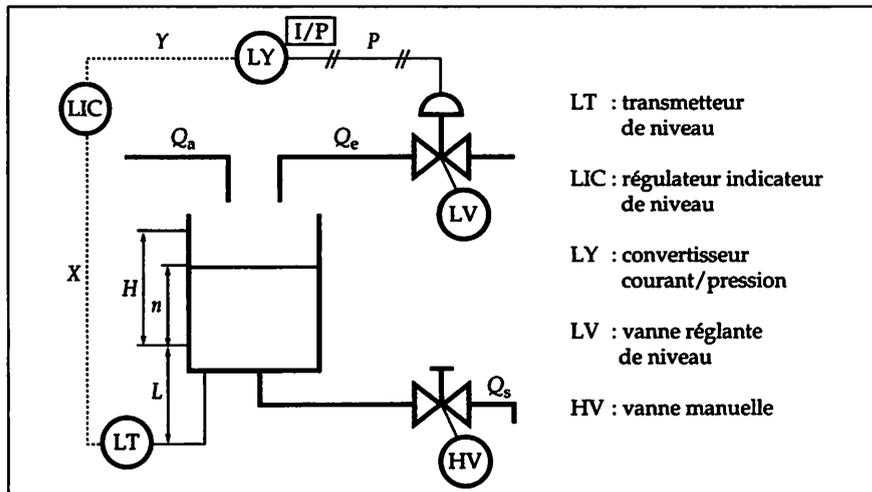


# PROBLÈMES : simple boucle

## Problème 1 Régulation de niveau d'un réservoir



Le schéma d'une installation de dilution de sirop, représenté en suivant les normes Afnor E04-203-1, est donné figure 6.1. On maintient le niveau  $n$  constant dans le réservoir afin d'obtenir un débit de sortie constant  $Q_s$  pour une ouverture fixée de la vanne manuelle HV. Le débit  $Q_a$  n'est pas constant puisqu'il provient d'un recyclage du produit.

### 1 Étendue d'échelle du transmetteur

Le transmetteur de niveau est un transmetteur électronique de pression relative à sortie en courant (4 – 20 mA). Les données nécessaires à la détermination de l'étendue d'échelle et du décalage de zéro sont :

- densité du liquide  $d = 1$  ;
- hauteur  $H = 2$  m ;
- hauteur entre la prise de pression de « LT » et le niveau d'échelle minimal désiré  $L = 1,5$  m.

▷ Déterminer l'étendue d'échelle et le décalage de zéro du transmetteur de niveau.

### 2 Fonction de transfert du transmetteur

À l'aide d'un calibre de pression, permettant ici de simuler un certain niveau, on applique à l'entrée du transmetteur une pression dont la valeur varie rapidement (échelon de pression de 20 %). Les mesures du signal  $X$  sont mises en mémoire et restituées dans le tableau 6.1.

$t$ (s)	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,4	1,6	2,0	3,0	4,0	5,0
$X$ (%)	0,00	3,63	6,59	9,02	11,00	12,60	15,10	16,00	17,30	19,00	19,60	19,90

Tableau 6.1

▷ Exprimer la fonction de transfert du transmetteur  $T(p) = \frac{X(p)}{N(p)}$

### 3 Fonction de transfert du procédé non instrumenté

L'équation différentielle linéarisée du niveau s'écrit :  $\theta \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = Q_e(t) + Q_a(t)$ .

▷ Exprimer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{N(p)}{Q_e(p)}$  avec  $\theta = 25$  s.

#### 4 Fonction de transfert de l'ensemble convertisseur/vanne

Une variation en échelon de 50 % du signal d'entrée  $Y$  du convertisseur a permis d'enregistrer l'évolution du débit  $Q_e$  en fonction du temps (fig. 6.2).

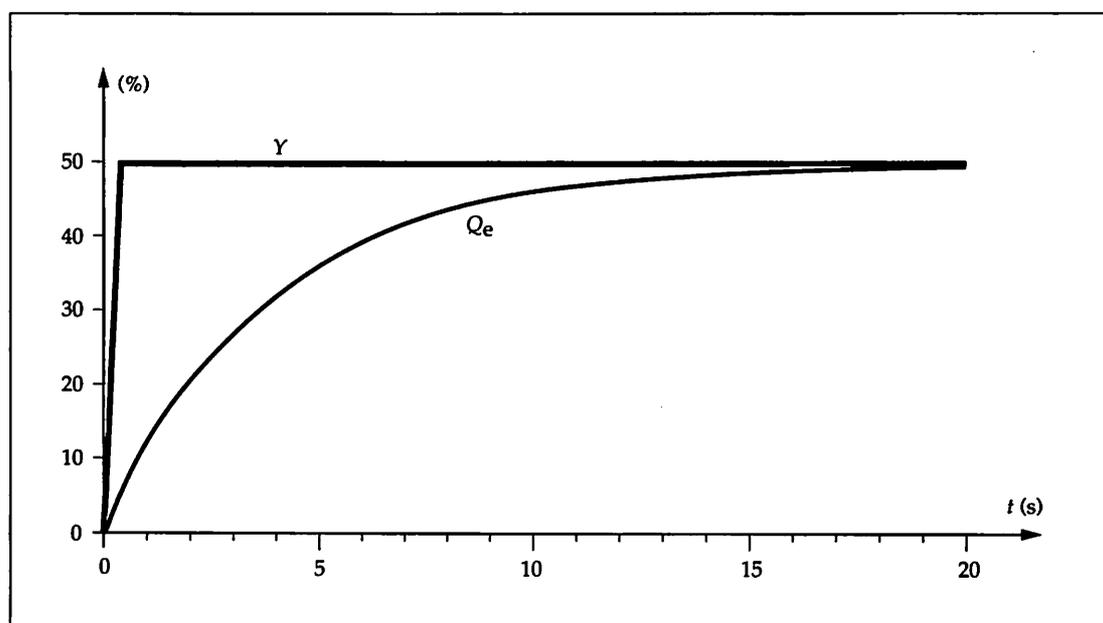


Figure 6.2

- ▷ Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble convertisseur/vanne  $V(p) = \frac{Q_e(p)}{Y(p)}$ .

#### 5 Étude de la régulation

- ▷ Exprimer la fonction de transfert du procédé instrumenté  $G(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$ .
- ▷ Établir le schéma fonctionnel de ce procédé en incluant les perturbations.

6 Ce procédé est contrôlé par le régulateur LIC de fonction de transfert  $C(p) = G_r$ . Lors d'un changement de consigne  $w = 20\%$ , on souhaite obtenir un écart statique inférieur à 2 %.

- ▷ Quelle doit être alors la valeur minimale de  $G_r$  ?
- ▷ Avec la valeur de  $G_r$  trouvée précédemment, le système est-il stable ?
- ▷ Quelle est alors la réponse indicielle obtenue avec un gain  $G_r = 10$  (en négligeant la plus petite constante de temps du procédé) ?

7 Le système ainsi réglé est assez précis mais, en revanche, un trop grand dépassement est observé lors du changement de consigne  $w$ . On décide alors de prendre le régulateur LIC tel que :  $C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ .

- ▷ Démontrer que l'écart statique  $\varepsilon_s$  est nul quelle que soit la valeur de  $T_i$  et ce sur un changement de consigne  $w$  comme sur un changement du débit  $Q_a$ .

8 Le niveau est stabilisé à  $N = 1$  m avec un débit  $Q_a$  égal à 50 % du débit maximal ; on adopte une constante de temps  $T_i$  de 25 s et un gain  $G_r$  de 4.

- ▷ En négligeant la constante de temps la plus petite du procédé, exprimer la réponse  $x(t)$  lors d'une variation brusque de consigne  $w(t) = 20\%$ , puis tracer cette réponse.

9 Exprimer la réponse  $x(t)$  lors d'une variation brusque du débit  $Q_a(t) = 20\%$ , puis tracer cette réponse.

## Problème 2 Détente et désurchauffe de vapeur

Pour amoindrir les condensations dans les conduites et limiter les pertes thermiques, la vapeur est surchauffée lors de son transport. Un désurchauffeur permet de ramener à l'état saturé la vapeur surchauffée afin de l'utiliser, par exemple, pour le chauffage d'un produit par autoclave.

La température de la vapeur saturée (ou vapeur désurchauffée) est liée à la pression de cette vapeur. La température de la vapeur saturée est régulée par le contrôle de l'apport d'eau. La pression d'utilisation de la vapeur saturée est régulée par le contrôle de la détente réalisée par la vanne de vapeur surchauffée. Le schéma de l'installation étudiée, représenté suivant les normes Afnor E04-203-1, est donné figure 6.3.

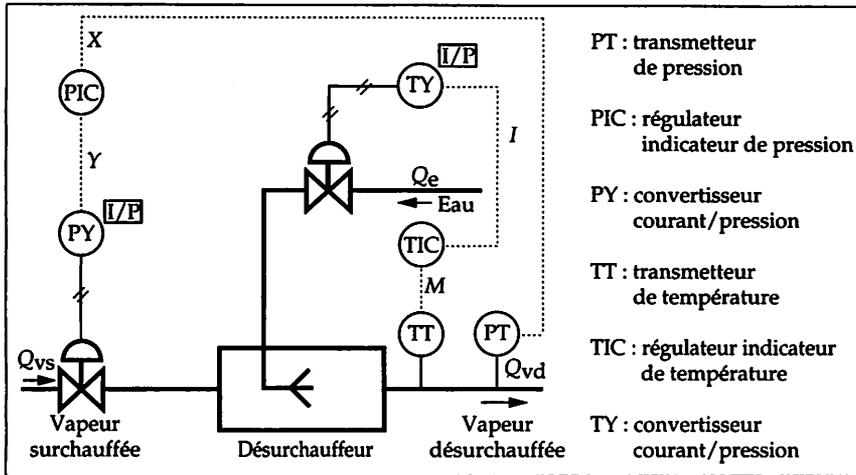


Figure 6.3

### • Régulation de pression

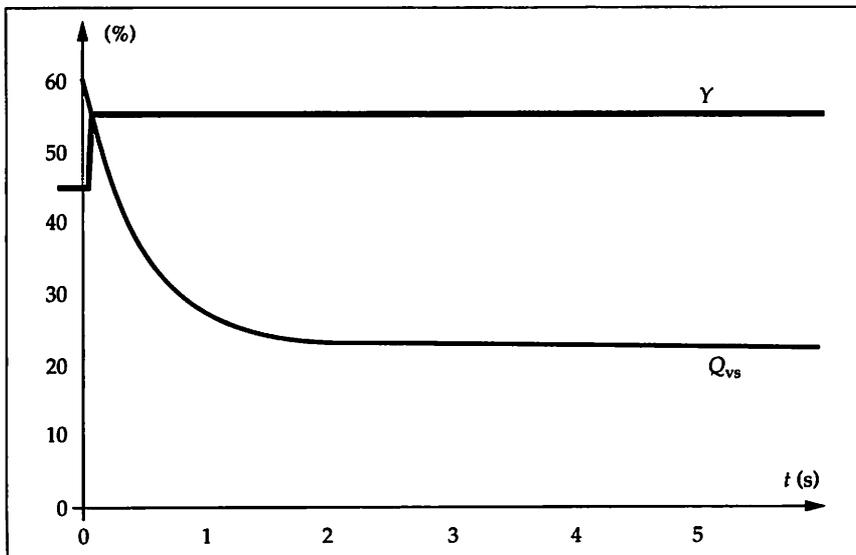


Figure 6.4

Le procédé étudié est composé du convertisseur PY, de la vanne de vapeur surchauffée, du désurchauffeur et du transmetteur de pression PT (fig. 6.3). La fonction de transfert  $H(p)$  du procédé résulte de la mise en série de ces trois systèmes. L'étude des fonctions de transfert de ces systèmes permettra de déterminer la fonction de transfert  $H(p)$ .

Le régulateur PIC étant en position manuelle, donc en fonctionnement non automatique pour la régulation, une variation en échelon du signal de sortie Y a permis l'obtention de l'enregistrement (fig. 6.4).

1 Les convertisseurs PY et TY sont de sens direct.

À partir de cet enregistrement :

- ▷ Déterminer si la vanne est « fermée par manque d'air » (FMA) ou « ouverte par manque d'air » (OMA).
- ▷ Déterminer la fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{Q_{vs}(p)}{Y(p)}$ .

2 L'équation différentielle entre le débit de vapeur surchauffée  $Q_{vs}(t)$  et la pression de vapeur désurchauffée  $P(t)$  est :  $1,2 Q_{vs}(t) - 6 \frac{d^2 P(t)}{dt^2} - 5 \frac{d P(t)}{dt} - P(t) = 0$ .

Le débit  $Q_e$  est considéré constant, et l'unité de temps est la seconde.

- ▷ Déterminer la fonction de transfert  $H_2(p) = \frac{P(p)}{Q_{vs}(p)}$ .

3 À l'aide de l'analyse harmonique (fig. 6.5 a et b), déterminer la fonction de transfert

$$H_3(p) = \frac{X(p)}{P(p)}$$

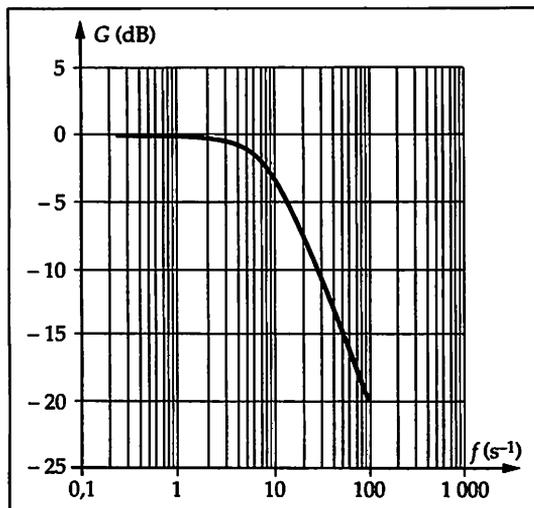


Figure 6.5 a

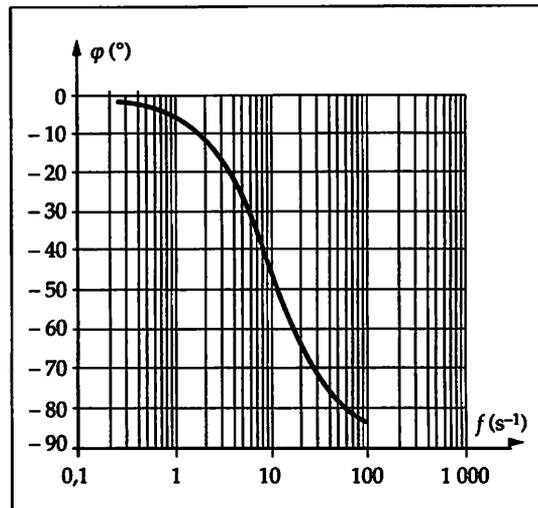


Figure 6.5 b

4 Exprimer la fonction de transfert du procédé  $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$ .

5 Une autre méthode d'identification a permis de modéliser le procédé par :

$$H(p) = \frac{4,5}{(p+1)^4}$$

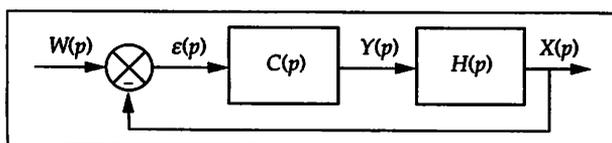


Figure 6.6

Ce procédé est asservi par un régulateur  $C(p)$  à action proportionnelle de gain  $G_r$  suivant le schéma de la figure 6.6.

▷ Choisir le sens d'action du régulateur en le justifiant. Expliquer le choix des signes dans le schéma fonctionnel proposé.

6 Exprimer la fonction de transfert en chaîne fermée  $F(p)$  puis l'écart  $\varepsilon_s$  en régime permanent pour un changement de consigne  $w(t) = 10 \% u(t)$ . Que vaut cet écart pour  $G_r = 0,5$  ? Que devient-il pour  $G_r = 5$  ? Que peut-on déduire des résultats obtenus ?

7 Le régulateur précédent est remplacé par un régulateur PI. Afin de déterminer sa structure, on réalise un essai en chaîne ouverte de ce régulateur, c'est-à-dire sans le procédé  $H(p)$ .

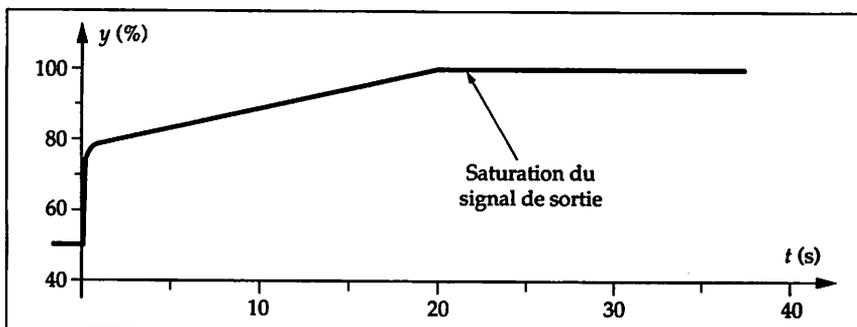


Figure 6.7

La constante de temps d'intégration est  $T_i = 20$  s. Les conditions initiales sont les suivantes :  $W(0) = X(0) = 50 \%$  et  $Y(0) = 50 \%$ . On enregistre le signal de sortie  $y(t)$  (fig. 6.7) et on effectue un échelon de consigne de  $-5 \%$ .

▷ Déterminer le sens d'action du régulateur lors de cet essai.

▷ Déterminer la valeur de la bande proportionnelle  $B_p$ .

▷ Exprimer son équation  $y(t) = f[x(t) - w(t)]$ . Quelle est la structure de ce régulateur ?

▷ Exprimer la fonction de transfert en chaîne ouverte  $C(p)$  de ce régulateur.

- 8 Exprimer la fonction de transfert en chaîne fermée  $F(p)$  du système asservi par le régulateur PI.
- 9 Exprimer l'écart  $\varepsilon_s$  en régime permanent pour un changement de consigne  $w(t) = 10 \% u(t)$ . Que peut-on en déduire ?
- 10 Exprimer et calculer l'écart de vitesse  $\varepsilon_v$  en régime permanent lorsque  $w(t)$  varie de façon continue de 1 % par seconde. On donne :  $G_r = 5$  ;  $T_i = 4$  s.

• **Régulation de température**

L'identification en chaîne ouverte de la régulation de température en maintenant  $Q_{vs}$  constant a donné la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{M(p)}{I(p)} = \frac{2}{(10p + 1)(2p + 1)}$$

Ce procédé est asservi par un régulateur  $R(p)$  à action proportionnelle de gain  $G_r$ .

- 11 Pour  $G_r = 1$ , exprimer le module et l'argument de  $R(j\omega) G(j\omega)$ , puis tracer les diagrammes de Bode en amplitude et en phase. Ce système est-il stable ? Pourquoi ?
- 12 Peut-on trouver une valeur du gain  $G_r$  permettant d'obtenir une marge de gain  $G_m = 12$  dB ? Pourquoi ? Déterminer alors graphiquement la valeur du gain  $G_r$  permettant d'obtenir une marge de phase  $\varphi_m$  d'environ  $60^\circ$ .

## Problème 3 Influence d'une perturbation sur le clapet d'une vanne réglante

La température d'un échangeur thermique, de fonction de transfert en chaîne ouverte  $H(p)$ , est contrôlée de façon satisfaisante par un régulateur de fonction de transfert  $C(p)$ . Cependant, à la suite d'une modification sur le réseau de vapeur, il s'avère que la mesure  $X$  de la température est de plus en plus perturbée à cause des variations de pression de la vapeur agissant sur le clapet de la vanne réglante. Afin d'améliorer la régulation de température, cette perturbation a été modélisée par la fonction de transfert  $P(p)$  et le schéma fonctionnel de l'ensemble est le suivant (fig. 6.8), avec :

$$P(p) = \frac{K_s}{T p + 1} \quad \text{et} \quad V(p) = \frac{1}{\tau p + 1} \quad (\tau \ll \theta)$$

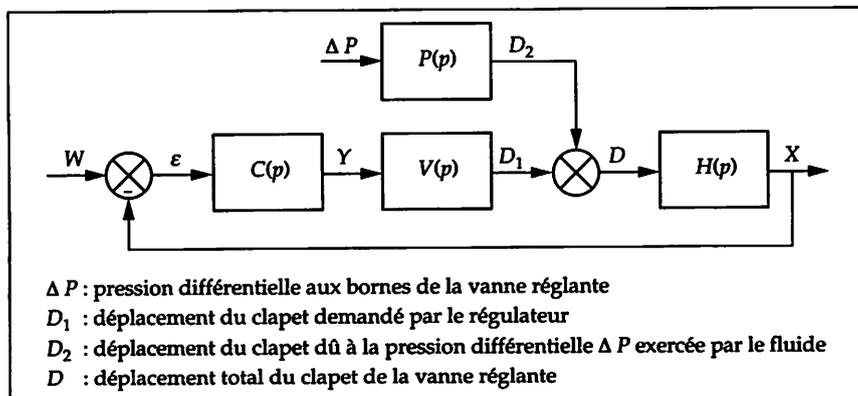


Figure 6.8

Hypothèses :

- le régulateur est réglé de façon à réaliser la condition :  $C(p) V(p) H(p) = K_i/p$
- le procédé est modélisé par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{G_s}{(\theta p + 1)}$$

- 1 Exprimer  $X(p)$  en fonction de  $\Delta P(p)$  et  $W(p)$ .
- 2 Exprimer  $X(p)$  lors d'un changement de  $\Delta P$  en échelon d'amplitude  $\alpha$ .
- 3 En supposant que mesure et consigne soient stabilisées et égales à 50 % lors de la perturbation, calculer et tracer  $X(t)$  avec les données suivantes :  $K_i = 0,25 \text{ min}^{-1}$  ;  $K_s = 3$  ;  $T = 2 \text{ min}$  ;  $\alpha = 25 \%$  ;  $\theta = 14 \text{ min}$  ;  $G_s = 1,5$  ;  $\tau$  est négligé devant  $\theta$ .

- 4 Le système peut-il effectuer des oscillations amorties si un opérateur augmente la valeur de  $K_i$  ? Justifier la réponse.
- 5 Quel est l'écart  $\varepsilon$  en régime permanent pour  $\alpha = 25\%$  ?
- 6 Une alarme sur l'écart est réglée à  $\pm 5\%$  et déclenche une sécurité agissant sur l'échangeur thermique.
- 7 Pour  $\alpha = 25\%$ , calculer la valeur maximale atteinte par l'écart  $\varepsilon_M$  lors du régime transitoire. L'alarme est-elle alors déclenchée ?

## Problème 4 Régulation de débit

L'installation représentée figure 6.9 permet d'obtenir un débit massique constant et donc d'annuler les méfaits des fluctuations de matière arrivant dans un procédé (four, échangeur, colonne à distiller ou mélangeur).

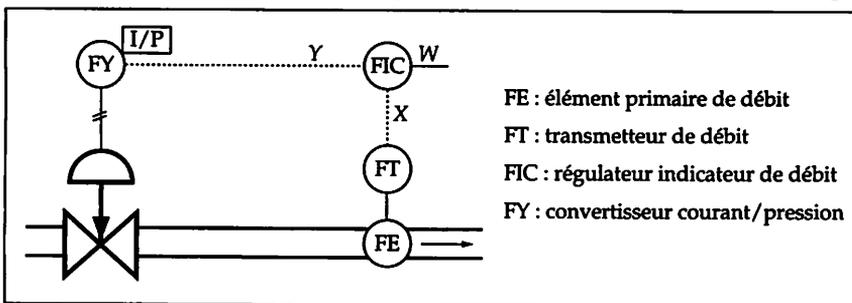


Figure 6.9

Le régulateur indicateur de débit (FIC) étant en position manuelle, donc en fonctionnement non automatique pour la régulation, une variation en échelon de 15 % de la commande  $Y$  de la vanne a permis d'obtenir la réponse indicielle suivante (fig. 6.10).

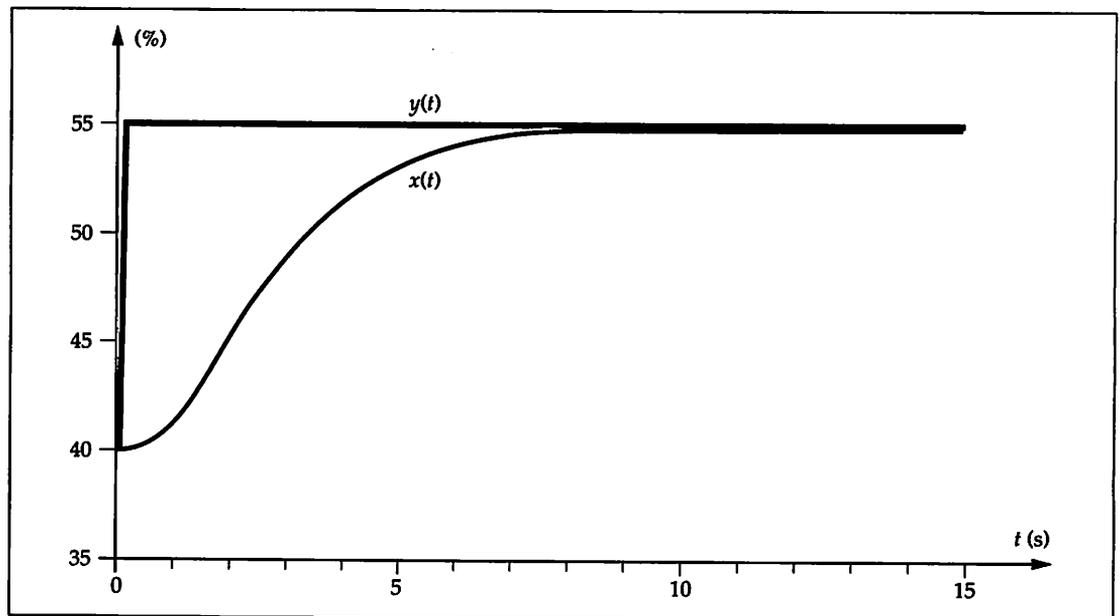
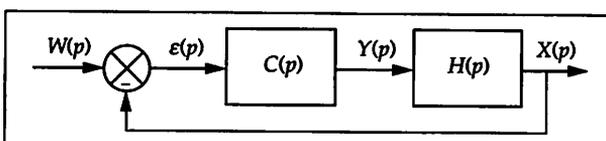


Figure 6.10

- 1 Identifier ce procédé par la méthode de Broïda :  $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$ . Ce procédé est-il naturellement stable ? Que penser de la valeur du gain statique ?
- 2 Tracer le diagramme de Nyquist de  $H(p)$ . Quelle est la marge de gain  $G_m$  en décibels ?
- 3 Le régulateur FIC a pour fonction de transfert  $C(p)$  avec  $C(p) = G_r$ . Il est mis en série avec le procédé comme le montre le schéma fonctionnel de la figure 6.11.



- 4 Calculer la valeur du gain  $G_r$  à adopter pour obtenir une marge de gain  $G_m$  de 8 dB.

Figure 6.11

- 4 Avec ce gain, la valeur de l'écart statique relatif est-elle acceptable (c'est-à-dire inférieure à 2 %) ?
- 5 L'étendue d'échelle du débitmètre FT est jugée un peu trop importante, le service instrumentation diminue alors cette étendue d'échelle de 25 %.
- ▷ Trouver le nouveau gain statique  $G'_s$  de  $H(p)$ .
- ▷ Puis, en gardant la valeur du gain  $G_r$  trouvée en 3, donner la nouvelle marge de gain  $G'_m$ . Que peut-on en penser ?
- 6 Une étude théorique classique conduit à un choix de régulateur de type PID, mais l'action dérivée n'est pas retenue car la mesure est parasitée par du bruit. La constante de temps d'action intégrale  $T_i$  est fixée à 5 secondes pour des raisons technologiques et le gain du régulateur de structure série est réglé à  $G_r = 2$ .
- ▷ Calculer la réponse  $x(t)$  lorsqu'on applique un échelon unitaire de consigne  $w$ . Cette réponse est-elle acceptable pour une régulation de débit ?
- 7 Une modification, due à des travaux sur la conduite, induit une augmentation de la distance vanne/débitmètre de  $L = 5$  m. Le débit massique maximal est  $Q_M = 18$  t/h et le diamètre interne de la conduite est  $d = 80$  mm. La densité de liquide est proche de 1.
- ▷ En supposant que cette modification engendre un temps mort pur  $\tau'$ , calculer ce temps mort.
- ▷ Puis, avec les mêmes réglages du régulateur qu'en 6, calculer la nouvelle marge de gain  $G''_m$ . En tant que régulateur, que préconiser comme réglage final du gain  $G_r$  ?

## Problème 5 Régulation de température d'un dégazeur thermique

Un dégazeur thermique est utilisé lors du prétraitement de l'eau d'alimentation d'une chaudière industrielle. Il a pour but d'éliminer, par ruissellement, le gaz carbonique et l'oxygène se trouvant dans l'eau. Ces gaz sont d'autant moins solubles que la pression est faible et la température est élevée. Pour cela, l'eau contenue dans le dégazeur est maintenue à une légère pression et à la température de saturation correspondante (environ 104 °C). Le schéma simplifié du dégazeur (fig. 6.12) comporte la boucle de régulation de la température et la mesure de niveau.

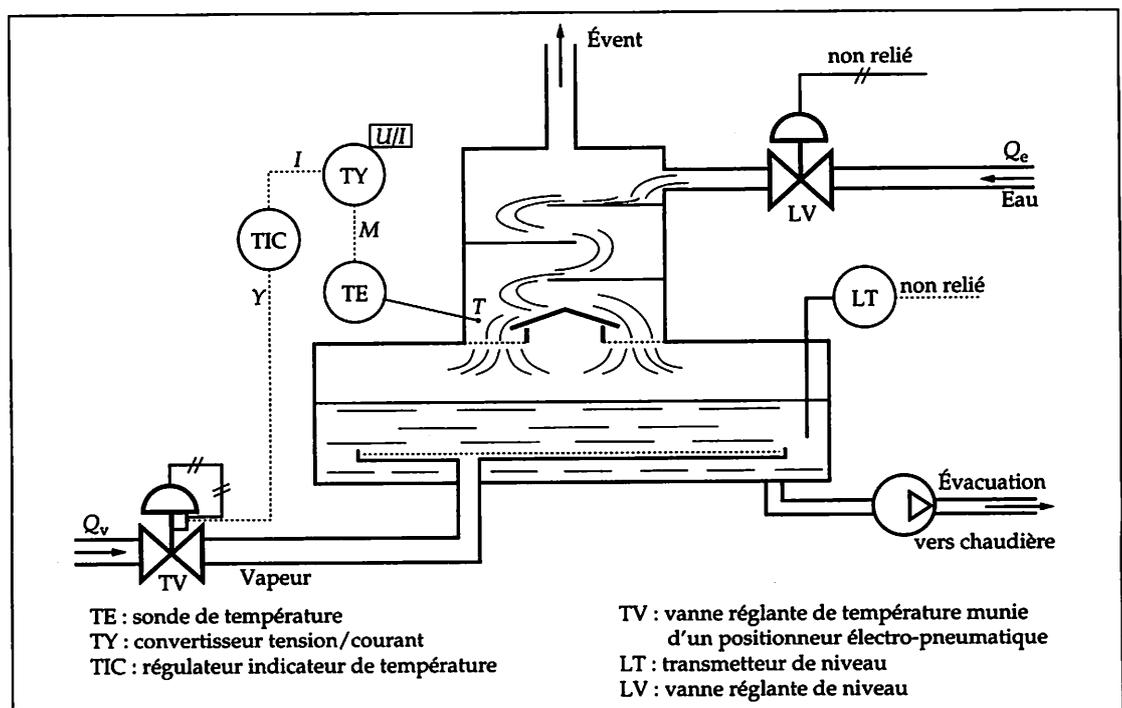


Figure 6.12

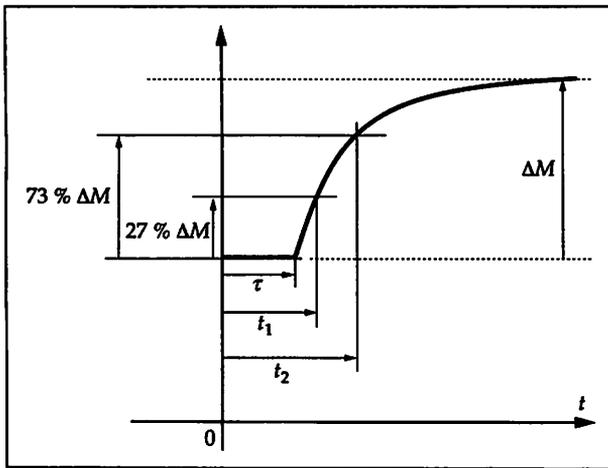


Figure 6.13

Pour réguler la température, on cherche un modèle du premier ordre avec retard pur. Le procédé identifié comprend le positionneur électro-pneumatique, la vanne TV, le dégazeur thermique et la sonde TE. La méthode de De La Fuente, qui utilise des points définis à 27 % et à 73 % de la réponse pour les temps  $t_1$  et  $t_2$  (fig. 6.13), est imposée pour cette recherche.

La réponse  $M$  est enregistrée (fig. 6.14).

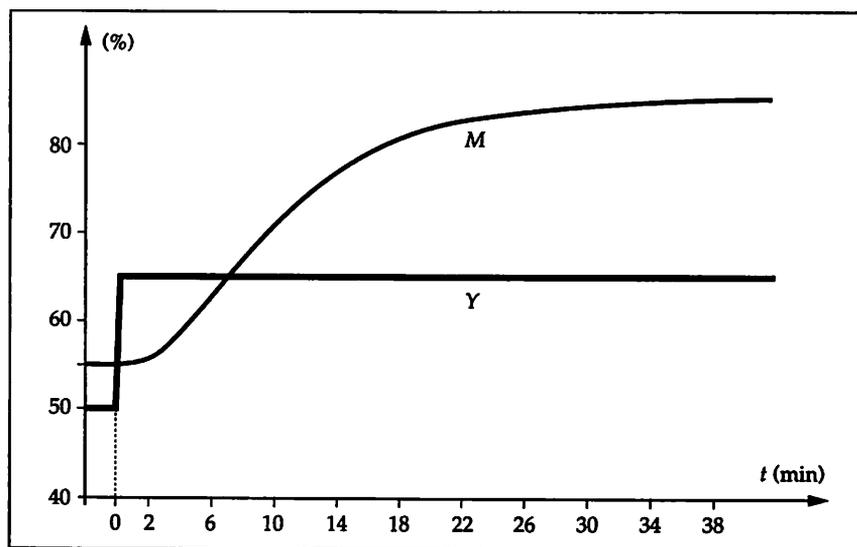


Figure 6.14

## 1 Identification du procédé

- ▷ Rappeler l'équation temporelle de la réponse indicielle d'un système du premier ordre avec retard pur en utilisant les notations suivantes :  $G_s$  gain statique,  $\theta$  constante de temps,  $\tau$  temps mort.
- ▷ Démontrer que la méthode de De La Fuente donne les résultats suivants :  $\theta = t_2 - t_1$  et  $\tau = 1,31 t_1 - 0,31 t_2$ .
- ▷ Déterminer  $G_s$ ,  $\theta$  et  $\tau$  et donner la fonction de transfert  $T(p) = M(p)/Y(p)$  numériquement avec  $\theta$  et  $\tau$  exprimés en minutes.

## 2 Identification du convertisseur bas niveau U/I

La sonde de température TE est un thermocouple qui délivre en sortie une tension de quelques microvolts en fonction de la température  $T$ . Le régulateur TIC installé ne reçoit en entrée de mesure qu'un signal 4 – 20 mA. Le rôle du convertisseur U/I ( $\mu\text{V}/\text{mA}$ ) est d'assurer cette fonction d'amplification.

Une étude expérimentale de l'appareil seul a donné les résultats suivants, les mesures étant prises toutes les 2 secondes (tableau 6.2).

$U(\mu\text{V})$	2 100	2 100	2 100	2 187	2 275	2 362	2 450	2 537	2 625
$I(\text{mA})$	12,00	12,00	11,99	12,02	12,10	12,22	12,38	12,58	12,81
$U(\mu\text{V})$	2 712	2 800	2 887	2 975	3 062	3 150	3 237	3 325	3 412
$I(\text{mA})$	13,07	13,35	13,65	13,98	14,32	14,69	15,06	15,45	15,85
$U(\mu\text{V})$	3 500	3 587	3 675	3 762	3 850	3 937	4 025	4 112	4 200
$I(\text{mA})$	16,26	16,68	17,11	17,50	17,99	18,44	18,90	19,35	19,81
$U(\mu\text{V})$	4 287	4 375	4 462	4 550	4 638				
$I(\text{mA})$	20,00	19,99	20,00	20,00	20,00				

Tableau 6.2

- ▷ Déterminer la sensibilité  $S_c = I/U$  du convertisseur.
- ▷ Tracer le graphe de l'intensité  $I$  et de la tension  $U$  du courant en fonction du temps, puis démontrer (calcul simple) qu'il s'agit d'un système du premier ordre. Déterminer la constante de temps  $\theta_c$  de ce convertisseur en secondes. Donner la fonction de transfert du convertisseur  $C_o(p)$  si  $U$  et  $I$  sont exprimées sous la forme de pourcentages.

### 3 Fonction de transfert du procédé

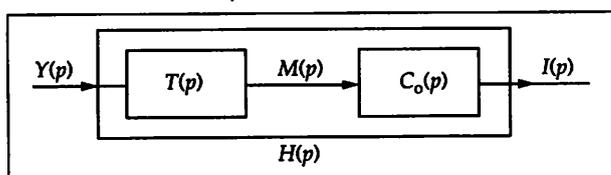


Figure 6.15

Pour le reste de l'étude on prendra les valeurs suivantes pour les fonctions de transfert :

$$T(p) = \frac{2 e^{-4p}}{(8p + 1)} \quad \text{et} \quad C_o(p) = \frac{1}{0,3p + 1}$$

Toutes les constantes de temps sont exprimées en minutes.

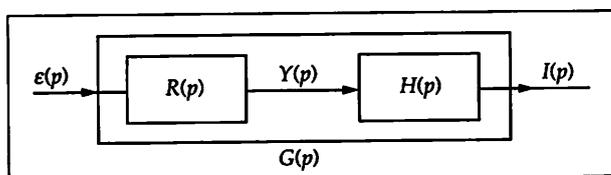
- ▷ Exprimer le module et l'argument de la fonction de transfert  $H(p)$  du procédé (fig. 6.15).
- ▷ Tracer le diagramme de Black de  $H(j\omega)$ . Quelle est la valeur de la pulsation en radians par minute pour  $|H(j\omega)| = 0$  dB ? Quelle est la valeur de la phase  $\varphi$  pour cette pulsation ? Déterminer la marge de gain, la marge de phase et la bande passante en chaîne fermée à  $-6$  dB.

### 4 Le régulateur TIC est un régulateur électronique à action PID d'équation :

$$Y = \frac{\varepsilon(t)}{B_p} + \frac{1}{T_i B_p} \int_0^t \varepsilon(t) dt + \frac{T_d}{B_p} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0$$

- ▷ Donner la fonction de transfert  $R(p)$  de ce régulateur.

### 5 Le régulateur TIC, introduit en série avec le procédé (fig. 6.16), commande la vanne TV équipée d'un positionneur électro-pneumatique (fig. 6.12).



$R(p)$  est réglé de façon que :  
 $B_p = 200\%$  ;  $T_i = 8$  min ;  $T_d = 0$ .

Figure 6.16

- ▷ Tracer la courbe de  $G(j\omega)$  sur l'abaque de Black. Déterminer la valeur de la pulsation en radians par minute pour laquelle  $|G(j\omega)| = 0$  dB.
- ▷ Quelle est la marge de gain  $G_m$  ? Quelle est la marge de phase  $\varphi_m$  ? Quel est le facteur de résonance  $Q$  ? Quelle est la pulsation de résonance  $\omega_r$  ?

### 6 Étude de l'influence de l'alimentation en eau sur la température

La fonction de transfert perturbatrice principale est celle due au débit  $Q_e$  de l'eau d'alimentation.

Après une identification en chaîne ouverte pour un débit  $Q_v$  constant, on trouve que cette fonction de transfert est :

$$D(p) = \frac{M(p)}{Q_e(p)} = \frac{G_n}{T p + 1} \quad \text{avec : } G_n = 2,5 \quad \text{et} \quad T = 4 \text{ min}$$

- ▷ Établir le schéma fonctionnel de la régulation de température en représentant  $D(p)$ .
- ▷ Les réglages du régulateur étant inchangés, calculer alors l'écart  $\varepsilon$  entre la consigne  $W$  et la mesure  $M$  lorsque  $Q_0(t)$  varie en un échelon de 20 %,  $W$  restant constante.
- ▷ Calculer et tracer la réponse  $I(t)$  lorsque  $Q_0(t) = 20\%$ . Que penser de l'écart transitoire que subit la température ?

### 7 Étude de la régulation du niveau

- ▷ Implanter la boucle de régulation de niveau sur la figure 6.12, en utilisant les notations suivantes :  
 LIC : régulateur indicateur de niveau      LY : convertisseur courant/pression
- On donne les fonctions de transfert suivantes :
- convertisseur LY :  $C_L(p) = \frac{P(p)}{Y(p)} = 1$
  - procédé :  $H_L(p) = \frac{X(p)}{P(p)} = \frac{k}{p}$  avec  $k = 0,3 \text{ min}^{-1}$
  - régulateur :  $L(p)$
- ▷ Établir le schéma fonctionnel de la régulation de niveau.
  - ▷ Déterminer la fonction de transfert  $L(p)$  du régulateur LIC, afin d'obtenir une fonction de transfert en chaîne fermée  $F_L(p)$  du premier ordre de constante de temps  $\theta_L$  qui soit inférieure à 2 minutes. De quel régulateur s'agit-il ?

## N Problème 6 Régulation de température d'un échangeur

Dans une conjoncture économique de plus en plus difficile, les économies d'énergie sont et seront à développer dans toute industrie. Tout naturellement, les échangeurs thermiques sont utilisés en plus grand nombre dans de nombreuses industries, ainsi que les régulations qui leur sont associées.

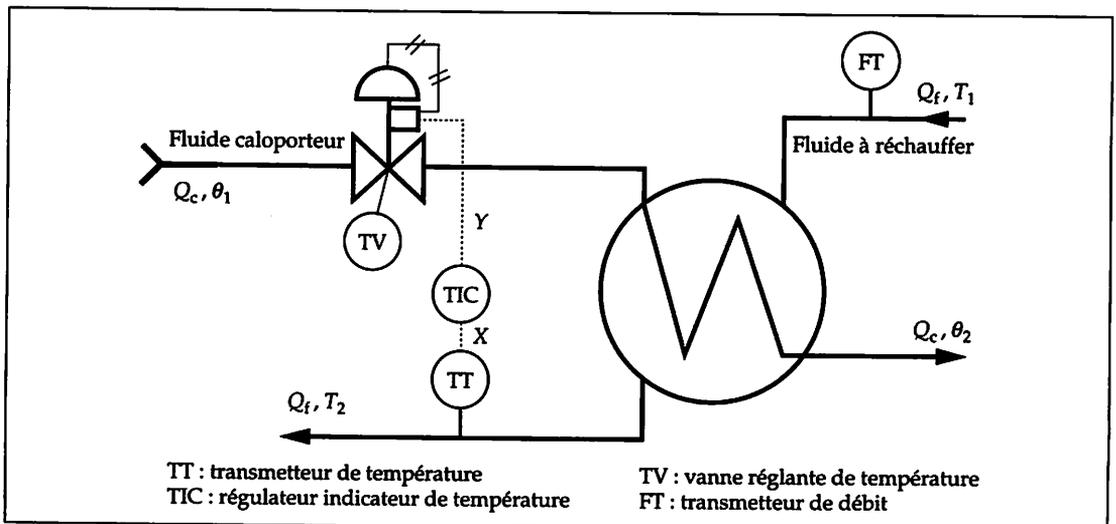


Figure 6.17

L'échangeur thermique présenté figure 6.17 sert ici à réchauffer un fluide froid à l'aide d'un fluide caloporteur dont la température  $\theta_1$  est toujours plus élevée que la température  $T_1$ .

La régulation de température étudiée est celle d'une simple boucle qui permet de maintenir la température  $T_2$  constante quel que soit le débit  $Q_f$  de fluide à réchauffer.

## 1 Identification

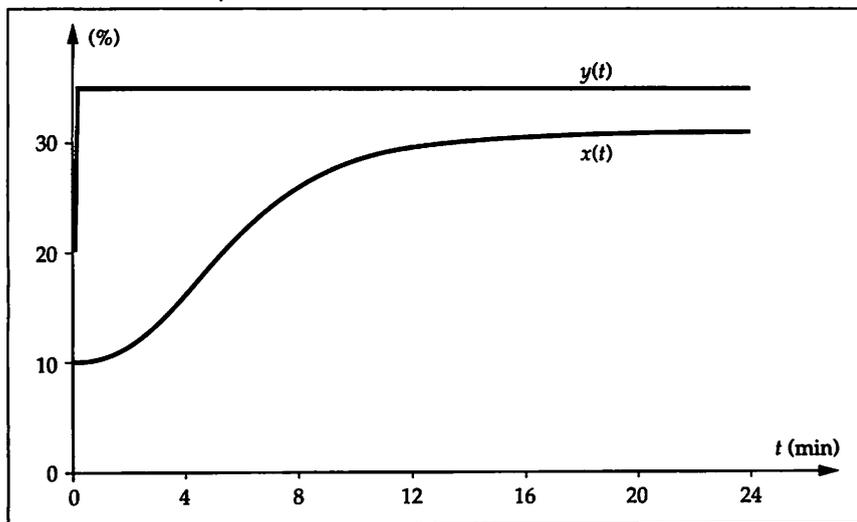


Figure 6.18

Le régulateur étant en position manuelle, c'est-à-dire en fonctionnement non automatique pour la régulation, une commande  $Y$  en échelon a été envoyée sur la vanne et la mesure  $X$  de la température  $T_2$  a été enregistrée (fig. 6.18), le débit  $Q_f$  étant resté constant.

