfert isomorphe du procédé, autour du point de fonctionnement considéré.

2. Pour éviter des contraintes thermiques trop importantes au niveau de la résistance, on réalise une variation du signal de commande évoluant suivant le chronogramme de la figure 2. Déterminer la transformée de Laplace $Y_R(p)$ de la fonction $y_R(t)$.

3. Déterminer la courbe d'évolution temporelle de la mesure. Quelle est la température finale du four ?

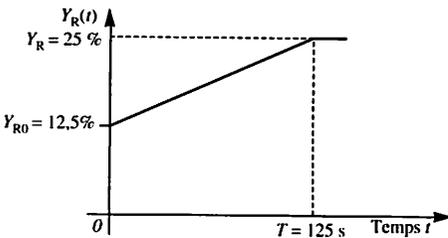


Fig. 2

Solution :

Remarque préliminaire : dans tout l'exercice on raisonne en pourcentages des échelles de commande ou de

mesure, indépendamment des supports physiques. On peut à tout moment revenir aux grandeurs physiques, en tenant compte des échelles.

1. Fonction de transfert isomorphe $F(p)$

Si $M(p)$ et $Y_R(p)$ sont les transformées de Laplace de $m(t)$ et $y_R(t)$, la transformée de l'équation différentielle s'écrit :

$$400p \cdot M(p) + M(p) = 2 \cdot Y_R(p)$$

donc :
$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_R(p)} = \frac{2}{1 + 400p}$$

2. Transformée de Laplace $Y_R(p)$

Si l'on raisonne sur une variation $y_R(t)$ de $Y_R(t)$ à partir de Y_{R0} , on peut écrire : $Y_R(t) = Y_{R0} + y_R(t)$. La variation $y_R(t)$ est donnée par le chronogramme de la figure 3.

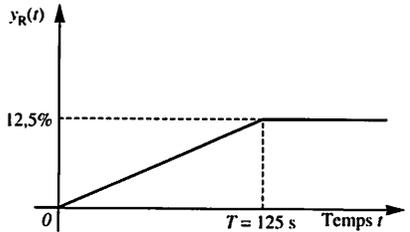


Fig. 3

Rechercher l'évolution du signal $M(t)$ revient en fait à déterminer l'évolution d'une variation $m(t)$ de $M(t)$ à partir de M_0 , telle que :

$$M(t) = M_0 + m(t),$$

$m(t)$ et $y_R(t)$ sont liés par l'équation (1). Transformée de Laplace de $y_R(t)$.

Cette fonction en rampe limitée ne fait pas partie de la bibliothèque standard mais on peut l'assimiler à la superposition des deux signaux $y_{R1}(t)$ et $y_{R2}(t)$ de la figure 4 :

$$y_{R1}(t) = at \cdot u(t)$$

avec : $a = \frac{12,5 \%}{125} = 0,1 \% \text{ s}^{-1}$

$$y_{R2}(t) = -a(t - T) \cdot u(t - T)$$

avec : $T = 125 \text{ s}$

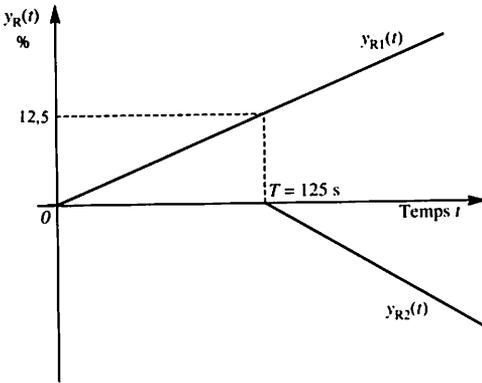


Fig. 4

Puisque : $y_R(t) = y_{R1}(t) + y_{R2}(t)$ on obtient : $Y_R(p) = Y_{R1}(p) + Y_{R2}(p)$ donc

$$Y_R(p) = \frac{a}{p^2} - \left[\frac{a}{p^2} \cdot e^{-Tp} \right]$$

soit :
$$Y_R(p) = \frac{a}{p^2} (1 - e^{-Tp})$$

3. Courbe d'évolution temporelle

Transformée de Laplace de $m(t)$:

$$M(p) = H(p) \cdot Y_R(p) = \frac{2}{1+400p} \cdot \frac{a(1 - e^{-Tp})}{p^2} \quad (1)$$

Cette relation peut être décomposée en éléments simples :

$$M(p) = \left(\frac{A}{1+400p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} \right) (1 - e^{-Tp})$$

On détermine A, B, C par identification directe avec (1)

$$A = 400 \times 800a; \quad B = 2a; \quad C = -800a$$

Après simplifications on obtient :

$$M(p) = \left[\frac{800a}{p+1/400} + \frac{2a}{p^2} - \frac{800a}{p} \right] (1 - e^{-Tp})$$

On peut retrouver directement la fonction inverse $m(t)$:

$-0 < t \leq T$: les trois termes « retardés » n'existent pas encore et on peut écrire :

$$m(t) = 800ae^{-\frac{t}{400}} + 2at - 800a$$

soit :
$$m(t) = -80 \left(1 - e^{-\frac{t}{400}} \right) + 0,2t$$

$-t > T = 125$ s : il suffit d'ajouter les trois termes « retardés » et on obtient :

$$m(t) = -80 \left(1 - e^{-\frac{t}{400}} \right) + 0,2t - \left[-80 \left(1 - e^{-\frac{t-125}{400}} \right) + 0,2(t-125) \right]$$

Les variations de $m(t)$ sont fournies figure 5.