▷ Déterminer la fonction de transfert réglante  $H_r(p)$  par la méthode d'identification de Strejc (ordre entier).

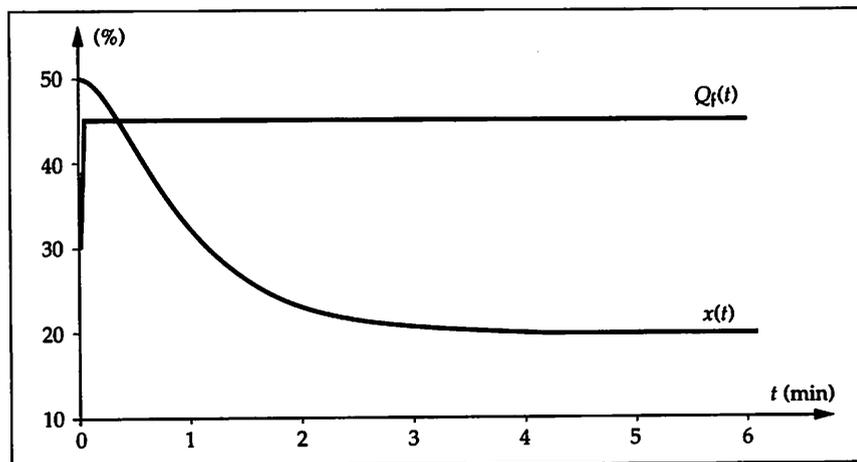


Figure 6.19

Pendant que la commande  $Y$  est maintenue constante, une variation du débit  $Q_f$ , assimilée à un échelon de 15 %, perturbe la température  $T_2$  enregistrée figure 6.19.

▷ Déterminer la fonction de transfert perturbatrice  $D(p)$  par la méthode d'identification de Strejc (ordre entier).

- ▷ Le régulateur TIC étant de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Y(p)}{W(p) - X(p)}$ ,  $W(p)$  étant la consigne, représenter le schéma-bloc de l'ensemble étudié.

## 2 Performances

Dans un premier temps, le service fabrication souhaite obtenir un premier dépassement relatif  $D_1$  maximal de 20 % de la température  $T_2$ , à la suite d'une variation de consigne en échelon. Le régulateur est un PID de structure parallèle de fonction de transfert  $C(p) = G_r + K_i/p + T_d p$ .

- ▷ À l'aide du critère de réglage de Naslin, déterminer les constantes  $G_r$ ,  $K_i$  et  $T_d$  du régulateur  $C(p)$  satisfaisant au cahier des charges demandé.
- ▷ Le dépassement de 20 % s'avère trop important, et on veut le réduire à  $D_1 = 10$  %, de combien évoluent alors  $G_r$ ,  $K_i$  et  $T_d$  ?
- ▷ Quelle est l'allure de  $x(t)$  lorsque le débit  $Q_f$  évolue suivant un échelon de 20 % (il est conseillé de simplifier les fonctions de transfert)? Que conclure ?

## 3 Régulation numérique

La commande établie en ▼ doit être implantée dans un calculateur.

- ▷ Représenter le schéma fonctionnel de cette régulation numérique en précisant la position du calculateur, celle du procédé et celles des interfaces nécessaires.
- ▷ La période d'échantillonnage étant  $T_e$ , déterminer l'équation récurrente de la commande numérique.

## Problème 7 Comparaison d'identification d'un procédé

Un problème crucial se pose assez souvent lors de l'identification en chaîne ouverte de certains procédés, par exemple lors de l'identification du niveau dans une cuve avec évacuation par gravité. En effet, en fonction de la charge et donc des débits mis en jeu, le déséquilibre du niveau lors d'une variation en échelon du débit d'entrée peut effectivement soit porter le dit niveau à un nouvel équilibre, soit provoquer un déclenchement de l'alarme haute du niveau !

On suppose que l'identification en chaîne ouverte d'un tel procédé a été opérée pour deux charges bien différentes. On a obtenu deux courbes différentes et donc deux fonctions de transfert distinctes  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  :  $H_1(p) = \frac{k}{p}$  et  $H_2(p) = \frac{G_s}{T p + 1}$ .

Maintenant il faut donc faire le choix de la « bonne fonction de transfert » pour l'étude en chaîne fermée avec le régulateur.

Le régulateur  $C(p)$  proposé est de type PI :  $C(p) = G_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

1 On donne :  $G_s = 1,2$  ;  $T = 0,2 \text{ min}$  et  $k = 0,6 \text{ min}^{-1}$ .

▷ Tracer les diagrammes de Bode de  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$ . Que peut-on en déduire ?

2 On étudie le procédé modélisé par  $H_1(p)$  et contrôlé par  $C(p)$ .

▷ Exprimer la fonction de transfert en chaîne fermée  $F_1(p)$ .

3 On étudie le procédé modélisé par  $H_2(p)$  et contrôlé par  $C(p)$ .

▷ Exprimer la fonction de transfert en chaîne fermée  $F_2(p)$ .

4 Comparer maintenant  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  : à quelle condition ces deux fonctions sont-elles similaires ? Cette condition est-elle en général respectée avec un tel procédé ?

## N Problème 8 Régulation de température d'un four de chauffe

(d'après agrégation Génie mécanique 1990)

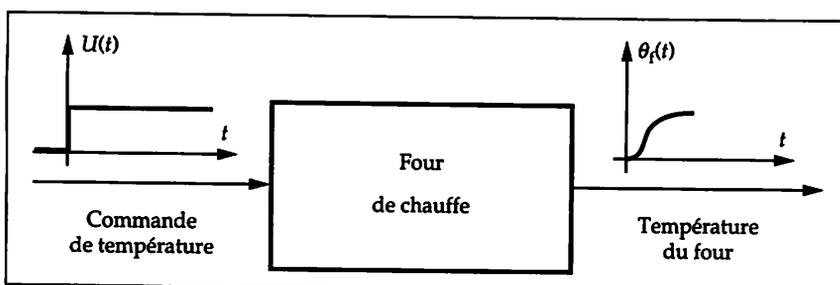


Figure 6.20

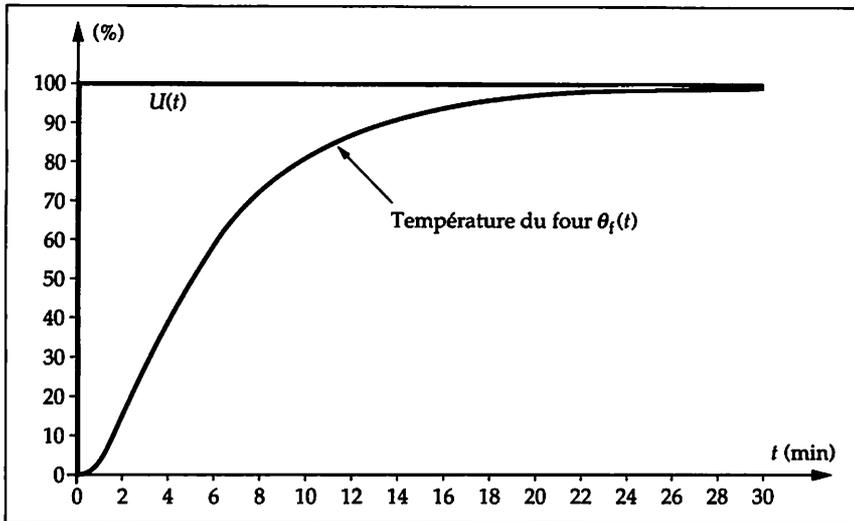
Le procédé étudié est un four de chauffe (fig. 6.20) permettant de réaliser des traitements thermiques sur des pièces produites en métallurgie. La valeur de la température maintenue à l'intérieur du four dépend des caractéristiques mécaniques désirées desdites pièces.

La température intérieure de ce four de chauffe doit être maintenue constante et cela quelle que soit la charge à chauffer.

### 1 Identification

Pour la grandeur physique commandée, on choisit souvent un modèle dont la fonction de transfert s'exprime sous la forme :

$$H(p) = \frac{\theta_f(p)}{U(p)} = \frac{G_s e^{-\tau p}}{T p + 1}$$



▷ Après avoir explicité physiquement les paramètres  $G_s$ ,  $T$  et  $\tau$  du modèle, tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon de ce modèle en mettant en évidence ces paramètres.

▷ Justifier alors le choix de ce modèle. Citer d'autres modèles classiques pour une commande de température.

Figure 6.21

2 Une fois le modèle théorique choisi, l'étape suivante consiste à évaluer les paramètres du modèle à partir du relevé de la réponse du système réel. Parmi les méthodes possibles, celle de Broïda est retenue ici.

- ▷ Établir les relations donnant  $T$  et  $\tau$ .
- ▷ Appliquer ces relations au relevé fourni (fig. 6.21), puis tracer la réponse modélisée sur le relevé. Que conclure quant à la validité de l'identification ?

### 3 Amélioration des performances

Le procédé identifié ci-dessus est maintenant placé dans une chaîne de commande fermée, munie d'un correcteur. Dans le cas général, le système ainsi constitué peut

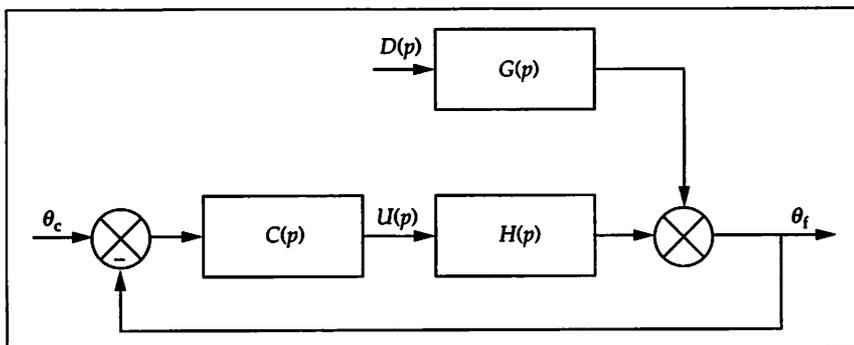


Figure 6.22

être soumis à des grandeurs perturbatrices, ce qui conduit au schéma-bloc de la figure 6.22 où  $H(p)$  est la fonction de transfert du procédé ;  $G(p)$  est la fonction de transfert liée à la perturbation  $D(p)$ , et  $C(p)$  est la fonction de transfert du correcteur.

- ▷ Exprimer :  $\theta_f(p)$  en fonction de  $\theta_c(p)$ ,  $\theta_f(p)$  en fonction de  $D(p)$ , puis  $\theta_f(p)$  en fonction de  $\theta_c(p)$  et de  $D(p)$ .
- ▷ À partir du résultat précédent, que peut-on conclure des études de stabilité par rapport à  $\theta_c(p)$  et par rapport à  $D(p)$  ?

### 4 Étude de la correction analogique

L'étude se poursuit sans tenir compte de la grandeur perturbatrice.

- ▷ Exprimer l'écart statique si  $C(p) = 1$ , et donner la précision de ce système.
- ▷ Calculer le module et l'argument de  $H(j\omega)$ , puis tracer la représentation de cette fonction dans le plan complexe (Nyquist). La fonction ainsi tracée est-elle stable ?

L'utilisation de deux sortes de correcteurs est envisagée : à gain proportionnel ou PID. Dans un premier temps on règle :  $C_1(p) = G_1$ . Le réglage de la stabilité sera considéré comme correct avec une marge de gain de 2.

- ▷ Calculer alors la valeur maximale de  $G_1$  en fonction de  $G_s$ ,  $T$  et  $\tau$  (faire l'approximation  $\omega\tau \approx \pi/2$ ).

Le correcteur est maintenant du type PID série :  $C_2(p) = G_2 \left( \frac{1 + T_1 p}{T_1 p} \right) (1 + T_2 p)$ .

Le réglage de  $T_1$  et  $T_2$  se fait de la manière suivante :  $T_1 = T$  et  $T_2$  est telle que son action apporte une avance de phase de  $\pi/4$  rad.

- ▷ Calculer la valeur maximale de  $G_2$  dans les mêmes conditions que précédemment.

### 5 Étude de la correction numérique

La commande du four est maintenant réalisée à l'aide d'un calculateur. Seul le cas du correcteur PID est envisagé.

- ▷ Proposer une représentation de cette commande sous forme de schéma-bloc. Lister alors les fonctions confiées au calculateur.

Le correcteur PID précédent peut se mettre sous la forme suivante :

$$u_k = A \varepsilon_k + B \int_0^t \varepsilon_k dt + C \frac{d\varepsilon_k}{dt}$$

avec  $u_k$  : valeur de la commande du procédé aux instants d'échantillonnage  $k$ ,  
et  $\varepsilon_k$  : valeur de l'écart aux instants d'échantillonnage  $k$ .

La période d'échantillonnage est ici très faible par rapport aux constantes de temps du procédé.

- ▷ Calculer les valeurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  en fonction de  $G_2$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .

La commande se fait maintenant par l'intermédiaire d'une carte de commande possédant un correcteur de type PID numérique  $C(Z)$  paramétrable. Le correcteur est exprimé par sa transformée en  $Z^{-1}$  :

$$C_n(Z) = G_n \frac{(1 + a Z^{-1})(1 + b Z^{-1})}{(1 - Z^{-1})}$$

- ▷ Donner l'équation récurrente correspondant à ce correcteur. Calculer alors  $G_n$ ,  $a$  et  $b$  en fonction des valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminées précédemment.

## Problème 1

### 1 Étendue d'échelle et décalage de zéro

Niveau bas :  $N = 0$ ; pression basse  $P_b = (0 + L) \rho g = (1,5 \times 1000 \times 9,81) \text{ Pa}$   
 $\Rightarrow P_b = 14,7 \text{ kPa}$

Niveau haut :  $N = H$ ; pression haute  $P_h = (H + L) \rho g = (3,5 \times 1000 \times 9,81) \text{ Pa}$   
 $\Rightarrow P_h = 34,3 \text{ kPa}$

L'étendue d'échelle du transmetteur de pression relative est égale à :

$$E_E = P_h - P_b = 19,6 \text{ kPa}$$

Le décalage de zéro correspond au niveau bas donc à la pression basse :

$$P_h = 14,7 \text{ kPa}$$

Donc, quand  $N = 0$ , le signal de sortie du capteur est 4 mA, soit 0 %, et quand  $N = 2 \text{ m}$ , le signal est 20 mA, soit 100 %.

### 2 Fonction de transfert du transmetteur

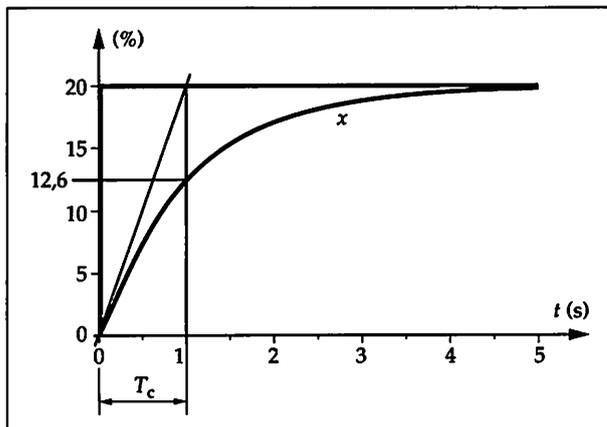


Figure 6.23

À l'entrée du transmetteur on applique une variation de pression en échelon. La réponse (sortie) obtenue ne comporte pas de point d'inflexion (fig. 6.23), elle correspond à un premier ordre de constante de temps  $T_c$  qui est mesurée à 63 % de la variation finale de X. On relève :  $T_c = 1 \text{ s}$

La fonction de transfert du transmetteur est donc :

$$T(p) = \frac{1}{T_c p + 1}$$

### 3 Fonction de transfert du procédé non instrumenté

La transformée de Laplace de l'équation différentielle donne :  $\theta p N(p) + N(p) = Q_e(p)$   
 $Q_a(t)$  est supposé constant, donc  $Q_a(p) = 0$ .

On exprime  $N(p)$  en fonction de  $Q_e(p)$ , d'où :  $H(p) = \frac{N(p)}{Q_e(p)} = \frac{1}{\theta p + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{25 p + 1}$

( $\theta$  correspond au temps de rétention du liquide dans la cuve.)

### 4 Fonction de transfert de l'ensemble convertisseur/vanne

Tout comme  $T(p)$  obtenue à la question 2, la fonction de transfert  $V(p)$  est une fonction

de transfert du premier ordre :  $V(p) = \frac{Q_e(p)}{Y(p)} = \frac{1}{4 p + 1}$

## 5 Étude de la régulation

### ▷ Fonction de transfert du procédé instrumenté

$$G(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{X(p)}{N(p)} \frac{N(p)}{Q_d(p)} \frac{Q_d(p)}{Y(p)}$$

On obtient :  $G(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{1}{(p+1)(25p+1)(4p+1)}$

### ▷ Schéma fonctionnel du procédé (fig. 6.24)

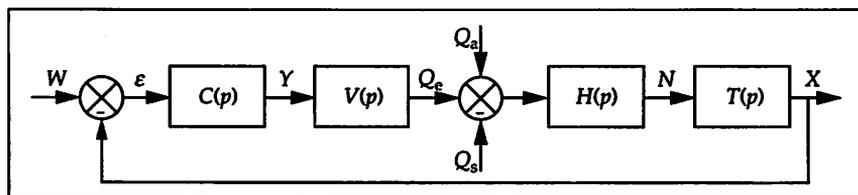


Figure 6.24

## 6 Écart statique

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \frac{0,2}{p(1+G_r)C(p)} \right) = \frac{0,2}{1+G_r} < 0,02$$

▷ Pour obtenir un écart statique inférieur à 2 %, la valeur minimale de  $G_r$  doit être :  $G_r > 9$ . Par la suite on prendra  $G_r = 10$ .

### ▷ Stabilité du système

Pour vérifier la stabilité, on applique la méthode de Routh.  
La fonction de transfert en chaîne fermée est :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} \Rightarrow F(p) = \frac{G_r}{(p+1)(25p+1)(4p+1)+G_r}$$

À partir du dénominateur de  $F(p)$  on obtient l'équation caractéristique :

$$100p^3 + 129p^2 + 30p + (G_r + 1) = 0$$

$p^3$	100	30
$p^2$	129	$G_r + 1$
$p^1$	$\frac{30 \times 129 - 100(G_r + 1)}{100}$	0
$p^0$	$G_r + 1$	

Tableau 6.3

Tous les termes de la première colonne du tableau de Routh doivent être de même signe, donc le système est stable si  $G_r < 37,7$ .

Puisqu'à la question précédente  $G_r$  a été fixé à 10, le système est stable.

### ▷ Réponse indicielle

En négligeant le terme  $1/(p+1)$ , la réponse à un échelon  $W(p) = 0,2/p$  est :

$$X(p) = \frac{0,2}{p} \frac{10}{(25p+1)(4p+1)+10} \Rightarrow X(p) = \frac{0,182}{p(9,1p^2 + 2,64p + 1)}$$

C'est la réponse d'un second ordre oscillant amorti ayant les caractéristiques suivantes :

$$X(p) = \frac{0,182}{p \left[ \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1 \right]}$$

$$\omega_n = 0,11 \text{ rad/s (pulsation propre)}$$

$$\xi = 0,438 \text{ (coefficient d'amortissement)}$$

$$D_1 (\%) = e^{-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}} = 21,7 \% \text{ (dépassement)}$$

## 7 Écart statique nul

La fonction de transfert en chaîne fermée est :

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p)G(p)}{C(p)G(p)+1} = \frac{G_r(1+T_i p)}{T_i p(p+1)(25p+1)(4p+1)+G_r(1+T_i p)}$$

• Pour un échelon de consigne  $W(p) = a/p$  et  $Q_a(p) = 0$  (pas de changement du débit  $Q_a(t)$ ), on a :

$$\Delta X = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{G_r(1+T_i p)}{T_i p(p+1)(25p+1)(4p+1)+G_r(1+T_i p)} \frac{a}{p} \right]$$

La variation de la mesure est donc :  $\Delta X = a$

Il est donc évident que la variation de mesure est la même que la variation de consigne quelle que soit la valeur de  $T_i$ , et donc  $\epsilon_s = 0$ . En revanche, la valeur de  $T_i$  influe bien sûr sur le régime transitoire.

• Pour un échelon de débit  $Q_a(p) = a/p$  et  $W(p) = 0$  (pas de changement de consigne  $W(t)$ ), on a :

$$F'(p) = \frac{X(p)}{Q_a(p)} = \frac{C(p)H(p)}{C(p)H(p)+1} = \frac{T_i p(1+4p)}{T_i p(p+1)(25p+1)(4p+1)+G_r(1+T_i p)}$$

$$\Delta X = \lim_{p \rightarrow 0} [p X(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{b}{p} \frac{T_i p(1+4p)}{T_i p(p+1)(25p+1)(4p+1)+G_r(1+T_i p)} \right]$$

La variation de la mesure est :  $\Delta X = 0$  et  $\epsilon_s = 0$ , et cela quelle que soit la valeur de  $T_i$ .

## 8 Réponse indicielle $x(t)$ (fig. 6.25)

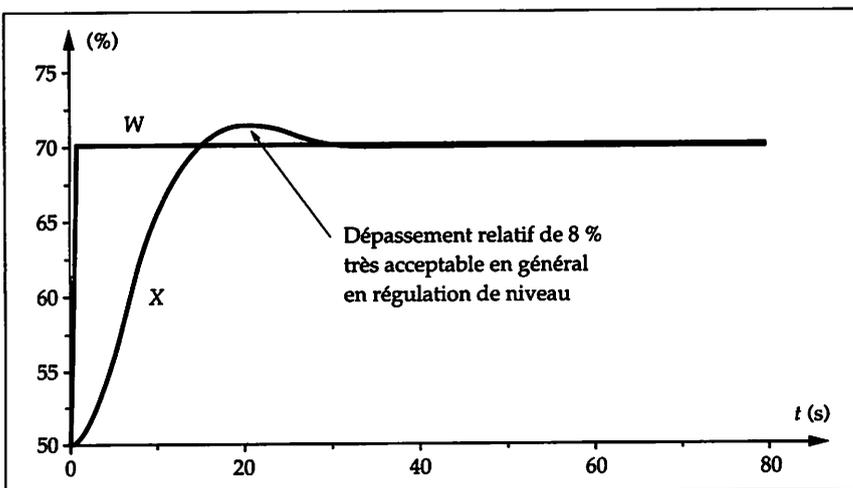


Figure 6.25

La fonction de transfert en chaîne fermée est :

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r}{25p(4p+1)+G_r} = \frac{1}{25p^2+6,25p+1}$$

Cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$F(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

avec  $\omega_n = 0,2 \text{ rad/s}$  et  $\xi = 0,625$  (coefficient d'amortissement).

La réponse à un échelon de consigne de 20 % est :

$$X(p) = F(p) W(p) = \frac{0,2}{p} \frac{1}{25p^2+6,25p+1}$$

et donc :

$$X(t) = 0,5 + 0,2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} \right) \right) \right] u(t)$$

La réponse indicielle est représentée figure 6.25.

## 9 Variation de $x(t)$ lors d'une variation du débit $Q_a(t)$

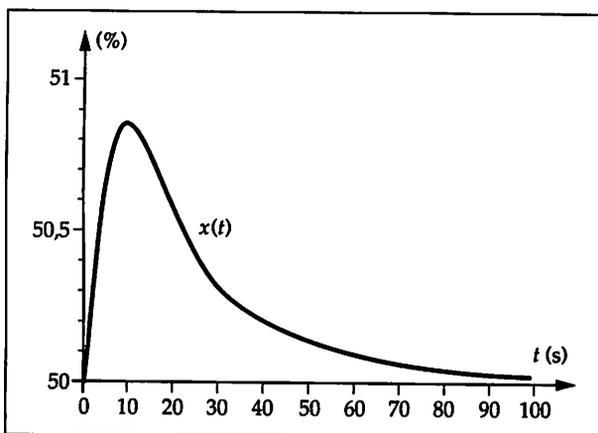
$$F'(p) = \frac{X(p)}{Q_a(p)} = \frac{6,25p(4p+1)}{(25p+1)(25p^2+6,25p+1)}$$

Pour  $Q_a(p) = 0,2/p$ , on obtient : 
$$X(p) = \frac{1,25(4p+1)}{(25p+1)(25p^2+6,25p+1)}$$

$$x(t) = 0,25 \left[ \frac{(\theta-a)\omega_n^2}{1-2\theta\xi\omega_n+\theta^2\omega_n^2} e^{-t/\theta} + \sqrt{\frac{1-2a\xi\omega_n+a^2\omega_n^2}{1-2\theta\xi\omega_n+\theta^2\omega_n^2}} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_p t + \psi) \right]$$

avec  $\theta = 25$  s ;  $a = 4$  s ;  $\omega_n = 0,2$  rad/s ;  $\xi = 0,625$  ;  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 0,156$  rad.s<sup>-1</sup>  
 et  $\psi = \arctan \left[ \frac{a\omega_p}{1-a\xi\omega_n} \right] - \arctan \left[ \frac{\theta\omega_p}{1-\theta\xi\omega_n} \right]$

La mesure du niveau est donc :  $X(t) = 0,5 + x(t)$



L'utilisation de l'outil informatique est bien évidemment encore conseillée pour tracer cette réponse. La fonction est relativement compliquée mais, en l'observant plus attentivement, on remarque que le terme prépondérant est celui de la constante de temps  $\theta$  due au réservoir. Malgré la présence d'un « 2<sup>e</sup> ordre », l'allure de la courbe est donc proche d'une réponse impulsionnelle d'un « 1<sup>er</sup> ordre » de constante voisine de temps  $\theta$ . La « vraie » réponse  $x(t)$  est donnée figure 6.26.

Figure 6.26

## Problème 2

### 1 ▷ Sens d'action de la vanne

La vanne est ouverte par manque d'air (OMA) puisqu'à une augmentation de  $Y$ , donc de la pression de commande, correspond une diminution du débit  $Q_{vs}$ .

### ▷ Fonction de transfert $H_1(p)$

On constate que c'est un système autoréglant de constante de temps du premier ordre (il n'y a pas de point d'inflexion) sans temps mort pur (l'évolution s'effectue immédiatement).

On mesure  $\theta$  à 63 % de la variation de  $Q_{vs}$ , soit :  $\theta = 0,5$  s.

On calcule le gain statique  $G_1$  en régime permanent, soit :  $G_1 = \frac{22,5 - 60}{55 - 45} = -3,75$

Le signe moins signifie que le sens d'action du système est inverse (ici dû à la vanne). On prendra  $G_1$  positif dans la suite du problème, sachant qu'en réalité le fonctionnement global est assuré par le choix du sens d'action du régulateur (voir question 5).

On obtient :  $H_1(p) = \frac{3,75}{0,5p + 1}$

## 2 Fonction de transfert $H_2(p)$

La transformée de Laplace de :  $1,2 Q_{vs}(t) - 6 \frac{d^2 P(t)}{dt^2} - 5 \frac{d P(t)}{dt} - P(t) = 0$

conduit à :  $6 p^2 P(p) + 5p P(p) + P(p) = 1,2 Q_{vs}(p)$

On trouve finalement :  $H_2(p) = \frac{P(p)}{Q_{vs}(p)} = \frac{1,2}{(3p + 1)(2p + 1)}$

## 3 Fonction de transfert $H_3(p)$

Sur les diagrammes de Bode, on observe :

- une asymptote à 0 dB, donc le gain statique du système est égal à 1 ( $20 \lg 1 = 0$  dB);
- une asymptote de 0 à  $-90^\circ$  avec un point d'inflexion à  $45^\circ$  ;
- une asymptote de pente  $-20$  dB/décade, donc une seule constante de temps de premier ordre, à la fréquence de coupure  $f_c = 10 \text{ s}^{-1}$ , soit  $T = 0,1$  s.

La fonction de transfert est donc :  $H_3(p) = \frac{X(p)}{P(p)} = \frac{1}{0,1p + 1}$

## 4 Fonction de transfert $H(p)$

$H(p) = H_1(p) H_2(p) H_3(p)$  donc :  $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{4,5}{(0,5p + 1)(3p + 1)(2p + 1)(0,1p + 1)}$

## 5 Sens d'action du régulateur

D'après la norme française, un régulateur est à action directe lorsque la sortie  $Y$  évolue dans le même sens que l'écart « mesure – consigne ». Le sens d'action à régler pour cette boucle est direct. En effet si, à la suite d'une perturbation,  $P$  augmente, il faut bien que la vanne se ferme pour diminuer  $P$  et retrouver l'équilibre initial.

Les schémas fonctionnels de régulation ne tiennent jamais compte du sens réel de la fonction de transfert réglante du procédé. Dans le schéma proposé, le procédé est de sens inverse et on le considère de sens direct. Le régulateur est de sens direct et on le considère de sens inverse. Le schéma d'ensemble est donc logique, mais, en pratique, il faut savoir déterminer le sens d'action du régulateur.

## 6 Fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée

$$F(p) = \frac{C(p) H(p)}{C(p) H(p) + 1} = \frac{4,5 G_r}{(p + 1)^4 + 4,5 G_r}$$

▷ **Écart statique pour différentes valeurs de  $G_r$**

On exprime :  $\varepsilon(p) = W(p) - X(p) = \frac{W(p)}{1 + C(p)H(p)}$

et pour  $w(t) = 10\% u(t)$ , on a  $W(p) = 0,1/p$ .

On obtient l'écart statique  $\varepsilon_s$  en appliquant le théorème de la valeur finale à  $\varepsilon(p)$  :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{0,1 (2,5 p + 1)^4}{p ((2,5 p + 1)^4 + 4,5 G_r)} \right] \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{0,1}{1 + 4,5 G_r}$$

Pour  $G_r = 0,5$  on trouve :  $\varepsilon_s = 0,031$ , soit 3,1 % ; pour  $G_r = 5$  il vient :  $\varepsilon_s = 0,0042$ , soit 0,42 %.

Il est donc évident qu'un gain de 5 permet l'obtention d'un très faible écart théorique entre consigne et mesure. En pratique, cet écart peut être supérieur puisque la consigne et la mesure sont toujours entachées d'incertitudes dues aux instruments.

**7 Structure du régulateur**

▷ **Sens d'action du régulateur lors de l'essai en chaîne ouverte**

La consigne a diminué de 5 % et le signal de mesure est resté constant, on obtient donc un écart  $\varepsilon = \Delta X - \Delta W = 5\%$ . Le signal de sortie  $Y$  a augmenté de 50 % jusqu'à 100 % (fig. 6.27).

Puisque le signal de sortie augmente lorsque l'écart augmente, le sens d'action du régulateur est direct.

▷ **Valeur de la bande proportionnelle  $B_p$**

L'action proportionnelle du régulateur est  $Y(t) = G_r(x - w) + Y(0)$

Sur l'enregistrement fourni (fig. 6.27), au début de l'essai on mesure une variation rapide de  $y(t)$  de 50 % à 75 %. Cette variation est due à l'action proportionnelle, c'est-à-dire que :

$$Y(t) = y(t) + Y(0) \Rightarrow 75\% = G_r(x - w) + 50\%$$

Comme ici l'écart  $(x - w) = -w = 5\%$ , on obtient :  $G_r = (75 - 50)/5 \Rightarrow G_r = 5$

La bande proportionnelle est donc :  $B_p = 1/5 \Rightarrow B_p = 20\%$

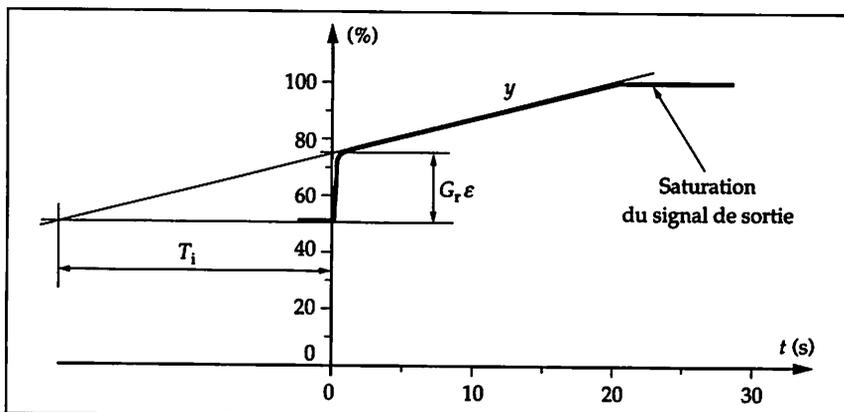
▷ **Équation temporelle du régulateur**

Puisque pour  $t = T_i = 20$  s, la variation de  $y(t)$  est égale à la variation due à l'action proportionnelle (fig. 6.27), c'est-à-dire  $y(t) = 100\% - 75\%$ , soit 25 %, le gain est en facteur de l'intégrale.

Une telle action est :  $y(t) = \frac{1}{B_p T_i} \int_0^t [x(t) - w(t)] dt$

$$y(t) = \frac{1}{0,2 T_i} \int_0^t 0,05 dt,$$

$$\text{soit } y(t) = \frac{1}{0,2 T_i} \times 0,05t$$



À partir de  $Y = 75\%$  : l'action intégrale, de  $t = 0$  à  $t = T_i$ , ajoute bien 25 % ; et  $Y(T_i) = 100\%$ . La constante de temps  $T_i$  mesurée pour cette variation de 25 % (fig. 6.27) est bien :  $T_i = 20$  s

Figure 6.27

$$Y(t) = 5[x(t) - w(t)] + 0,25 \int_0^t (x(t) - w(t)) dt + 0,5$$

Puisque le gain  $G_r$  est en facteur de l'intégrale, la structure de ce régulateur PI est donc série.

### ▷ Fonction de transfert du régulateur

La transformée de Laplace de l'équation trouvée précédemment conduit directement à la fonction de transfert du régulateur :

$$R(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{B_p} + \frac{1}{B_p T_i p} \Rightarrow R(p) = \frac{1}{B_p} \left( \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right)$$

### 8 Fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p)H(p)}{C(p)H(p) + 1} \Rightarrow F(p) = \frac{4,5 G_r (T_i p + 1)}{T_i p (p + 1)^4 + 4,5 G_r (T_i p + 1)}$$

### 9 Écart statique

Puisque  $\frac{\varepsilon(p)}{W(p)} = \frac{1}{C(p)H(p) + 1}$ , on obtient :  $\varepsilon(p) = \frac{0,1}{p} \frac{T_i p (p + 1)^4}{T_i p (p + 1)^4 + 4,5 G_r (T_i p + 1)}$

L'écart statique est :  $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{0,1}{p} \frac{T_i p (p + 1)^4}{T_i p (p + 1)^4 + 4,5 G_r (T_i p + 1)} \right] \Rightarrow \varepsilon_s = 0$

L'action intégrale permet d'éliminer l'écart en régime permanent, et cela quelle que soit la valeur du changement de consigne, et quelle que soit la valeur de  $T_i$ .

### 10 Écart de vitesse

$w(t) = 0,01 t u(t)$ , avec  $t$  en secondes, correspond à  $W(p) = 0,01/p^2$ .

L'écart de vitesse est :  $\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{0,1}{p^2} \frac{4p(p + 1)^4}{4p(p + 1)^4 + 4,5 \times 5(4p + 1)} \right] \Rightarrow \varepsilon_v = 18 \times 10^{-4}$

Cet écart de vitesse de 0,18 % est donc un écart infime.

### 11 Diagrammes de Bode

$$R(j\omega) G(j\omega) = \frac{2}{(10 j\omega + 1)(2 j\omega + 1)}$$

On obtient alors :

- module (en décibels) :  $|R(j\omega) G(j\omega)|_{dB} = 20 \lg 2 + 10 \lg (1 + 100 \omega^2) + 10 \lg (1 + 4 \omega^2)$
- argument (en radians) :  $\text{Arg} [R(j\omega) G(j\omega)] = -\arctan (10\omega) - \arctan (2\omega)$

Les diagrammes de Bode sont représentés figures 6.28 a et b.

Le dénominateur de la fonction de transfert  $R(p) G(p)$  est de degré 2 et de classe 0 : le système déphase au maximum de  $-180^\circ$  et est bien entendu toujours stable. On peut aussi dire que la marge de gain est infinie.

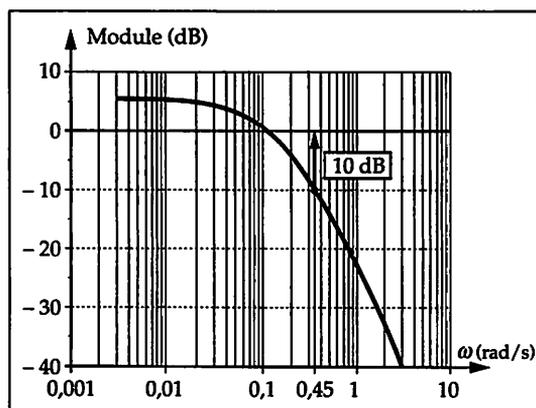


Figure 6.28 a

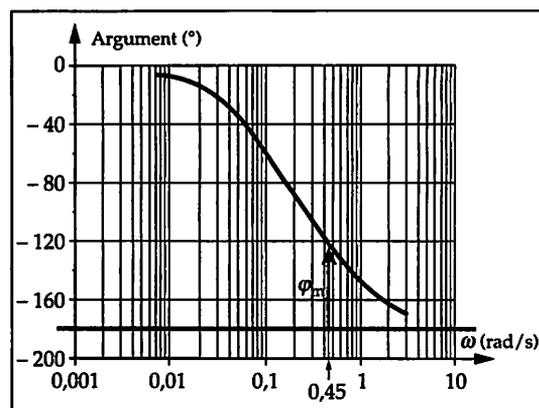


Figure 6.28 b

## 12 Valeur du gain

On ne peut fixer aucune valeur de gain  $G_r$  pour une marge de gain de 12 décibels puisque la marge de gain est infinie et cela quelle que soit la valeur du régulateur.

Imposer une marge de phase  $\varphi_m$ , c'est trouver la phase qui correspond à  $-180^\circ + \varphi_m$  (fig. 6.28) et cela pour un module unitaire (ou 0 dB). À cet effet, on calcule la phase  $\varphi$ , soit  $\varphi = -180 + \varphi_m$ .

La marge de phase  $\varphi_m$  imposée étant de  $60^\circ$ , on cherche graphiquement à obtenir une phase de  $-120^\circ$ . La phase de  $-120^\circ$  correspond à une pulsation de 0,45 rad/s et à un module de  $-10$  dB (fig. 6.28). Il faut donc traduire verticalement la courbe représentative de la fonction de transfert de 10 dB pour obtenir un module de 0 dB.

Pour obtenir  $\varphi_m = 60^\circ$ , le gain du régulateur est donc :  $G_r = 10^{(10/20)} \Rightarrow G_r = 3,2$

## Problème 3

### 1 Expression de la mesure $X(p)$ en fonction de $\Delta P(p)$ et de $W(p)$

On utilise le théorème de superposition :

$$X(p) = \frac{P(p)H(p)}{1 + C(p)V(p)H(p)} \Delta P(p) + \frac{C(p)V(p)H(p)}{1 + C(p)V(p)H(p)} W(p) \text{ avec } V(p) = 1 \text{ car } \tau \ll \theta$$

### 2 Évolution de $X(p)$ lors d'un échelon de $\Delta P(p)$

Pas de changement de consigne  $W$ , donc  $W(p) = 0$

$$X(p) = \frac{\alpha}{p} \frac{\frac{K_s}{Tp+1} \frac{G_s}{\theta p+1}}{1 + \frac{K_i}{p}} \Rightarrow X(p) = \frac{\alpha K_s G_s}{K_i (Tp+1)(\theta p+1) \left( \frac{1}{K_i} p + 1 \right)}$$

### 3 Évolution de $X(t)$

$$X(t) = X_0 + \frac{\alpha K_s G_s}{K_i} [A e^{-t/T} + B e^{-t/\theta} + C e^{-t/K_i}]$$

avec :

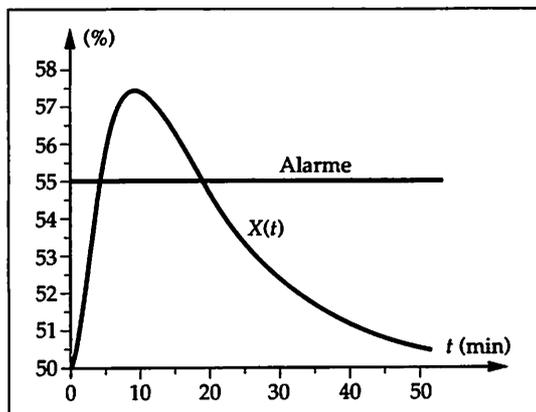


Figure 6.29

$$A = \frac{T}{(T - \theta) \left( T - \frac{1}{K_i} \right)} = 0,083$$

$$B = \frac{\theta}{(\theta - T) \left( \theta - \frac{1}{K_i} \right)} = 0,117$$

$$\text{et } C = \frac{\frac{1}{K_i}}{\left( \frac{1}{K_i} - T \right) \left( \frac{1}{K_i} - \theta \right)} = -0,200$$

$$\text{soit : } X(t) = 0,5 + 1,8 [0,083 e^{-t/2} + 0,117 e^{-t/14} - 0,2 e^{-0,25t}]$$

La réponse  $X(t)$  est représentée figure 6.29.

#### 4 Oscillations amorties provoquées par $K_i$

$K_i$  et la constante de temps  $1/K_i$  évoluent en sens contraires. Le système comporte toujours trois constantes de temps distinctes dont les racines sont réelles négatives. Le système évolue donc toujours sans oscillations.

#### 5 Écart en régime permanent

$\varepsilon = W - X$  donc en variation  $\varepsilon(t) = -x(t)$ . On constate sur le graphe tracé (fig. 6.29) que cet écart est nul en régime établi.

#### 6 Alarme

En annulant la dérivée de  $x(t)$  ou de  $\varepsilon(t)$ , on peut obtenir la valeur du temps pour le maximum de  $\varepsilon(t)$ , soit :  $x'(t) = \frac{\alpha K_s G_s}{K_i} \left( \frac{-A}{T} e^{-t/T} - \frac{B}{\theta} e^{-t/\theta} - K_i C e^{-t K_i} \right) = 0$

Cette équation non algébrique ne peut se résoudre que par calcul itératif.

Le temps du maximum de  $\varepsilon(t)$  est donc simplement mesuré graphiquement, soit  $t_M = 9,6$  min.

Il suffit de remplacer cette valeur dans  $\varepsilon(t)$  pour obtenir  $\varepsilon_M$ , soit  $\varepsilon_M = -0,0754 = -7,54$  %. En effet, l'alarme basse est déclenchée : si  $\Delta P$  fluctue souvent, cela peut compromettre le fonctionnement de l'échangeur thermique.

#### 7 Minimisation des effets de la pression différentielle

Un positionneur installé sur la vanne permettrait d'annuler ou de minimiser les effets néfastes des perturbations dues à la différence de pression  $\Delta P$  (voir complément dans le problème 2 du chapitre 7 – Boucles imbriquées ou boucles particulières).

## Problème 4

#### 1 Identification par la méthode de Broïda

On cherche les temps  $t_1$  à  $0,28\Delta X$  et  $t_2$  à  $0,40\Delta X$  (fig. 6.30).

On mesure :  $\Delta X = 55\% - 40\% = 15\%$ ;  $t_1 = 1,7$  s;  $t_2 = 2,1$  s;  $\theta = 5,5(t_2 - t_1) = 2,2$  s;

$$\tau = 2,8 t_1 - 1,8 t_2 = 0,98 \text{ s}; \quad G_s = \frac{\Delta X}{\Delta Y} = 1$$

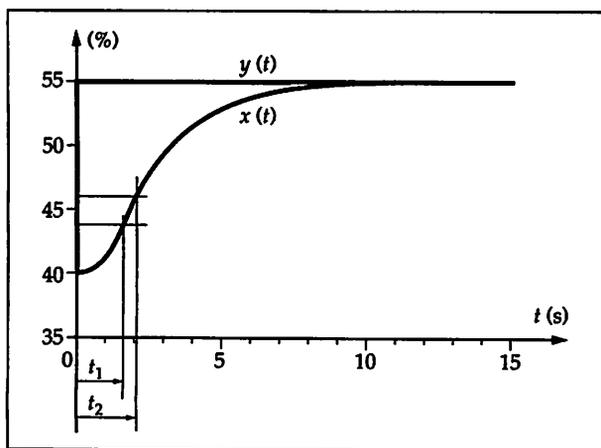


Figure 6.30

Le gain statique vaut 1 dans cette zone de fonctionnement car la variation d'ouverture de vanne (en %) correspond exactement à la variation du débit (en %) : ce n'est évidemment pas toujours le cas. Cela dépend de la caractéristique de la vanne et de l'étendue de mesure du débitmètre.

Ce procédé est naturellement stable car à une entrée bornée ( $\Delta Y$ ) correspond une sortie bornée ( $\Delta X$ ), ou encore, plus pratiquement, à une augmentation d'ouverture de vanne de 15 % correspond une augmentation du débit de 15 %. Si la variation de débit avait été de 20 %, le système serait aussi, bien sûr, naturellement stable !

En arrondissant  $\tau$  à 1 s, on obtient :  $H(p) = \frac{e^{-p}}{2,2p+1}$

## 2 Courbe de Nyquist (fig. 6.31)

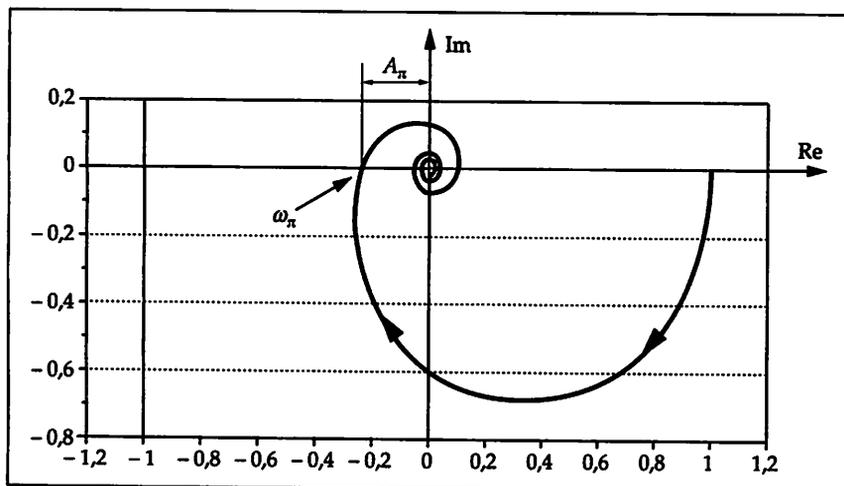


Figure 6.31

Pour tracer la courbe de Nyquist de  $H(p)$ , il suffit de calculer le module et l'argument, soit :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2,2^2 \omega^2 + 1}}$$

et  $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\tau\omega - \arctan(2,2\omega)$

La marge de gain est :

$$G_m = 20 \lg(1/A_\pi) \Rightarrow G_m = 12 \text{ dB}$$

à une pulsation  $\omega_\pi = 1,8 \text{ rad/s}$ .

## 3 Valeur de $G_r$

On note  $A(j\omega) = G_r H(j\omega)$  et on désire imposer  $A_m = 10^{(8/20)} = 2,5$  ; soit  $A_\pi = 1/A_m = 0,4$

$$|A(j\omega_\pi)| = \frac{G_s}{\sqrt{4,84 \omega_\pi^2 + 1}} = 0,4 \text{ et } \text{Arg}(A(j\omega_\pi)) = -\tau\omega_\pi - \arctan(2,2\omega_\pi) = -\pi$$

On trouve  $\omega_\pi = 2,285 \text{ rad/s}$  par défaut et donc :  $G_r = 2,05$

$G_r$  ne peut pas être très élevé, même si  $G_s$  est faible. En effet, la valeur du temps mort  $\theta$  est relativement importante par rapport à la constante de temps  $\theta$ .

## 4 Écart statique

Pour un échelon de consigne  $W(p) = a/p$ , on obtient :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \frac{a}{p} \frac{1}{1 + A(p)} \right) = \frac{a}{1 + 2,05} \Rightarrow \varepsilon_s = 0,32a$$

$\varepsilon_s$  (relatif) = 32 % donc cet écart est inacceptable.

## 5 ▷ Nouveau gain statique du procédé

L'étendue d'échelle (EE) du débitmètre FT est diminuée de 25 %, la sensibilité du transmetteur est donc  $\Delta X/EE = 1/0,75$  et le gain statique du système est donc multiplié par 4/3, soit  $G'_s = 1,33$

## ▷ Nouvelle marge de gain

$A_\pi = 0,4 \times 1,33 = 0,532$  donc  $A_m = 1,875$  et la nouvelle marge de gain est  $G'_m = 20 \lg(A_m)$  soit :  $G'_m = 5,46 \text{ dB}$ . L'assurance de stabilité est donc un peu moins bonne (la réponse indicelle du système est donc un peu plus oscillante).

Il faudrait diminuer le gain du régulateur de 25 %, soit  $G_r = 1,54$ , pour garder la même marge de gain  $G_m$  qu'en 5.

## 6 Réponse indicelle

$$\frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G'_s G_r (T_i p + 1) e^{-\tau p}}{T_i p (2,2 p + 1)} \cdot \frac{1}{1 + \tau p + \frac{\tau^2}{2} p^2 + \dots + \frac{\tau^n}{n!} p^n}$$

En ne gardant que le terme de premier degré, on obtient :  $e^{-\tau p} = \frac{1}{1 + \tau p}$

$$\frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G'_s G_r (T_i p + 1)}{G'_s G_r (T_i p + 1) + T_i p (\tau p + 1) (2,2 p + 1)}$$

avec  $G_r = 2$ ,  $G'_s = 1,33$ ,  $T_i = 5 \text{ s}$ ,  $\tau = 1 \text{ s}$ , et  $W(p) = 1/p$ , on obtient :

$$X(p) = \frac{5 p + 1}{p (4,135 p^3 + 6,015 p^2 + 6,880 p + 1)} \approx \frac{5 p + 1}{p (6 p + 1) (0,690 p^2 + 0,889 p + 1)}$$

À l'aide des tables de transformées inverses de Laplace, on obtient  $x(t)$  :

$$x(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[ \frac{1 - 2 a \xi \omega_n + a^2 \omega_n^2}{1 - 2 T \xi \omega_n + T^2 \omega_n^2} \right] e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \psi) + \frac{T \omega_n^2 (a - T)}{1 - 2 T \xi \omega_n + T^2 \omega_n^2} e^{-t/T}$$

$$\psi = \arctan \left( \frac{a \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - a \xi \omega_n} \right) - \arctan \left( \frac{T \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - T \xi \omega_n} \right) - \arctan \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi} \right) \text{ où } a = 6 \text{ s,}$$

$T = T_i$ ,  $\omega_n = 1,2 \text{ rad/s}$  et  $\xi = 0,533$ . Il est bien évident qu'une telle formule est difficile à interpréter. Il est préférable d'utiliser un logiciel « tableur » pour tracer cette réponse indicelle.

La réponse est ici tracée pour un changement de consigne  $W$  en échelon de 20 % (fig. 6.32). La régulation est précise car  $W = X$  au bout d'une douzaine de secondes, mais la réponse comporte un dépassement important (64 % !) qui n'est, en général, pas acceptable pour le matériel (surpression amont/aval dans l'installation). Cet à-coup s'explique mathématiquement par la forme du numérateur  $(1 + 5p)$  de  $X(p)$ .

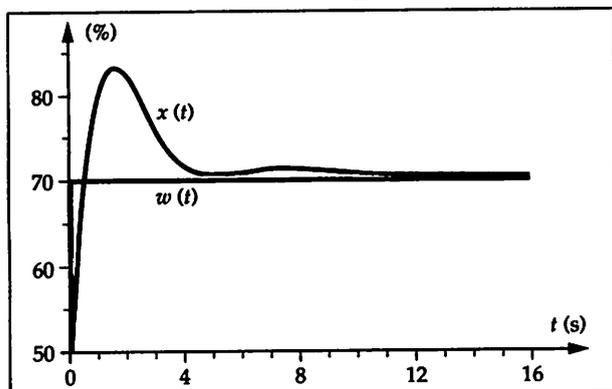


Figure 6.32

## 7 ▷ Temps mort

Si on suppose que l'augmentation de distance  $L$  parcourue à la vitesse  $V$  engendre un retard d'information  $\tau$ , alors, comme le débit volumique est donné par la relation  $Q = S V$ , on obtient :

$$\tau = \frac{L}{V} \Rightarrow \tau = \frac{5 \pi \times 0,08^2 \times 3600}{4 \times 18}, \text{ soit } \tau = 5 \text{ s}$$

Le temps mort total est donc :  $\tau' = 6 \text{ s}$  (il était de 1 s avant les modifications).

## ▷ Nouvelle marge de gain $G_m''$

En notant  $A'(j\omega) = G_r H'(j\omega)$

$$\text{Arg}(A'(j\omega)) = -6 \omega_\pi - \arctan(2,2 \omega_\pi) + \arctan(5 \omega_\pi) - \pi/2 = -\pi$$

Pour résoudre cette équation, l'informatique est conseillée. On trouve :  $\omega_\pi = 0,328 \text{ rad/s}$ .

$$|A'(j\omega_\pi)| = A'_\pi = \frac{G_r G_s' \sqrt{T_i^2 \omega_\pi^2 + 1}}{T_i \omega_\pi \sqrt{4,84 \omega_\pi^2 + 1}} \text{ et donc } A'_\pi = 2,526$$

$A'_\pi > 1$  et  $A'_m = 1/A'_\pi = 0,395$  ; on ne peut donc pas calculer la marge de gain. Le système est devenu instable. Mais une simple modification de  $G_r$  n'est pas suffisante. Le rapport  $\theta/\tau'$  est maintenant trop important pour une régulation proportionnelle et intégrale. Attention, pour un débit massique moyen (9 t/h),  $\tau' = 11 \text{ s}$  et le procédé est encore plus instable !

Si on suppose que la modélisation par la méthode de Broïda est représentative de ce procédé, il faut envisager une autre stratégie de régulation, par exemple développer un algorithme numérique à placement des pôles.

## Problème 5

### 1 Identification du procédé

#### ▷ Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système du premier ordre avec temps mort à un échelon d'amplitude  $A$  s'écrit :

$$x(t) = A G_s (1 - e^{-t/\theta}) u(t - \tau) \quad \text{ou} \quad \dot{x}(t) = A G_s (1 - e^{-(t-\tau)/\theta}) u(t) \quad \text{où } u(t) \text{ est la fonction échelon d'amplitude unitaire.}$$

#### ▷ Méthode de De La Fuente

Les deux équations initiales sont écrites à partir de l'équation établie ci-dessus.

$$0,27 A G_s = A G_s (1 - e^{-(t_1 - \tau)/\theta}); \quad 0,73 A G_s = A G_s (1 - e^{-(t_2 - \tau)/\theta})$$

On observe que  $\theta$  et  $\tau$  ne dépendent ni de la valeur  $A$  de l'échelon, ni de la valeur de  $G_s$  tant que le domaine d'étude est linéaire, c'est-à-dire, soit en théorie des asservissements linéaires, soit en pratique pour de petites variations autour d'un point de fonctionnement.

$$\ln 0,27 = -(t_1 - \tau)/\theta, \text{ soit } 0,313 \theta = t_1 - \tau; \quad \ln 0,73 = -(t_2 - \tau)/\theta, \text{ soit } 1,313 \theta = t_2 - \tau$$

$$\text{On obtient donc finalement : } \theta = (t_2 - t_1) \quad \tau = 1,31 t_1 - 0,31 t_2$$

#### ▷ Détermination de $G_s$ , $\theta$ et $\tau$

Sur l'enregistrement fourni, on mesure les temps  $t_1$  et  $t_2$  :

$$t_1 = 6,19 \text{ min et } t_2 = 14,13 \text{ min.}$$

On calcule  $\theta = (t_2 - t_1) \Rightarrow \theta = 7,94 \text{ min}$  et  $\tau = 1,31 t_1 - 0,31 t_2 \Rightarrow \tau = 3,73 \text{ min}$

$\Delta M = M \text{ finale} - M \text{ initiale} = (85 - 55) \% = 30 \%$ , donc  $G_s = \frac{\Delta M}{\Delta Y} = 2$

On trouve alors :  $T(p) = \frac{2 e^{-3,73 p}}{7,94 p + 1}$

## 2 Identification du convertisseur bas niveau U/I

### ▷ Sensibilité $S_c$ du convertisseur

La sensibilité est calculée dans le domaine linéaire :

$$S_c = \frac{\Delta I}{\Delta U} \Rightarrow S_c = \frac{20,00 - 12,00}{4 \cdot 287 - 2 \cdot 100} \Rightarrow S_c = 3,66 \mu\text{A}/\mu\text{V}$$

### ▷ Fonction de transfert du convertisseur

Le graphe de l'intensité  $I$  du courant en fonction du temps est représenté figure 6.33.

Le rapport  $AB/AC = 0,364$  au lieu de  $0,368$  pour une fonction de transfert du premier ordre. On peut donc assimiler la fonction de transfert de ce convertisseur à :

$$C_0(p) = \frac{S_c}{\theta_c p + 1} \text{ avec } \theta_c = 18 \text{ s}$$

$\theta_c$  est le temps mis pour aller de 0 au point A.

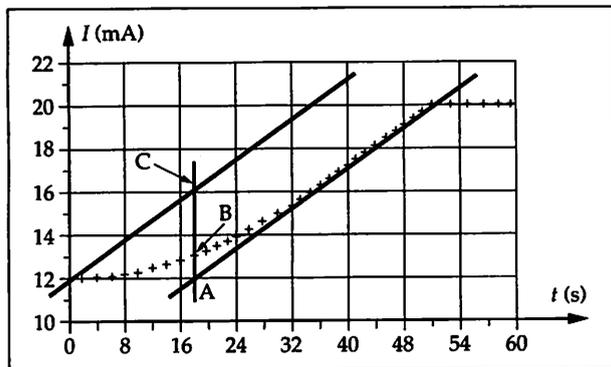


Figure 6.33

Cette constante de temps est relativement importante devant la constante de temps du procédé, mais cela permet de filtrer certains bruits parasites.

En exprimant  $U$  et  $I$  sous la forme de pourcentages, on obtient :  $C_0(p) = \frac{1}{\theta_c p + 1}$

## 3 Fonction de transfert du procédé

### ▷ Module et argument de $H(j\omega)$

La fonction de transfert à étudier est :  $H(p) = \frac{2 e^{-4 p}}{(8 p + 1)(0,3 p + 1)}$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 6,02 + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + 0,09 \omega^2}} + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + 64 \omega^2}}$$

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -4\omega - \arctan(0,3\omega) - \arctan(8\omega)$$

### ▷ Courbe de $H(j\omega)$ dans l'abaque de Black (courbe 1, fig. 6.34)

Pour  $|H(j\omega)| = 0 \text{ dB}$ , on mesure sur la courbe 1 la pulsation  $\omega_{0 \text{ dB}} = 0,21 \text{ rad/min}$  et la phase à cette pulsation  $\varphi_{0 \text{ dB}} = -113^\circ$ .

On mesure directement : **marge de gain  $\approx 5,2$  dB** , **marge de phase  $\approx 67^\circ$** .

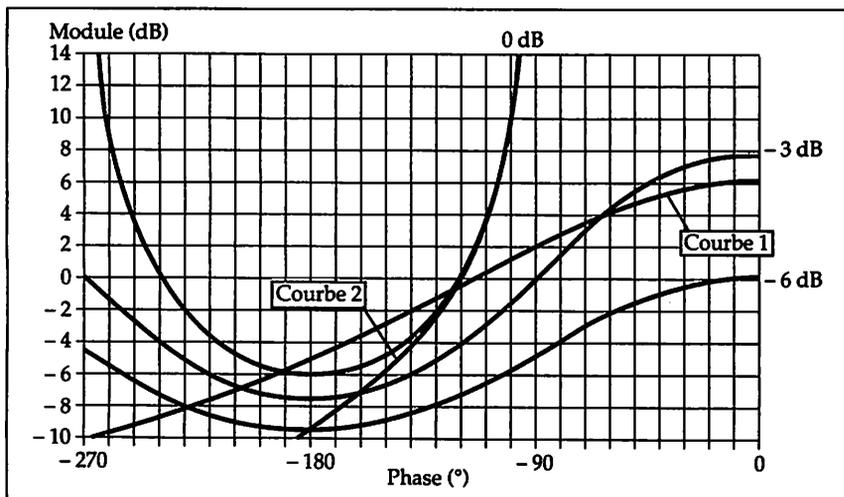


Figure 6.34

Comme la marge de gain est faible, le gain du régulateur ne pourra pas être élevé (voir valeur de  $G_r$  fixée en 5) afin de ne pas déstabiliser le système ou d'obtenir un dépassement trop important lors d'une réponse indicielle. Pulsation mesurée en chaîne fermée à  $-6$  dB :  $\omega = 0,6$  rad/min, soit une fréquence  $1,6 \times 10^{-3}$  Hz.

La bande passante en chaîne fermée à  $-6$  dB est donc :  
 **$[0 ; 1,6 \times 10^{-3}$  Hz]**

#### 4 Fonction de transfert du régulateur TIC

$$Y(p) = \mathcal{L} \left[ \frac{\varepsilon(t)}{B_p} + \frac{1}{T_i B_p} \int_0^t \varepsilon(t) dt + \frac{T_d}{B_p} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0 \right] \text{ soit : } Y(p) = \frac{\varepsilon(p)}{B_p} + \frac{\varepsilon(p)}{B_p T_i p} + \frac{T_d}{B_p} p \varepsilon(p)$$

Ce régulateur est de structure mixte :  $R(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{B_p} \left[ 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right]$

#### 5 Courbe de $G(j\omega)$ dans l'abaque de Black

Puisque  $T_d = 0$ , on obtient :  $R(p) = \frac{1}{B_p} \frac{T_i p + 1}{T_i p}$

On en déduit :

- la fonction de transfert en chaîne ouverte  $G(p) = R(p) H(p)$ , soit :  $G(p) = \frac{e^{-4p}}{8p(0,3p + 1)}$
- le module en décibels :  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + 0,09 \omega^2}} + 20 \lg \frac{1}{8\omega}$
- l'argument en radians :  $\text{Arg}(G(j\omega)) = -4\omega - (\pi/2) - \arctan(0,3\omega)$

La courbe de  $G(j\omega)$  dans l'abaque de Black est représentée par la courbe 2 (fig. 6.34).

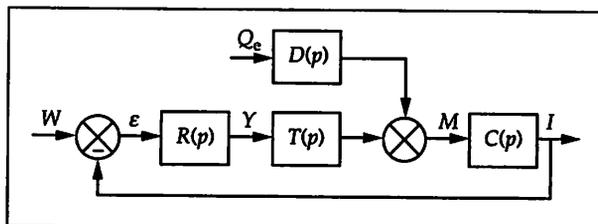
#### ▷ Mesures

On mesure sur cette courbe 2 :

la pulsation  $\omega_{0dB} \approx 0,13$  rad/min, **marge de gain  $\approx 9,4$  dB**, **marge de phase  $\approx 60^\circ$**

le facteur de résonance  $Q \approx 0$  dB à la pulsation de résonance  $\omega_r \approx 0,08$  rad/min

#### 6 Étude de l'influence de l'alimentation en eau sur la température



▷ Schéma fonctionnel de la régulation de température avec la perturbation  $Q_e$  (fig. 6.35)

Figure 6.35

▷ **Écart  $\varepsilon$**

À partir du schéma fonctionnel de la figure 6.35, on exprime directement l'écart  $\varepsilon(p)$

en fonction de la grandeur perturbatrice  $Q_e(p)$  :

$$\frac{\varepsilon(p)}{Q_e(p)} = \frac{D(p) C(p)}{1 + C(p) R(p) T(p)}$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{Q_e(p)} = \frac{\frac{G_n}{(0,3p+1)(Tp+1)}}{1 + \frac{G_r(T_i p+1)}{T_i p} \frac{e^{-4p}}{(8p+1)(0,3p+1)}}$$

Pour  $T_i = 8$  min, on obtient :  $\varepsilon(p) = \frac{8 G_n p}{2 G_r + 8p(0,3p+1)(Tp+1)(4p+1)} Q_e(p)$

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{0,2}{p} \frac{8 G_n p}{2 G_r + 8p(0,3p+1)(Tp+1)(4p+1)} \right] \Rightarrow \varepsilon = 0$$

L'écart est nul, donc la mesure revient bien à la consigne après une perturbation en échelon de  $Q_e$ .

▷ **Réponse  $I(t)$  à un échelon  $Q_e(t)$**

$$I(p) = \frac{D(p) C(p)}{1 + C(p) R(p) T(p)} Q_e(p) = \frac{0,2}{p} \frac{8 \times 2,5p}{2 G_r (4p+1) e^{-4p} + 8p(0,3p+1)(4p+1)}$$

En admettant que  $e^{-4p} \approx \frac{1}{4p+1}$ , on obtient  $I(p) = \frac{1}{2,4p^3 + 8,6p^2 + 2p + 1}$

Le dénominateur possède un pôle que l'on peut trouver avec un programme informatique, soit  $p = -3,37$ .

On obtient alors :  $I(p) = \frac{1}{(0,29p+1)(8,08p^2+1,72p+1)}$

dont le second ordre est caractérisé par :  $\omega_n = 0,35$  rad/min,  $\xi = 0,3$

$$I(t) = 0,5 + \frac{\omega_n e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \psi)}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-2T\xi\omega_n + T^2\omega_n^2)}} + \frac{T \omega_n^2 e^{-t/T}}{1-2T\xi\omega_n + T^2\omega_n^2}$$

$$\psi = \arctan \left( \frac{T \omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{1-T\xi\omega_n} \right) \text{ avec } T = 4 \text{ min}$$

La réponse  $I(t)$  à un échelon  $Q_e(t)$  est représentée figure 6.36.

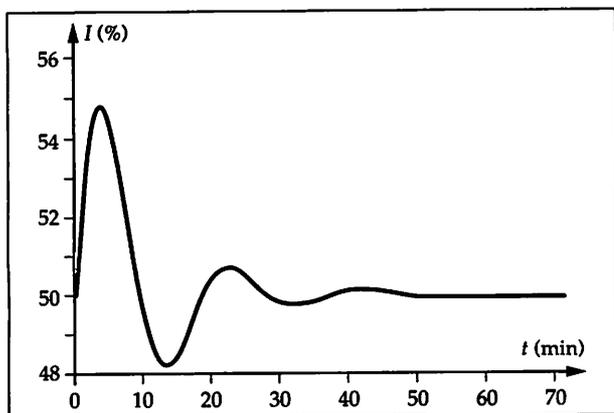


Figure 6.36

Une quinzaine de minutes est nécessaire pour que la température, représentée ici par l'intensité  $I$  du courant, revienne à moins de 1 % de sa valeur initiale. Lorsque la température est inférieure à la température de consigne, les gaz (gaz carbonique et oxygène) sont davantage solubles et ne sont donc plus évacués par la vapeur vers l'évent, mais se dirigent vers l'alimentation de la chaudière. Une régulation de tendance serait envisageable pour amoindrir l'effet de cette perturbation, puisque l'information de la variation du débit  $Q_e$  serait prise en compte pour l'élaboration de la commande de la vanne de vapeur.

## 7 Étude de la régulation du niveau

▷ Implantation de la boucle de régulation du niveau (fig. 6.37)

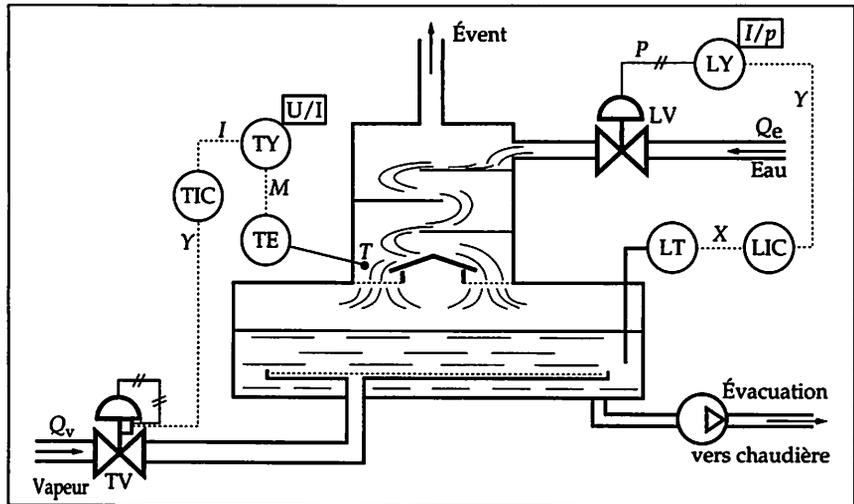


Figure 6.37

▷ Schéma fonctionnel de la boucle de régulation du niveau (fig. 6.38)

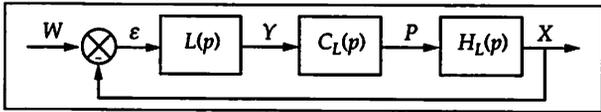


Figure 6.38

▷ Fonction de transfert du régulateur LIC

À partir du schéma de la figure 6.38, on exprime :

- la fonction de transfert en chaîne fermée que l'on a :  $\frac{X(p)}{W(p)} = \frac{L(p) C_L(p) H_L(p)}{1 + L(p) C_L(p) H_L(p)}$

- la fonction de transfert en chaîne fermée que l'on veut imposer :  $\frac{X(p)}{W(p)} = F_L(p)$

L'égalité de ces deux fonctions de transfert permet d'obtenir la fonction de transfert  $L(p)$  :

$$L(p) = \frac{F_L(p)}{C_L(p) H_L(p) [1 - F_L(p)]} \text{ et puisque } C_L(p) = 1 \Rightarrow L(p) = \frac{1}{\frac{k}{p} \left[ 1 - \frac{1}{(\theta_L p + 1)} \right]}$$

On obtient finalement :  $L(p) = \frac{1}{k \theta_L}$

L'application numérique donne :  $L(p) = \frac{1}{0,35 \times 2} = 1,43$

Cette fonction de transfert est celle d'un régulateur à action proportionnelle.

## Problème 6

### 1 Identification

#### ▷ Identification de $H_r(p)$ par la méthode de Strejc

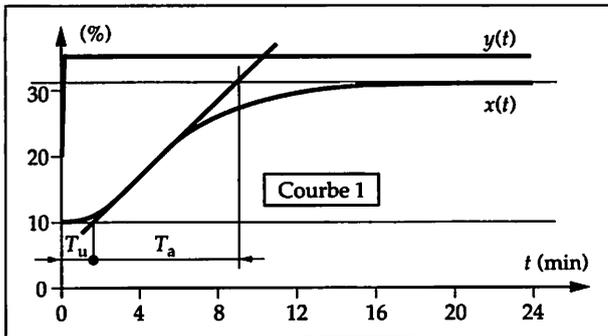


Figure 6.39

Après avoir tracé la tangente et les asymptotes nécessaires (fig. 6.39), les temps mesurés sont :  $T_u = 1,61$  min et  $T_a = 7,42$  min.  $T_u/T_a = 0,217$ , ce qui donne  $n = 3$  et  $T = 2$  min.

Le gain statique est :

$$G_s = \Delta X / \Delta Y = (31 - 10) / (35 - 20) = 1,4$$

On obtient alors : 
$$H_r(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{1,4}{(2p + 1)^3}$$

Les valeurs des temps  $T_u$  et  $T_a$  dépendent du tracé de la tangente et, comme pour toute résolution graphique, il est naturel d'observer quelques disparités. Aussi les valeurs données peuvent-elles être différentes de celles qui ont été relevées (cependant la fonction de transfert ne devrait pas être très éloignée de celle proposée).

#### ▷ Identification de $D(p)$ par la méthode de Strejc

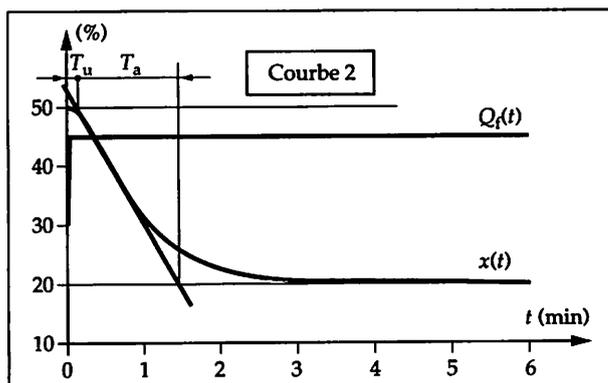


Figure 6.40

On mesure (même remarque que ci-dessus sur la courbe 2 fig. 6.40) :  $T_u = 0,15$  min et  $T_a = 1,35$  min.  $T_u/T_a = 0,11$ , ce qui donne  $n = 2$  et  $\theta = 0,5$  min.

Le gain statique est :

$$G_s = \Delta X / \Delta Q_f = (20 - 50) / (45 - 30) = -2$$

On obtient alors : 
$$D(p) = \frac{X(p)}{Q_f(p)} = \frac{-2}{(0,5p + 1)^2}$$

#### ▷ Schéma fonctionnel

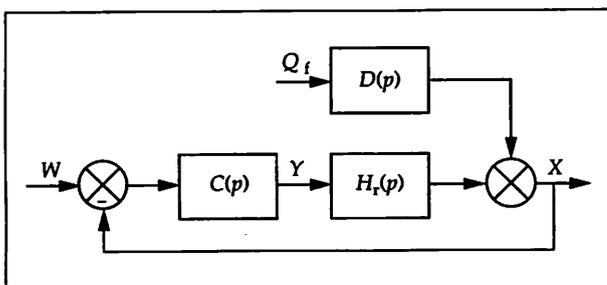


Figure 6.41

Le schéma-bloc se présente sous une forme classique (fig. 6.41).

## 2 Performances

### ▷ Critère de réglage de Naslin

On calcule la fonction de transfert en chaîne fermée  $F(p)$ , soit :

$$F(p) = \frac{G_s \left( G_r + \frac{K_i}{p} + T_d p \right)}{(T p + 1)^3 + G_s \left( G_r + \frac{K_i}{p} + T_d p \right)} = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Dén}(p)}$$

$$\text{Dén}(p) = (G_s K_i / p) + (G_s G_r + 1) + (3 T + T_p G_s) p + 3 T^2 p^2 + T p^3$$

Les rapports caractéristiques de Naslin sont :

$$\alpha_3 = \frac{(3 T^2)^2}{(3 T + T_d G_s) T^3} ; \quad \alpha_2 = \frac{(3 T + T_d G_s)^2}{(G_s G_r + 1) 3 T^2} ; \quad \alpha_1 = \frac{(G_s G_r + 1)^2}{G_s K_i (3 T + T_d G_s)}$$

avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ .

Pour obtenir un premier dépassement  $D_1$  de 20 %, on utilise la formule empirique :  $\lg D_1 = 4,8 - 2\alpha$ , soit  $\alpha = 1,75$ . On trouve :

- à l'aide de  $\alpha_3$  :  $T_d = \frac{1}{G_s} \left( \frac{9 T}{\alpha_3} - 3 T \right) = 3,06 \text{ min}$  ;

- à partir de  $\alpha_2$  :  $G_r = \frac{1}{G_s} \left( \frac{(3 T + T_d G_s)^2}{3 T^2 \alpha_2} - 1 \right) = 2,89$  ;

- au moyen de  $\alpha_1$  :  $K_i = \frac{(G_s G_r + 1)^2}{\alpha_1 G_s (3 T + T_d G_s)} = 1,01 \text{ min}^{-1}$ .

Cependant le dépassement réel sera plus important que celui désiré (49,9 %), car le numérateur de la fonction de transfert en chaîne fermée n'est pas une constante. Il faut calculer un nouvel  $\alpha_e$  ( $\alpha$  équivalent) donné par la relation :

$$\alpha_e = 1,5 + \frac{1}{16 \xi^3} \frac{\omega_n'^2}{\omega_n^2} (\alpha - 1,5) \text{ avec } \xi' = 0,5 \sqrt{\frac{G_r^2}{K_i T_d}}, \omega_n' = \frac{K_i}{G_r} \text{ et } \omega_n = \frac{G_s K_i}{G_s G_r + 1}$$

On incrémente  $\alpha$  jusqu'à trouver une valeur  $\alpha_e$  convenant comme dans l'exercice 5 du chapitre 5 – Réglage. On trouve  $\alpha_e = 2,21$  ; et les valeurs recalculées pour obtenir  $D_1 = 20 \%$  sont alors :

$$T_d = 1,5 \text{ min} ; G_r = 1,1 \text{ et } K_i = 0,25 \text{ min}^{-1}$$

### ▷ Évolution de $G_r$ , $K_i$ et $T_d$ pour $D_1 = 10 \%$

Les formules de  $G_r$ ,  $K_i$  et  $T_d$  sont évidemment les mêmes. Il suffit de changer la valeur de  $\alpha$ , soit  $\alpha = 1,90$ . Les valeurs calculées pour obtenir  $D_1 = 10 \%$  sont alors :

$$T_d = 2,48 \text{ min} ; G_r = 2,1 \text{ et } K_i = 0,615 \text{ min}^{-1}$$

Mais le dépassement réel est de 41,9 % car le numérateur n'est pas une constante. Il faut encore corriger les résultats comme à la question précédente, ce qui conduit à :

$$T_d = 1,24 \text{ min} ; G_r = 0,82 \text{ et } K_i = 0,18 \text{ min}^{-1}$$

### ▷ Allure de $x(t)$ lors d'un échelon du débit $Q_f$

Pour trouver l'allure de  $x(t)$  suite à un échelon du débit  $Q_f(t)$ , quelques simplifications sont utiles :

- $D(p)$  est assimilée à un premier ordre de constante de temps  $T' = 1 \text{ min}$ , la courbe de réponse temporelle n'est alors pas très déformée par cette approximation :

$$D(p) = \frac{-G_d}{(\theta p + 1)^2} \approx \frac{-G_d}{T' p + 1}$$

- la fonction de transfert réglante en chaîne fermée, avec les valeurs de  $G_r$ ,  $T_d$  et  $K_i$  calculées ci-dessus, est proche d'une fonction du second ordre telle que :

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p) H_r(p)}{1 + C(p) H_r(p)} = \frac{1}{\frac{1}{C(p) H_r(p)} + 1} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec  $\xi = 0,59$  ( $D_1 = 10\%$ ) et  $\omega_n = 0,101$  rad/min.

On peut donc écrire :  $C(p) H_r(p) = \frac{\omega_n}{2\xi p \left(1 + \frac{p}{2\xi \omega_n}\right)}$

On exprime la fonction de transfert suivante :  $\frac{X(p)}{Q_f(p)} = \frac{D(p)}{1 + C(p) H_r(p)}$

$$\frac{X(p)}{Q_f(p)} = \frac{\frac{-G_d}{T' p + 1}}{1 + \frac{\omega_n}{2\xi p} \frac{1}{1 + \frac{p}{2\xi \omega_n}}} \Rightarrow \frac{X(p)}{Q_f(p)} = \frac{-G_d}{T' p + 1} \frac{2\xi p \left(1 + \frac{p}{2\xi \omega_n}\right)}{\omega_n + 2\xi p \left(1 + \frac{p}{2\xi \omega_n}\right)}$$

Pour  $Q_f(p) = 0,2/p$  on obtient :

$$X(p) = \frac{-0,2 G_d}{\omega_n (p+1)} \frac{2\xi (1 + 8,4 p)}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \Rightarrow X(p) = \frac{-4,67 (1 + 8,4 p)}{(p+1)(1 + 11,68 p + 98,03 p^2)}$$

ce qui se traduit par :

$$X(p) = 0,5 + 4,67 \left[ \frac{(T - \theta) \omega_n^2 e^{-t/T}}{1 - 2 T \xi \omega_n + T^2 \omega_n^2} + \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{1 - 2 \theta \xi \omega_n + \theta^2 \omega_n^2}{1 - 2 T \xi \omega_n + T^2 \omega_n^2}} \frac{\omega_n e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_p t + \psi) \right]$$

avec  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  et

$$\psi = \arctan \left[ \frac{\theta \omega_p}{1 - \theta \xi \omega_n} \right] - \arctan \left[ \frac{T \omega_p}{1 - T \xi \omega_n} \right]$$

La réponse  $X(t)$  est représentée figure 6.42.

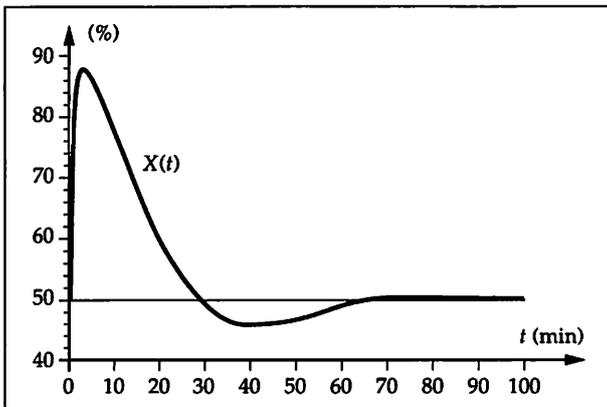


Figure 6.42

La régulation obtenue est médiocre. En effet, suite à une perturbation du débit  $Q_f$  de 20 % (ce qui n'est pas une valeur importante), la température s'élève beaucoup (de plus de 36 %) et ne revient à sa valeur initiale qu'après 60 minutes. La réponse dynamique en asservissement est pourtant satisfaisante (dépassement de 10 %).

## 3 Régulation numérique

### ▷ Schéma fonctionnel de la régulation numérique (fig. 6.43)

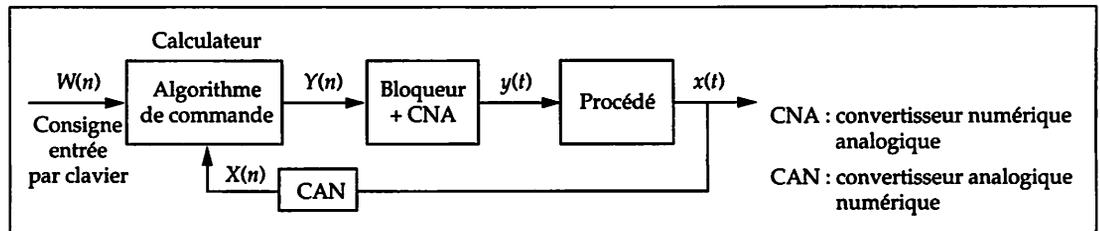


Figure 6.43

### ▷ Équation récurrente de la commande numérique

$$R(p) = \frac{Y(p)}{X(p) - W(p)} = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r + \frac{K_i}{p} + T_d p$$

À partir de  $p Y(p) = G_r p \varepsilon(p) + K_i \varepsilon(p) + T_d p^2 \varepsilon(p)$ , on obtient :

$$\frac{Y_n - Y_{n-1}}{T_e} = G_r \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{T_e} + K_i \varepsilon_n + T_d \frac{\varepsilon_n - 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}}{T_e^2}$$

L'équation récurrente de la commande numérique est donc :

$$Y_n = Y_{n-1} + \left( G_r + K_i T_e + \frac{T_d}{T_e} \right) \varepsilon_n + \left( -G_r - 2\frac{T_d}{T_e} \right) \varepsilon_{n-1} + \frac{T_d}{T_e} \varepsilon_{n-2}$$

## Problème 7

### 1 Diagrammes de Bode de $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$

La comparaison entre les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  est surtout valable si les deux fonctions  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  sont voisines. L'hypothèse  $k = G_s/T$  est donc une base de comparaison satisfaisante.

Les diagrammes de Bode de  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$  sont représentés figures 6.44 a et b. L'allure générale de chaque fonction de transfert ne dépend pas des valeurs numériques.

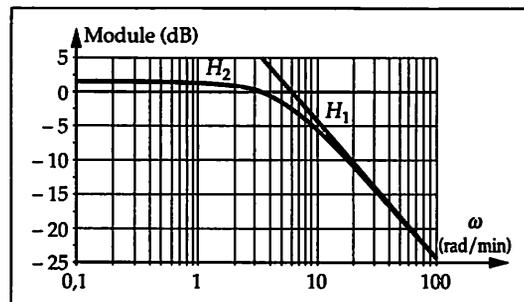


Figure 6.44 a

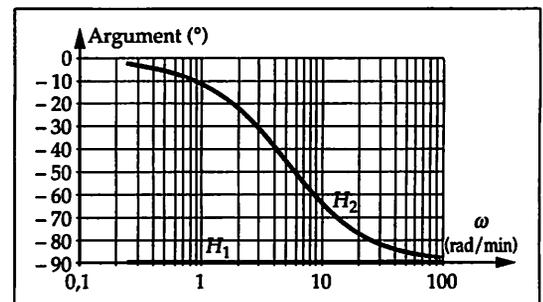


Figure 6.44 b

Pour  $\omega > 10k$ , on remarque que les fonctions de transfert  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$  ont le même comportement en module et en argument.

## 2 Fonction de transfert en chaîne fermée $F_1(p)$

La fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{k}{p}$  mise en série avec  $C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  donne :

$$F_1(p) = \frac{k G_r \frac{T_i p + 1}{T_i p^2}}{k G_r \frac{T_i p + 1}{T_i p^2} + 1} \Rightarrow F_1(p) = \frac{T_i p + 1}{\frac{T_i}{k G_r} p^2 + T_i p + 1}$$

C'est une fonction de transfert du deuxième ordre de coefficient d'amortissement

$$\xi_1 = 0,5 \sqrt{T_i k G_r} \text{ et de pulsation propre non amortie } \omega_{n1} = \sqrt{\frac{k G_r}{T_i}}.$$

## 3 Fonction de transfert en chaîne fermée $F_2(p)$

La fonction de transfert  $H_2(p) = \frac{G_s}{T p + 1}$  mise en série avec  $C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  donne :

$$F_2(p) = \frac{G_s G_r \frac{T_i p + 1}{(T p + 1) T_i p}}{G_s G_r \frac{T_i p + 1}{(T p + 1) T_i p} + 1} \Rightarrow F_2(p) = \frac{T_i p + 1}{\frac{T T_i}{G_s G_r} p^2 + T_i \left(\frac{1 + G_s G_r}{G_s G_r}\right) p + 1}$$

C'est une fonction de transfert du deuxième ordre de coefficient d'amortissement

$$\xi_2 = 0,5 (G_s G_r + 1) \sqrt{\frac{T_i}{T G_s G_r}} \text{ et de pulsation propre non amortie } \omega_{n2} = \sqrt{\frac{G_s G_r}{T T_i}}.$$

## 4 Comparaison de $F_1(p)$ et de $F_2(p)$

En identifiant terme à terme  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$ , seul le terme en  $p$  du dénominateur est différent. Ces deux fonctions de transfert sont identiques si  $G_s G_r \gg 1$ , c'est-à-dire si le gain du régulateur est élevé. Or, en théorie,  $G_r$  peut être aussi grand que l'on veut puisqu'il n'y a aucun problème de stabilité, le dénominateur étant du deuxième ordre. Attention cependant à la saturation de l'organe réglant ! Un gain  $G_r = 10$  paraît raisonnable. Le coefficient  $\xi_2$  sera toujours plus grand que  $\xi_1$ , la différence étant d'autant plus petite que  $G_r$  est grand.

## Problème 8

### 1 Identification

#### ▷ Allure de la réponse temporelle du modèle proposé

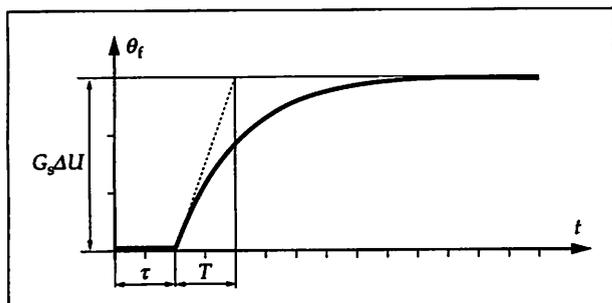


Figure 6.45

Lorsque  $U(p)$  est un échelon d'amplitude  $\Delta U$ , la transformée de Laplace de  $\theta_f(p)$  est :

$$\theta_f(t) = G_s (1 - e^{-(t-\tau)/T}) \Delta U$$

avec  $G_s$  : gain statique ;  $\tau$  : temps mort ou retard pur ;  $T$  : constante de temps du premier ordre. L'allure de la réponse temporelle est donnée à la figure 6.45.

## ▷ Justification du modèle

La courbe observée possède un point d'inflexion (fig. 6.21, problème 8). Ce procédé peut donc être représenté par un système d'ordre égal ou supérieur à 2. La température se stabilise en régime permanent pour une variation en échelon de la commande : ce procédé est autoréglant. Le point d'inflexion est situé très bas ; il est donc difficile d'utiliser la méthode de Strejc ou toute autre méthode nécessitant le tracé de la tangente au point d'inflexion. Pour un four, la représentation par le modèle de Bröida est couramment utilisée pour tenir compte de l'inertie réelle.

Autres méthodes habituelles : La Fuente, modélisation par deux constantes de temps différentes (système du deuxième ordre dont le coefficient d'amortissement réduit est supérieur à 1), Strejc-Davoust, Ziegler et Nichols (en chaîne ouverte), Cohen et Coon. Cette liste n'est pas exhaustive.

## 2 Méthode de Bröida

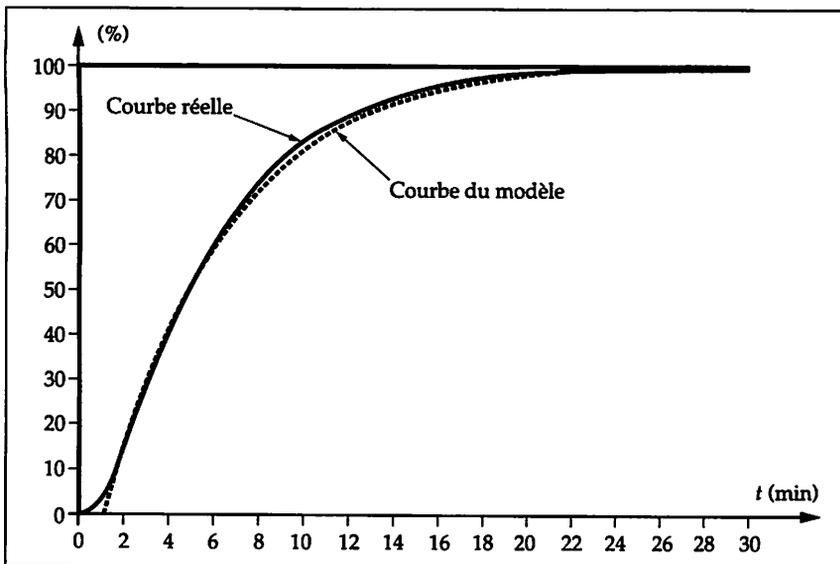
### ▷ Relations

Cette méthode consiste à modéliser un système d'ordre égal ou supérieur à 2 au moyen d'un modèle du premier ordre avec retard pur. Pour cela on mesure le temps  $t_1$  correspondant à 28 % de la variation finale de la température ( $\Delta\theta$ ) et le temps  $t_2$  correspondant à 40 % de la variation finale ( $\Delta\theta$ ), soit :

$$0,28 \Delta\theta = (1 - e^{-(t_1 - \tau)/T}) \Delta\theta \quad \text{et} \quad 0,40 \Delta\theta = (1 - e^{-(t_2 - \tau)/T}) \Delta\theta$$

À partir de ces deux équations on déduit  $T$  et  $\tau$  :  $T = 5,5 (t_2 - t_1)$  et  $\tau = 2,8 t_1 - 1,8 t_2$

### ▷ Réponse modélisée



On mesure (fig. 6.21, problème 8) :  $t_1 = 2,9$  min et  $t_2 = 3,9$  min.