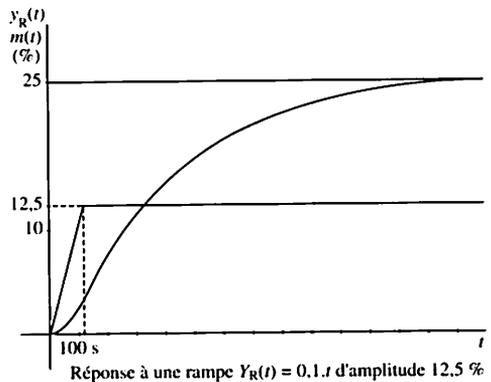


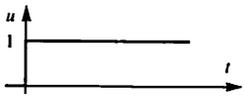
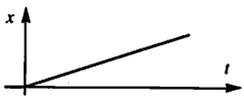
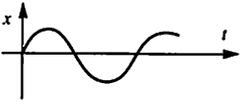
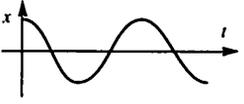
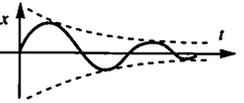
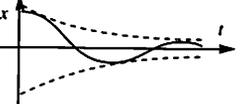
Fig. 5

$-t \rightarrow \infty$ alors $m(t)$ est équivalent à

$$m(t) \approx 0,2t - [0,2(t - 125)] \rightarrow 0,2 \times 125 = 25\%$$

La mesure $M(t)$ subit donc une augmentation de 25 % de l'échelle du transmetteur et passe donc de 25 % à 50 %, c'est-à-dire de 125 °C à 250 °C. On retiendra la méthode utilisée dans cet exercice : raisonner à partir de variations de signaux, le point de fonctionnement étant fixe. Cette dernière hypothèse permet de considérer que les « conditions initiales » correspondent à des valeurs nulles.

TRANSFORMÉES DE LAPLACE

fonction	$x(t)$	variation temporelle	$X(p)$
Impulsion unité	$\delta(t)$		1
Échelon unité	$u(t)$		$\frac{1}{p}$
Rampe unité	$t \cdot u(t)$		$\frac{1}{p^2}$
polynôme	$t^n \cdot u(t)$		$\frac{n!}{p^{n+1}}$
exponentielle	$e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$		$\frac{1}{p+a}$
sinus	$\sin \omega t \cdot u(t)$		$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t \cdot u(t)$		$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
sinus amorti	$e^{-at} \sin \omega t \cdot u(t)$		$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
cosinus amorti	$e^{-at} \cos \omega t \cdot u(t)$		$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISÉS

Procédé :

ρ : masse volumique d'un fluide
 S : surface d'un bac
 Q : débit (ex : Q_e débit entrant, Q_v débit volumique, Q_m débit massique)
 G : grandeur (ex : G_R grandeur réglante; G_I grandeur incidente)

Système :

τ : constante de temps
 n : ordre d'un système
 K : gain statique d'un système stable

M : signal de mesure

Z : signal perturbateur principal

Second ordre :

λ : coefficient d'amortissement
 ω : pulsation (ex : ω_0 pulsation propre; ω_R pulsation de résonance; ω_c ou ω_0 pulsation de coupure)

Régulateur :

e : signal d'écart mesure/consigne
 W : signal de consigne (ex : W_e consigne externe)
 Y_R : signal réglant (de sortie) d'un régulateur
 A : amplification d'un régulateur

T_i : constante de temps d'action intégrale

K_p : coefficient d'action proportionnelle ($K_p = A$)

K_i : coefficient d'action intégrale ($1/T_i$ ou A/T_i suivant la structure du régulateur)

K_d : coefficient d'action dérivée (T_d ou $A \cdot T_d$ suivant la structure du régulateur)

Fonction de transfert :

G : gain logarithmique

$H(p)$: fonction de transfert isomorphe

Performances :

D_1 : premier dépassement

Signaux :

$u(t)$: échelon d'amplitude unitaire

θ : température

T : temps mort (ou temps de retard)

k : gain dynamique d'un système intégrateur

$m = \Delta M$: petite variation du signal de mesure

$z = \Delta Z$: petite variation de Z

Q : facteur de résonance

$w = \Delta W$: petite variation de consigne

$y_R = \Delta Y_R$: petite variation de signal réglant

X_p : bande proportionnelle ($X_p = 100/A$)

T_d : constante de temps d'action dérivée

φ : phase ou déphasage (en degrés ou en radians)

$H(j\omega)$: fonction de transfert isochrone

T_R : temps de réponse à $\pm 5\%$

$\delta(t)$: dérivée de $u(t)$

N° d'éditeur : 10122411 - MCP - avril 2005
Imprimé en France par l'imprimerie EMD S.A.S .
53110 Lassay-les-Châteaux
N° d'imprimeur : 13169