On calcule :

$$T = 5,5 (t_2 - t_1) \Rightarrow \boxed{T = 5,5 \text{ min}}$$

$$\text{et } \tau = 2,8 t_1 - 1,8 t_2 \Rightarrow \boxed{\tau = 1,1 \text{ min}}$$

En traçant la réponse indicielle du modèle sur le même graphique (fig. 6.46) que la courbe réelle, on constate que les deux courbes correspondent à des modèles acceptables. La modélisation est donc validée.

Figure 6.46

## 3 Amélioration des performances

### ▷ $\theta_f(p)$ fonction de $\theta_c(p)$ et de $D(p)$

$$\theta_f(p) = \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)} \theta_c(p) \quad \text{et} \quad \theta_f(p) = \frac{H(p)}{1 + C(p)H(p)} D(p)$$

En utilisant le théorème de superposition, on obtient :

$$\theta_f(p) = \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)} \theta_c(p) + \frac{H(p)}{1 + C(p)H(p)} D(p)$$

▷ **Étude de la stabilité**

Dans l'expression de  $\theta_f(p)$ , le dénominateur de chaque terme est identique, donc l'étude de la stabilité est la même pour  $\theta_c(p)$  comme pour  $D(p)$ .

4 **Étude de la correction analogique**

▷ **Précision du système**

L'écart est :  $\varepsilon(p) = \theta_c(p) - \theta_f(p) = \frac{\theta_c(p)}{1 + C(p)H(p)}$

Pour  $\theta_c(p) = A/p$ , l'écart statique est :  $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \frac{A}{1 + G_s}$

Pour  $G_s = 1$ , on a :  $\varepsilon_s = \frac{A}{2}$

C'est un écart très important (50 % de l'entrée) qu'il faut réduire par l'adjonction de l'action intégrale.

▷ **Représentation de  $H(j\omega)$  dans le plan complexe (Nyquist).**  $H(j\omega) = \frac{G_s e^{-\tau j\omega}}{T j\omega + 1}$

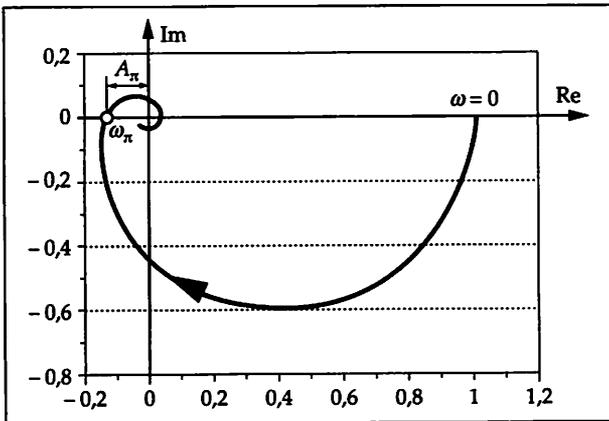


Figure 6.47

Le module est :  $|H(j\omega)| = \frac{G_s}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$  et l'argument est :

$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan(T\omega) - \tau\omega$

La courbe obtenue dans le plan complexe est donnée figure 6.47.

On mesure  $A_\pi$  pour calculer la marge de gain :

$G_m = 20 \lg(1/A_\pi) \Rightarrow G_m = 17,7 \text{ dB}$

La marge de gain est positive, le système est donc stable.

Une autre explication : en parcourant la courbe dans le sens des pulsations croissantes, le point critique  $(-1, 0)$  est laissé à gauche. Le système est donc stable.

▷ **Correcteur proportionnel**

Puisque  $C_1(p) = G_1$ , on obtient :  $|H(j\omega)| = \frac{G_1 G_s}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$

On veut imposer une marge de gain  $A_m = 2$ , donc  $|H(j\omega_\pi)| = \frac{G_1 G_s}{\sqrt{T^2 \omega_\pi^2 + 1}} = \frac{1}{A_m} = 0,5$

et l'argument est :  $\text{Arg}(H(j\omega_\pi)) = -\arctan(T\omega_\pi) - \tau\omega_\pi = -\pi$

L'approximation du rapport  $T/\tau$  grand, soit  $\omega_\pi = \pi/2$ , conduit à :

$G_1 = \frac{0,5}{G_s} \sqrt{\frac{T^2 \pi^2}{4 \tau^2} + 1} \Rightarrow G_1 \approx \frac{\pi T}{4 \tau} = 3,93$

▷ **Correcteur PID**

On exprime la fonction de transfert en chaîne ouverte  $A(p)$  :

$A(p) = C(p)H(p) = G_2 \frac{(1 + T_1 p)}{T_1 p} (T_2 p + 1) \frac{e^{-\tau p}}{(T p + 1)}$

Pour  $T_1 = T$ , on a :  $A(j\omega) = G_2 G_s \frac{(1 + T_2 j\omega) e^{-\tau j\omega}}{T_1 j\omega}$

On impose une marge de gain telle que  $A_m = 2$ , donc :  $|A(j\omega_\pi)| = G_2 G_s \frac{\sqrt{1 + T_2^2 \omega_\pi^2}}{T_1 \omega_\pi} = 0,5$

Argument :  $\text{Arg}(A(j\omega)) = \arctan(T_2 \omega) - \tau\omega - \pi/2 = -\pi$

Or on impose :  $\arctan(T_2 \omega_c) = \pi/4$ , soit :  $T_2 = 1/\omega_c$

On trouve :  $\omega_c = \frac{3\pi}{4\tau} \Rightarrow \omega_c = 2,14 \text{ rad/min}$  et :  $G_2 = \frac{0,5 \times 3 \times \pi \times T}{4 \times \tau \times G_s \times \sqrt{2}} \Rightarrow G_2 = 4,16$

Le gain peut être augmenté par rapport au gain trouvé à la question précédente parce qu'il y a une action dérivée.

## 5 Étude de la correction numérique

▷ Schéma-bloc de la régulation numérique (fig. 6.48)

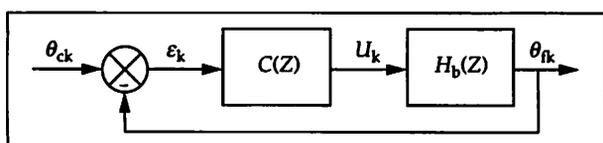


Figure 6.48

Les fonctions gérées par le calculateur sont :

- la lecture de la consigne (entrée par clavier) et la lecture de la mesure ;
- la différence entre la consigne et la mesure ;
- la correction PID du procédé.

▷ Calcul des valeurs de A, B, C

$$U_k = A \varepsilon_k + B \int_0^t \varepsilon_k dt + C \frac{d\varepsilon_k}{dt}; \quad C_2(p) = G_2 \frac{1+T_1 p}{T_1 p} (1+T_2 p)$$

$$C_2(p) = \frac{G_2}{T_1 p} [1 + (T_1 + T_2) p + (T_1 T_2) p^2] = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = G_2 \frac{T_2 + T_1}{T_1} + \frac{G_2}{T_1 p} + G_2 T_2 p$$

En identifiant terme à terme, on obtient :  $A = G_2 \frac{T_2 + T_1}{T_1}; B = \frac{G_2}{T_1}; C = G_2 T_2$

Les valeurs numériques sont :  $A = 4,52$  ;  $B = 0,76 \text{ min}^{-1}$  ;  $C = 1,95 \text{ min}$ .

▷ Équation récurrente du correcteur numérique

On détermine l'équation récurrente du correcteur numérique  $C_n$  :

$$C_n(Z) = G_n \frac{(Z-a)(Z-b)}{Z(Z-1)} \quad C_n(Z) = \frac{U_k}{\varepsilon_k} = G_n \frac{Z^2 + (a+b)Z + ab}{Z^2 - Z}$$

On obtient l'équation récurrente :  $U_n = G_n \varepsilon_n + G_n (a+b) \varepsilon_{n-1} + G_n ab \varepsilon_{n-2} + U_{n-1}$

On détermine la fonction de transfert en Z du correcteur  $C_2$  :

$$U_k = A \varepsilon_k + B \int_0^t \varepsilon_k dt + C \frac{d\varepsilon_k}{dt} = A \varepsilon_k + B I_k + C \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e}$$

avec :  $I_k = T_e \varepsilon_k + I_{k-1}$ , soit  $I_k = \frac{\varepsilon_k T_e}{1-Z^{-1}}$ ,  $\frac{U_k}{\varepsilon_k} = A + B \frac{T_e}{1-Z^{-1}} + C \frac{1-Z^{-1}}{T_e}$

$$\frac{U_k}{\varepsilon_k} = \frac{A T_e + B T_e^2 + C}{T_e} \left[ \frac{Z^2 - \frac{A T_e + 2C}{A T_e + B T_e^2 + C} Z + \frac{C}{A T_e + B T_e^2 + C}}{Z(Z-1)} \right]$$

d'où  $G_n = \frac{A T_e + B T_e^2 + C}{T_e}$  ;  $a+b = -\frac{A T_e + 2C}{A T_e + B T_e^2 + C}$  ;  $ab = \frac{C}{A T_e + B T_e^2 + C}$

Les valeurs de  $G_n$ ,  $a$  et  $b$  dépendent de la période d'échantillonnage  $T_e$ .

# PROBLÈMES : boucles imbriquées ou boucles particulières

## Problème 1 Quel choix ? Régulation en cascade ou mixte ?

Il s'agit ici de comprendre les différentes boucles de régulation que l'on peut envisager en fonction des hypothèses de fonctionnement d'une installation. Une fois n'est pas coutume, il n'y a pas de calculs dans ce problème !

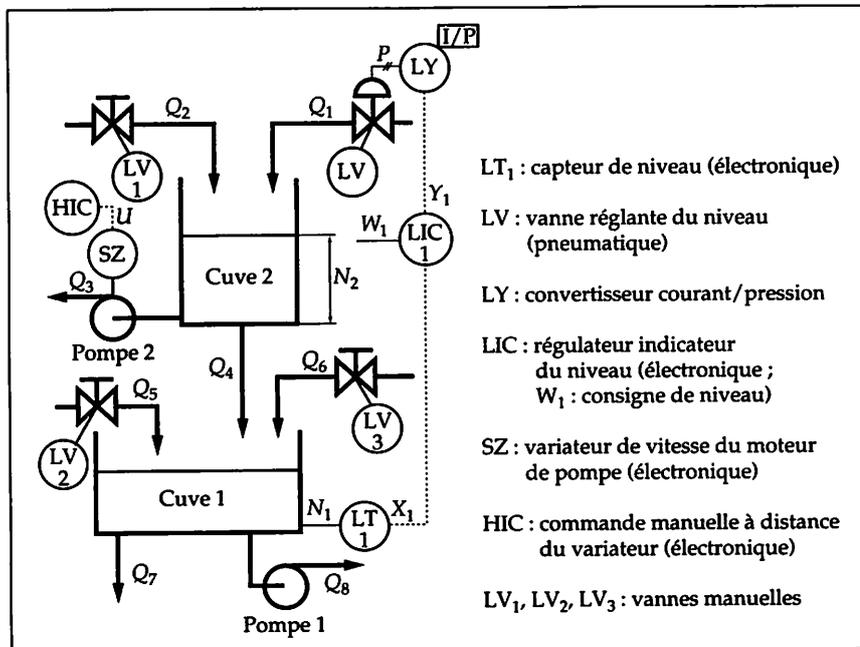


Figure 7.1

L'installation figure 7.1 montre une régulation de niveau soumise à un certain nombre de perturbations. Le nombre de ces perturbations dépend du fonctionnement envisagé.

**Hypothèse :** les temps moyens de rétention du liquide dans les cuves 1 et 2 sont du même ordre de grandeur (pour fixer les idées : quelques minutes).

On envisage trois cas différents de fonctionnement, décrits ci-dessous, pour lesquels la régulation actuelle du niveau  $N_1$  n'est pas satisfaisante.

- 1 Le débit  $Q_2$  est un débit très fluctuant. Le liquide provient d'un poste de fabrication situé en amont. On admet que le débit  $Q_4$  est égal à  $k N_2$  ( $k$  : constante). Le débit  $Q_3$  subit de fréquentes et fortes variations et dépend d'un poste placé en aval. La pompe 1 sert à l'homogénéisation et on a  $Q_8 = Q_6$ . Une faible quantité d'additif est déversée en permanence par la vanne LV<sub>2</sub> (débit  $Q_5$ ). Débits moyens en régime permanent : cuve 2 :  $Q_1 \approx Q_2 \approx Q_3 \approx Q_4$  ; cuve 1 :  $Q_5 \approx Q_4/80$  et  $Q_4 \approx Q_7$ .

Il est impératif de limiter strictement les moyens matériels à installer pour obtenir une amélioration.

- ▷ Établir le schéma fonctionnel simplifié (sans détailler les fonctions de transfert) pour ce cas. Quels sont les éléments qui rendent insatisfaisante la régulation de niveau actuelle ?
- ▷ Que proposer comme amélioration ? Justifier et établir le schéma fonctionnel simplifié ainsi que le plan d'instrumentation de la régulation proposée.

2 Les débits  $Q_5$  et  $Q_6$  subissent de fortes variations d'amplitude ( $\pm 20\%$  à  $\pm 40\%$ ) et sont toujours rapides (quelques secondes). Le service de fabrication ne veut pas limiter ces deux débits. Le débit  $Q_3$  est sensiblement constant. La pompe 1 permet de fixer le débit  $Q_8$ . Le débit  $Q_2$  est faible, il fluctue assez lentement ( $Q_2 \approx Q_1/50$ ).  
Débits moyens en régime permanent : cuve 2 :  $Q_3 \approx Q_4 \approx Q_1/2$ ; cuve 1 :  $Q_6 \approx Q_5/9$ ,  $Q_7 \approx Q_8$  et  $Q_4 \approx 10 Q_6$ .

Les moyens à mettre en œuvre pour l'amélioration devront être limités au maximum.

- ▷ Établir le schéma fonctionnel simplifié (sans détailler les fonctions de transfert) pour ce cas. Quels sont les éléments qui rendent insatisfaisante la régulation de niveau actuelle ?
- ▷ Que proposer comme amélioration ? Justifier et établir le schéma fonctionnel simplifié ainsi que le plan d'instrumentation de la régulation proposée.

3 Les débits  $Q_5$  et  $Q_6$  sont pratiquement constants. Le débit  $Q_2$  est un débit qui varie lentement (maximum de variation enregistré : rampe de  $\pm 20\%$  en 30 minutes). Le débit  $Q_3$  est utilisé dans de grandes proportions, et cela d'une façon qui paraît aléatoire. Les vannes  $LV_2$  et  $LV_3$  restent toujours ouvertes. La pompe 1 est mise en service pendant une demi-heure toutes les 8 heures.

Débits moyens en régime permanent : cuve 2 :  $Q_3 \approx Q_4 \approx Q_1/2$  et  $Q_2 \approx Q_1/4$  ; cuve 1 :  $Q_8 \approx Q_7/10$  et  $Q_5 \approx Q_6 \approx 0,5 Q_4$ .

Comme dans les cas précédents, les moyens matériels d'amélioration devront être limités, à tel point que l'installation d'un quelconque instrument de mesure n'est pas envisageable pour des raisons économiques.

- ▷ Établir le schéma fonctionnel simplifié (sans détailler les fonctions de transfert) pour ce cas. Quels sont les éléments qui rendent insatisfaisante la régulation de niveau actuelle ?
- ▷ Que proposer comme amélioration ? Justifier et établir le schéma fonctionnel simplifié ainsi que le plan d'instrumentation de la régulation proposée.

## N Problème 2 Étude d'un positionneur de vanne

(suite du problème 3 du chapitre 6)

Le problème posé sur l'échangeur thermique a mis en évidence le besoin d'un positionneur sur la vanne réglante. Or, pour des raisons techniques, un positionneur ne peut pas être installé sur cette vanne électrique. En revanche, sur cette vanne il existe un signal (0 – 10 volts) de copie de la position du clapet.

1 Proposer un plan de tuyauterie et d'instrumentation permettant de minimiser les effets de la différence de pression ( $\Delta P$ ) et justifier la réalisation.

2 Après une courte expérience, la fonction de transfert suivante a été trouvée :

$$V(p) = \frac{D(p)}{U(p)} = \frac{1}{\tau p + 1} \quad \text{avec } \tau = 6,5 \text{ s} \quad \begin{array}{l} D(p) : \text{déplacement du clapet} \\ U(p) : \text{commande de la vanne (signal 0 – 10 V)} \end{array}$$

- ▷ Réaliser le schéma fonctionnel de l'ensemble proposé en 1. La fonction de transfert du correcteur sera notée  $R(p)$ .

3 Pourquoi peut-on dire qu'un correcteur à action proportionnelle est satisfaisant pour un tel asservissement ?

4 On donne :  $R(p) = G_r = 20$ . Toutes les constantes de temps inférieures à 0,15 min seront négligées.

- ▷ Exprimer  $X(p)$  en fonction de  $\Delta P(p)$ .

5 Déterminer et tracer la réponse  $X(t)$  lors d'un changement de  $\Delta P$  en échelon d'amplitude  $\alpha = 25\%$ . Comparer avec la réponse trouvée en 3 du problème 3 du chapitre 6.

- 6 Le correcteur  $R(p)$  doit être réalisé par commande numérique. Sa fonction est  $R(Z)$ .
- ▷ Déterminer alors la période d'échantillonnage  $T_e$  souhaitable.
- 7 La caractéristique commande-ouverture de la vanne est linéaire et, lorsque  $Y = M$ , on souhaite avoir une commande de 5 volts pour positionner l'ouverture de vanne à 50 %.
- ▷ Donner alors l'algorithme de calcul du correcteur  $R(Z)$ .
- 8 Quelle est l'amplitude  $y_M$  maximale d'entrée en échelon de position qui entraîne alors la saturation du déplacement  $D$ , si  $G_r = 20$  ?

## Problème 3 Régulation de proportion

L'une des étapes importantes dans toute fabrication de sirop est certainement le coupage du sirop brut, par de l'eau par exemple, pour obtenir la qualité requise du sirop finalement élaboré. Pour maintenir une densité constante, il est nécessaire de contrôler le rapport  $R$  : quantité d'eau sur quantité de sirop. La densité du mélange obtenu dépend de ce rapport, c'est pourquoi le rapport désiré  $R_o$  est commandé par un régulateur DIC de densité comme le montre le schéma de la figure 7.2.

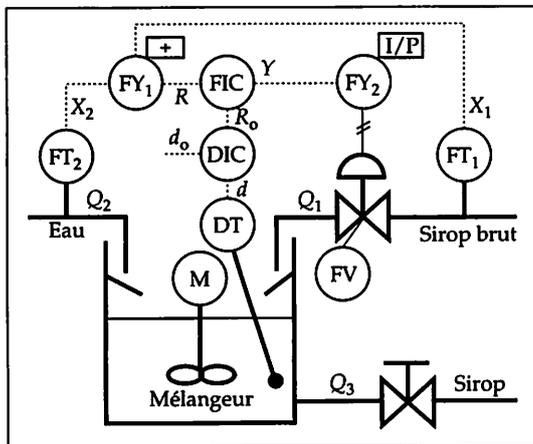


Figure 7.2

Mélangeur et DT :  $M(p)$  non définie.

Valeurs numériques :  $\theta_1 = 1$  s ;  $\theta_2 = 4$  s ;  $\theta_{31} = \theta_{32} = 1,5$  s ;  $\theta_4 = 2$  s ;  $G_s = 1,6$ .

Étendue d'échelle :

$FT_1$  : 0 – 10 m<sup>3</sup>/h, signal de mesure : 0 – 20 mA.

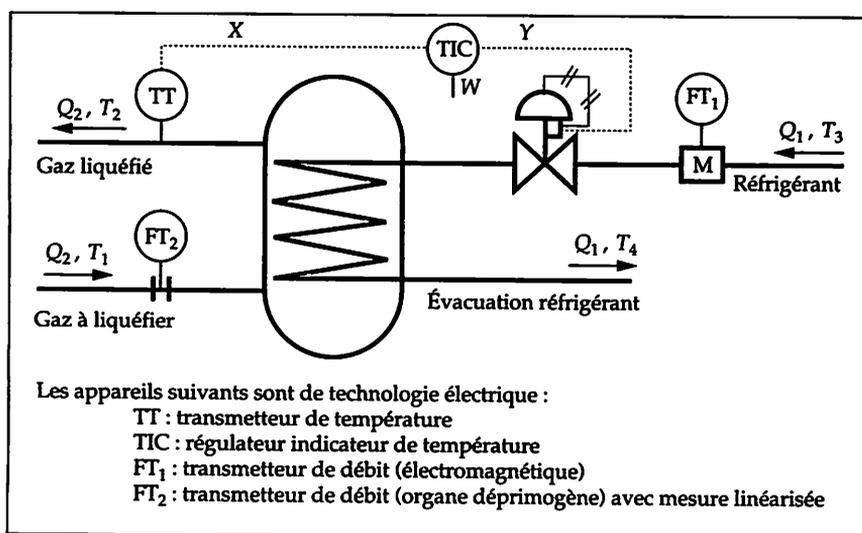
$FT_2$  : 0 – 50 m<sup>3</sup>/h, signal de mesure : 0 – 20 mA.

Rapport désiré  $R_o$  : 6 quantités d'eau (densité  $d_1 = 1$ ) pour une quantité de sirop (densité  $d_2 = 1,28$ ).

- 1 Déterminer la valeur du numérateur  $K_r$  de  $H_4(p)$ .
- 2 Établir le schéma fonctionnel de ce système.
- 3 Le régulateur FIC est un régulateur à action proportionnelle et dérivée.
  - ▷ Justifier brièvement ce choix.
- 4 On décide de fixer  $T_d = \theta_4$  et non pas  $T_d = \theta_2$ .
  - ▷ Justifier simplement ce choix.
- 5 Étudier la stabilité de la boucle la plus interne. Tracer  $G_r$  en fonction de  $K_r$  et préciser s'il vaut mieux calculer  $X_1/X_2$  ou  $X_2/X_1$  (relais  $FY_1$ ). Qu'en conclure ?
- 6 Exprimer l'écart statique  $\varepsilon_s$  en fonction de  $K_r$  et conclure.

- 7 Le débit  $Q_2$  étant constant et égal à  $25 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $G_r$  étant réglé à 8, calculer la valeur de  $K_r$  lorsque le débit  $Q_1$  est :
- $Q_1 = 6,25 \text{ m}^3/\text{h}$ . On notera cette valeur  $K_{r_1}$  ;
  - $Q_1 = 4 \text{ m}^3/\text{h}$ . On notera cette valeur  $K_{r_2}$ .
- 8 Le gain du régulateur étant réglé à  $G_r = 5$ , la stabilité est-elle toujours assurée quel que soit  $K_r$  ?
- 9 En accord avec le service fabrication, le service instrumentation décide alors d'installer un relais limiteur sur le signal de sortie du diviseur  $FY_1$ .
- ▷ Quel type de limiteur choisir ? Que peut-on préconiser comme réglage ?

## Problème 4 Régulation mixte de température d'un liquéfacteur



L'installation présentée figure 7.3 permet de liquéfier un gaz. Le régulateur TIC contrôle la température  $T_2$  en agissant sur le débit  $Q_1$  de fluide réfrigérant à la température d'entrée  $T_3$ . Le gaz subit un abaissement de sa température : il passe de la température  $T_1$  à la température  $T_2$ .

Figure 7.3

Les fonctions de transfert sont les suivantes (tableau 7.1) :

$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)}$	$H_1(p) = \frac{T_2(p)}{Q_1(p)} = \frac{G_1 e^{-\tau_1 p}}{1 + \theta_1 p}$	$H_2(p) = \frac{T_2(p)}{Q_2(p)}$	$H_3(p) = \frac{T_2(p)}{T_3(p)}$
$H_4(p) = \frac{T_2(p)}{T_1(p)}$	$H_5(p) = \frac{X(p)}{T_2(p)} = 1$	$H_6(p) = \frac{Q_1(p)}{Y(p)} = 1$	

Tableau 7.1

On donne :  $G_1 = 2$ ,  $\tau_1 = 1 \text{ min}$ ,  $\theta_1 = 4 \text{ min}$ .

- 1 Établir le schéma fonctionnel détaillé de cette installation.
- 2 On envisage une régulation proportionnelle, soit  $C(p) = G_r$ .
  - ▷ Tracer le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en chaîne ouverte et en déduire la valeur limite du gain  $G_{rc}$  du régulateur qui entraîne l'instabilité de la boucle.
- 3 Le gain  $G_r$  étant réglé à une valeur inférieure à  $G_{rc}$  ; les perturbations peuvent-elles entraîner la déstabilisation de la boucle ? Pourquoi ?
- 4 Exprimer l'écart statique  $\varepsilon_s$  lors d'un changement de consigne d'amplitude  $A$  de 10 %. Quel serait l'écart minimal théorique ?
- 5 La régulation proportionnelle paraît-elle une bonne solution ?
- 6 On envisage maintenant une régulation PID :  $C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$  avec :  $G_r = 1$ ,  $T_i = \theta_1$  et  $T_d = 0,5 \tau_1$ .

On donne l'approximation de Padé :  $\frac{e^{-\tau p}}{1 + \theta p} \approx \frac{1 - 0,5 \tau p}{(1 + 0,5 \tau p)(1 + \theta p)}$

- ▷ Exprimer l'écart statique  $\varepsilon_s$  à la suite d'un changement de consigne d'amplitude  $A$  de 10 %. Le résultat paraît-il satisfaisant ?

7 ▽ L'identification de  $H_2(p)$  donne :  $H_2(p) = \frac{G_2 e^{-\tau_2 p}}{1 + \theta_2 p}$ . On donne :  $G_2 = 3$ ,  $\tau_2 = 0,4$  min,

$\theta_2 = 2$  min et  $G_1 = 1,5$ . Le débit  $Q_2$  varie brutalement de 10 %.

- ▷ Déterminer  $x(t)$ . La réponse de la mesure à cette perturbation paraît-elle satisfaisante ?

8 ▽ Afin d'améliorer la régulation de  $T_2$ , on désire que toute variation du débit  $Q_2$  soit prise en compte immédiatement par un correcteur de fonction de transfert  $C_1(p)$ .

- ▷ Modifier le schéma fonctionnel actuel en insérant le correcteur  $C_1(p)$  pour améliorer la régulation de température.

9 ▽ Effectuer alors le plan de tuyauterie et d'instrumentation correspondant au nouveau schéma fonctionnel.

10 ▽ Quelle est la fonction idéale de  $C_1(p)$  ?

11 ▽ Si la fonction de transfert est :  $H_2(p) = \frac{T_2(p)}{Q_2(p)} = \frac{G_2 e^{-\tau_1 p}}{1 + \theta_2 p}$

- ▷ Quels sont les réglages à effectuer ?

12 ▽ Si la fonction de transfert est :  $H_2(p) = \frac{G_2 e^{-\tau_2 p}}{1 + \theta_2 p}$

- ▷ Quels sont les réglages à effectuer ?

## Problème 5 Régulation en cascade sur une grandeur réglante

Le schéma de principe simplifié d'une colonne à distiller utilisée dans les industries sucrières est représenté figure 7.4. Seule la régulation de niveau du ballon de tête est détaillée puisqu'elle est le sujet de l'étude.

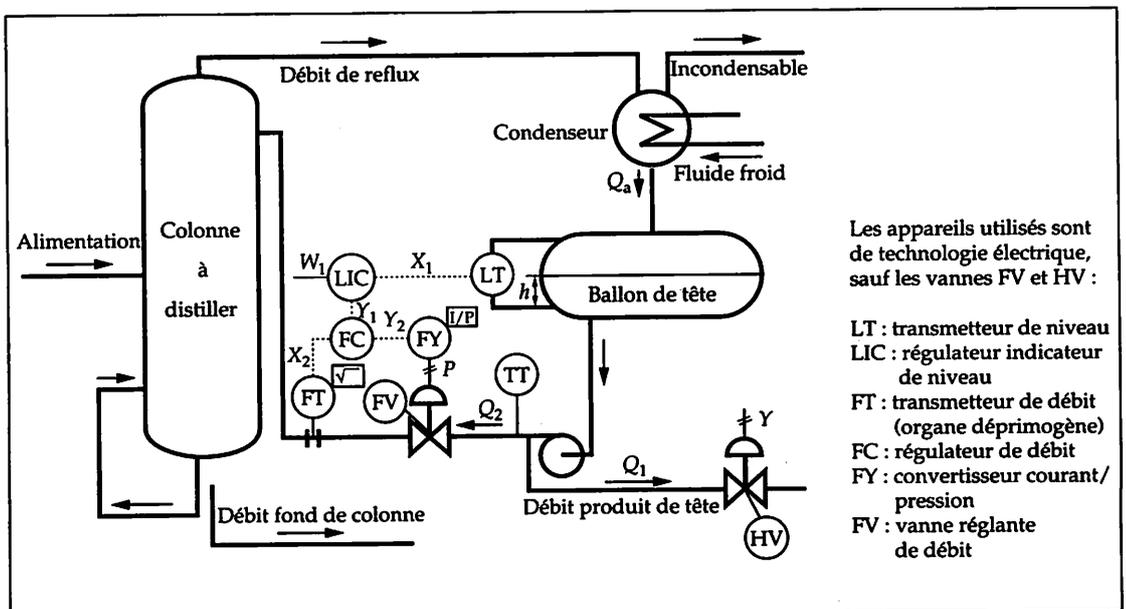


Figure 7.4

Les fonctions de transfert sont les suivantes (tableau 7.2) avec  $Y_1 = W_2$  ( $W_2$  : consigne externe du régulateur FC).

$H_1(p) = \frac{P(p)}{Y_2(p)}$	$H_2(p) = \frac{Q_2(p)}{P(p)}$	$H_3(p) = \frac{X_2(p)}{Q_2(p)} = 1$	$H_4(p) = \frac{X_1(p)}{Q_2(p) + Q_1(p)}$
$H_5(p) = \frac{Q_1(p)}{Y(p)}$	$H_6(p) = \frac{X_1(p)}{Q_a(p)}$	$C_1(p) = \frac{Y_1(p)}{W_1(p) - X_1(p)}$	$C_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Y_1(p) - X_2(p)}$

Tableau 7.2

- 1 Donner le schéma fonctionnel de la régulation de niveau, régulation de débit comprise.
- 2 Une identification en chaîne ouverte par la méthode de Broïda a permis d'obtenir :  $H(p) = \frac{X_2(p)}{Y_2(p)} = \frac{G_s e^{-\tau p}}{1 + \theta p}$  avec  $G_s = 0,85$  ;  $\tau = 0,4$  s et  $\theta = 4,2$  s.
  - ▷ Déterminer la fonction de transfert théorique  $C(p)$  du régulateur de débit pour que la fonction de transfert en chaîne fermée  $F_2(p) = Q_2(p)/W_2(p)$  soit du premier ordre, et de constante de temps  $\theta_{d_2}$ .
- 3 Les régulateurs LIC et FC ont respectivement pour fonction de transfert  $C_1(p)$  et  $C_2(p)$  :  $C_1(p) = \frac{Y_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = G_r \left( \frac{T_i p + 1}{T_i p} + T_d p \right)$  et  $C_2(p) = \frac{Y_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = G_r \left( \frac{T_i p + 1}{T_i p} + T_d p \right)$ 
  - ▷ La fonction de transfert  $C(p)$  correspond-elle à  $C_2(p)$  ?
  - ▷ Que peut-on proposer alors comme modèle pour  $H(p)$  ?
  - ▷ Quelles sont les actions à régler sur le régulateur  $C_2(p)$  pour avoir  $\theta_{d_2} = 1$  s ? La vanne FV étant ouverte par manque d'air, quel est le sens d'action à régler sur ce régulateur ?
- 4 Après quelques essais, la régulation de débit est satisfaisante. Afin d'identifier la fonction de transfert réglante  $H_R(p)$  du niveau, on règle le régulateur LIC en position « manuel », et on impose un échelon de  $-10\%$  de la consigne externe  $W_2$  du régulateur FC. On obtient la courbe de la figure 7.5. Pour représenter ce procédé, deux méthodes d'identification sont appliquées :

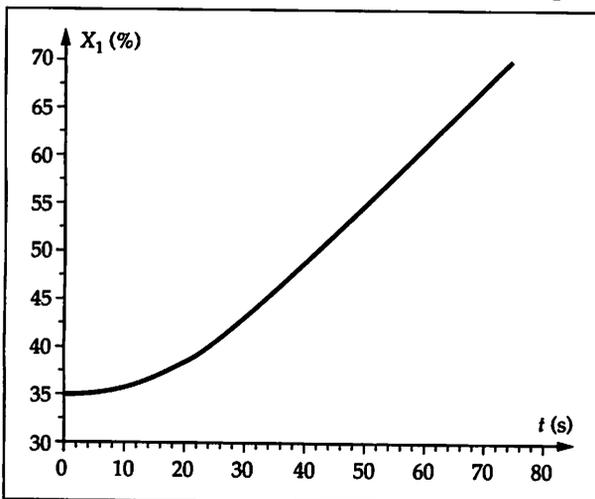


Figure 7.5

- modèle de Strejc :  $H_S(p) = \frac{k}{p(1 + T p)^n}$   
avec :  $k = 0,065 \text{ s}^{-1}$  ;  $T = 10$  s et  $n = 2$  ;
- modèle de Broïda :  $H_B(p) = \frac{k e^{-\tau p}}{p(1 + \theta p)}$   
avec :  $k = 0,065 \text{ s}^{-1}$  ;  $\theta = 18$  s et  $\tau = 2$  s.

▷ Tracer les réponses indicielles respectives de  $H_S(p)$  et  $H_B(p)$ . Vérifier graphiquement que le modèle le plus représentatif de ce procédé est finalement :

$$H_R(p) = \frac{k}{p(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)} \quad \text{avec : } k = 0,065 \text{ s}^{-1} ;$$

$$\theta_1 = 2 \text{ s et } \theta_2 = 18 \text{ s.}$$

- 5 À l'aide de cette identification, peut-on connaître  $H_4(p)$  ?
- 6 Est-il possible de régler le régulateur de niveau pour que la fonction de transfert en chaîne fermée  $F_1(p) = X_1(p)/W_1(p)$  soit du premier ordre, de constante de temps  $\theta_{d_1} = 8$  s ?  
Quelle est la fonction de transfert obtenue si le réglage du régulateur est  $G_r = \frac{1}{k \theta_{d_1}}$  et  $T_d = \theta_2$  ?
- 7 Exprimer  $X_1(p)$  en fonction de  $Y(p)$  lorsqu'il n'y a pas de régulation en cascade, c'est-à-dire sans le régulateur FC. Exprimer  $X_1(p)$  en fonction de  $Y(p)$  lorsqu'il y a la régulation en cascade.  
À quelle condition la régulation en cascade permet-elle une réponse plus rapide lors d'une perturbation en échelon ?

## Problème 6 Régulation en cascade sur une grandeur intermédiaire

Le plan de tuyauterie et d'instrumentation d'une installation industrielle de séchage de luzerne est représenté figure 7.6. Le produit humide circule à l'aide d'un transporteur à secousses dans le tunnel sécheur. Le produit est soumis à un flux d'air chaud pendant son passage dans le tunnel. La température de chaque zone du tunnel est contrôlée en agissant sur l'ouverture du volet d'évacuation de l'air chaud (les régulations de température ne sont pas représentées). L'humidité du produit en sortie de tunnel est régulée en continu, le régulateur MIC commande le variateur de vitesse du ventilateur d'air chaud.

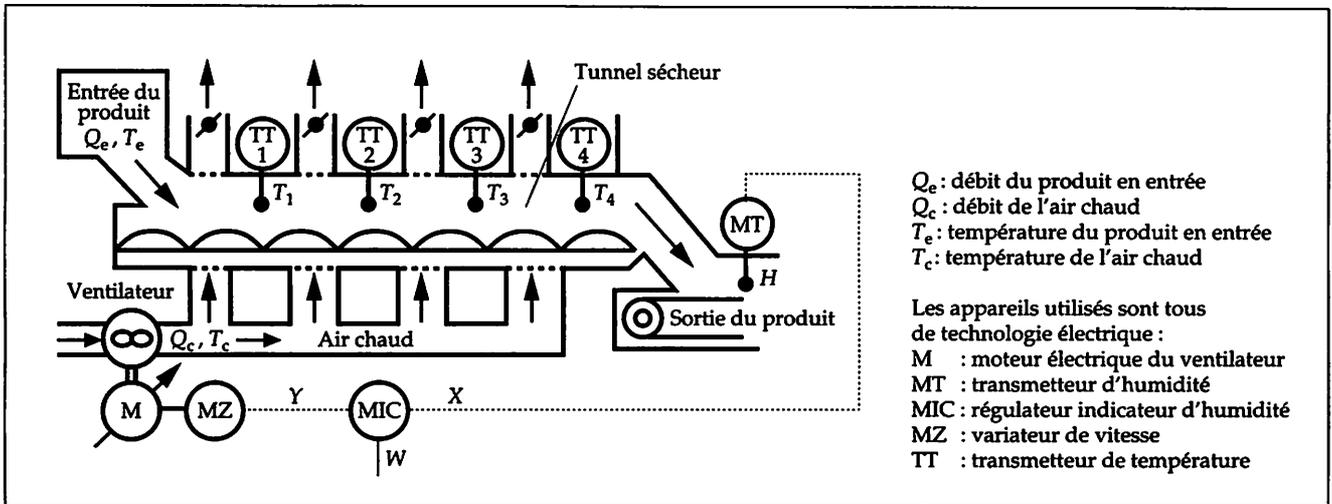


Figure 7.6

La fonction de transfert du régulateur MIC, de structure série, est notée  $C(p)$ .

- 1 Déterminer le sens d'action du régulateur.
- 2 Afin de représenter le procédé par le modèle de Strejc, deux essais ont été réalisés en chaîne fermée, le régulateur étant réglé en action proportionnelle avec  $X = W = Y_0 = 40\%$  :
  - dans le premier essai, on a fixé la bande proportionnelle  $B_p$  à 60 %, puis on a effectué un échelon de consigne de 10 % (fig. 7.7);
  - dans le deuxième essai, on a fixé la bande proportionnelle  $B_p$  à 21 %, puis on a effectué un échelon de consigne de 7 %. La figure 7.8 montre la partie exploitable de l'enregistrement des oscillations entretenues de la mesure.

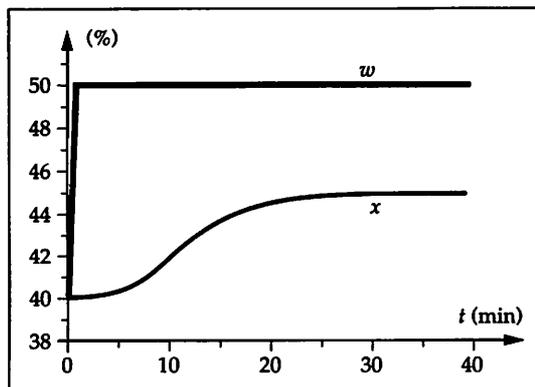


Figure 7.7

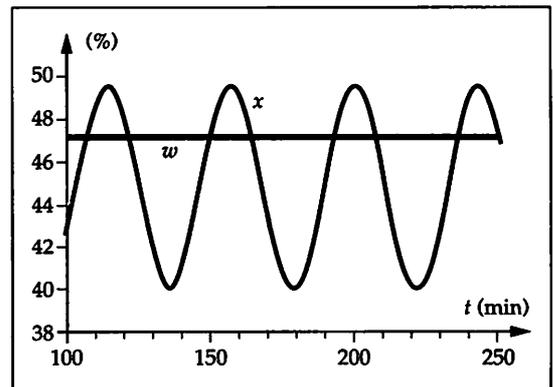


Figure 7.8

- ▷ En mesurant la valeur de l'écart statique obtenu au premier essai (fig. 7.7), déterminer le gain statique  $G_s$  du procédé.

3 On souhaite représenter le procédé selon le modèle de Strejc par une fonction de transfert notée  $H(p)$ . L'enregistrement figure 7.8 montre que le procédé a été mis en oscillations entretenues avec un gain critique noté  $G_{rc}$ .

- ▷ Montrer que le signal de commande  $Y$  n'était pas en saturation lors de cet essai.
- ▷ Déterminer la relation entre la période d'oscillation  $T_{osc}$ , la constante de temps  $\theta$  et l'ordre  $n$ .
- ▷ Déterminer la relation entre le gain critique  $G_c$  de la boucle (noter :  $G_c = G_{rc} G_s$ ) et l'ordre  $n$ .

4 À partir des deux essais et des relations établies en 3, déterminer la fonction de transfert  $H(p) = X(p)/Y(p)$  du procédé par le modèle de Strejc.

5 Établir le schéma fonctionnel de cette boucle de régulation. Représenter également  $H(p) = X(p)/Q_e(p)$ .

6 La quantité et le taux d'humidité de la luzerne peuvent varier brusquement à l'entrée du tunnel sécheur.

- ▷ Expliquer qualitativement pourquoi une régulation PID serait limitée sur un tel procédé.

7 En fabrication, pour un débit  $Q_e$  et une température  $T_e$  constants, on observe que

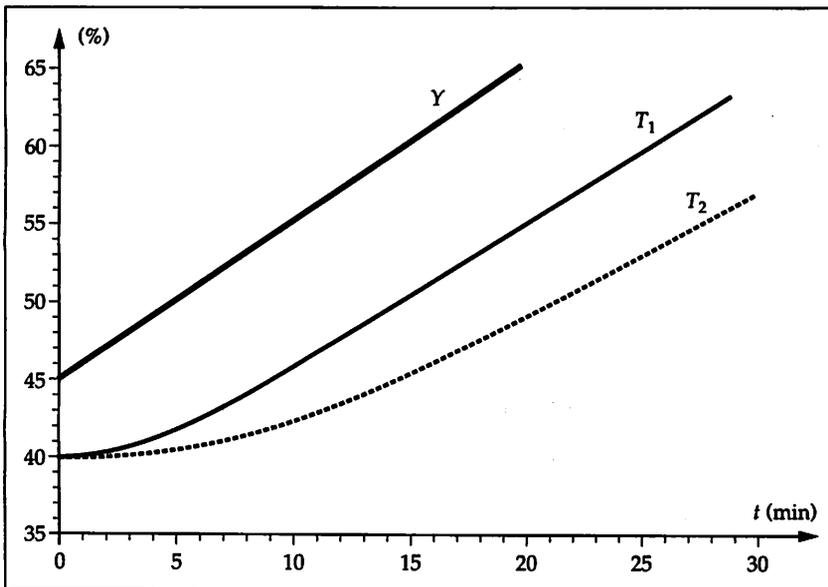


Figure 7.9

la mesure d'humidité augmente lorsque la température  $T_1$  diminue. Afin d'améliorer la régulation actuelle, on souhaite agir sur la commande du variateur de vitesse en tenant compte des variations des températures  $T_1$  ou  $T_2$  avant que la variation d'humidité soit effective. Pour cela, il faut connaître les fonctions de transfert intermédiaires, c'est pourquoi on effectue un essai en chaîne ouverte. On provoque une variation en rampe du signal de commande  $Y$  du variateur de vitesse et on enregistre les températures  $T_1$  et  $T_2$  (fig. 7.9).

- ▷ Déterminer les fonctions de transfert :

$$H_1(p) = \frac{T_1(p)}{Y(p)} = \frac{G_{s_1}}{(\theta_1 p + 1)^n} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{T_2(p)}{Y(p)} = \frac{G_{s_2}}{(\theta_2 p + 1)^m}$$

8 On décide de réaliser une régulation de la température  $T_1$  qui est une grandeur physique représentative de l'humidité. Le régulateur de température TIC doit agir sur le variateur de vitesse. Le régulateur d'humidité MIC doit commander la consigne externe de température du régulateur TIC.

- ▷ Modifier le plan de tuyauterie et d'instrumentation afin d'y représenter ces deux régulations imbriquées qui forment une régulation en cascade.

9 À partir des fonctions de transfert  $H(p)$ ,  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$ , déterminer les fonctions de transfert :

$$H_3(p) = \frac{T_2(p)}{T_1(p)} \quad \text{et} \quad H_4(p) = \frac{X(p)}{T_2(p)}$$

- ▷ Établir le schéma fonctionnel de cette régulation en cascade en prenant les fonctions de transfert des transmetteurs  $TT_1$  et  $TT_2$  égales à 1.

10 Le régulateur TIC, de structure série et de fonction de transfert  $C_1(p)$ , est le régulateur esclave. Le régulateur MIC, de fonction de transfert  $C_2(p)$ , est le régulateur maître.

▷ Calculer les actions du régulateur esclave pour obtenir une fonction de transfert en boucle fermée du premier ordre, de constante de temps  $\theta_d$ .

11 Pour un changement de consigne de 40 % à 50 %, on désire que le signal de sortie du régulateur TIC soit compris entre 10 % et 90 %. Le régulateur TIC est muni d'un circuit d'antisaturation de l'action intégrale, c'est-à-dire que l'action intégrale n'intervient que lorsque l'écart consigne - mesure est inférieur à une valeur prédéterminée (par exemple 5 %).

▷ Déterminer alors la valeur maximale du gain du régulateur que l'on peut régler raisonnablement, puis calculer la valeur minimale imposable de la constante de temps  $\theta_d$ .

12 La fonction de transfert  $H_5(p)$  peut s'écrire :

$$H_5(p) = \frac{X(p)}{T_1(p)} = \frac{G_s}{(Tp + 1)^2} \text{ avec } T = 10 \text{ min et } G_s = 0,63. \text{ On désire que la fonction de}$$

transfert en chaîne fermée de la régulation d'humidité permette une réponse indicielle aperiodique la plus rapide possible.

▷ Déterminer les actions du régulateur maître MIC.

13 Montrer que, lors d'une variation en échelon du débit  $Q_e$ , le temps de réponse  $x(t)$  est plus court avec la régulation en cascade.

## Problème 7 Régulation à actions PID préprogrammées

Dans un four à gaz de traitement thermique, on chauffe des pièces à température constante. La température contrôlée est fonction de la nature des pièces et de la quantité à produire. Lors d'un changement de production, on souhaite obtenir l'équilibre de la température voulue le plus rapidement possible.

Zone	Commande Y	$G_s$	$\theta$ (min)	$\tau$ (min)
1	0 à 10 %	2,13	23,8	4,6
2	10 à 20 %	1,18	26,2	3,6
3	20 à 30 %	1,05	27,8	3,3
4	30 à 40 %	0,93	29,0	3,1
5	40 à 50 %	0,81	29,9	2,9
6	50 à 60 %	0,70	30,7	2,7
7	60 à 70 %	0,62	31,4	2,6
8	70 à 80 %	0,57	32,0	2,3
9	80 à 90 %	0,54	32,5	2,1
10	90 à 100 %	0,52	33,0	2,0

Tableau 7.3

La consigne demandée en température peut être comprise entre 45 % et 80 % de l'étendue d'échelle du transmetteur de température. Cette étendue d'échelle est : 0 °C - 1 200 °C.

Afin de déterminer les actions du régulateur de température, on a effectué des essais en chaîne ouverte. On a fait varier le signal de commande Y de la vanne de gaz qui alimente le brûleur et on a enregistré la température X. Au début de ces essais, la température était à 20 °C pour un signal de commande de 0 %. On a identifié chaque courbe de température par un modèle de Broïda. Le tableau 7.3 donne le gain statique  $G_s$ , la constante de temps  $\theta$  et le temps mort  $\tau$  pour chaque variation de commande par pas de 10 %.

1 Quelle est la température atteinte pour une commande Y de 100 % ?

2 Quelle est la zone de commande permettant d'atteindre 45 % de l'étendue d'échelle ?  
Quelle est la zone de commande permettant d'atteindre 80 % de l'étendue d'échelle ?

3 Le réglage de Broïda correspond à une marge de gain  $G_m$  de 6 dB et à une action dérivée correspondant à une avance de phase de  $\pi/4$  rad.

▷ Déterminer les actions PID d'un régulateur de structure série répondant à ce réglage.

4 Pour l'intervalle de température utilisé (45 % à 80 %), on considère que la constante de temps représentative du procédé est  $\theta = 30$  min et que le temps mort est  $\tau = 2,8$  min.

▷ Calculer les actions PID du régulateur pour une consigne de température de 80 %.

5 Pour les actions calculées en 4 tracer le diagramme de Black de ce système, puis déterminer graphiquement le facteur de résonance  $Q_1$  obtenu pour une consigne de 80 %.

La courbe de gain en fonction de la pulsation de ce système en chaîne fermée est assimilable à celle d'un second ordre. À partir de la valeur de  $Q_1$ , déterminer le coefficient d'amortissement  $\xi_1$  et la pulsation propre  $\omega_{n_1}$ . Tracer la réponse indicielle  $X_1(t)$  pour un changement de consigne de 75 % à 80 %.

6 En conservant le gain du régulateur calculé en 4, tracer le diagramme de Black de ce système, puis déterminer graphiquement le facteur de résonance  $Q_2$  obtenu pour une consigne de 45 %.

De la même façon qu'en 5, déterminer le coefficient d'amortissement  $\xi_2$  et la pulsation propre  $\omega_{n_2}$  à partir de la valeur  $Q_2$ . Tracer la réponse indicielle  $X_2(t)$  pour un changement de consigne de 45 % à 50 %.

7 Suivant le réglage de Broïda, calculer maintenant les actions PID du régulateur pour une consigne de température de 45 %.

8 Finalement, quel réglage du régulateur permet le contrôle du four sur l'intervalle de consigne suivant : 45 % – 80 % ?

9 Afin d'obtenir des caractéristiques de régulation constantes, on envisage la régulation de ce four par un régulateur numérique dont les actions PID peuvent être calculées en tenant compte du point de fonctionnement. Le régulateur numérique dispose de plusieurs blocs de fonctions que l'on peut associer comme dans la configuration présentée figure 7.10. Un bloc de fonction LIN est un module de calcul préprogrammé, appelé linéarisateur, c'est-à-dire que sa fonction est de relier une valeur de

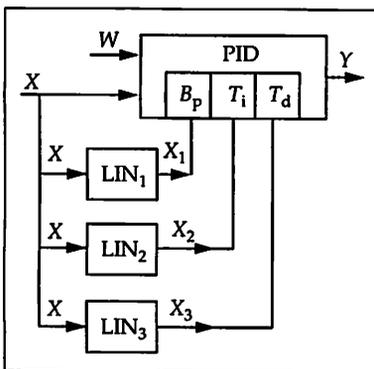


Figure 7.10

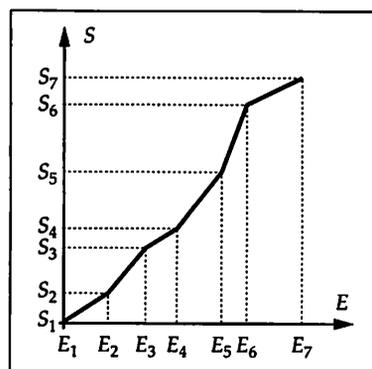


Figure 7.11

sortie  $S$  à une valeur d'entrée  $E$ . La fonction entre  $E$  et  $S$  est définie à l'aide de plusieurs couples  $(E_i, S_i)$  configurés dans chaque bloc. La figure 7.11 représente un exemple avec sept couples. Dans la figure 7.10, le signal de mesure  $X$  correspond au signal d'entrée  $E$ . Le signal de sortie  $X_1$  est assigné à la valeur de la bande proportionnelle, le signal  $X_2$  est assigné au temps  $T_i$  et le signal  $X_3$  est assigné au temps  $T_d$ .

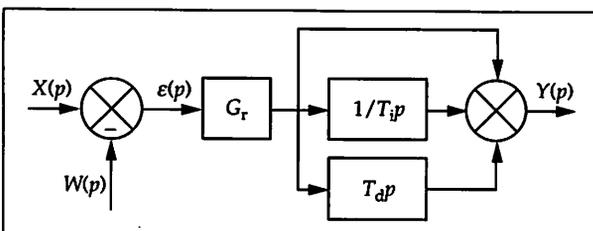


Figure 7.12

▷ Ce régulateur numérique est de structure PID mixte (fig. 7.12). À partir des relations trouvées en 3 pour le régulateur série, déterminer  $B_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  en fonction de  $G_s$ ,  $\theta$  et  $\tau$  pour cette structure mixte.

▷ On désire changer  $B_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  automatiquement en fonction du point de mesure sans occasionner de variation brusque pour ces valeurs. En prenant les valeurs  $G_s$ ,  $\theta$  et  $\tau$  de chaque zone de température, déterminer les couples  $(X_1, X_{1i})$ ,  $(X_1, X_{2i})$  et  $(X_1, X_{3i})$  à configurer dans ce régulateur. Pour chaque bloc LIN, on dispose au maximum de douze couples  $(E_i, S_i)$ .

# Problème 8 Contrôle d'un four de réchauffage

(d'après sujet BTS CIRA 1990)

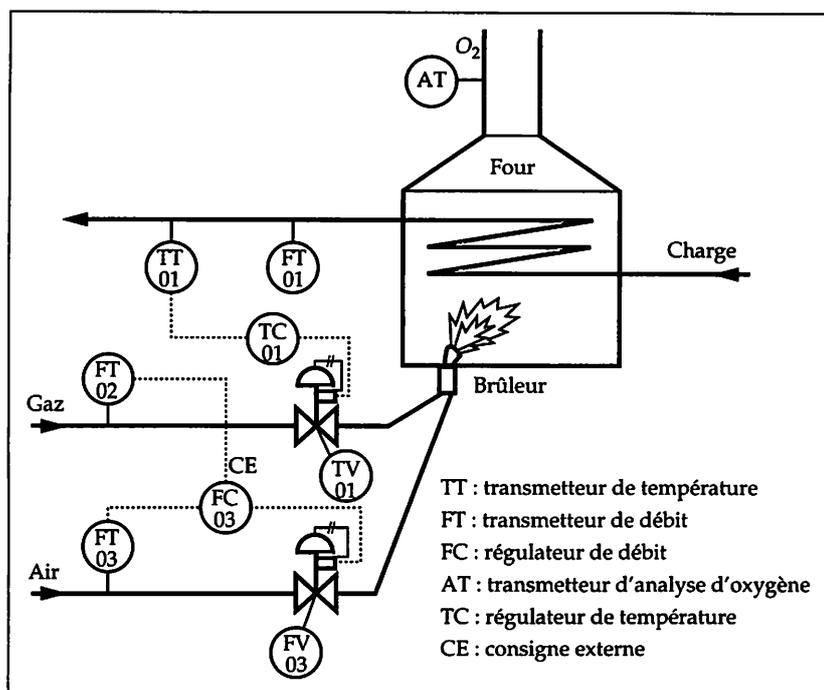


Figure 7.13

Le four représenté figure 7.13 permet de réchauffer un produit industriel à une température de 120 °C. Le débit de la charge  $Q_c$  peut varier entre 10 et 20 m<sup>3</sup>/h; en fonctionnement nominal il est de 15 m<sup>3</sup>/h. La vanne de régulation TV 01 du débit du gaz est alors ouverte à 60 %.

Les échelles des transmetteurs TT 01 et FT 01 sont réglées respectivement à 0-200 °C et à 0-20 m<sup>3</sup>/h. Le gaz de combustion est un mélange méthane/éthane dont le débit peut varier entre 0 et 120 m<sup>3</sup>/h sous une pression relative de 1,5 bar, à 27 °C. L'air de combustion est fourni par un compresseur sous une pression relative de 5 bars, à 27 °C.

## 1 Étude et compréhension du procédé

- ▷ En fonction du schéma de régulation déjà installé, indiquer de quelle sorte de régulation il s'agit. Préciser les avantages et les inconvénients du schéma actuel.

## 2 Calcul de l'échelle de transmetteur FT 03 de débit d'air

On considère que la combustion s'effectue pour l'instant sans excès d'air (combustion stœchiométrique) et qu'il faut 12 m<sup>3</sup>/h d'air pour brûler complètement 1 m<sup>3</sup>/h de gaz, ces gaz étant pris dans les conditions dites normales, pression atmosphérique de 1 bar et température de 0 °C, soit 273 K.

- ▷ Calculer l'échelle de ce transmetteur.

## 3 Régulation de l'excès d'air

On désire pouvoir réaliser une combustion avec un excès d'air réglable.

- ▷ Proposer une modification de la boucle de réglage d'air de combustion tenant compte de l'appareillage déjà installé. Préciser les appareils employés et leurs fonctions.

## 4 Identification d'un procédé

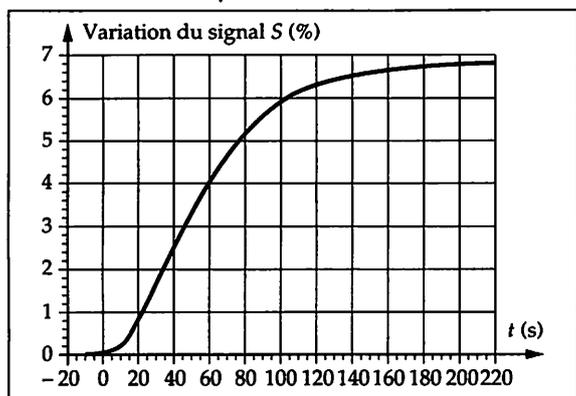


Figure 7.14

On désire régler le régulateur TC 01. Pour cela on réalise une identification du procédé par la méthode de la réponse indicielle en chaîne ouverte. Le régulateur étant en position « manuel », on réalise un échelon du signal de sortie  $y_R$  du régulateur, d'amplitude 6 %.

L'enregistrement obtenu du signal délivré par le transmetteur de température TT 01 est présenté figure 7.14.

- ▷ Déterminer la fonction de transfert  $H(p)$  du procédé en utilisant le modèle de Broïda.

## 5 Réponse indicielle du modèle

Pour la suite du problème, on suppose que la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{Y_R(p)} = \frac{1,2 e^{-16p}}{1 + 50p}. \text{ Les temps sont exprimés en secondes.}$$

- ▷ Déterminer la réponse théorique  $s(t)$ , exprimée en pourcentage, du transmetteur TT 01 pour un échelon de commande  $y_r = 10 \%$ . Tracer l'allure de la réponse  $s(t)$ .

## 6 Étude de la chaîne fermée

Le régulateur TC 01 est à action proportionnelle et intégrale. La fonction de transfert

$$\text{de son correcteur est : } C(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

- ▷ Sous forme de schéma fonctionnel, représenter l'ensemble de la boucle (régulateur et procédé).  
▷ Donner l'expression de la fonction de transfert  $F(p) = \frac{S(p)}{W(p)}$  du système bouclé où  $S(p)$  représente la sortie du transmetteur TT 01 et  $W(p)$  la consigne du régulateur TC 01.

On affiche les valeurs suivantes sur le régulateur :  $T_i = \infty$  et  $B_p = 50 \%$ , où  $B_p$  représente la bande proportionnelle.

À partir d'un point de fonctionnement stable (mesure = consigne =  $120 \text{ }^\circ\text{C} = 60 \%$  de l'échelle du transmetteur) obtenu à l'aide d'un talon (ou biais), on effectue un échelon de consigne de  $+20 \%$  de l'échelle du transmetteur (nouvelle consigne =  $80 \%$ ).

- ▷ Quelle sera la température finale atteinte après stabilisation du système ?  
▷ On affiche désormais  $T_i = 50 \text{ s}$ . Quel est le gain critique  $G_{rc}$  du régulateur qui fera entrer le système en oscillations entretenues ? Quelle est alors la période des oscillations ?  
▷ Quelle valeur de gain  $G_r$  faut-il afficher pour fonctionner avec une marge de gain  $G_m$  de 6 dB ?  
▷ Quelle sera la température atteinte après une variation de consigne de  $+20 \%$  (température de départ =  $120 \text{ }^\circ\text{C}$ ) ?  
▷ On modifie l'échelle du transmetteur TT 01 et on la porte à  $0\text{-}400 \text{ }^\circ\text{C}$ . Toutes choses égales par ailleurs, quelles modifications de réglage de la boucle cela entraîne-t-il si l'on veut garder le même amortissement ?

## 7 Amélioration de la boucle

On désire améliorer la régulation en minimisant l'influence des variations du débit de charge sur la température de sortie.

- ▷ Proposer un schéma de régulation tenant compte de l'appareillage déjà installé.  
▷ Indiquer les mesures et essais qu'il faudrait entreprendre pour régler les nouveaux modules insérés dans le schéma proposé.

# Problème 9 Régulation « chaud-froid » d'un échangeur

(d'après sujet BTS CIRA 1993)

Le procédé physique étudié est présenté figure 7.15. Les valeurs des grandeurs caractérisant le procédé sont données en pourcentage de l'échelle du transmetteur. L'unité de temps est la seconde. D'une manière générale, les lettres majuscules représentent des signaux absolus, les lettres minuscules représentant des petites variations autour d'un point de fonctionnement.

Exemples :  $Y_R$  = signal de sortie d'un régulateur ;  $y_r = \Delta Y_R$  = variation ;  $M$  = signal de sortie d'un transmetteur ;  $m = \Delta M$  = variation.

Données techniques communes à l'ensemble de ce problème :

- vanne  $V_1$  et  $V_2$  : fermées par manque d'air (FMA) et à caractéristiques linéaires ;

- la fonction de transfert de la vanne  $V_1$  est :  $F_{V_1}(p) = \frac{Q_e(p)}{Y_{R_1}(p)} = \frac{1}{1 + 10p}$ .

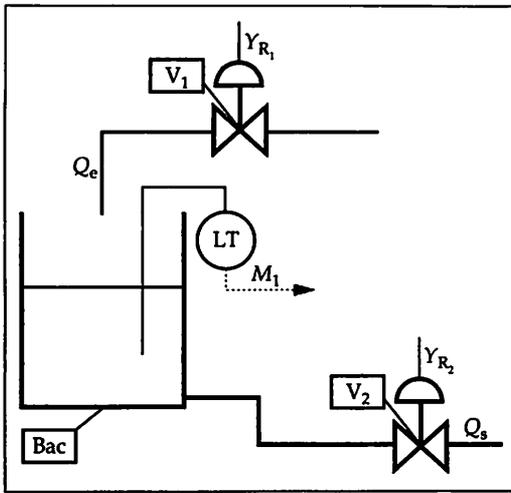


Figure 7.15

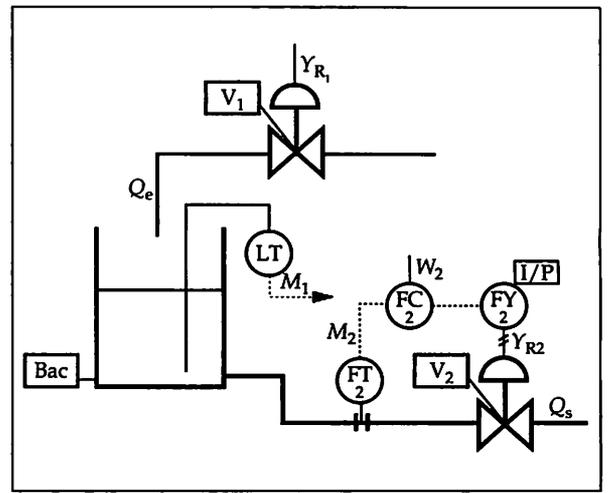


Figure 7.16

## 1 Étude du procédé

À partir d'un point de fonctionnement stable, on fait subir des petites variations aux grandeurs. Dans ces conditions, la variation de niveau s'exprime par :

$$m_1(t) = 0,05 \int_0^t [q_e(t) - q_s(t)] dt$$

On admettra alors que la variation de débit de sortie peut s'exprimer par :

$$q_s(t) = 1,25 m_1(t), \text{ avec } Y_{R2} \text{ constante.}$$

- ▷ Établir le schéma fonctionnel détaillé reliant  $m_1(t)$  et  $q_e(t)$ . En déduire celui liant  $m_1(t)$  et  $Y_{R1}(t)$ .
- ▷ Donner alors l'expression de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{M_1(p)}{Y_{R1}(p)}$
- ▷ S'agit-il d'un système naturellement stable ou instable ?
- ▷ Exprimer la relation liant  $m_1(t)$  à  $y_{R1}(t)$  sachant que l'on fait subir au signal  $Y_{R1}$  un échelon  $y_{R1}$  d'amplitude 10 %. Pour cette variation  $y_{R1}$ , en déduire les expressions de  $q_s(t)$  et  $q_e(t)$ .
- ▷ Représenter sur le même graphique  $y_{R1}(t)$ ,  $m_1(t)$ ,  $q_e(t)$  et  $q_s(t)$ . Les points correspondant à  $t = 10$  s, 20 s et 40 s seront calculés.

## 2 Régulation de niveau

Dans l'installation précédente, une régulation de débit ( $FT_2$ ,  $FC_2$ ) maintient à chaque instant le débit de sortie  $Q_s$  à une valeur constante (fig. 7.16). Dans ces conditions, la

variation de niveau s'exprime par :  $m_1(t) = 0,05 \int_0^t q_e(t) dt$

**Préréglages.** Avant la mise en service, les valeurs de préréglage introduites dans le régulateur de niveau sont : bande proportionnelle :  $B_p = 100 \%$  ; action intégrale :  $T_i = 10$  s ; structure du régulateur : série.

- ▷ Établir le plan de tuyauterie et d'instrumentation de la régulation de niveau (grandeur de réglage =  $Q_e$ ) et préciser le sens d'action du régulateur.

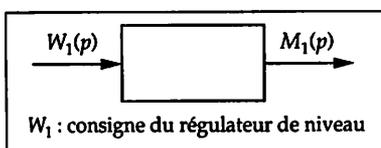


Figure 7.17

**Étude.** Le correcteur du régulateur de niveau admet pour fonction de transfert :

$$F_R(p) = \frac{Y_{R1}(p)}{\varepsilon(p)} = 1 + \frac{1}{80p} \text{ où } \varepsilon(p) \text{ est le signal d'écart.}$$

- ▷ Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en chaîne ouverte  $[F_R(j\omega) G(j\omega)]$ . Déterminer graphiquement la marge de phase. Que penser de la stabilité de la boucle ?

### 3 Régulation de température

Pour cette étude, on considère que la régulation de débit est correcte ( $M_2 = W_2$ ).

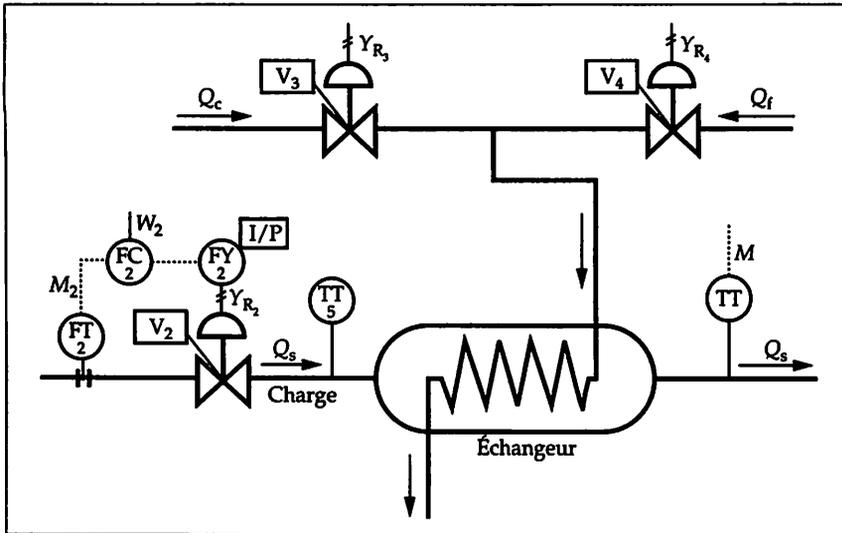


Figure 7.18

L'installation (fig. 7.18) doit assurer en sortie de l'échangeur une température constante de la charge égale à 26 °C (mesure M).

La température de la charge à l'entrée de l'échangeur varie de 10 à 40 °C. On dispose de deux canalisations apportant respectivement de l'eau chaude (débit  $Q_c$ ) et de l'eau froide (débit  $Q_f$ ).

▷ Justifier cette régulation appelée « chaud-froid ».

On désire utiliser un seul régulateur PID pour cette régulation de température. La vanne  $V_3$  est fermée par manque d'air (FMA).

- ▷ Rappeler le sens d'action de la vanne  $V_4$  et déterminer le sens d'action du régulateur.
- ▷ Représenter graphiquement le pourcentage d'ouverture des vannes en fonction du signal de sortie du régulateur.

Un essai a permis de déterminer :  $\frac{M(p)}{Y_{R_3}(p)} = \frac{M(p)}{Y_{R_4}(p)} = \frac{1,5 e^{-10p}}{30 p + 1}$

- ▷ Quelle nouvelle stratégie de la régulation faut-il envisager ? Pourquoi ?

## Problème 10 Régulation qualitative optimale d'un débit

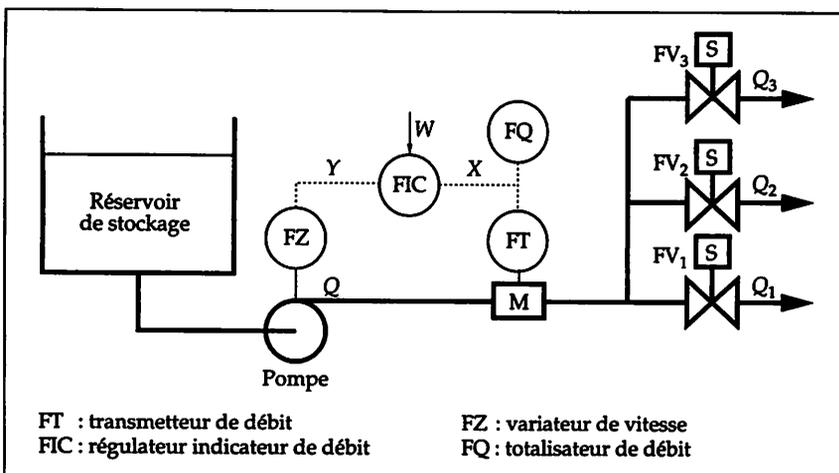


Figure 7.19

L'installation (fig. 7.19) permet d'alimenter en matière première trois mélangeurs à partir d'un réservoir de stockage. Pendant la fabrication, la vanne électromagnétique  $FV_1$  est toujours ouverte et le débit à l'entrée du mélangeur principal, c'est-à-dire le mélangeur 1, est  $Q_1$ . La demande de fabrication est variable et les débits à l'entrée des mélangeurs 2 et 3 sont respectivement appelés  $Q_2$  et  $Q_3$ . Les vannes électromagnétiques sont des vannes « tout ou rien ».

1 On réalise une identification du procédé par la méthode de la réponse indicielle en chaîne ouverte. Le régulateur FIC étant en position « manuel », on effectue un échelon d'amplitude 50 % du signal de sortie  $y$  du régulateur, et cela dans trois conditions :

- vanne  $FV_1$  ouverte et vannes  $FV_2$  et  $FV_3$  fermées : on obtient la courbe 1 (fig. 7.20) ;
- vannes  $FV_1$  et  $FV_2$  ouvertes et vanne  $FV_3$  fermée : on obtient la courbe 2 (fig. 7.20) ;
- vannes  $FV_1$ ,  $FV_2$  et  $FV_3$  ouvertes : on obtient la courbe 3 (fig. 7.20).

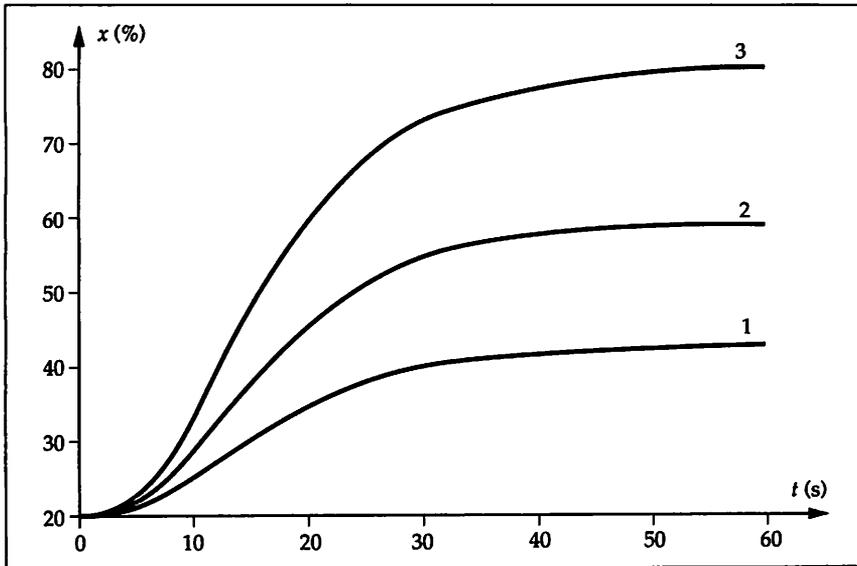


Figure 7.20

▷ À partir des courbes 1, 2 et 3 obtenues figure 7.20, identifier le procédé selon la méthode de Strejc. Les trois fonctionnements possibles conduisent à trois fonctions de transfert différentes qui sont notées :  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

- 2 Le gain statique est-il constant ? Un régulateur PID réglé avec une marge de gain de 2 assure-t-il la stabilité du système ? Pourquoi ?

### 3 Régulation qualitative optimale

Le gain statique n'étant pas constant, on décide de réaliser une régulation qualitative optimale dans le but d'obtenir une stabilité correcte quel que soit le point de fonctionnement. Le procédé est modélisé par un système autorégulant du troisième ordre (fig. 7.21).

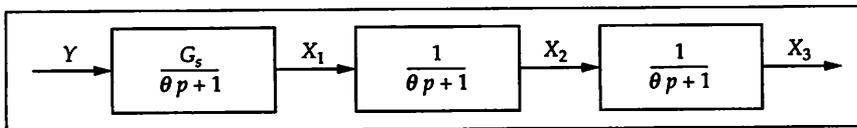


Figure 7.21

(fig. 7.21). Comme le fonctionnement le plus courant est l'alimentation du mélangeur 1 seul, le gain statique pris en compte pour cette étude est  $G_s = G_{s1}$ .

- ▷ Établir les équations :  $\dot{x}_1 = f(x_1, y)$ ,  $\dot{x}_2 = f(x_1, x_2)$  et  $\dot{x}_3 = f(x_2, x_3)$ . Établir ensuite l'équation d'état du modèle, c'est-à-dire la relation :  $x_3^{(n)} = f(y, x_1, x_2, x_3)$ .
- ▷ Établir le schéma fonctionnel représentant la structure de la régulation qualitative optimale de ce procédé (procédé, modèle, correcteur). Les retours d'états sont notés :  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .
- ▷ La réponse indicielle imposée entre la consigne corrigée  $W'$  et la mesure estimée  $\hat{X}$  est :  $\frac{\hat{X}(p)}{W'(p)} = \frac{1}{(\theta_d p + 1)^3}$ , où  $\theta_d$  est la constante de temps désirée pour la réponse. Exprimer la variation de la commande  $y$  en fonction de  $w'$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .
- ▷ Donner les expressions de  $G_r$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  à régler dans le correcteur en fonction des paramètres du procédé  $G_s$ ,  $\theta$  et de la constante imposée  $\theta_d$ .
- ▷ La constante de temps imposée est  $\theta_d = 5$  s. On donne :  $G_s = 0,45$  et  $\theta = 7$  s. Calculer les valeurs de  $G_r$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ .

### 4 Étude de la robustesse

Lorsque les trois mélangeurs doivent être alimentés, on sait que le gain statique augmente. En revanche le gain statique  $G_s$  du modèle reste inchangé.

- ▷ En supposant que le gain statique du procédé prend la valeur  $\alpha G_s$ , étudier la stabilité de ce système, puis déterminer la valeur maximale de  $\alpha$  engendrant la stabilité limite. Le changement de gain statique du procédé étudié peut-il entraîner l'instabilité du système ? La régulation qualitative optimale se justifie-t-elle ici ?

## Problème 1

### 1 ▷ Schéma fonctionnel

Les fonctions de transfert n'étant pas précisées, les blocs fonctionnels sont identifiés avec le nom de l'organe ou de l'appareil (fig. 7.22).

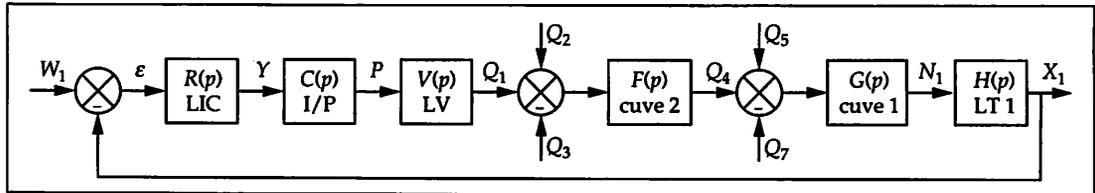


Figure 7.22

Les débits  $Q_2$  et  $Q_3$  vont déséquilibrer le niveau  $N_2$  et donc, par conséquent, le niveau  $N_1$ . Le régulateur LIC ne contrôlant que le débit  $Q_1$ , le niveau  $N_1$  va difficilement retrouver un équilibre tel que  $W_1 = X_1$ . Le temps de réponse risque d'être très important, et l'écart  $\varepsilon$  en régime transitoire peut être grand.

### ▷ Justification de l'amélioration

Le débit  $Q_5$  n'a presque pas d'influence sur le niveau  $N_1$  et le régulateur compense ces effets facilement. Le niveau  $N_1$  dépend du débit  $Q_4$  et le débit  $Q_4$  est proportionnel au niveau  $N_2$  ( $Q_4 = k N_2$ ). Les effets des perturbations les plus importantes des débits  $Q_2$  et  $Q_3$  peuvent être mesurés par l'intermédiaire de la grandeur  $N_2$ . Une régulation en cascade sur une grandeur intermédiaire (ici, le niveau  $N_2$ ) est envisageable (fig. 7.23). Les perturbations principales seront prises en compte immédiatement, le temps de réponse sera réduit, et l'écart en régime transitoire sera amoindri.

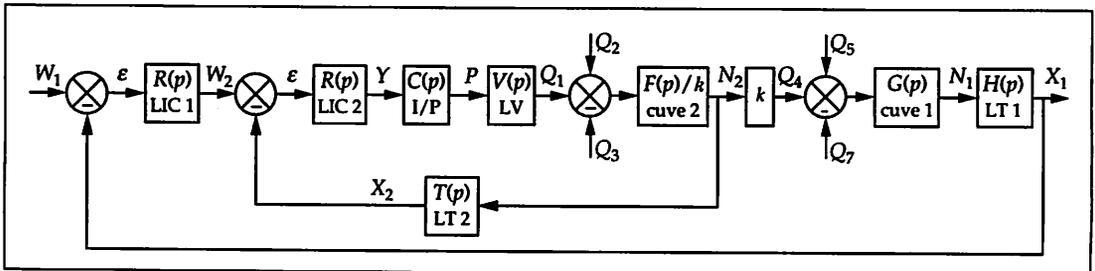


Figure 7.23

Le schéma d'installation (fig. 7.24) ne représente que la partie modifiée.

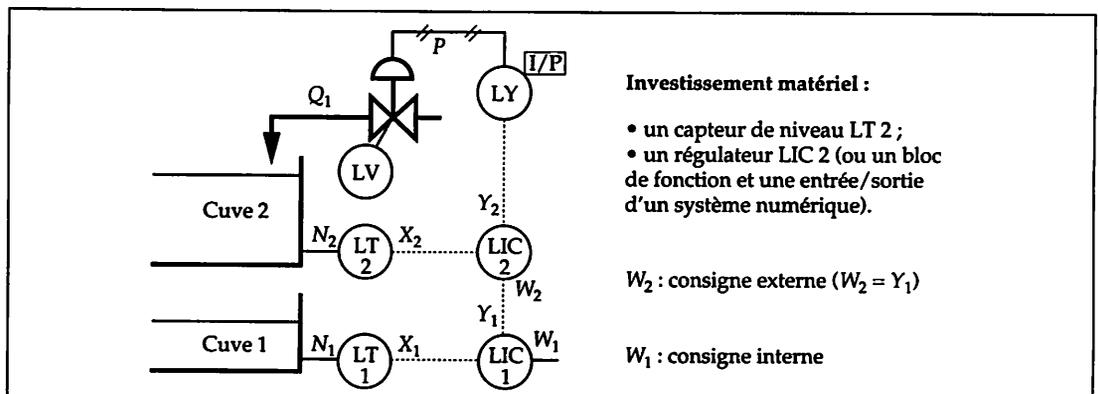


Figure 7.24

## 2 ▷ Schéma fonctionnel

Les fonctions de transfert n'étant pas précisées, les blocs fonctionnels sont identifiés avec le nom de l'organe ou de l'appareil (fig. 7.25).

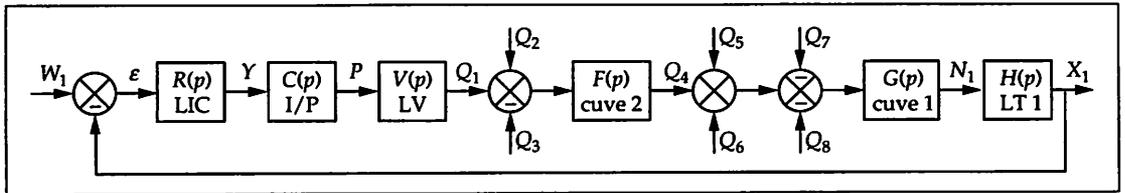


Figure 7.25

Le débit  $Q_2$  est très faible et n'agit pas directement sur le niveau  $N_1$ ; il ne pose pas de difficulté de régulation.

En revanche les débits  $Q_5$  et  $Q_6$  vont déséquilibrer le niveau  $N_1$  très rapidement et fortement. Le régulateur LIC ne peut compenser correctement les effets des débits  $Q_5$  et  $Q_6$  à cause de l'inertie de quelques minutes.

## ▷ Justification de l'amélioration

Il faut agir immédiatement sur la commande de la vanne LV lorsque la perturbation arrive. Le débit  $Q_5$  étant 9 fois plus important que le débit  $Q_6$ , il engendre des variations 9 fois plus grandes du niveau  $N_1$ . Dès que le débit  $Q_5$  augmente (diminue), il faut anticiper et diminuer (augmenter) le débit  $Q_1$ .

Une régulation mixte est alors envisageable (fig. 7.26). La prise en compte directe des variations du débit  $Q_5$  amoindrira les variations du niveau  $N_1$ .

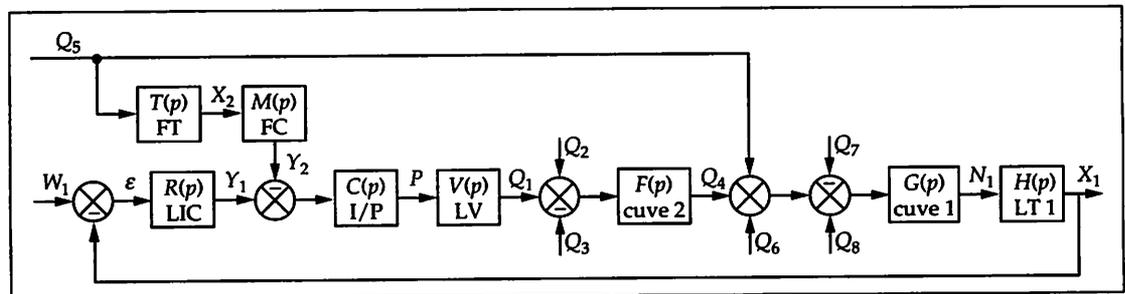


Figure 7.26

Le schéma d'installation (fig. 7.27) ne représente que la partie modifiée.

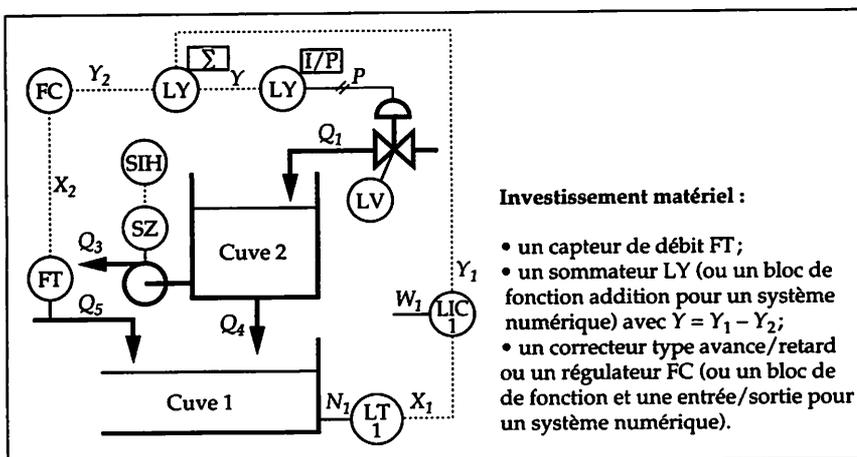


Figure 7.27

Si le choix se porte sur le régulateur FC, alors une consigne de débit doit être réglée. Celle-là ne sera jamais respectée car le régulateur FC est en chaîne ouverte, mais elle permettra de fixer un point de charge du débit  $Q_5$  autour duquel il faudra agir.

### 3 ▷ Schéma fonctionnel

Les fonctions de transfert n'étant pas précisées, les blocs fonctionnels sont identifiés avec le nom de l'organe ou de l'appareil (fig. 7.28).

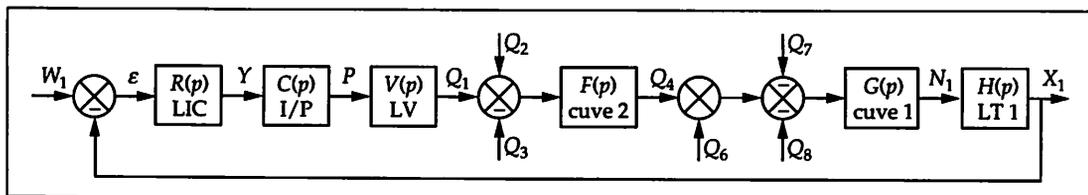


Figure 7.28

Le débit  $Q_3$  perturbe le niveau  $N_2$  et, par conséquent, le niveau  $N_1$ ; les mêmes effets que dans le cas 1 sont observés.

### ▷ Justification de l'amélioration

La régulation en cascade ne peut être envisagée puisqu'aucun capteur ne peut être installé.

Dès que le débit  $Q_3$  augmente (diminue), il faut augmenter (diminuer) le débit  $Q_1$  par l'intermédiaire d'un correcteur (SC).

Un débitmètre n'étant pas disponible, c'est le signal de commande  $U$  du variateur de vitesse qui est pris en compte pour compenser directement  $Q_1$  ( $U$  est l'image de  $Q_3$ , sauf incident technique; fig. 7.29). Si un système numérique est utilisé pour cette régulation, la caractéristique commande/débit peut être mise en mémoire dans un « caractérisateur » ou « linéarisateur ».

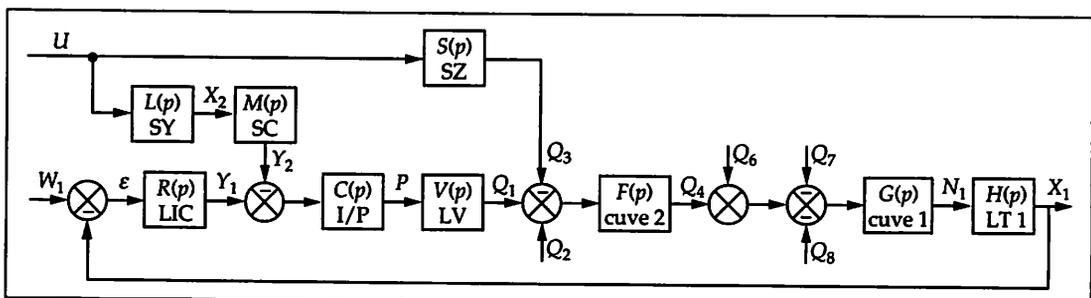


Figure 7.29

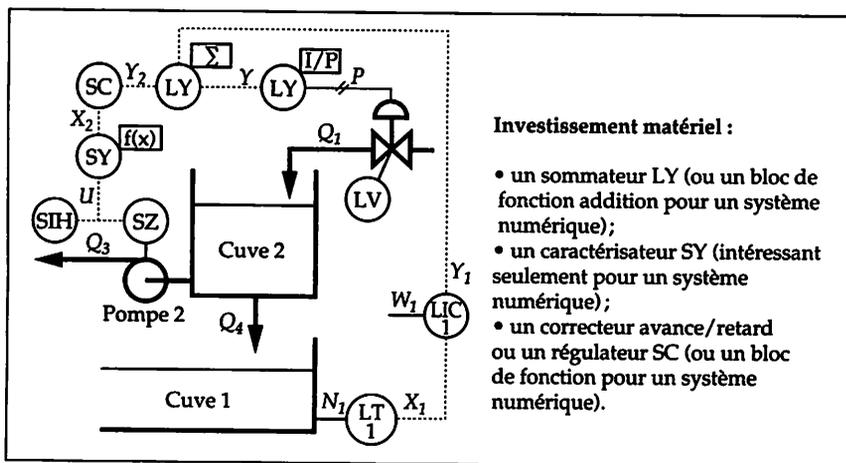


Figure 7.30

#### Investissement matériel :

- un sommateur LY (ou un bloc de fonction addition pour un système numérique);
- un caractérisateur SY (intéressant seulement pour un système numérique);
- un correcteur avance/retard ou un régulateur SC (ou un bloc de fonction pour un système numérique).

Si le choix se porte sur le régulateur SC, alors une consigne de débit doit être réglée. Celle-ci ne sera jamais respectée car SC est en chaîne ouverte, mais elle permettra de fixer un point de charge du débit  $Q_3$  autour duquel il faudra agir.

## Problème 2

### 1 Plan de tuyauterie et d'instrumentation

On réalise un positionneur par le système de commande numérique (fig. 7.31). On mesure la position du clapet par le fil de recopie (noté ZT) pour transmettre les effets

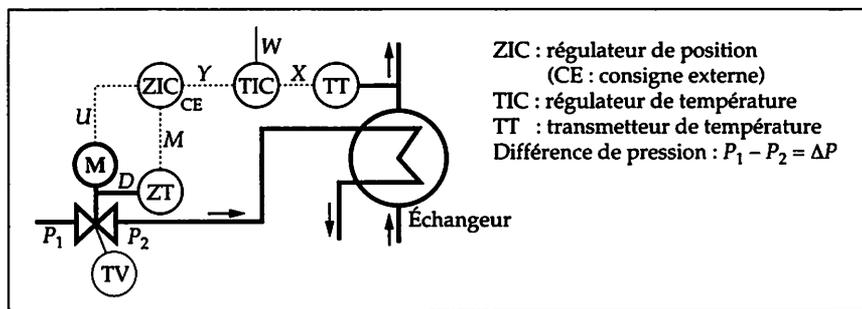


Figure 7.31

des perturbations dues à la différence de pression  $\Delta P$ . On agit donc directement sur la vanne électrique (TV). La régulation effectuée est une régulation en cascade sur la grandeur réglante (ou une grandeur représentant celle-là). Le temps de réponse et les effets en amplitude sur la température sont diminués.

### 2 Schéma fonctionnel

La sortie  $Y$  de  $R(p)$  devient la consigne externe du régulateur  $C(p)$  (fig. 7.32).

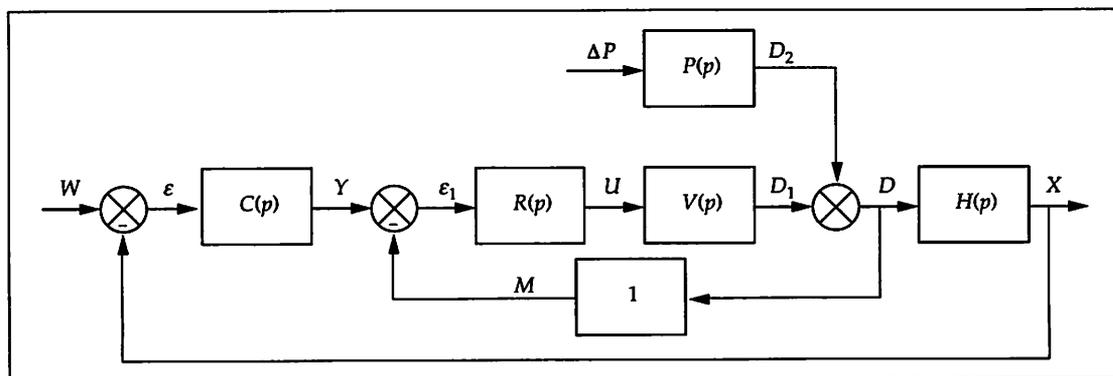


Figure 7.32

La mesure électrique  $M$  de la position  $D$  du clapet est très rapide, et les grandeurs  $M$  et  $D$  sont exprimées en pourcentages, aussi la fonction de transfert du recopieur de position est-elle  $M(p)/D(p) = 1$ .

### 3 Correcteur à action proportionnelle

Puisque la constante de temps de  $V(p)$  est très faible devant celle de  $H(p)$ , un régulateur  $R(p)$  à action proportionnelle à grand gain suffit (stabilité absolue). En effet, en régime permanent on obtiendra :

$$\frac{D(p)}{Y(p)} = \frac{R(p) V(p)}{1 + R(p) V(p)} = \frac{\frac{G_r}{G_r + 1}}{1 + \frac{\tau p}{G_r + 1}}$$

$\lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{D}{Y} \right) = \frac{G_r}{1 + G_r} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{D}{Y} \right) = \frac{20}{21} = 0,95$ . Ce résultat correspond à un positionnement précis à 5 % près. La constante apparente du système en boucle fermée est :  $\tau' = 0,31$  s ( $\tau$  divisée par  $1 + G_r$ , soit 21!). Le temps de réponse à 5 % est  $t_r = 3 \tau' = 0,93$  s.

Avec un tel gain, la saturation du régulateur ZIC est à craindre, mais seulement pendant un court instant, la boucle interne étant très rapide devant  $H(p)$ . Un à-coup aussi bref ne se répercutera pas sur la température.

#### 4 Expression de la mesure $X(p)$ en fonction de $\Delta P(p)$

À partir du schéma fonctionnel de la figure 7.32, on établit :

$$X(p) = \frac{P(p)H(p)}{1 + R(p)V(p) + R(p)V(p)C(p)H(p)} \Delta P(p)$$

Pour  $\Delta P(p) = \alpha/p$ , il vient :

$$X(p) = \frac{\alpha}{p} \frac{\frac{K_s}{T p + 1} \frac{G_s}{\theta p + 1}}{1 + G_r \frac{K_i}{p} + \frac{G_r}{\tau p + 1}}$$

$$X(p) = \frac{\alpha K_s G_s (\tau p + 1)}{K_i G_r (T p + 1) (\theta p + 1) \left( \frac{\tau}{G_r K_i} p^2 + \frac{G_r + G_r K_i \tau + 1}{G_r K_i} p + 1 \right)}$$

#### 5 Expression de la mesure $X(t)$

$$X(p) = 0,25 \frac{0,9(0,1 p + 1)}{(2 p + 1)(14 p + 1)(4,3 p + 1)(0,0046 p + 1)}$$

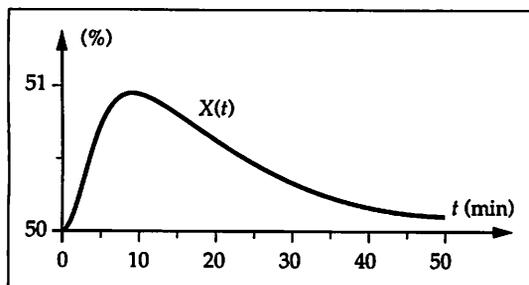


Figure 7.33

En simplifiant par les constantes de temps inférieures à 0,15 min, on obtient :

$$X(p) = 0,25 \frac{0,9}{(2 p + 1)(14 p + 1)(4,3 p + 1)}$$

$X(t) = X_0 + 0,9 \alpha [A e^{-t/2} + B e^{-t/14} + C e^{-t/4,3}]$ , soit :

$$X(t) = 0,5 + 0,225 [0,072 e^{-t/2} + 0,120 e^{-t/14} - 0,193 e^{-t/4,3}]$$

La réponse  $X(t)$  est représentée figure 7.33.

La durée du régime transitoire est pratiquement la même que celle obtenue en 5 au problème 3 du chapitre 6, mais ici la mesure varie de moins de 1 %. Les effets de la perturbation sont donc très atténués.

#### 6 Période d'échantillonnage

En théorie (théorème de Shannon), la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  doit être supérieure ou égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal étudié. En pratique, il est souhaitable de fixer  $T_e \leq \tau'/10$ . Donc ici, on choisit :  $T_e = 31$  ms, valeur arrondie à :  $T_e = 30$  ms

#### 7 Algorithme de calcul du correcteur $R(Z)$

Dans ce calcul, les valeurs numériques  $Y(n)$ ,  $M(n)$ ,  $U(n)$  et  $U_0$  sont comprises dans une étendue d'échelle fixée arbitrairement de 0 à 100.

- Répéter tous les intervalles de temps  $T_e$ .
- Lire  $Y(n)$ .
- Lire  $M(n)$ .

- Calculer  $U(n) = G_r [Y(n) - M(n)] + U_0$  avec  $U_0 = 50$  :  
 si  $U(n) \leq 0$ , alors  $U(n) = 0$ ,  
 si  $U(n) \geq 100$ , alors  $U(n) = 100$ .
- Émettre  $U(n)$ .
- Attendre la fin de la durée  $T_e$ .

### 8 Amplitude maximale $y_M$

Pour  $M = Y = 0,5$  on a  $U = 0,5$ . Lors d'un changement de  $Y$  en échelon, la saturation est de 100 % et la variation maximale du signal de commande  $U$  est  $u_s = 0,5$ .

$$u_s = G_r y_M \Rightarrow y_M = 0,5/20 \Rightarrow y_M = 2,5 \%$$

Donc, si  $Y$  varie de 2,5 %, le signal de commande  $U$  est hors des limites 0-100 %.

Si  $G_r = 15$ , alors le signal  $U$  est supérieur à 100 % pour  $y_M = 0,033$ , soit 3,3 %.  
 Si  $G_r = 10$ , alors le signal  $U$  est supérieur à 100 % pour  $y_M = 0,05$ , soit 5 %.

## Problème 3

### 1 Valeur de $K_r$

Le rapport désiré est  $R_0 = 6$ . Pour le réglage de la valeur de  $K_r$ , il faut tenir compte des étendues d'échelle (EE) des débitmètres, soit :  $K_r = R_0 \frac{EE(FT_1)}{EE(FT_2)}$ . On obtient :

$$K_r = 6 \times \frac{10}{50} = 1,2 \Rightarrow K_r = 1,2$$

### 2 Schéma fonctionnel du système (fig. 7.34)

Il décrit une régulation en cascade comprenant une boucle interne qui est une régulation de proportion, et une boucle externe qui est une régulation de densité.

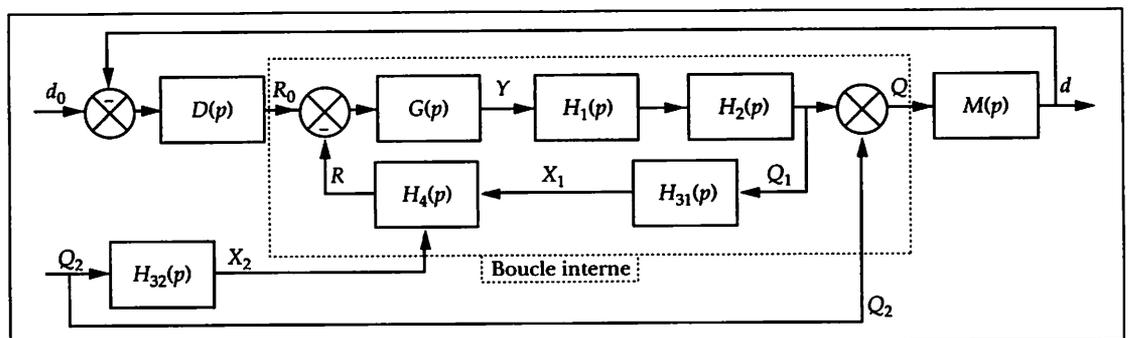


Figure 7.34

### 3 Choix du régulateur

L'action proportionnelle est énergique et rapide. L'action intégrale ne serait justifiée que pour la précision qu'elle apporte, mais, pour un système rapide comme celui-là, elle engendrerait de l'instabilité. La précision sera obtenue par l'action intégrale du régulateur DIC, c'est-à-dire par le régulateur maître de la régulation en cascade. L'action dérivée introduit une avance de phase et améliore donc la stabilité.

#### 4 Choix de la valeur du temps $T_d$

$T_d = \theta_4$  : cela permet d'éliminer la constante de temps la moins élevée dans la partie constituant le retour d'asservissement. On diminue ainsi le risque d'instabilité aux plus hautes fréquences.

$$H(p) = \frac{Q(p)}{R_0(p)} = \frac{G(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + G(p) H_1(p) H_2(p) H_{31}(p) H_4(p)}$$

$$H(p) = \frac{\frac{G_r G_s (T_d p + 1)}{(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)}}{1 + \frac{K_r G_r G_s (T_d p + 1)}{(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_{31} p + 1)(\theta_4 p + 1)}}$$

À partir de ce même principe, un autre choix pourrait être :  $T_d = \theta_{31}$  puisque ces deux constantes sont du même ordre de grandeur. Mais la constante de temps d'un débitmètre est généralement réglable et peut être modifiée par exemple pour opérer un filtrage ou une adaptation avec la constante de temps  $\theta_{32}$ , les constantes de temps  $\theta_{31}$  et  $\theta_{32}$  devant être identiques.

#### 5 Stabilité de la boucle interne

En simplifiant par  $T_d = \theta_4$  on obtient :

$$H(p) = \frac{G_r G_s (T_d p + 1)(\theta_{31} p + 1)}{(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_{31} p + 1) + K_r G_r G_s} = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Dén}(p)}$$

$$\text{Dén}(p) = (\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_{31} p + 1) + K_r G_r G_s$$

$$\text{Dén}(p) = \theta_1 \theta_2 \theta_{31} p^3 + (\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_{31} + \theta_1 \theta_{31}) p^2 + (\theta_{31} + \theta_1 + \theta_2) p + 1 + K_r G_r G_s$$

soit :  $\text{Dén}(p) = a p^3 + b p^2 + c p + 1 + K_r G_r G_s$

Le système est stable si tous les termes de la première colonne du tableau de Routh (tableau 7.4) sont de même signe. Il est certain que l'on a :  $a > 0$ ,  $b > 0$  et

$p^3$	$a$	$c$
$p^2$	$b$	$1 + K_r G_r G_s$
$p^1$	$\alpha = \frac{bc - a(K_r G_r G_s)}{b}$	0
$p^0$	$1 + K_r G_r G_s$	

$$1 + K_r G_r G_s > 0.$$

Tableau 7.4.

Pour avoir  $\alpha = \frac{bc - a(1 + K_r G_r G_s)}{b} > 0$ ,

il faut avoir :  $G_r < \left(\frac{bc}{a} - 1\right) \frac{1}{K_r G_s}$

L'application numérique montre que la boucle est stable si  $G_r < \frac{7,16}{K_r}$  (fig. 7.35).

Par exemple si  $G_r$  est fixé à 8 alors :

- si  $K_r = 0,8$ , la boucle est stable ;
- si  $K_r = 1,2$ , la boucle est instable.

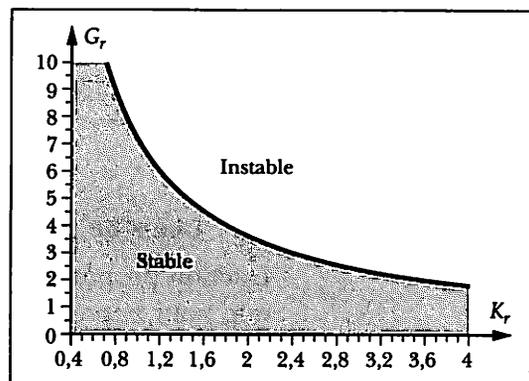


Figure 7.35

La stabilité dépend de  $K_r$ , c'est-à-dire surtout du débit  $Q_2$ . Le choix du gain du régulateur dépend toujours de la sensibilité du procédé. Si le rapport  $K_r$  est inversé  $\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)$ , le gain  $G_r$  doit être changé.

Que l'on fasse donc  $\frac{Q_2}{Q_1}$  ou  $\frac{Q_1}{Q_2}$ , la stabilité est à étudier.

## 6 Écart statique $\varepsilon_s$

Pour une variation  $\Delta R_0$  en échelon de  $R_0(p)$  :  $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \frac{\Delta R_0}{1 + G_r G_s K_r}$

Pour  $G_r = 8$ , on obtient :  $\varepsilon_s = \frac{\Delta R_0}{1 + 8 \times 1,6 \times 0,8} \Rightarrow \varepsilon_s = 8,9\% \Delta R_0$

C'est acceptable (boucle interne) mais attention, cet écart dépend de  $K_r$  et donc du débit  $Q_2$ !

## 7 Valeurs de $K_{r_1}$ et $K_{r_2}$

Pour un gain  $G_r$  fixé à 8 et pour un débit constant  $Q_2 = 25 \text{ m}^3/\text{h}$  :

- pour  $Q_1 = 6,25 \text{ m}^3/\text{h}$ , on a :  $K_{r_1} = \frac{25}{6,25} \times \frac{1}{5} \Rightarrow K_{r_1} = 0,8$  ; la boucle est stable puisque :  $8 < \frac{7,16}{K_{r_1}}$  ;

- pour  $Q_1 = 4 \text{ m}^3/\text{h}$ , on a :  $K_{r_2} = \frac{25}{4} \times \frac{1}{5} \Rightarrow K_{r_2} = 1,25$  ; la boucle est instable puisque :  $8 > \frac{7,16}{K_{r_2}}$ .

## 8 Stabilité en fonction de $K_r$

Pour  $G_r = 5$ , la valeur limite de  $K_r$  pour la stabilité est :  $K_r < \frac{7,16}{5} \Rightarrow K_r < 1,43$

## 9 Limiteur du signal $R$ et réglages

Une limitation haute du signal  $R$  de sortie du diviseur  $FY_1$  permettra la stabilité de la boucle.

Pour  $G_r = 5$ , la limite de  $K_r$  est 1,43 ; on peut donc fixer par exemple à 1,25 la limite haute du signal  $S$  de sortie du diviseur  $FY_3$ .

Donc : • si  $R < \text{limite haute (1,25)}$ , alors  $S = R$  ;  
• si  $R > \text{limite haute (1,25)}$ , alors  $S = 1,25$ .

Le relais limiteur  $FY_3$  est à insérer entre le diviseur  $FY_1$  et le régulateur  $FIC$  comme le montre le schéma de la figure 7.36.

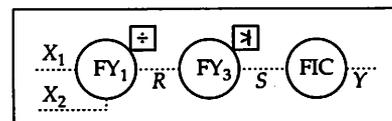
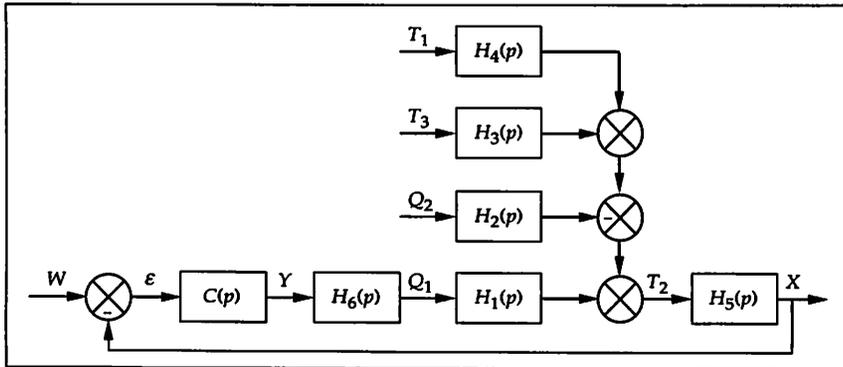


Figure 7.36

Une autre solution consisterait à diminuer  $G_r$  quand  $K_r$  augmente. Cette solution est réalisable à l'aide de fonctions de calcul des systèmes numériques de contrôle-commande.

## Problème 4

### 1 Schéma fonctionnel (fig. 7.37)



Attention ! pour  $H_2(p)$  le signe - résulte du fait que si  $Q_2$  augmente, alors  $T_2$  diminue.

Figure 7.37

### 2 Diagramme de Nyquist

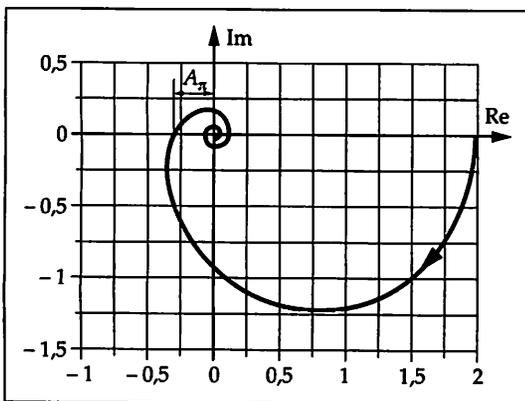


Figure 7.38

La fonction de transfert en chaîne ouverte s'écrit :

$$A(p) = C(p) H_6(p) H_1(p) H_5(p) \Rightarrow$$

$$A(p) = C(p) H_1(p) = \frac{G_r G_1 e^{-\tau_1 p}}{\theta_1 p + 1}$$

$$\text{Le module est : } |A(j\omega)| = \frac{G_r G_1}{\sqrt{\theta_1^2 \omega^2 + 1}}$$

et l'argument est :  $\text{Arg}(A(j\omega)) = -\tau_1 \omega - \arctan(\theta_1 \omega)$ .

Le tracé de  $A(j\omega)$  dans le plan de Nyquist pour  $G_r = 1$  est représenté figure 7.38.

Le module  $A_\pi$  mesuré pour  $\arg(A(j\omega)) = -\pi$  vaut  $A_\pi = 0,28$ .

La valeur du gain critique est donc :

$$G_{rc} = 1/0,28 \Rightarrow \boxed{G_{rc} = 3,57}$$

### 3 Influence des perturbations sur la stabilité

Les grandeurs perturbatrices  $T_3$ ,  $T_1$  et  $Q_2$  n'influencent pas la stabilité de la boucle de régulation, puisque la stabilité ne dépend que du dénominateur  $1 + C(p) H_1(p)$  de la fonction :

$$X(p) = \frac{1}{1 + C(p) H_1(p)} [C(p) H_1(p) W(p) - H_2(p) Q_2(p) + H_3(p) T_3(p) + H_4(p) T_1(p)]$$

### 4 Écart statique $\epsilon_s$

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \epsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{W(p)}{1 + C(p) H_1(p)} \right] \Rightarrow \epsilon_s = \frac{A}{1 + G_r G_1}$$

L'écart minimal serait obtenu avec le gain maximal  $G_{rc}$  assurant la stabilité limite, soit :

$$\epsilon_s = \frac{A}{1 + G_r G_1} \Rightarrow \epsilon_s = \frac{0,1}{1 + 3,57 \times 2} \Rightarrow \boxed{\epsilon_s = 0,012} \text{ c'est-à-dire } 1,2 \% \text{ de } A.$$

Pour des raisons évidentes de stabilité, le gain  $G_r$  ne peut être supérieur à 2 et l'écart statique ne peut être inférieur à 20 % de  $A$ .

## 5 Régulation proportionnelle

Elle n'est pas satisfaisante à cause de l'écart statique trop important. En effet, si la température  $T_2$  n'est pas celle demandée en consigne, le gaz risque de ne pas être liquéfié!

## 6 Écart statique en régulation PID

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{W(p)}{1 + C(p)H_1(p)} \right] \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{A}{1 + G_r \frac{1 - 0,5 \sigma_1 p}{T_i p}} \right] \Rightarrow \boxed{\varepsilon_s = 0}$$

L'écart statique est satisfaisant puisque nul ; la liquéfaction du gaz peut se faire correctement.

## 7 Réponse à une perturbation

$$\frac{X(p)}{Q_2(p)} = \frac{-H_2(p)}{1 + C(p)H_1(p)} = \frac{-G_2 e^{-\tau_2 p}}{1 + \theta_2 p} \frac{1}{1 + \frac{G_r G_1 (1 - 0,5 \tau_1 p)}{T_i p}}$$

$$\frac{X(p)}{Q_2(p)} = \frac{-G_2 e^{-\tau_2 p}}{1 + \theta_2 p} \frac{\frac{T_i}{G_r G_1} p}{1 + \frac{(2 T_i - G_r G_1 \tau_1)}{2 G_r G_1} p}. \text{ En posant : } G = \frac{T_i}{G_r G_1} \text{ et } \theta = \frac{2 T_i - G_r G_1 \tau_1}{2 G_r G_1},$$

pour  $Q_2(p) = A/p$  on obtient :  $X(p) = -A \frac{G_2 e^{-\tau_2 p}}{1 + \theta_2 p} \frac{G}{1 + \theta p}$

À l'aide des transformées de Laplace, on trouve la réponse suivante :

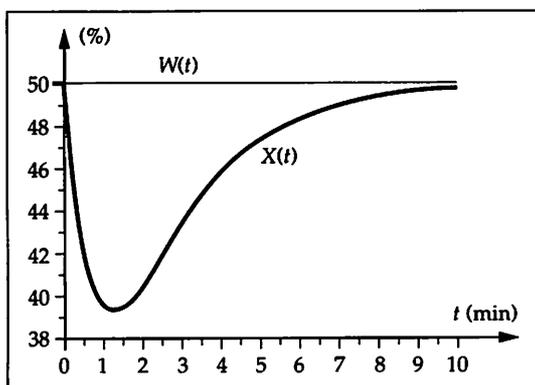


Figure 7.39

$$x(t) = -AG_2 G \left[ \frac{e^{-(t-\tau_2)/\theta_2} - e^{-(t-\tau_2)/\theta}}{\theta_2 - \theta} \right] \Rightarrow \boxed{x(t) = -0,4 \left[ \frac{e^{-(t-0,4)/2} - e^{-(t-0,4)/0,83}}{1,17} \right]}$$

Si la mesure est à 50 % avant le changement de 10 % du débit  $Q_2$ , on obtient la réponse  $X(t)$  de la figure 7.39.

La mesure s'éloigne de plus de 10 % de la consigne et il faut une dizaine de minutes pour que la mesure redevienne égale à la consigne : la liquéfaction risque de ne pas s'effectuer correctement.

## 8 Modification du schéma fonctionnel initial

On insère le correcteur de fonction de transfert  $C_1(p)$  pour qu'il corrige le signal de commande élaboré par  $C(p)$  dès que le débit  $Q_2$  évolue. Ainsi, l'influence du débit  $Q_2$

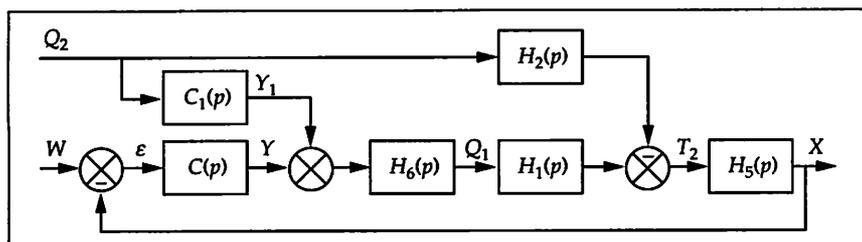
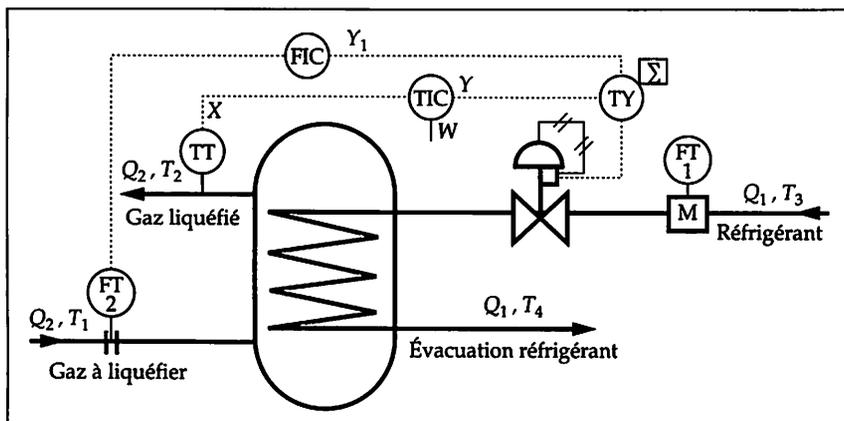


Figure 7.40

sur la température  $T_2$ , donc sur la mesure  $X$ , est très atténuée. Le schéma fonctionnel de cette régulation, appelée régulation mixte ou régulation de tendance, est représenté figure 7.40.

La mesure du débit  $Q_2$  doit être effectuée par un débitmètre. La fonction de transfert de ce débitmètre est considérée comme égale à 1 dans le schéma de la figure 7.40.

## 9 Nouveau plan de tuyauterie et d'instrumentation (fig. 7.41)



FIC : correcteur de tendance dont la fonction de transfert est  $C_1(p)$ .  
FY : sommateur (les signaux Y et  $Y_1$  sont additionnés).

Figure 7.41

## 10 Fonction de transfert idéale de $C_1(p)$

Elle doit permettre d'annuler complètement les effets du débit  $Q_2$  sur la mesure X. Pour déterminer  $C_1(p)$ , on exprime  $X(p)$  en fonction de  $Q_2(p)$  à partir du schéma fonctionnel de la figure 7.40 :

$$X(p) = \frac{H_2(p) - C_1(p)H_1(p)}{1 + C(p)H_1(p)} Q_2(p)$$

Pour que X ne varie pas lorsque le débit  $Q_2$  varie, il faut avoir :  $H_2(p) - C_1(p)H_1(p) = 0$

La fonction de transfert idéale de  $C_1(p)$  est donc :  $C_1(p) = \frac{H_2(p)}{H_1(p)}$

## 11 Réglages de $C_1(p)$ si le temps mort est $\tau_1$

$$C_1(p) = \frac{H_2(p)}{H_1(p)} = \frac{G_2 e^{-\tau_1 p}}{G_1 e^{-\tau_1 p} (1 + \theta_2 p)} \Rightarrow C_1(p) = \frac{G_2}{G_1} \frac{1 + \theta_1 p}{1 + \theta_2 p}$$

On obtient une fonction de transfert d'un correcteur appelé avance-retard : l'amplification est le rapport  $G_2/G_1$ , la constante de temps  $\theta_1$  correspond à l'avance de phase et la constante de temps  $\theta_2$  correspond au retard de phase.

Le réglage du correcteur est :  $C_1(p) = 1,5 \frac{1 + 4p}{1 + 2p}$

Ce correcteur correspond également à un correcteur à action proportionnelle et dérivée filtrée.

## 12 Réglages de $C_1(p)$ si le temps mort est $\tau_2$

$$C_1(p) = \frac{H_2(p)}{H_1(p)} = \frac{G_2 e^{-\tau_2 p}}{G_1 e^{-\tau_1 p} \frac{1 + \theta_2 p}{1 + \theta_1 p}} \Rightarrow C_1(p) = \frac{G_2 e^{-\tau_2 p}}{G_1 e^{-\tau_1 p}} \frac{1 + \theta_1 p}{1 + \theta_2 p}$$

En posant :  $e^{-\tau p} \approx \frac{1}{1 + \tau p + 0,5 \tau^2 p^2}$ , on obtient :  $C_1(p) = \frac{G_2(1 + \tau_2 p + 0,5 \tau_2^2 p^2)(1 + \theta_1 p)}{G_1(1 + \tau_1 p + 0,5 \tau_1^2 p^2)(1 + \theta_2 p)}$

Cette fonction de transfert n'est pas courante dans les appareils industriels, c'est pourquoi une simplification de  $C_1(p)$  est nécessaire. On développe le numérateur et le dénominateur de  $C_1(p)$ , puis on ne garde que les termes de premier degré, soit :

$$C_1(p) = 1,5 \frac{(1 + 4,2 p)}{(1 + 2,5 p)}$$

On obtient une fonction identique à celle trouvée à la question 117. Ce correcteur a été obtenu après simplification et des essais seront nécessaires pour affiner les réglages.

## Problème 5

### 1 Schéma fonctionnel de la régulation en cascade d'un niveau (fig. 7.42)

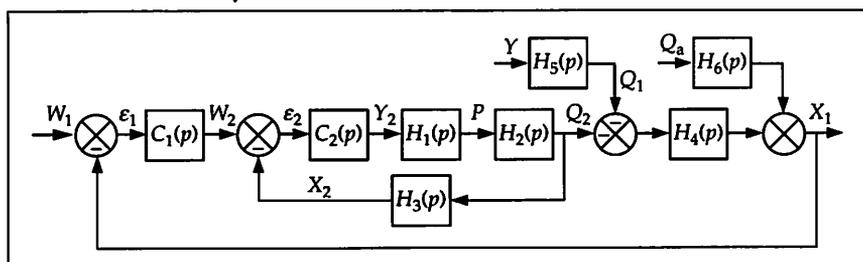


Figure 7.42

Le signal de sortie  $Y_1$  du régulateur de niveau est la consigne  $W_2$  du régulateur de débit ( $Y_1 = W_2$ ). Les signes - en entrée de  $H_4(p)$  montrent que  $X_1$  évolue en sens opposé de  $Q_1$  et de  $Q_2$ .

### 2 Fonction de transfert théorique $C(p)$ du régulateur

La fonction de transfert en chaîne fermée est :  $F_2(p) = \frac{Q_2(p)}{Y_1(p)} = \frac{C(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + C(p) H_1(p) H_2(p) H_3(p)}$

Comme on veut imposer  $F_2(p) = \frac{1}{1 + \theta_{d_2} p}$ , on obtient :

$$C(p) = \frac{1}{\theta_{d_2} p H_1(p) H_2(p)} = \frac{1 + \theta p}{\theta_{d_2} p G_s e^{-\tau p}} \Rightarrow C(p) = \frac{1}{G_s} \frac{1 + \theta p}{\theta_{d_2} p} e^{\tau p}$$

### 3 Fonctions de transfert des régulateurs LIC et FC

#### ▷ Correspondance entre $C(p)$ et $C_2(p)$

Le régulateur proposé ne correspond pas tout à fait au régulateur calculé en 2 :

$$C(p) = \frac{1}{G_s} \frac{1 + \theta p}{\theta_{d_2} p} e^{\tau p} \neq C_2(p) = G_r \left( \frac{T_i p + 1}{T_i p} + T_d p \right)$$

Le terme  $e^{\tau p}$  signifie que la sortie  $Y_2$  est en avance par rapport à  $\varepsilon_2$  ; c'est impossible physiquement. Ce correcteur ne peut donc pas être réalisé techniquement.

▷ **Modèle de  $H(p)$**

On constate que le temps mort  $\tau$  est faible ( $\theta/\tau = 10,5$ ) devant  $\theta$ , le modèle de Broïda

peut donc être modifié et devenir : 
$$H(p) = \frac{G_s}{(1 + \theta p)(1 + \tau p)}$$

▷ **Actions du régulateur de débit  $C_2(p)$**

À partir des résultats trouvés ci-dessus on obtient directement :  $C_2(p) = \frac{1}{G_s} \frac{1 + \theta p}{\theta_{d_2} p} (1 + \tau p)$

Soit :  $C_2(p) = \frac{\theta}{G_s \theta_{d_2}} \frac{1 + \theta p}{\theta p} (1 + \tau p) \Rightarrow \boxed{G_r = \frac{\theta}{G_s \theta_{d_2}}} \quad \boxed{T_i = \theta} \quad \boxed{T_d = \tau}$

Application numérique :  $\boxed{G_r = 4,94} \quad \boxed{T_i = 4,2 \text{ s}} \quad \boxed{T_d = 0,4 \text{ s}}$

Lorsque, à la suite d'une perturbation, la mesure  $X_2$  augmente, le régulateur doit augmenter le signal  $Y_2$  pour provoquer la fermeture de la vanne. Le débit  $Q_2$  diminuera et la mesure  $X_2$  sera donc rétablie. Le régulateur doit être à action directe.

**4 Réponses indicielles de  $H_{1S}(p)$  et  $H_B(p)$**

Pour le modèle de Strejc  $\Rightarrow X_{1S}(p) = \frac{\Delta Y_1}{p} \frac{k}{p(1 + T p)^2} \Rightarrow x_{1S} = \Delta Y_1 k [t - 2T + (t + 2T) e^{-t/T}]$   
 $\Rightarrow \boxed{x_{1S} = 0,0065 [t - 20 + (t + 20) e^{-t/10}]}$

Pour le modèle de Broïda  $\Rightarrow X_{1B}(p) = \frac{\Delta Y_1}{p} \frac{k e^{-\tau p}}{p(1 + \theta p)} \Rightarrow x_{1B} = \Delta Y_1 k \theta \left[ e^{-(t-\tau)/\theta} + \frac{t-\tau}{\theta} - 1 \right]$   
 $\Rightarrow \boxed{x_{1B} = 0,117 \left[ e^{-(t-2)/18} + \frac{t-2}{18} - 1 \right]}$

Pour le modèle  $H_R(p) = X_{1R}(p) = \frac{\Delta Y_1}{p} \frac{k}{p(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}$   
 $\Rightarrow x_{1R} = \Delta Y_1 k \left[ t - \theta_1 - \theta_2 - \frac{1}{\theta_1 - \theta_2} (\theta_1^2 e^{-t/\theta_2} - \theta_2^2 e^{-t/\theta_1}) \right]$   
 $\Rightarrow \boxed{x_{1R} = 0,0065 \left[ t - 20 = \frac{1}{16} (4 e^{-t/2} - 324 e^{-t/18}) \right]}$

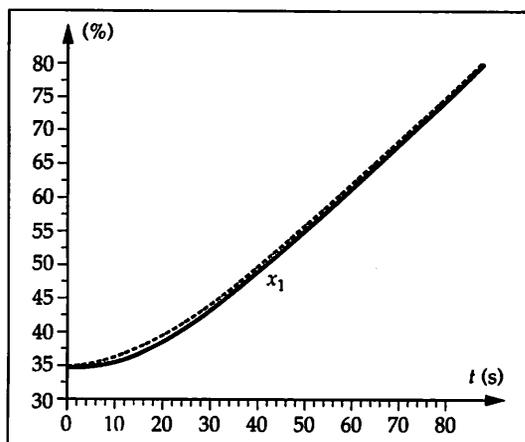


Figure 7.43

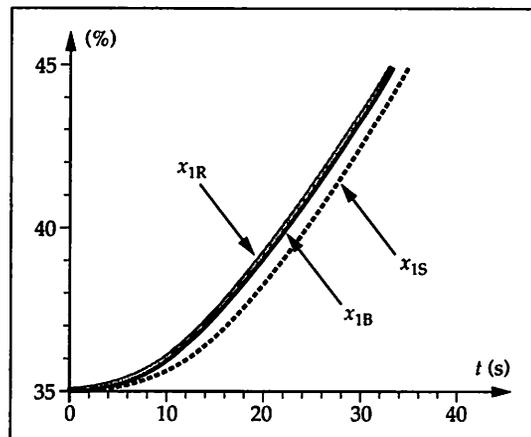


Figure 7.44

Sur la figure 7.43, on constate que la différence entre les trois modèles n'est pas très importante. Un agrandissement (fig. 7.44) permet d'observer que les deux réponses  $x_{1B}$  et  $x_{1R}$  sont les plus proches de la courbe réelle. Le modèle  $H_R(p)$  représente donc bien le procédé.

## 5 Connaissance de $H_4(p)$

On sait que :  $\frac{X_1(p)}{Y_1(p)} = \frac{k}{p(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}$  et  $\frac{X_1(p)}{Y_1(p)} = F_2(p) H_4(p) = \frac{1}{1 + \theta_{d_2} p} H_4(p)$

Il est donc facile d'obtenir la fonction de transfert :  $H_4(p) = \frac{k(1 + \theta_{d_2} p)}{p(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}$

$$\text{soit : } H_4(p) = \frac{0,065(1 + p)}{p(1 + 2p)(1 + 18p)}$$

On peut simplifier cette fonction de transfert, en posant :  $1 + 2p \approx (1 + p)^2$

La fonction de transfert  $H_4(p)$  devient :  $H_4(p) \approx \frac{0,065}{p(1 + p)(1 + 18p)}$

## 6 Actions du régulateur de niveau $C_1(p)$

La fonction de transfert en chaîne fermée est :  $F_1(p) = \frac{X_1(p)}{W_1(p)} = \frac{C_1(p) H_R(p)}{1 + C_1(p) H_R(p)}$

Comme on veut imposer  $F_1(p) = \frac{1}{1 + \theta_{d_1} p}$ , la fonction de transfert  $C_1(p)$  doit être égale à :

$$C_1(p) = \frac{1}{\theta_{d_1} p H_R(p)} = \frac{p(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}{\theta_{d_1} p k} \Rightarrow C_1(p) = \frac{(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}{\theta_{d_1} k}$$

La fonction de transfert  $C_1(p)$  trouvée ne correspond pas exactement à la fonction de transfert proposée pour le régulateur de niveau. En effet, on obtient :

$$C_1(p) \approx G_r(1 + T_d p)(1 + \theta_1 p) \quad \text{avec : } G_r = \frac{1}{k \theta_{d_1}} \quad \text{et } T_d = \theta_2$$

Application numérique :  $G_r = 1,92$  et  $T_d = 18 \text{ s}$

La constante de temps  $\theta_1$  ne peut pas être compensée. La régulation ne peut donc pas être idéale, c'est-à-dire que la fonction de transfert  $F_1(p)$  en chaîne fermée sera quelque peu différente d'une fonction de transfert du premier ordre.

La fonction de transfert  $F_1(p)$  obtenue sera :

$$F_1(p) = \frac{C_1(p) H_R(p)}{1 + C_1(p) H_R(p)}, \text{ soit avec les réglages déterminés précédemment :}$$

$$F_1(p) = \frac{G_r(1 + T_d p) \frac{k}{p(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}}{1 + G_r(1 + T_d p) \frac{k}{p(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}} \Rightarrow F_1(p) = \frac{k G_r}{p(1 + \theta_1 p) + k G_r}$$

$$\Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{k G_r} p + \frac{\theta_1}{k G_r} p^2} \Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{1 + 8p + 16p^2} \Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{(1 + 4p)^2}$$

On obtient donc une fonction de transfert du second ordre apériodique avec une double constante de temps de 4 s, très proche de la fonction de transfert du premier ordre de constante de temps de 8 s.

## 7 Amélioration de la réponse $X_1$ à une perturbation $Y$ grâce à la régulation en cascade

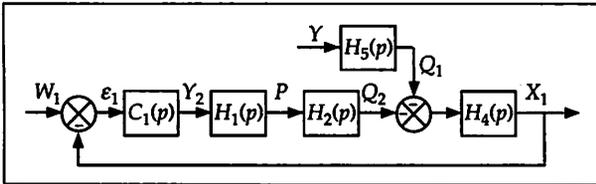


Figure 7.45

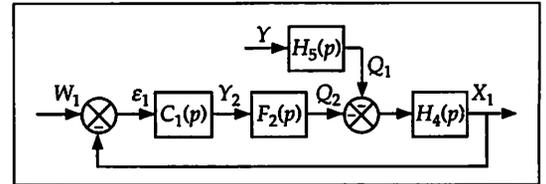


Figure 7.46

Lorsqu'il n'y a pas de régulation en cascade (fig. 7.45), la mesure  $X_1$  est égale à :

$$X_1(p) = \frac{-H_5(p)H_4(p)}{1 + H_4(p)C_1(p)H_1(p)H_2(p)} Y(p) \quad \textcircled{1}$$

Lorsqu'il y a la régulation en cascade (fig. 7.46), la mesure  $X_1$  est donnée par l'expression :

$$X_1(p) = \frac{-H_5(p)H_4(p)}{1 + H_4(p)C_1(p)F_2(p)} Y(p) \quad \textcircled{2}$$

Dans l'expression de  $X_1(p)$ , le signe négatif entre  $H_2(p)$  et  $H_4(p)$ , ainsi qu'entre  $F_2(p)$  et  $H_4(p)$ , est compensé par le sens d'action du régulateur  $C_1(p)$  qui est en action directe.

Puisque les fonctions ① et ② ne diffèrent que par  $[H_1(p)H_2(p)]$  et  $F_2(p)$ , il suffit de comparer ces deux fonctions de transfert pour connaître la réponse la plus rapide. La constante de temps désirée  $\theta_{d_2}$  est inférieure à la somme des deux constantes de temps  $\theta + \tau$  de  $[H_1(p)H_2(p)]$ . La fonction de transfert  $F_2(p)$  est plus rapide que  $[H_1(p)H_2(p)]$ . Si  $F_2(p)$  est plus lente que  $[H_1(p)H_2(p)]$ , la régulation en cascade n'est plus avantageuse.

## Problème 6

### 1 Sens d'action du régulateur MIC

Plus le produit est humide en entrée du tunnel, plus le taux d'humidité mesuré ( $x$ ) en sortie de tunnel a tendance à être élevé, et plus il faut fournir d'air chaud dans le tunnel pour abaisser ce taux d'humidité. C'est pourquoi il faut régler le régulateur MIC à sens d'action direct.

### 2 Gain statique $G_s$ du procédé

On mesure l'écart  $\Delta W - \Delta X = 5\%$ . On sait que l'écart statique théorique est  $\varepsilon_s = \frac{\Delta W}{1 + G_r G_s}$

Connaissant  $G_r$ ,  $\Delta W$  et  $\varepsilon_s$ , on en déduit  $G_s = \frac{\Delta W - \varepsilon_s}{G_r \varepsilon_s} \Rightarrow G_s = \frac{10 - 5}{1,66 \times 5} \Rightarrow \boxed{G_s = 0,6}$

### 3 Identification en chaîne fermée du procédé

#### ▷ Non-saturation du signal de commande

L'oscillation entretenue de la mesure engendre des variations extrêmes de l'écart  $\varepsilon$  que l'on mesure sur l'enregistrement, soit :

$$\varepsilon_{\text{mini}} = W - X_{\text{maxi}} \Rightarrow \varepsilon_{\text{mini}} = 47\% - 49,5\% = -2,5\%$$

$$\varepsilon_{\text{maxi}} = W - X_{\text{mini}} \Rightarrow \varepsilon_{\text{maxi}} = 47\% - 40\% = 7\%$$

Le régulateur est à action proportionnelle directe, l'amplitude de la sortie est donc :  $Y = Y_0 + G_r \varepsilon$ , avec, d'après la norme :  $\varepsilon = X - W$ , soit l'opposé de l'écart calculé précédemment. D'où :  $Y = Y_0 - G_r (X - W)$  et  $G_r = 1/B_p$

Le signal minimal de sortie était :

$$Y_{\text{mini}} = Y_0 + G_r \varepsilon_{\text{mini}} \Rightarrow Y_{\text{mini}} = 40 \% - 4,8 \times 7 \% \Rightarrow Y_{\text{m}} = 6,7 \%$$

Le signal maximal de sortie était :

$$Y_{\text{maxi}} = Y_0 + G_r \varepsilon_{\text{maxi}} \Rightarrow Y_{\text{maxi}} = 40 \% + 4,8 \times 2,5 \% \Rightarrow Y_{\text{M}} = 52 \%$$

Lors de la recherche des oscillations entretenues, il n'y avait pas saturation de l'organe réglant puisque le signal  $Y$  était bien compris entre 0 % et 100 %.

### ▷ Relation entre $T_{\text{osc}}$ , $\theta$ et $n$

Lors du premier essai, l'écart statique n'est pas nul ; le procédé ne comporte donc pas d'intégration. Le modèle désiré est le modèle de Strejc, soit :

$$A(p) = C(p) H(p) = \frac{G_r G_s}{(1 + \theta p)^n}$$

On exprime le module :  $A = |A(j\omega)| = \frac{G_r G_s}{(\sqrt{1 + \theta^2 \omega^2})^n}$

et l'argument :  $\text{Arg}(A(j\omega)) = -n \arctan(\theta\omega)$ .

Lors des oscillations entretenues (pompage), on réalise les conditions suivantes : gain  $G_{rc}$  ; et pour  $A(j\omega)$  : module unitaire et argument valant  $-\pi$  pour une pulsation  $\omega_c$ . D'où :

$$A_{\pi} = \frac{G_{rc} G_s}{(\sqrt{1 + \theta^2 \omega_c^2})^n} = 1 \text{ et } \text{Arg}(A(j\omega)) = -n \arctan(\theta\omega_c) = -\pi$$

### ▷ Relation entre $G_c$ et $n$

Des deux équations précédentes on tire :  $\theta = \frac{\tan(\pi/n)}{\omega_c}$  et  $G_c = G_{rc} G_s = \frac{1}{\cos(\pi/n)^n}$

## 4 Fonction de transfert $H(p)$

On mesure la période des oscillations :  $T_{\text{osc}} = 43,1 \text{ min.}$

On calcule le gain critique de boucle :  $G_c = G_{rc} G_s \Rightarrow G_c = 4,76 \times 0,6 \Rightarrow G_c = 2,856$ .

À partir du tableau de la Boîte à outils 3, on détermine  $n$  pour  $G_c = 2,89$ .

On trouve :  $n = 5$ .

On calcule  $\theta = \frac{43,1 \tan(\pi/5)}{2\pi} \text{ min} \Rightarrow \theta = 5 \text{ min.}$

Le modèle obtenu pour le procédé est :  $H(p) = \frac{0,6}{(1 + 5p)^5}$

## 5 Schéma fonctionnel du système (fig. 7.47)

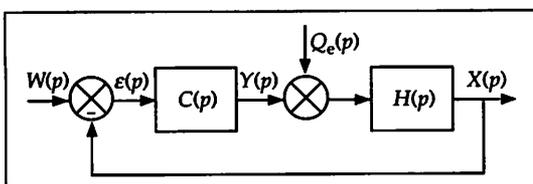


Figure 7.47

La représentation d'un système asservi impose un retour négatif (réaction). Le régulateur est donc ici représenté en action inverse alors qu'il est réglé en action directe, et le procédé est représenté en sens direct alors qu'il est de sens inverse ( $X$  diminue lorsque  $Y$  augmente).

## 6 Régulation PID limitée

Une variation de la quantité de produit à l'entrée du tunnel provoque une variation du taux d'humidité, mais la réponse du régulateur est beaucoup trop lente (5 constantes de temps de 5 minutes). Le régulateur intervient seulement lorsque X varie et il peut alors agir à contretemps des variations brusques à l'entrée du tunnel. Le gain du régulateur est limité (4,8 provoque le pompage) : l'action intégrale et l'action dérivée ne suffiraient pas à compenser cette grande inertie.

Si une information représentative des variations de la quantité de produit ou du taux d'humidité arrivait au régulateur avant que le produit n'ait parcouru tout le tunnel, elle pourrait provoquer une action sur le produit en question au moment opportun. Ce n'est pas le cas. La régulation PID est donc inadaptée à un procédé d'ordre 5.

## 7 Détermination de $H_1(p)$ et de $H_2(p)$

On trace les asymptotes  $D_1$  et  $D_2$  (fig. 7.48) et leurs parallèles  $D'_1$  et  $D'_2$ .

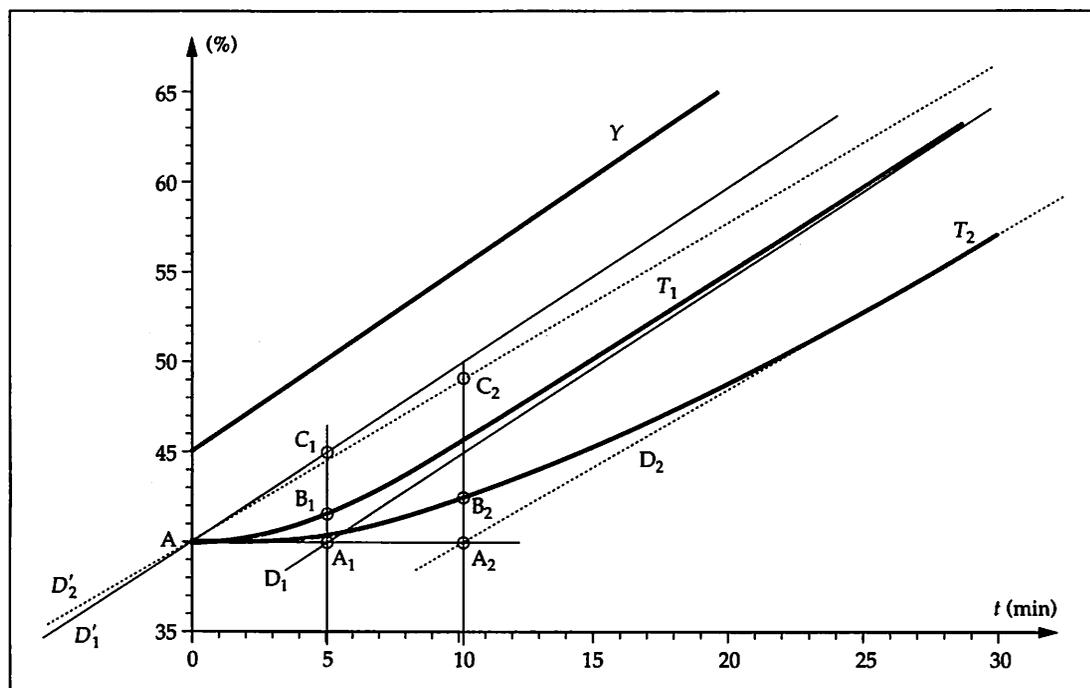


Figure 7.48

Les déterminations graphiques conduisent aux résultats suivants :

- le signal Y de commande est une rampe de coefficient directeur  $c = 1 \text{ \%}/\text{min}$ , soit  $c = 0,01/\text{min}$  ;
- le coefficient directeur de  $D_1$  est de  $0,95 \text{ \%}$  par minute, soit :  $c_1 = 0,0095/\text{min}$ . On en déduit le gain statique de  $H_1(p)$  :  $G_{s_1} = 0,0095/0,01 \Rightarrow G_{s_1} = 0,95$  ;
- le coefficient directeur de  $D_2$  est de  $0,82 \text{ \%}$  par minute, soit :  $c_2 = 0,0082/\text{min}$ . On en déduit le gain statique de  $H_2(p)$  :  $G_{s_2} = 0,0082/0,01 \Rightarrow G_{s_2} = 0,82$  ;
- du rapport  $\frac{A_1 B_1}{A_1 C_1} = \frac{1,9 \text{ \%}}{5 \text{ \%}} = 0,38$ , on déduit l'ordre  $n$  de  $H_1(p)$ , soit :  $n = 1$  ;
- le temps  $t_1 = AA_1$ , soit  $t_1 = 5,1 \text{ min}$ , permet de calculer la constante de temps  $\theta_1 = t_1/n = 5,1 \text{ min}$  ;

- du rapport  $\frac{A_2 B_2}{A_2 C_2} = \frac{2,6 \%}{9,8 \%} = 0,265$ , on déduit l'ordre  $n$  de  $H_2(p)$ , soit :  $n \approx 2,1$ ;
- le temps  $t_2 = AA_2$ , soit  $t_2 = 10,2$  min, permet d'obtenir la constante de temps  $\theta_2 = t_2/n = 4,86$  min.

Les fonctions de transfert sont :  $H_1(p) = \frac{T_1(p)}{Y(p)} = \frac{0,95}{5,1p + 1}$  et  $H_2(p) = \frac{T_2(p)}{Y(p)} = \frac{0,82}{(4,86p + 1)^{2,1}}$

## 8 Plan de tuyauterie et d'instrumentation de la régulation en cascade (fig. 7.49)

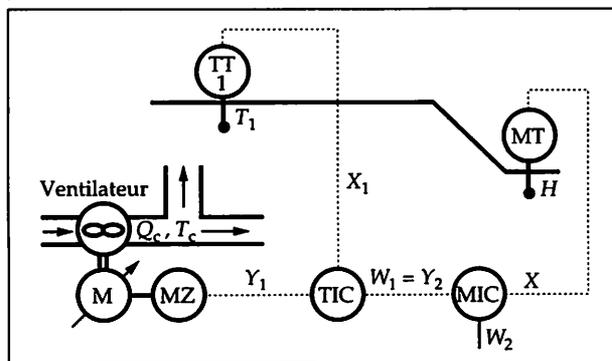


Figure 7.49

## 9 Schéma fonctionnel de la régulation en cascade

Les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  sont simplifiées :

$$H_1(p) = \frac{T_1(p)}{Y(p)} = \frac{0,95}{5p + 1} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{T_2(p)}{Y(p)} = \frac{0,82}{(5p + 1)^2}$$

À partir de  $H_1(p)$  et de  $H_2(p)$ , on obtient :  $H_3(p) = \frac{T_2(p)}{T_1(p)} = \frac{H_2(p)}{H_1(p)} \Rightarrow H_3(p) = \frac{T_2(p)}{T_1(p)} = \frac{0,86}{5p + 1}$

On détermine ensuite :  $H_4(p) = \frac{X(p)}{T_2(p)} = \frac{H(p)}{H_1(p)H_3(p)} \Rightarrow H_4(p) = \frac{X(p)}{T_2(p)} = \frac{0,73}{(5p + 1)^3}$

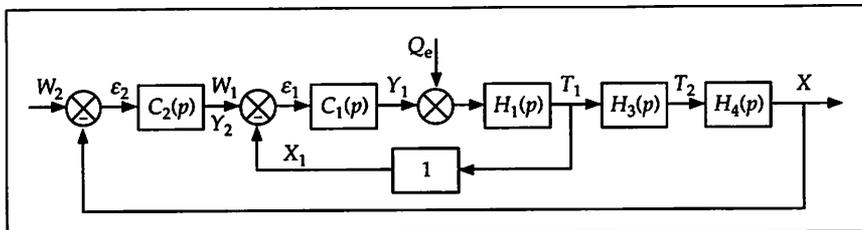


Figure 7.50

Seule la grandeur perturbatrice principale (débit d'entrée  $Q_e$ ) est représentée dans le schéma fonctionnel de la régulation en cascade (fig. 7.50).

## 10 Régulateur esclave TIC

La fonction de transfert en chaîne fermée est :  $F_1(p) = \frac{T_1(p)}{W_1(p)} = \frac{C_1(p)H_1(p)}{1 + C_1(p)H_1(p)}$

On veut imposer :  $F_1(p) = \frac{1}{1 + \theta_d p}$ , on obtient :  $C_1(p) = \frac{1}{\theta_d p H_1(p)} = \frac{\theta_1}{G_s \theta_d} \frac{(1 + \theta_1 p)}{\theta_1 p}$

La fonction de transfert  $C_1(p)$  trouvée correspond à un correcteur PI tel que :

$$G_r = \frac{\theta_1}{G_{s1} \theta_d} \quad \text{et} \quad T_i = \theta_d$$

## 11 Valeur de constante de temps $\theta_d$ imposable

Pour un changement de 40 % à 50 % de la consigne  $W_1$ , le régulateur TIC élabore un signal de sortie  $Y$  qui est :

$$Y = Y_0 - G_r \varepsilon - \frac{G_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon dt \quad \text{avec} : \varepsilon = x_1 - w_1$$

Comme l'action intégrale ne s'exerce que lorsque la mesure est proche de la consigne (grâce au circuit d'antisaturation de l'action intégrale), l'équation du régulateur est celle d'un régulateur à action proportionnelle, soit :

$$Y = Y_0 + G_r \Delta W_1 \Rightarrow G_{r(\text{maxi})} = \frac{Y_{\text{maxi}} - Y_0}{\Delta W_1} \Rightarrow G_{r(\text{maxi})} = \frac{90\% - 40\%}{10\%} \Rightarrow G_{r(\text{maxi})} = 5$$

À partir du résultat trouvé pour  $G_r$  en 10, on détermine la valeur de la constante de temps que l'on peut imposer :

$$G_{r(\text{maxi})} = \frac{\theta_1}{\theta_{d(\text{mini})} G_{s1}} \Rightarrow \theta_{d(\text{mini})} = \frac{\theta_1}{G_{r(\text{maxi})} G_{s1}} \Rightarrow \theta_{d(\text{mini})} = \frac{5}{5 \times 0,95} \text{ min} \Rightarrow \theta_{d(\text{mini})} = 1,05 \text{ min}$$

## 12 Régulateur maître MIC

On détermine la fonction de transfert réglante en chaîne ouverte  $H_R(p)$ , soit :

$$H_R(p) = F_1(p) H_3(p) H_4(p) = \frac{G_s}{(\theta_d p + 1)(1 + T p)^2}$$

La fonction de transfert en chaîne ouverte  $H_R(p)$  étant une fonction de transfert du troisième ordre, on peut donc imposer une fonction de transfert en chaîne fermée  $F_2(p)$  du deuxième ordre :

$$F_2(p) = \frac{C_2(p) H_R(p)}{1 + C_2(p) H_R(p)} \Rightarrow F_2(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

$$\text{On obtient : } C_2(p) = \frac{F_2(p)}{(1 - F_2(p)) H_R(p)}$$

$$C_2(p) = \frac{\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}}{\left[ \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2} \right] \frac{G_s}{(1 + T p)^2 (1 + p)}} \Rightarrow C_2(p) = \frac{(1 + T p)^2 (1 + \theta_d p)}{G_s \frac{2\xi}{\omega_n} p \left[ 1 + \frac{p}{2\xi \omega_n} \right]}$$

$$\text{En imposant : } \frac{1}{2\xi \omega_n} = T \Rightarrow C_2(p) = \frac{T}{G_s \frac{2\xi}{\omega_n}} \frac{(1 + T p)}{T p} (1 + \theta_d p)$$

La fonction de transfert  $C_2(p)$  trouvée correspond à un correcteur PID tel que :

$$G_r = \frac{T}{G_s \frac{2\xi}{\omega_n}}, \quad T_i = T \quad \text{et} \quad T_d = \theta_d$$

La réponse doit être apériodique et la plus rapide possible, on fixe donc :

$$\xi = 1 \quad \text{et par conséquent} \quad \omega_n = \frac{1}{2T\xi} \Rightarrow \omega_n = 0,05 \text{ rad/min.}$$

Application numérique :  $G_r = 1,6$ ,  $T_i = 10 \text{ min}$  et  $T_d = 1,05 \text{ min}$ .

### Amélioration de la réponse $X$ à une perturbation $Q_e$ grâce à la régulation en cascade

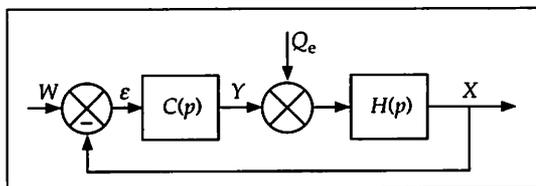


Figure 7.51

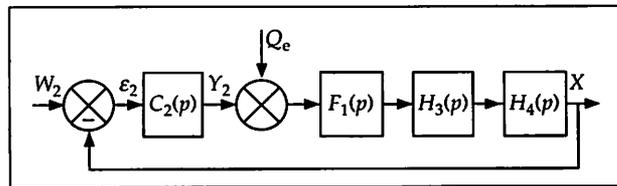


Figure 7.52

Lorsqu'il n'y a pas de régulation en cascade (fig. 7.51), la mesure  $X$  est donnée par

$$\text{l'expression suivante : } X(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)C(p)} Q_e(p)$$

Lorsqu'il y a la régulation en cascade (fig. 7.52), la mesure  $X$  est égale à :

$$X(p) = \frac{F_1(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + F_1(p)H_3(p)H_4(p)C_2(p)} Q_e(p)$$

Dans le premier cas, le régulateur  $C(p)$  doit compenser une fonction de transfert  $H(p)$  composée de 5 constantes de temps de 5 minutes.

Dans le deuxième cas, le régulateur  $C_2(p)$  doit compenser une fonction de transfert  $F_1(p)H_3(p)H_4(p)$  composée de 4 constantes de temps de 5 minutes et d'une constante de temps de 1 minute. Il est donc évident que pour un changement du débit  $Q_e$  la réponse  $x$  est plus rapide avec la régulation en cascade. À noter que l'amélioration apportée par la régulation en cascade est aussi valable pour une variation de la température  $T_e$  ou pour une variation du taux d'humidité du produit à l'entrée.

## Problème 7

### Température atteinte pour une commande $Y$ de 100 %

On sait que le gain statique est le rapport  $G_s = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$ , donc on a :  $\Delta X = G_s \Delta Y$

La variation  $\Delta X$  pour une variation de  $Y$  de 100 % est donc :

$$\Delta X = \sum_{i=1}^{i=10} G_{si} \Delta Y_i = 10 \% \times \sum_{i=1}^{i=10} G_{si} \Rightarrow \Delta X = 9,05 \times 10 \% = 90,5 \%$$

Avec une température initiale de 20 °C, la température atteinte pour une commande de 100 % est donc :  $X = (0,905 \times 1200 + 20) \text{ °C} \Rightarrow \boxed{X = 1106 \text{ °C}}$

### Zone de la commande pour atteindre 45 % de l'étendue d'échelle

Pour  $\Delta Y = 30 \%$ , on a :  $\Delta X = \sum_{i=1}^{i=3} G_{si} \Delta Y_i = 10 \% \times \sum_{i=1}^{i=3} G_{si}$ , soit  $\Delta X = 4,36 \times 10 \% = 43,6 \%$

La température initiale de 20 °C correspond à une valeur de 1,7 % de l'étendue d'échelle.

Pour une commande de 30 %, on obtient une température exprimée en pourcentage de l'étendue d'échelle de : 43,6 % + 1,7 % = 45,3 %.

Pour atteindre 45 % de l'étendue d'échelle, la commande doit donc être située dans la zone 3 (tableau 7.3, voir énoncé).

▷ **Zone de la commande pour atteindre 80 % de l'étendue d'échelle**

Pour  $\Delta Y = 80 \%$ , on a :  $\Delta X = \sum_{i=1}^{i=8} G_{si} \Delta Y_i = 10 \% \times \sum_{i=1}^{i=8} G_{si}$ , soit :  $\Delta X = 7,99 \times 10 \% = 79,9 \%$

Pour une commande de 70 %, on obtient une température exprimée en pourcentage de l'étendue d'échelle de : 79,9 % + 1,7 % = 80,6 %.

Pour atteindre 80 % de l'étendue d'échelle, la commande doit donc être située dans la zone 8 (tableau 7.3, voir énoncé).

**3 Réglage de Broïda des actions PID**

On exprime la fonction de transfert en chaîne ouverte :

$$A(p) = C(p) H(p) = \left[ G_r \frac{T_i p + 1}{T_i p} (T_d p + 1) \right] \frac{G_s e^{-\tau p}}{\theta p + 1}$$

Le module de  $A(j\omega)$  est :  $A = |A(j\omega)| = \frac{G_r G_s \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega \sqrt{\theta^2 \omega^2 + 1}}$

L'argument  $\varphi$  de  $A(j\omega)$  est :  $\varphi = \arctan(T_i \omega) + \arctan(T_d \omega) - \arctan(\theta \omega) - \tau \omega - \pi/2$ .

Dans le réglage de Broïda on fixe :  $T_i = \theta$ . On obtient alors :

$$A = \frac{G_r G_s \sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan(T_d \omega) - \tau \omega - \pi/2$$

On impose une phase de  $\pi/4$  rad pour l'action dérivée, soit :  $\arctan(T_d \omega) = \pi/4$ .

On a alors :  $T_d \omega = 1$ .

On tire la valeur de  $A$  :  $A = \frac{G_r G_s \sqrt{2}}{\theta \omega}$

On exprime la pulsation  $\omega_\pi$  lorsque l'argument vaut  $-\pi$  rad :

$$\varphi = \pi/4 - \tau \omega_\pi - \pi/2 = -\pi. \quad \text{On obtient : } \omega_\pi = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\tau}$$

À partir du module de  $A_\pi$  et de la pulsation  $\omega_\pi$ , on détermine le gain  $G_r$  du régulateur :

$$G_r = \frac{A_\pi \theta \omega_\pi}{G_s \sqrt{2}} \Rightarrow G_r = \frac{3\pi A_\pi \theta}{4 G_s \sqrt{2} \tau}$$

À partir de la relation  $T_d \omega = 1$ , on détermine le temps d'action dérivée :

$$T_d = \frac{4}{3} \frac{\tau}{\pi} \Rightarrow T_d = 0,42 \tau$$

**4 Calcul des actions PID pour une consigne de 80 %**

Dans la question 2, on a déterminé que pour obtenir une température de 80 % de l'étendue d'échelle, il fallait se situer dans la zone 8. Pour une consigne de 80 %, on a  $G_s = 0,57$ . La marge de gain à imposer est  $G_m = 6$  dB. On calcule le module  $A_\pi$  correspondant : à partir de  $G_m = 20 \lg(1/A_\pi)$ , on obtient :  $A_\pi = 10^{(-G_m/20)} \Rightarrow A_\pi = 0,5$ .

D'où :  $G_r = \frac{3 \times \pi \times 0,5 \times 30}{4 \times 0,57 \times \sqrt{2} \times 2,8} \Rightarrow G_r = 15,6$ . On a :  $T_i = 30 \text{ min}$  et  $T_d = 1,17 \text{ min}$

## 5 Diagramme de Black

Le gain statique à considérer est :  $G_s = 0,57$ .

$$A(p) = C(p) H(p) = G_r G_s \frac{T_d p + 1}{T_i p} e^{-\tau p}$$

Le module  $A$  de  $A(j\omega)$  est :

$$A = \frac{G_r G_s \sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega} \Rightarrow G_{(dB)} = 20 \lg A = 20 \lg \frac{0,296 \sqrt{1,17 \times \omega^2 + 1}}{\omega}$$

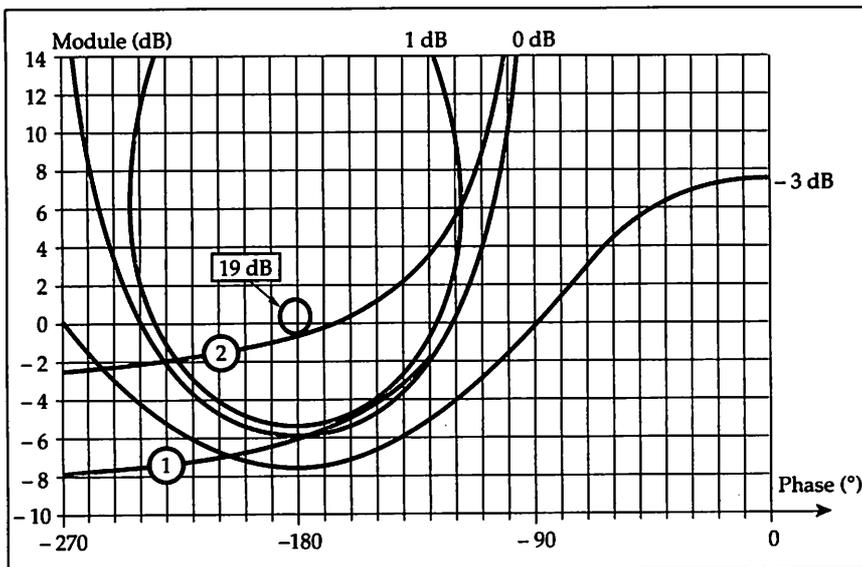


Figure 7.53

L'argument  $\varphi$  de  $A(j\omega)$  est :

$$\varphi = \arctan(T_d \omega) - \tau \omega - \pi/2 \Rightarrow \varphi = (\arctan(1,17 \omega) - 2,8 \omega - 180)^\circ$$

Le diagramme de Black de  $A(j\omega)$  est représenté figure 7.53, courbe 1.

La système possédant une intégration, on mesure directement sur le diagramme de Black le facteur de résonance  $Q_1$  par le contour isomodule tangent à  $A(j\omega)$ . Le contour isomodule est 1 dB, donc le facteur de résonance est  $Q_{1(dB)} = 1 \text{ dB}$  ou  $Q_1 = 1,12$ . La pulsation de résonance est  $\omega_{r_1} \approx 0,66 \text{ rad/min}$ .

### ▷ Détermination de $\xi_1$ et $\omega_{n_1}$

La relation entre  $Q_1$  et  $\xi_1$  est :  $Q_1 = \frac{1}{2\xi_1 \sqrt{1-\xi_1^2}} \Rightarrow \xi_1 = \left[ 0,5 - 0,5 \times \sqrt{1 - \frac{1}{Q_1^2}} \right]^{1/2}$

On obtient :  $\xi_1 = 0,52$

La pulsation propre  $\omega_{n_1}$  est obtenue à partir de la relation :  $\omega_{r_1} = \omega_{n_1} \sqrt{1-2\xi_1^2}$ . On a :

$$\omega_{n_1} = \frac{\omega_{r_1}}{\sqrt{1-2\xi_1^2}} \Rightarrow \omega_{n_1} = 1,43 \text{ rad/min}$$

### ▷ Réponse indicielle $x_1(t)$

La réponse peut être assimilée à une réponse du deuxième ordre oscillante amortie, soit :

$$X_1(p) = \frac{\Delta W_1 e^{-\tau p}}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2} \right)}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \Delta W_1 \left[ 1 + \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] u(t-\tau)$$

La réponse indicielle est tracée figure 7.54.

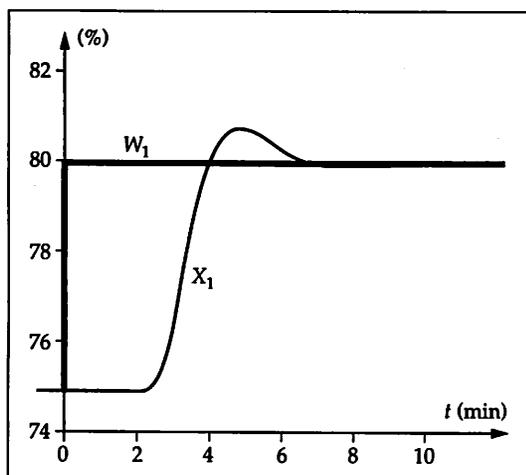


Figure 7.54

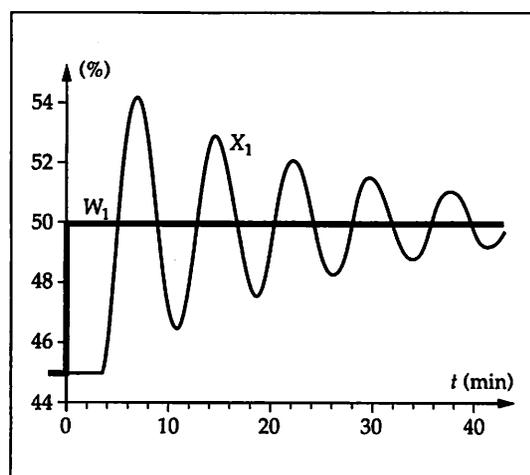


Figure 7.55

## 6 Diagramme de Black

Pour une consigne de 45 %,  $G_s = 1,05$ .

On constate que la fonction de transfert en chaîne ouverte ne diffère que par un gain statique supérieur à celui tracé en 5 (fig. 7.53, courbe 1). Pour tracer la nouvelle courbe (fig. 7.53, courbe 2), il suffit de translater verticalement la courbe 1 (fig. 7.53) de  $20 \lg(1,05/0,57)$ , c'est-à-dire de 5,3 dB.

### ▷ Détermination de $\xi_2$ et $\omega_{n_2}$

Comme en 5, sur le diagramme de Black on mesure directement le facteur de résonance  $Q_2$  par le contour isomodule tangent à  $A(j\omega)$ . Ce contour isomodule est 19 dB, donc le facteur de résonance est  $Q_{2(\text{dB})} = 19 \text{ dB}$  ou  $Q_2 = 8,9$ . La pulsation de résonance est  $\omega_{r_2} \approx 0,82 \text{ rad/min}$ . On obtient  $\xi_2 = 0,056$ .

Le coefficient d'amortissement étant très faible, la pulsation propre est très proche de la pulsation de résonance, soit :  $\omega_{n_2} = 0,82 \text{ rad/min}$

De la même façon qu'en 5, la réponse indicielle peut être assimilée à une réponse du deuxième ordre oscillante amortie avec un temps mort  $\tau$ . La réponse indicielle est tracée figure 7.55 ; on constate que la réponse en température est beaucoup trop oscillante et pas assez amortie pour un four.

## 7 Calcul des actions PID pour une consigne de 45 %

Le gain statique à considérer est  $G_s = 1,05$ .

La marge de gain à imposer est  $G_m = 6 \text{ dB}$ . On calcule le module  $A_\pi$  correspondant : à partir de  $G_m = 20 \lg(1/A_\pi)$ , on obtient :  $A_\pi = 10^{(-G_m/20)} \Rightarrow A_\pi = 0,39$

$$G_r = \frac{3 \times \pi \times 0,39 \times 30}{4 \times 1,05 \times \sqrt{2} \times 2,8} \Rightarrow G_r = 6,6$$

## 8 Choix du réglage du régulateur

Puisque le régulateur n'accepte qu'une seule valeur pour le gain, il faut choisir la valeur la plus faible, c'est-à-dire la valeur de  $G_r$  trouvée en 5. En effet, puisque le gain statique varie de 0,57 à 1,05 entre la zone 8 et la zone 3, la marge de gain ne peut pas être constante. En conservant le gain le plus fort (12,2), le système risque d'être instable ou sa réponse très oscillante (dépassement très élevé).

Calcul du module  $A_\pi$  avec  $G_r = 12,2$  et  $G_s = 1,05$  :

$$\text{à partir de } A_\pi = \frac{4\sqrt{2} G_r G_s \tau}{3\pi\theta}, \text{ on obtient : } A_\pi = \frac{4 \times \sqrt{2} \times 1,05 \times 12,2 \times 2,8}{3 \times \pi \times 30} \Rightarrow A_\pi = 0,71$$

Cela correspond à une marge de gain  $G_m = 2,88$  dB beaucoup trop faible.

En adoptant la valeur  $G_r = 6,6$ , on a donc une régulation satisfaisante en zone 3 mais une réponse indicielle très lente en zone 8.

## 9 Détermination des actions PID préprogrammées

### ▷ Détermination du régulateur mixte

Pour déterminer les réglages d'un régulateur mixte à partir de ceux d'un régulateur série, il suffit d'identifier terme à terme leurs équations :

- structure série :  $\frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i(p)}\right) (1 + T_d p) \Rightarrow \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{T_i + T_d}{T_i} G_r + \frac{G_r}{T_i} p + G_r T_d p$

- structure mixte (indice 1) :  $\frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_{r_1} \left(1 + \frac{1}{T_{i_1} p} + T_{d_1} p\right) \Rightarrow \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_{r_1} + \frac{G_{r_1}}{T_{i_1} p} + G_{r_1} T_{d_1} p$

On peut écrire :

$$\frac{T_i + T_d}{T_i} G_r = G_{r_1} \Rightarrow G_{r_1} = \frac{\pi}{4 G_s} \left(\frac{\theta + 0,4\tau}{\tau}\right) \Rightarrow \boxed{B_{p1} = \frac{4 G_s \tau}{\pi(\theta + 0,4\tau)}}$$

$$\frac{G_r}{T_i} = \frac{G_{r_1}}{T_{i_1}} \Rightarrow \boxed{T_{i_1} = \theta + 0,4\tau} \text{ et } G_r T_d = G_{r_1} T_{d_1} \Rightarrow \boxed{T_{d_1} = \frac{\theta \tau}{2,5\theta + \tau}}$$

### ▷ Détermination des couples $(X_r, X_{1i})$ , $(X_r, X_{2i})$ et $(X_r, X_{3i})$

À partir des relations établies pour le régulateur mixte, on calcule  $B_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  pour chaque zone (tableau 7.5).

Zone	Signal Y	Valeur X (%)	$B_p$ (%)	$T_i$ (min)	$T_d$ (min)	$G_s$	$\theta$ (min)	$\tau$ (min)
1	0 à 10 %	0 à 23,0	48,7	25,6	1,7	2,13	23,8	4,6
2	10 à 20 %	23,0 à 34,8	19,6	27,6	1,4	1,18	26,2	3,6
3	20 à 30 %	34,8 à 45,3	15,2	29,1	1,3	1,05	27,8	3,3
4	30 à 40 %	45,3 à 54,6	12,1	30,2	1,2	0,93	29,0	3,1
5	40 à 50 %	54,6 à 62,7	9,6	31,1	1,1	0,81	29,9	2,9
6	50 à 60 %	62,7 à 69,7	7,6	31,8	1,0	0,70	30,7	2,7
7	60 à 70 %	69,7 à 75,9	6,3	32,4	1,0	0,62	31,4	2,6
8	70 à 80 %	75,9 à 81,6	5,1	32,9	0,9	0,57	32,0	2,3
9	80 à 90 %	81,6 à 87,0	4,3	33,3	0,8	0,54	32,5	2,1
10	90 à 100 %	87,0 à 92,2	3,9	33,8	0,8	0,52	33,0	2,0

Tableau 7.5

## Problème 8

### 1 Étude et appréciation du procédé

La boucle 01 est une régulation de température simple boucle qui présente l'avantage d'être facile à régler. L'inconvénient de cette boucle de régulation apparaît lorsque la charge varie : le régulateur ne peut agir instantanément et la température subit quelques variations autour de la consigne fixée.

La boucle 03 est une régulation de proportion entre le débit d'air et le débit de gaz. Le débit de gaz est le débit libre, le débit d'air est le débit asservi. L'avantage de cette régulation est de permettre d'obtenir un mélange d'air et de gaz dans un rapport constant, et donc une combustion complète quelles que soient les variations du débit de gaz. Suite à des perturbations (qualité de l'air ou du gaz), cette régulation n'assure pas la combustion de la totalité du gaz.

## 2 Échelle du débitmètre FT 03

Pour calculer le débit volumique d'un gaz, il faut tenir compte de la pression et de la température :

$$Q_v(\text{gaz, N}) = \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} Q_v(\text{gaz}) \Rightarrow Q_v(\text{gaz, N}) = \left( \frac{2,5}{1} \times \frac{273}{300} \times 120 \right) \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow Q_v(\text{gaz, N}) = 273 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$Q_v(\text{air, N}) = 12 Q_v(\text{gaz, N}) \Rightarrow Q_v(\text{air, N}) = (12 \times 273) \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow Q_v(\text{air, N}) = 3\,276 \text{ m}^3/\text{h}$$

Le symbole N dans l'indice du symbole  $Q_v$  spécifie que les gaz dont on détermine le débit sont considérés dans les conditions dites normales de température et de pression.

$$Q_v(\text{air, 5 bar, 27}^\circ\text{C}) = \frac{P_0}{P} \frac{T}{T_0} Q_v(\text{air, N}) \Rightarrow Q_v(\text{air}) = \frac{1}{6} \times \frac{300}{273} \times 3\,276 \text{ m}^3/\text{h} \Rightarrow Q_v(\text{air}) = 600 \text{ m}^3/\text{h}$$

La valeur de l'échelle du débitmètre FT 03 est donc : 0 - 600 m<sup>3</sup>/h

## 3 Régulation de l'excès d'air

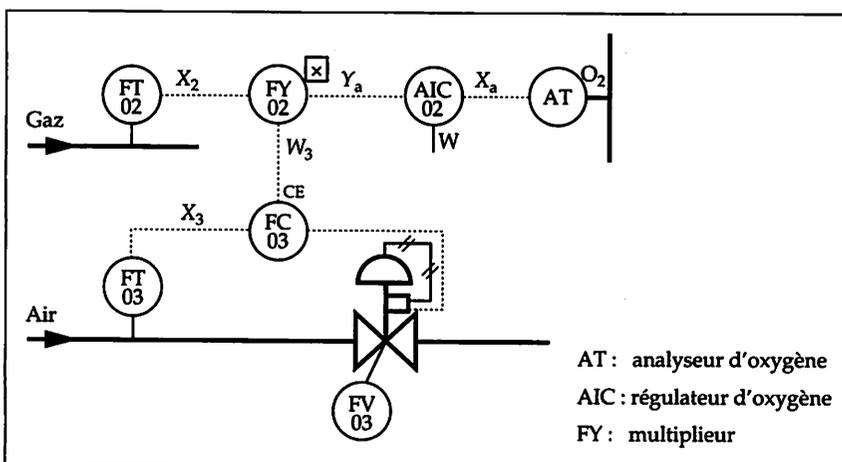


Figure 7.56

La régulation réalisée est une régulation en cascade (fig. 7.56). Le régulateur AIC élabore un signal qui, multiplié par la mesure du débit de gaz, commande la proportion de gaz souhaitée en consigne externe du régulateur FC de débit d'air. L'excès d'air par rapport au gaz peut donc être assuré à l'entrée du brûleur. Le signal de sortie du multiplieur est :  $W_3 = k X_2 Y_a$ .

## 4 Identification du procédé par la méthode de Broïda

On mesure la variation du signal  $S$  :  $\Delta S = 6,8\%$ . On calcule le gain statique :  $G_s = \frac{S}{\Delta Y_R} = 1,13$

On mesure  $t_1 = 33,5$  s pour la valeur  $0,28 \Delta S = 1,9\%$ .

On mesure  $t_2 = 44$  s pour la valeur  $0,40 \Delta S = 2,7\%$ .

On calcule  $\theta = 5,5 (t_2 - t_1) = 57,75$  s, soit  $\theta \approx 58$  s.

On calcule  $\tau = 2,8 t_1 - 1,8 t_2 = 14,6$  s, soit  $\tau = 15$  s.

$Y_R(p) = \frac{0,06}{p}$  et  $S(p) = \frac{0,068 e^{-15p}}{p(58p + 1)}$ . On obtient :

$$H(p) = \frac{S(p)}{Y_R(p)} = \frac{1,13 e^{-15p}}{58p + 1}$$

## 5 Réponse indicielle du modèle

On connaît  $S(p) = \frac{0,12 e^{-16p}}{p(50p+1)}$

En prenant la transformée inverse de  $S(p)$ , on déduit  $s(t)$  :

$$s(t) = \Delta Y_R G_s (1 - e^{-(t-\tau)/\theta}) \Rightarrow s(t) = 10 \% \times 1,2 \times (1 - e^{-(t-16)/50})$$

## 6 Étude de la chaîne fermée

▷ Schéma fonctionnel de la boucle (fig. 7.57)

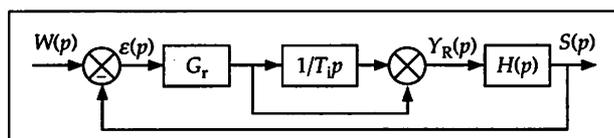


Figure 7.57

▷ Fonction de transfert en chaîne fermée  $F(p)$

$$F(p) = \frac{S(p)}{W(p)} = \frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)}$$

▷ Température finale atteinte en régulation proportionnelle

Lorsque  $T_i \rightarrow \infty$ , il n'y a pas d'action intégrale et le régulateur est donc ici à action proportionnelle.

$$F(p) = \frac{S(p)}{W(p)} = \frac{G_r G_s e^{-\tau p}}{\theta p + 1 + G_r G_s e^{-\tau p}}$$

Pour  $W(p) = 20 \% / p$ , on obtient :

$$S(p) = \frac{\Delta W}{p} = \frac{G_r G_s e^{-\tau p}}{\theta p + 1 + G_r G_s e^{-\tau p}} \Rightarrow S(p) = \frac{20 \% \times 2 \times 1,2 e^{-16p}}{p(50p+1+2 \times 1,2 e^{-16p})}$$

$$S(p) = \frac{0,48 e^{-16p}}{p(50p+1+2,4 e^{-16p})}$$

Le théorème de la valeur finale permet d'obtenir la valeur de la variation  $\Delta S_f$  de la température en régime permanent :

$$\Delta S_f = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{0,48 e^{-16p}}{p(50p+1+2,4 e^{-16p})} \right] \Rightarrow \Delta S_f = \frac{48 \%}{1+2,4} \Rightarrow \Delta S_f = 14,1 \%$$

La variation de température correspond à une variation de  $\Delta S_f = 28,2$  °C, la température finale est donc :

$$S_f = S_{f_0} + \Delta S_f \Rightarrow S_f = (120 + 28,2) \text{ °C} \Rightarrow \boxed{S_f = 148,2 \text{ °C}}$$

▷ Gain critique et période des oscillations entretenues

Le temps d'action intégrale étant fixé à la valeur de la constante de temps du procédé, on peut écrire :

$$A(p) = C(p)H(p) = \frac{G_r G_s e^{-\tau p}}{\theta p}$$

Le module  $A$  de  $A(j\omega)$  est :  $A = \frac{G_r G_s}{\theta \omega}$

L'argument  $\varphi$  de  $A(j\omega)$  est :  $\varphi = -\tau \omega - \pi/2$

Lorsque le système est en oscillations entretenues, le module vaut 1 et l'argument est égal à  $-\pi$  rad :

$$\varphi = -\tau \omega_c - \frac{\pi}{2} = -\pi \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{2\tau} \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{32} \Rightarrow T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_c} \Rightarrow \boxed{T_{osc} = 64 \text{ s}}$$

$$A_\pi = \frac{G_{rc} G_s}{\theta \omega_c} = 1 \Rightarrow G_{rc} = \frac{\theta \omega_c}{G_s} \Rightarrow G_{rc} = \frac{\theta \pi}{2\tau G_s} \Rightarrow G_{rc} = \frac{50 \times \pi}{2 \times 16 \times 1,2} \Rightarrow \boxed{G_{rc} = 4,1}$$

▷ Valeur de  $G_r$  pour une marge de gain de 6 dB

La marge de gain imposée est :  $G_m = 6 \text{ dB}$

$$G_m = 20 \lg \frac{1}{A_\pi} = 20 \lg \frac{G_{rc}}{G_r} \Rightarrow A_\pi \frac{G_{rc}}{G_r} = 0,5 \Rightarrow G_r = 0,5 G_{rc} \Rightarrow \boxed{G_r = 2,05}$$

▷ Température finale atteinte

$$F(p) = \frac{S(p)}{W(p)} = \frac{G_r G_s e^{-\tau p}}{\theta p + G_r G_s e^{-\tau p}}$$

Pour  $W(p) = \Delta W/p$ , on obtient :

$$S(p) = \frac{\Delta W}{p} \frac{G_r G_s e^{-\tau p}}{\theta p + G_r G_s e^{-\tau p}}$$

Le théorème de la valeur finale permet d'obtenir la valeur de la variation  $\Delta S_f$  de la température en régime permanent :

$$\Delta S_f = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \frac{0,492 e^{-16p}}{p(50p + 2,4 e^{-16p})} \right] \Rightarrow \Delta S_f = \frac{49,2\%}{2,46} \Rightarrow \Delta S_f = 20\%$$

La variation de température correspond à une variation  $\Delta S_f = 40^\circ\text{C}$ . La température finale est donc :

$$S_f = S_{f_0} + \Delta S_f \Rightarrow S_f = 120 + 40 \Rightarrow \boxed{S_f = 160^\circ\text{C}}$$

La température atteinte est donc celle demandée en consigne et cela quelle que soit la valeur du gain (inférieure à  $G_{rc}$ ).

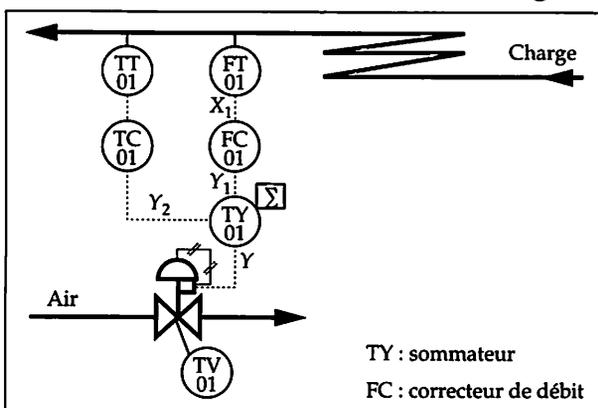
▷ Changement d'échelle du transmetteur TT 01

Puisque l'étendue d'échelle est portée à  $400^\circ\text{C}$  au lieu de  $200^\circ\text{C}$ , la sensibilité du transmetteur diminue de moitié. Le gain statique du procédé diminue donc également de moitié.

Pour garder le même réglage que précédemment, il faut donc doubler le gain du régulateur, soit prendre  $G_r = 4,1$ .

## 7 Amélioration de la boucle

▷ Nouveau schéma de régulation



Une régulation mixte est alors envisageable (fig. 7.58). Dès que le débit de la charge varie, le correcteur FC 01 commande la vanne TV 01, sans attendre les effets sur la température. La prise en compte directe des variations du débit de charge amoindrira les variations de la température de sortie du four. Le régulateur TC 01 commande la vanne TV 01 en fonction de la température et de la consigne.

Figure 7.58

## ▷ Réglages des modules de calcul

Par sécurité, la vanne doit être fermée par manque d'air. Le régulateur TC 01 est donc réglé en action inverse puisque, lorsque la température de sortie de la charge diminue, il faut augmenter le débit d'air. Pour régler le sommateur FY 01 et le correcteur FC 01, il faut réaliser un essai.

Le régulateur est en position « manuel » (hors fonction automatique) et la vanne TV 01 est ouverte pour assurer une température proche de celle souhaitée. On attend, ou on provoque, une variation du débit de la charge, et on enregistre les variations de température. La courbe obtenue permet de connaître la fonction de transfert perturbatrice. Le rapport entre la variation de température et la variation de débit permet de calculer le gain du correcteur FC.

$$\text{Exemple : } H_1(p) = \frac{T(p)}{Q(p)} = \frac{G_1 e^{-\tau p}}{\theta_1 p + 1} \Rightarrow H_1(p) = \frac{1,5 e^{-16 p}}{20 p + 1}$$

La fonction de transfert  $C_1(p)$  du correcteur FC 01 est :

$$C_1(p) = \frac{H_1(p)}{H(p)} = \frac{G_1}{G_s} \frac{\theta p + 1}{\theta_1 p + 1} \Rightarrow C_1(p) = \frac{1,5}{1,2} \frac{50 p + 1}{20 p + 1}$$

Le correcteur FC 01 est un correcteur d'amplification 1,25, de constante d'avance de phase 50 s et de constante de retard de phase 20 s. Le correcteur correspond aussi à un correcteur PD muni d'un filtre de premier ordre.

Le signal de sortie  $Y$  du sommateur FY 01 est :  $Y = Y_1 + Y_2 - Y_0$ .

Pour le débit normal de la charge, on a un signal de mesure  $X_1$ . Le signal de sortie  $Y$  doit correspondre au signal  $Y_2$ . On a donc :  $Y_0 = Y_1 = 1,25 X_1$ .

## Problème 9

### ▼ Étude du procédé

#### ▷ Schémas fonctionnels

On cherche les transformées de Laplace des équations :

$$m_1(t) = 0,05 \int_0^t [q_e(t) - q_s(t)] dt \Rightarrow M_1(p) = \frac{0,05}{p} [Q_e(p) - Q_s(p)]$$

$$q_s(t) = 1,25 m_1(t) \Rightarrow Q_s(p) = 1,25 M_1(p)$$

Le schéma fonctionnel entre  $Q_e(p)$  et  $M_1(p)$  est représenté figure 7.59.

Le schéma fonctionnel entre  $M_1(p)$  et  $Y_{R1}(p)$  est représenté figure 7.60.

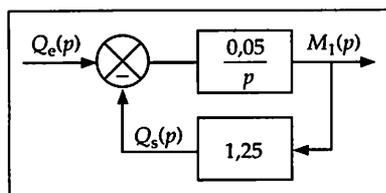


Figure 7.59

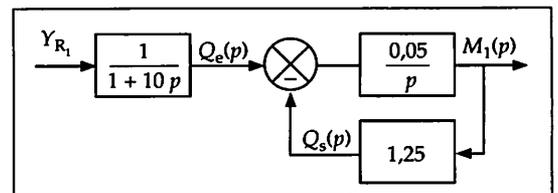


Figure 7.60

#### ▷ Fonction de transfert $G(p)$

On remplace  $Q_s(p) = 1,25 M_1(p)$  dans  $M_1(p) = \frac{0,05}{p} [Q_e(p) - Q_s(p)]$  :

$$\frac{M_1(p)}{Q_1(p)} = \frac{0,8}{16p+1} \text{ . On obtient alors : } G(p) = \frac{M_1(p)}{Y_{R1}(p)} = \frac{0,8}{(16p+1)(10p+1)}$$

▷ **Stabilité du procédé**

Puisque  $G(p)$  ne comporte pas d'intégration, le procédé est naturellement stable.

▷ **Réponse de  $m_1(t)$  à  $y_{R_1}(t)$**

Pour  $Y_{R_1}(p) = 0,1/p$ , on a :  $M_1(p) = \frac{0,1}{p} \frac{0,8}{(16p+1)(10p+1)} \Rightarrow M_1(p) = \frac{0,08}{p} - \frac{3,41}{(16p+1)} + \frac{1,33}{(10p+1)}$

La transformée inverse de Laplace de  $M_1(p)$  s'écrit :

$$m_1(t) = 0,08 - 0,213 e^{-t/16} + 0,133 e^{-t/10}$$

Réponse  $q_s(t)$  à  $y_{R_1}(t)$  :  $q_s(t) = 1,25 m_1(t) \Rightarrow q_s(t) = 0,1 - 0,266 e^{-t/16} + 0,166 e^{-t/10}$

Réponse  $q_e(t)$  à  $y_{R_1}(t)$  :  $Q_e(p) = \frac{Y_{R_1}(p)}{1+10p} \Rightarrow Q_e(p) = \frac{0,1}{p(1+10p)} \Rightarrow q_e(t) = 0,1(1 - e^{-t/10})$

▷ **Représentation de  $y_{R_1}(t)$ ,  $m_1(t)$ ,  $q_e(t)$  et  $q_s(t)$  (fig. 7.61)**

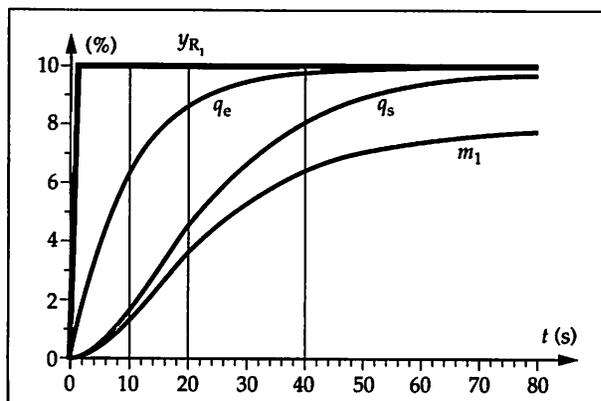


Figure 7.61

**2 Régulation de niveau**

▷ **Plan de tuyauterie et d'instrumentation de la régulation de niveau (fig. 7.62)**

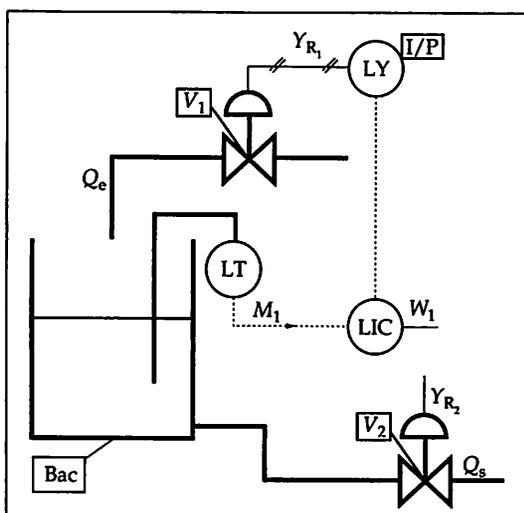


Figure 7.62

Le régulateur de niveau LIC est à action inverse. Si  $Q_s$  diminue, le niveau augmente et le signal de sortie du régulateur diminue. Le signal de sortie  $Y_{R_1}$  du convertisseur LY diminue et, la vanne fermant par manque d'air, le niveau diminue et est donc corrigé.

▷ **Schéma fonctionnel (régulateur + procédé) (fig. 7.63)**

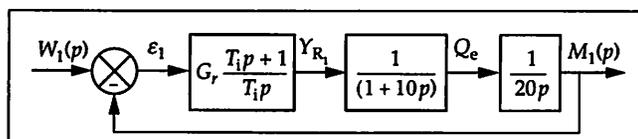


Figure 7.63

▷ **Fonction de transfert  $F(p)$  en chaîne fermée**

La fonction de transfert est : 
$$F(p) = \frac{M_1(p)}{W_1(p)} = \frac{G_r(T_i p + 1)}{20 T_i p^2 (10 p + 1) + G_r(T_i p + 1)}$$

Pour  $T_i = 10$  s et  $G_r = 1$ , on obtient : 
$$F(p) = \frac{M_1(p)}{W_1(p)} = \frac{1}{200 p^2 + 1}$$

Quelle que soit la valeur de  $G_r$ , ce pré-réglage est inacceptable puisqu'il correspond à un système oscillant entretenu (coefficient d'amortissement  $\xi = 0$ ). Pour éviter un tel phénomène, on peut par exemple augmenter la valeur de la constante de temps  $T_i$ .

▷ **Diagrammes de Bode de  $F_R(j\omega)$   $G(j\omega)$**

La fonction de transfert du régulateur est : 
$$F_R(p) = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon_1(p)} = \frac{1 + 80 p}{80 p}$$

La fonction de transfert en chaîne ouverte est :

$$A(j\omega) = F_R(j\omega) G(j\omega) = \frac{80 j\omega + 1}{80 j\omega (20 j\omega)(10 j\omega + 1)}$$

Le module  $A$  de  $A(j\omega)$  est : 
$$G_{dB} = 20 \lg(A(j\omega)) = 20 \lg \left[ \frac{\sqrt{80^2 \omega^2 + 1}}{1600 \omega^2 \sqrt{10^2 \omega^2 + 1}} \right]$$

L'argument  $\varphi$  de  $A(j\omega)$  est :  $\varphi = \arctan(80 \omega) - \arctan(10 \omega) - \pi$

Les diagrammes de Bode en gain et en phase sont représentés figures 7.64 a et b.

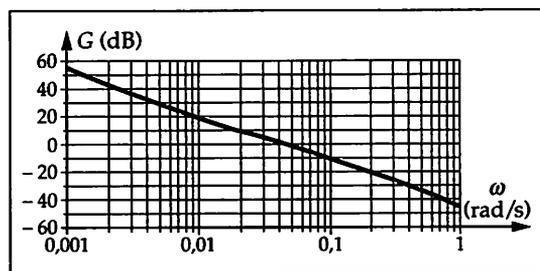


Figure 7.64 a.

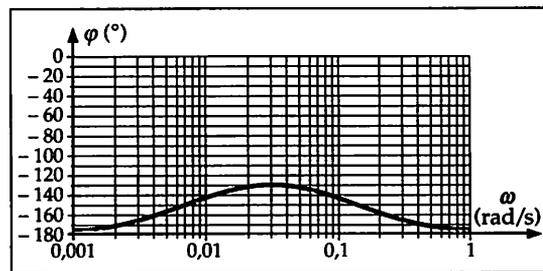


Figure 7.64 b.

La marge de phase mesurée est  $\varphi_m = 50^\circ$ . Le système est bien compensé par le pôle  $p = -1/80$ ; la marge de phase est correcte. A remarquer que la marge de gain est infinie puisque l'argument ne déphase pas plus de  $-180^\circ$ ; le système est donc en stabilité absolue.

### 3 Régulation de température

▷ **Régulation appelée « chaud-froid »**

Lorsque la température du produit d'entrée (charge) est inférieure à la température désirée ( $26^\circ\text{C}$ ), il faut réchauffer le produit. Lorsque la température du produit d'entrée (charge) est supérieure à la température désirée ( $26^\circ\text{C}$ ), il faut refroidir le produit. Le régulateur doit donc agir sur deux grandeurs réglantes opposées : le débit d'eau chaude et le débit d'eau froide.

La régulation « chaud-froid » s'impose donc ici.

### ▷ Sens d'action du régulateur

La vanne  $V_4$  est ouverte par manque d'air. Lorsque la température augmente au-dessus de  $26\text{ }^\circ\text{C}$ , l'écart mesure – consigne augmente et le régulateur doit donc diminuer la commande  $Y_R$  pour ouvrir la vanne de refroidissement. Le régulateur doit donc être à action inverse (la figure 7.65 montre le signal de sortie  $Y_R$  d'un régulateur à action proportionnelle inverse). À remarquer que le raisonnement peut se faire aussi lorsque la température diminue en dessous de  $26\text{ }^\circ\text{C}$ .

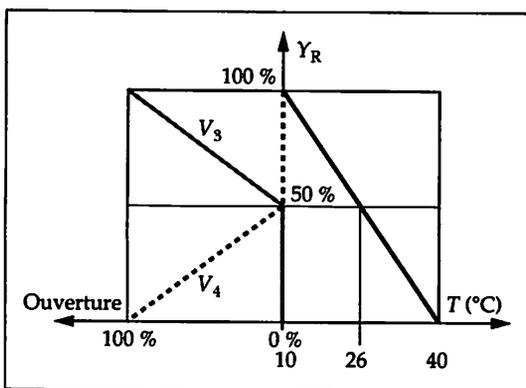


Figure 7.65

### ▷ Représentation graphique de l'ouverture des vannes

La vanne  $V_3$  est fermée par manque d'air, donc lorsque la commande  $Y_R$  augmente, la vanne  $V_3$  s'ouvre. Lorsque la commande  $Y_R$  augmente, la vanne  $V_4$  doit se fermer ; c'est pourquoi la vanne  $V_4$  est ouverte par manque d'air. La figure 7.65 représente le pourcentage d'ouverture en fonction du signal de sortie  $Y_R$ . Les vannes sont supposées être de même dimension. C'est la valeur de la consigne ( $26\text{ }^\circ\text{C}$ ) qui détermine la valeur  $Y_{R0}$  (50 %) pour laquelle les deux vannes sont fermées.

### ▷ Nouvelle stratégie de régulation

À partir des fonctions de transfert données, on détermine le rapport de la constante de temps  $\theta$  au temps mort  $\tau$ , soit :  $\theta/\tau = 3$ . La régulation est d'autant plus difficile que ce rapport est petit et que le gain statique est grand ; pour un gain statique unitaire, la régulation PID est limitée lorsque le rapport  $\theta/\tau$  est inférieur à 3. Un régulateur numérique PIR (PI retard, appelé encore « prédicteur de Smith ») permettrait une réponse plus rapide de la température de sortie de l'échangeur.

## Problème 10

### 1 Identification du procédé par la méthode de Strejc

Pour chaque courbe, on trace la tangente au point d'inflexion (fig. 7.66).

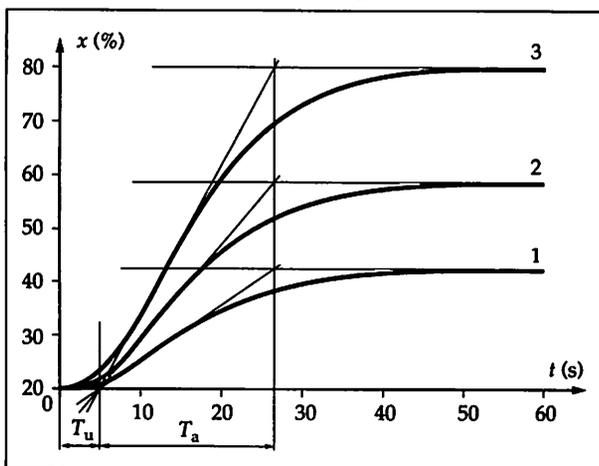


Figure 7.66

Les points d'inflexion de chaque courbe sont identiques, les trois courbes ne diffèrent donc que par leur amplitude. On mesure les temps  $T_u$  et  $T_a$  :  $T_u = 5\text{ s}$  et  $T_a = 22\text{ s}$ .

On calcule le rapport  $T_u/T_a = 0,227$  et, pour trouver la constante de temps  $\theta$  et l'ordre  $n$ , on se reporte au nomogramme figure 4 de la Boîte à outils 3, soit :  $\theta = 7\text{ s}$  et  $n \approx 3$ .

$$\text{Courbe 1 : } G_{s_1} = \frac{\Delta X_1}{\Delta Y} \Rightarrow G_{s_1} = 0,45 \Rightarrow H_1(p) = \frac{0,45}{(7p+1)^3}$$

$$\text{Courbe 2 : } G_{s_2} = \frac{\Delta X_2}{\Delta Y} \Rightarrow G_{s_2} = 0,78 \Rightarrow H_2(p) = \frac{0,78}{(7p+1)^3}$$

$$\text{Courbe 3 : } G_{s_3} = \frac{\Delta X_3}{\Delta Y} \Rightarrow G_{s_3} = 1,20 \Rightarrow H_3(p) = \frac{1,20}{(7p+1)^3}$$

**2 Variation du gain statique**

Le gain statique n'est pas constant puisqu'il varie en fonction du nombre de vannes ouvertes. Le plus petit gain statique est  $G_{s_1} = 0,45$  et le plus grand gain statique est  $G_{s_3} = 1,20$ , ce qui donne une variation de gain statique  $\Delta G_s = \frac{G_{s_3}}{G_{s_1}} \Rightarrow \Delta G_s = 2,67$ . Une

marge de gain  $G_m = 20 \lg A_m$  assure la stabilité du système pour une variation de gain statique  $\Delta G_s < A_m$ . La valeur  $A_m = 2$  est inférieure à la variation du gain statique, la marge de gain de 6 dB est donc insuffisante.

**3 Régulation qualitative optimale**

▷ Équation d'état du modèle

$$\frac{X_1(p)}{Y(p)} = \frac{G_s}{1 + \theta p} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \frac{1}{\theta} (G_s y(t) - x_1(t))$$

$$\frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{1}{1 + \theta p} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{1}{\theta} (x_1(t) - x_2(t))$$

$$\frac{X_3(p)}{X_2(p)} = \frac{1}{1 + \theta p} \Rightarrow \dot{x}_3(t) = \frac{1}{\theta} (x_2(t) - x_3(t))$$

À partir de ces équations, on cherche une combinaison linéaire des différentes grandeurs intermédiaires  $x_1, x_2, x_3$  et de la commande  $y$  donnant la dérivée énième de la grandeur de sortie  $x_3$ .

La dérivée première de  $x_3$  est :  $\dot{x}_3(t) = \frac{1}{\theta} [x_2(t) - x_3(t)]$ . Comme  $y$  et  $x_1$  n'apparaissent pas dans cette équation, on effectue alors la dérivée seconde de  $x_3$  :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3(t) &= \frac{1}{\theta} [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)] \Rightarrow \ddot{x}_3(t) = \frac{1}{\theta} \left( \frac{1}{\theta} (x_1(t) - x_2(t)) - \frac{1}{\theta} (x_2(t) - x_3(t)) \right) \\ &\Rightarrow \ddot{x}_3(t) = \frac{1}{\theta^2} (x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t)) \end{aligned}$$

Comme  $y$  n'apparaît pas dans cette équation, on effectue alors la dérivée troisième de  $x_3$  :

$$\dddot{x}_3(t) = \frac{1}{\theta^2} (\dot{x}_1(t) - 2\dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t)) \Rightarrow \dddot{x}(t) = \frac{1}{\theta^3} (G_s y(t) - 3x_1(t) + 3x_2(t) - x_3(t))$$

▷ Schéma fonctionnel de la régulation qualitative optimale (fig. 7.67)

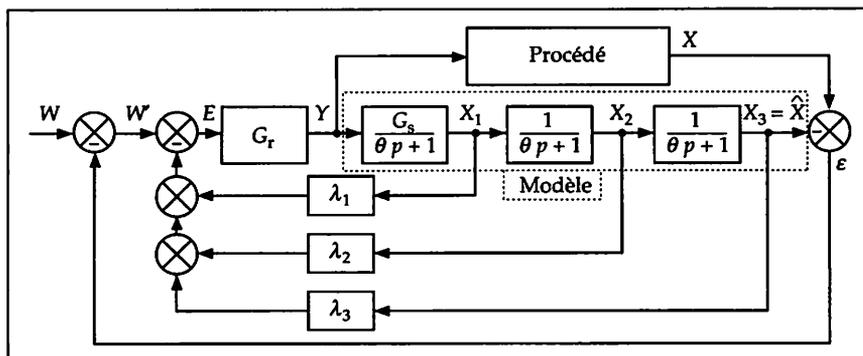


Figure 7.67

- ▷ Expression de  $y$  en fonction de  $w', x_1, x_2, x_3$

$$\frac{\widehat{X}(p)}{W(p)} = \frac{1}{(\theta_d p + 1)^3} \Rightarrow W(p) = \theta_d^3 p^3 \widehat{X}(p) + 3 \theta_d^2 p^2 \widehat{X}(p) + 3 \theta_d p \widehat{X}(p) + \widehat{X}(p)$$

On obtient :  $w'(t) = \theta_d^3 \widehat{x}''(t) + 3 \theta_d^2 \widehat{x}'(t) + 3 \theta_d \widehat{x}(t) + \widehat{x}(t)$

En remplaçant par les équations d'états du modèle obtenues précédemment, il vient :

$$w'(t) = \theta_d^3 \frac{1}{\theta^3} (G_s y - 3x_1 + 3x_2 - x_3) + 3 \theta_d^2 \frac{1}{\theta^2} (x_1 - 2x_2 + x_3) + 3 \theta_d \frac{1}{\theta} (x_2 - x_3) + x_3$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu^3 G_s} (w'(t) - 3\mu^2(1-\mu)x_1(t) - 3\mu(1-\mu)^2 x_2(t) - (1-\mu)^3 x_3(t)) \quad \text{avec : } \mu = \frac{\theta_d}{\theta}$$

- ▷ Expressions de  $G_r, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

La variation  $y(t)$  du signal de commande est donc :  $y(t) = G_r [w' - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3]$

avec :  $G_r = \frac{1}{\mu^3 G_s}, \lambda_1 = 3\mu^2(1-\mu), \lambda_2 = 3\mu(1-\mu)^2, \lambda_3 = (1-\mu)^3$

- ▷ Calcul des valeurs de  $G_r, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

On calcule :  $\mu = \frac{\theta_d}{\theta} \Rightarrow \mu = \frac{5}{7} \Rightarrow \mu = 0,714$

On obtient :  $G_r = 6,1, \lambda_1 = 0,437, \lambda_2 = 0,175, \lambda_3 = 0,023$

#### 4 Étude de la robustesse

On sait que le gain statique du procédé évolue. Si l'on suppose qu'il est modifié dans un rapport  $\alpha$ , on a :

$$G = \alpha G_s, \text{ soit } \widehat{X}(p) = \alpha X(p)$$

$$W(p) = \theta_d^3 p^3 \widehat{X}(p) + 3 \theta_d^2 p^2 \widehat{X}(p) + 3 \theta_d p \widehat{X}(p) + \widehat{X}(p)$$

$$W(p) - \varepsilon(p) = W(p) - (X(p) - \widehat{X}(p)) = W(p) + \widehat{X}(p) - \alpha X(p)$$

$$\text{On a : } W(p) = \theta_d^3 p^3 \widehat{X}(p) + 3 \theta_d^2 p^2 \widehat{X}(p) + 3 \theta_d p \widehat{X}(p) + \alpha \widehat{X}(p)$$

La fonction de transfert en chaîne fermée est donc :  $\frac{\widehat{X}(p)}{W(p)} = \frac{1}{\theta_d^3 p^3 + 3\theta_d^2 p^2 + 3\theta_d p + \alpha}$

Pour étudier la stabilité, on établit le tableau de Routh suivant (tableau 7.6).

$p^3$	$\theta_d^3$	$3\theta_d$
$p^2$	$3\theta_d^2$	$\alpha$
$p^1$	$A = \frac{3\theta_d^2 3\theta_d - \alpha \theta_d^3}{3\theta_d^2}$	
$p^0$	$\alpha$	

Tableau 7.6

Le système est stable si  $A$  est positif, soit :

$$A = \frac{\theta_d(9-\alpha)}{3} \Rightarrow 9-\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 9$$

Le système accepte des changements de gain statique jusqu'à 9 fois le gain  $G_{s1}$  avant d'être en instabilité limite (pompage). Le gain statique du procédé évoluant dans un rapport de 2,67, la régulation qualitative optimale permet donc d'obtenir un système stable malgré les variations du gain statique.

La fonction de transfert est de la forme : 
$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

**Réponse indicielle** (fig. 1)

$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$ . Pour  $Y(p) = 1/p$ , on a :  $X(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$

Temps de réponse à 5 % ( $\xi < 0,7$ ) :  $t_r \approx \frac{3}{\omega_n \xi}$

Temps de pic :  $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$

Pseudo-période :  $T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$

Pseudo-pulsation :  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

Premier dépassement :  $D_1 = e^{-\pi \xi / \sqrt{1 - \xi^2}}$

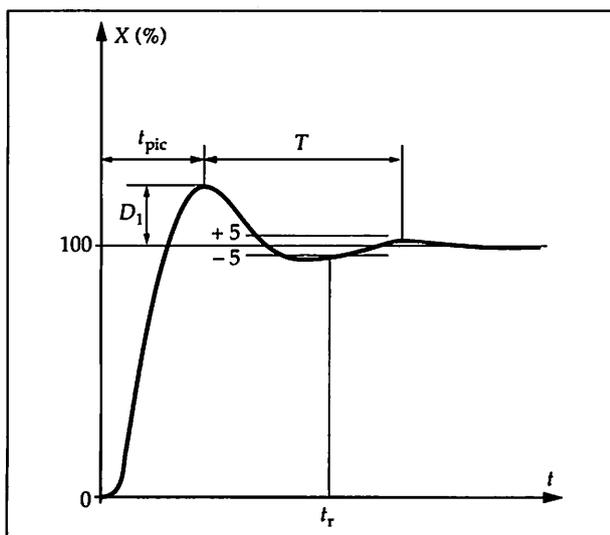


Figure 1

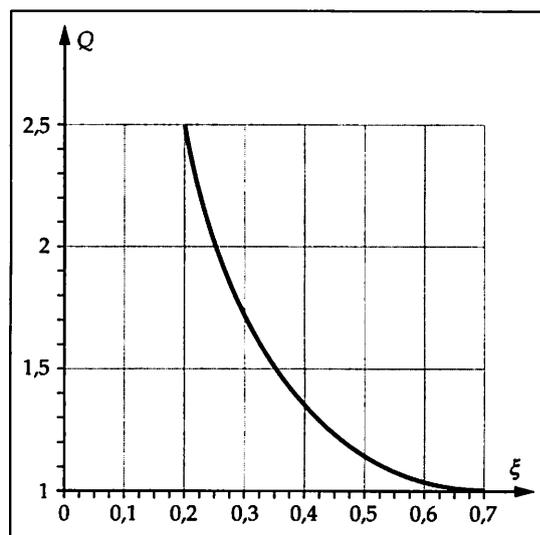


Figure 2

**Réponse fréquentielle** (fig. 2)

Pulsation de résonance :  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

Facteur de résonance :  $Q = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$  ou, exprimé en décibels :

$$Q_{dB} = 20 \lg Q$$

# à Boîte 2 Outils Transformées de Laplace et transformées en Z

## Transformées de Laplace

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$u(t - \tau)$	$e^{-\tau p}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
$e^{-t/\theta}$	$\frac{\theta}{1 + \theta p}$
$1 - e^{-t/\theta}$	$\frac{1}{p(1 + \theta p)}$
$\frac{t}{\theta^2} e^{-t/\theta}$	$\frac{1}{(1 + \theta p)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(p)$
$\frac{t^{n-1} e^{-t/\theta}}{\theta^n (n-1)!}$	$\frac{1}{(1 + \theta p)^n}$
$\frac{e^{-t/\theta_1} - e^{-t/\theta_2}}{\theta_1 - \theta_2}$	$\frac{1}{(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}$
$1 + \frac{T - \theta}{\theta} e^{-t/\theta}$	$\frac{1 + T p}{p(1 + \theta p)}$
$\frac{\theta - T}{\theta^2} e^{-t/\theta}$	$\frac{1 + T p}{1 + \theta p}$
$1 - \left(1 + \frac{t}{\theta}\right) e^{-t/\theta}$	$\frac{1}{p(1 + \theta p)^2}$
$\theta e^{-t/\theta} + t - \theta$	$\frac{1}{p^2(1 + \theta p)}$
$t - 2\theta + (t + 2\theta) e^{-t/\theta}$	$\frac{1}{p^2(1 + \theta p)^2}$
$(T - \theta)(1 - e^{-t/\theta}) + t$	$\frac{1 + T p}{p^2(1 + \theta p)}$
$t - \theta_1 - \theta_2 - \frac{\theta_2^2 e^{-t/\theta_1} - \theta_1^2 e^{-t/\theta_2}}{\theta_1 - \theta_2}$	$\frac{1}{p^2(1 + \theta_1 p)(1 + \theta_2 p)}$

$F(p)$	$f(t)$ pour $t > 0$
$\frac{1}{(1 + T p)(1 + \theta p)(1 + T' p)}$	$\frac{T e^{-t/T}}{(T - \theta)(T - T')} + \frac{\theta e^{-t/\theta}}{(\theta - T)(\theta - T')} + \frac{T' e^{-t/T'}}{(T' - T)(T' - \theta)}$
$\frac{1 + T' p}{(1 + T p)^2(1 + \theta p)}$	$\frac{\theta - T'}{(\theta - T)^2} e^{-t/\theta} + \left(\frac{T - T'}{T^2(T - \theta)} t + \frac{T' - \theta}{(T - \theta)^2}\right) e^{-t/T}$
$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t)$
$\frac{1}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$	$1 + \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)\right)$
$\frac{1}{(1 + \theta p) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$	$\frac{\omega_n e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t - \psi)}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - 2\theta \xi \omega_n + \theta^2 \omega_n^2)}} + \frac{\theta \omega_n^2 e^{-t/\theta}}{1 - 2\theta \xi \omega_n + \theta^2 \omega_n^2}$ avec : $\psi = \arctan\left(\frac{\theta \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - \theta \xi \omega_n}\right)$
$\frac{1 + a p}{(1 + \theta p) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$	$\frac{(\theta - a) \omega_n^2 e^{-t/\theta}}{1 - 2\theta \xi \omega_n + \theta^2 \omega_n^2} + \sqrt{\frac{1 - 2a \xi \omega_n + a^2 \omega_n^2}{1 - 2\theta \xi \omega_n + \theta^2 \omega_n^2}} \frac{\omega_n e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_p t + \psi)$ avec : $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ et $\psi = \arctan\left[\frac{a \omega_p}{1 - a \xi \omega_n}\right] - \arctan\left[\frac{\theta \omega_p}{1 - \theta \xi \omega_n}\right]$
$\frac{1 + a p}{p(1 + \theta p) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$	$1 + \frac{1 - 2a \xi \omega_n + a^2 \omega_n^2}{1 - 2\theta \xi \omega_n + \theta^2 \omega_n^2} \frac{e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \psi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{\theta \omega_n^2 (a - \theta) e^{-t/\theta}}{1 - 2\theta \xi \omega_n + \theta^2 \omega_n^2}$ avec : $\psi = \arctan\left(\frac{a \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - a \xi \omega_n}\right) - \arctan\left(\frac{\theta \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - \theta \xi \omega_n}\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)$

## Discrétisation

Le signal analogique  $y(t)$ , échantillonné à chaque période d'échantillonnage  $T_e$ , conduit à un signal discret  $y_n$  (fig. 3).

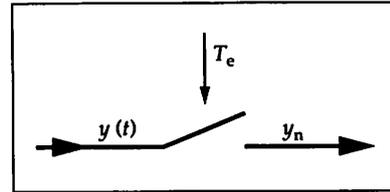


Figure 3. Échantillonneur

Opérations de discrétisation :

$$\mathcal{D}[y(t)] = y_n$$

$$\mathcal{D}[A y(t)] = A y_n$$

$$\mathcal{D}[y_1(t) + y_2(t)] = y_{1n} + y_{2n}$$

$$\mathcal{D}[y(t - \tau)] = y_{n-k} \text{ avec } \tau = k T_e$$

$$\mathcal{D}[\dot{y}(t)] = \frac{y_n - y_{n-1}}{T_e}$$

$$\mathcal{D}[\ddot{y}(t)] = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{T_e^2}$$

Pour  $y(t) = \int_0^t x(v) dv$ , on a :  $\mathcal{D}[y(t)] = y_n = y_{n-1} + T_e x_{n-1}$

## Transformées en Z

$F(p)$	$f(t)$ pour $t > 0$	$F(Z)$	$F(Z^{-1})$
1	$\delta(t)$	1 ou $Z^0$	1 ou $Z^0$
$e^{T_e p}$	$u(t + T_e)$	$Z$	$1/Z^{-1}$
$\frac{1}{p}$	$u(t)$	$\frac{Z}{Z-1}$	$\frac{1}{1-Z^{-1}}$
$e^{-\tau p}$	$u(t - \tau)$	$1/Z^k$ avec $\tau = k T_e$	$Z^{-k}$ avec $\tau = k T_e$
$\frac{1}{p^2}$	$t$	$\frac{T_e Z}{(Z-1)^2}$	$\frac{T_e Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T_e^2 Z(Z+1)}{2(Z-1)^3}$	$\frac{T_e^2 Z^{-1}(1+Z^{-1})}{2(1-Z^{-1})^3}$
$\frac{\theta}{1+\theta p}$	$e^{-t/\theta}$	$\frac{Z}{Z-\alpha}$ avec $\alpha = e^{-T_e/\theta}$	$\frac{1}{1-\alpha Z^{-1}}$ avec $\alpha = e^{-T_e/\theta}$
$\frac{1}{p(1+\theta p)}$	$1 - e^{-t/\theta}$	$\frac{Z(1-\alpha)}{(Z-1)(Z-\alpha)}$ avec $\alpha = e^{-T_e/\theta}$	$\frac{(1-\alpha)Z^{-1}}{(1-Z^{-1})(1-\alpha Z^{-1})}$ avec $\alpha = e^{-T_e/\theta}$
$\frac{1}{p^2(1+\theta p)}$	$t - \theta(1 - e^{-t/\theta})$	$\frac{T_e Z}{(Z-1)^2} - \frac{\theta Z(1-\alpha)}{(Z-1)(Z-\alpha)}$	$\frac{T_e Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2} - \frac{\theta(1-\alpha)Z^{-1}}{(1-Z^{-1})(1-\alpha Z^{-1})}$
$\frac{1}{p(1+\theta p)^2}$	$1 - \left(1 + \frac{t}{\theta}\right) e^{-t/\theta}$	$\frac{Z \alpha \left[ Z \left( \frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{T_e}{\theta} \right) + \alpha - 1 + \frac{T_e}{\theta} \right]}{(Z-1)(Z-\alpha)^2}$ avec $\alpha = e^{-T_e/\theta}$	$\frac{Z^{-1} \alpha \left[ \frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{T_e}{\theta} + Z^{-1} \left( \alpha - 1 + \frac{T_e}{\theta} \right) \right]}{(1-Z^{-1})(1-\alpha Z^{-1})^2}$ avec $\alpha = e^{-T_e/\theta}$

Fonction de transfert en Z d'un système analogique bloqué échantillonné, de fonction de transfert  $H(p)$  :

$$H_b(Z) = \frac{Z-1}{Z} \mathcal{Z} \left[ \frac{H(p)}{p} \right] \text{ ou } H_b(Z) = (1-Z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{H(p)}{p} \right]$$

# à Boîte à Outils 3

## Nomogrammes pour l'identification

« Courbe en S » : relation entre  $T_u/T_a$ ,  $\theta$  et  $n$

La courbe étudiée (fig. 4) est représentée par :  $X(p) = \frac{\Delta X}{p(\theta p + 1)^n}$

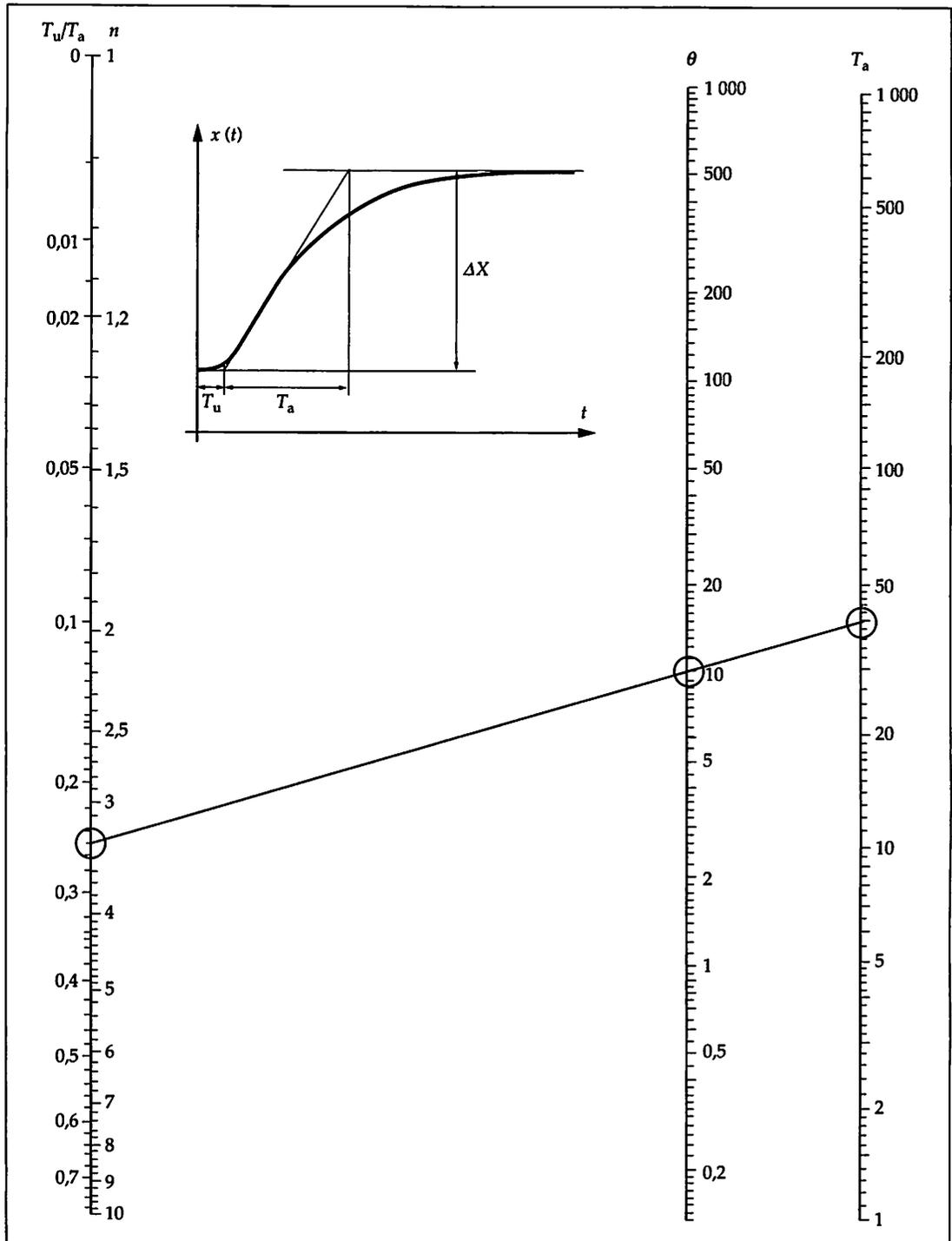


Figure 4. Nomogramme pour modèle de Strejc

## « Courbe intégratrice » : relation entre $\theta$ et $n$

La courbe étudiée (fig. 5) est représentée par :  $X(p) = \frac{c e^{-\tau p}}{p^2 (\theta p + 1)^n}$

La figure 6 donne  $n$  en fonction du rapport  $AB/AC$ . La constante de temps  $\theta$  est :  $\theta = A'A/n$

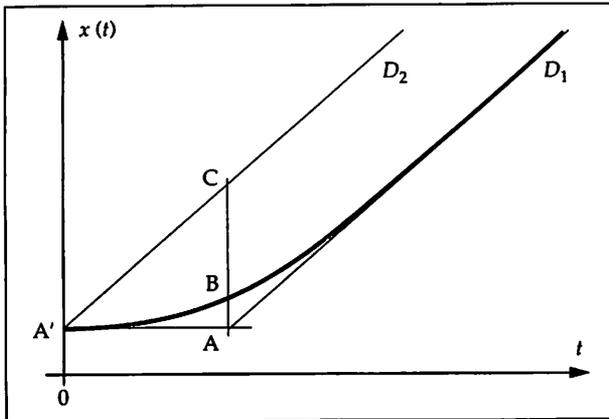


Figure 5

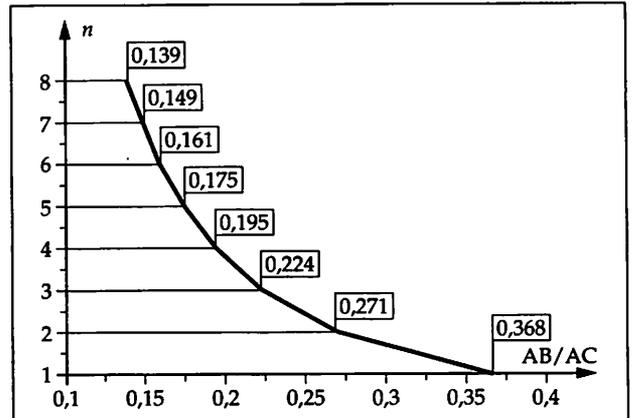


Figure 6

## Modèle de Strejc en chaîne fermée : relation entre $K$ et $n$

Modèle de Strejc :  $H(p) = \frac{G_s}{(\theta p + 1)^n}$

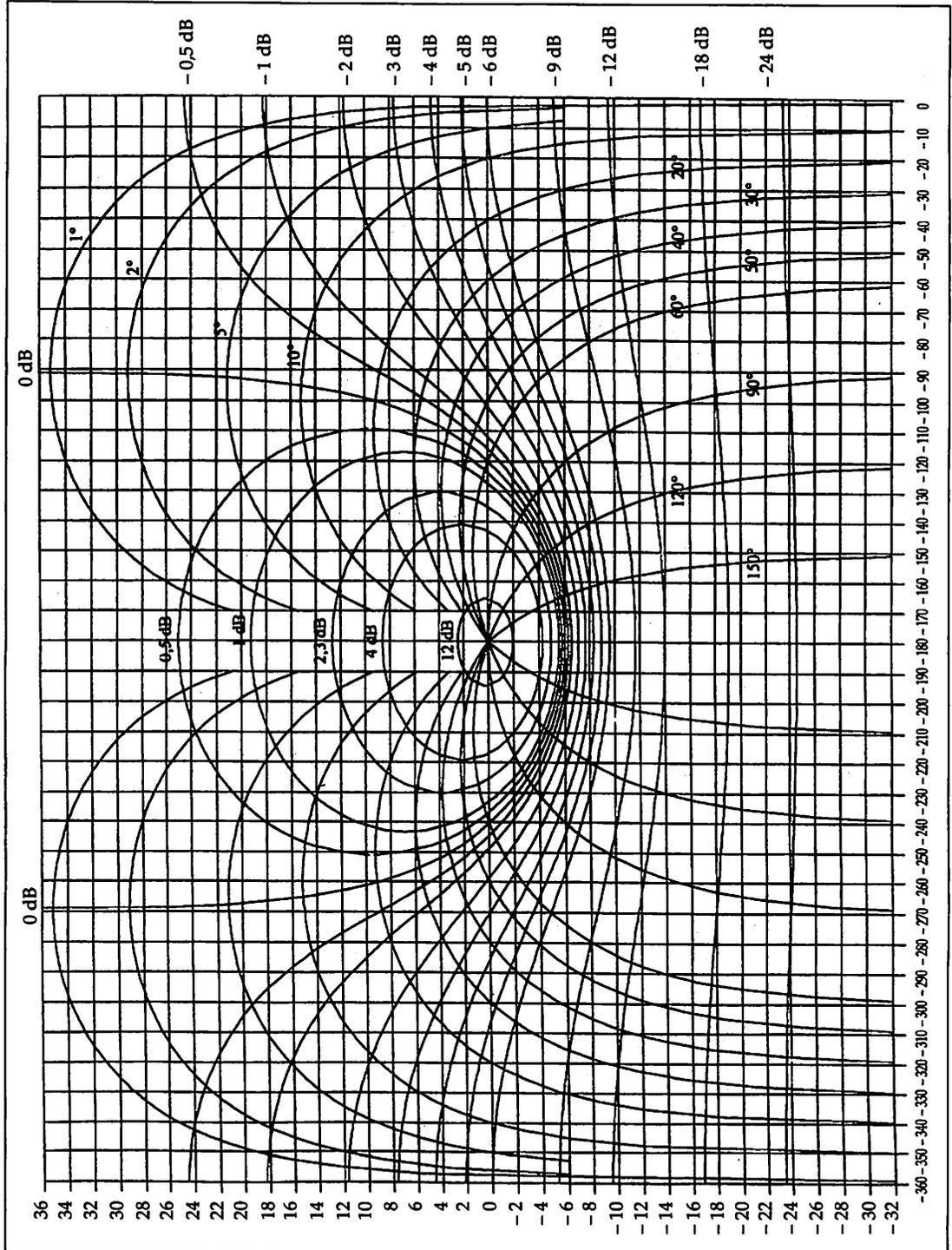
$\theta = \frac{T_{osc} \tan(\pi/n)}{2\pi}$  avec  $T_{osc}$  : période des oscillations.

$K = G_{rc} G_s = [\cos(\pi/n)]^{-n}$  avec  $G_{rc}$  : gain critique du régulateur.

$G_{rc} G_s$	232	73	39	25,6	18,8	14,8	12,2	10,4	9,02	8,00	7,20	6,56
$n$	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2
$G_{rc} G_s$	6,03	5,60	5,23	4,91	4,63	4,40	4,19	4,00	3,68	3,43	3,22	3,04
$n$	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,2	4,4	4,6	4,8
$G_{rc} G_s$	2,89	2,59	2,37	2,21	2,08	1,97	1,88	1,81	1,75	1,70	1,65	1,39
$n$	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	15

# Boîte à Outils 4

## Abaque de Black



Coordination artistique : Danielle Capellazzi

Conception et mise en pages : Jean-Pierre Delarue

Préparation et corrections : PolyPAO