

62052
PRO

Patrick Prouvost
agrégé en génie mécanique
Lycée Vol de Murigny, Reims

CONTRÔLE régulation

BCDI: 7318

PIWON

**EXERCICES ET PROBLÈMES
RÉSOLUS**

~~CENTRE DE DOCUMENTATION
ET D'INFORMATION
LYCÉE JEAN ROSTAND
Rue Ferdinand Bodet
78200 MANTES LA JOLIE~~

NATHAN
TECHNIQUE

NOTA BENE: IL FOTOCOPIARE
E' UN DELITTO PENALE
PUNTO PER LA LOTTA
CONTRO LA FURTO DI LIBRI



"Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage strict du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite."

AVANT-PROPOS

L'exercice d'application, passage indispensable entre la théorie et le monde industriel, est le propos de cet ouvrage, destiné à tous ceux qui débudent l'étude de la régulation, mais aussi aux étudiants en STS, IUT, notamment CIRA et Mesures physiques, ainsi qu'aux techniciens et auditeurs de la formation continue.

Il s'articule en trois parties progressives.

La première présente, sous forme de rappel de cours suivi d'exercices d'applications, les principaux résultats touchant à l'identification, aux régulateurs industriels, à la stabilité, à la précision et aux méthodes de réglage.

La deuxième partie propose des problèmes de synthèse sur les boucles simples de régulation, et la troisième des problèmes d'étude de boucles imbriquées ou particulières.

Exercices et problèmes comportent solutions et commentaires qui visent à familiariser l'utilisateur à des techniques de calcul et aux approximations qu'impose la pratique.

Les problèmes, issus de cas industriels, comportent des relevés graphiques et des schémas techniques normalisés ; ils tiennent compte des aspects actuels de la régulation industrielle.

Un repère N en début d'exercice, ou de problème, indique que celui-ci comporte une ou plusieurs questions de régulation numérique.

Les équations mathématiques permettent, à l'aide de la calculatrice ou d'un ordinateur, de visualiser les courbes qui représentent les réponses des exercices ou des problèmes, même si l'on ne dispose pas d'un simulateur spécialisé.

GRANDEURS ET SYMBOLES

Procédé

G_s : gain statique d'un procédé autoréglant
 k : gain dynamique d'un procédé intégrateur
 Q : débit (par exemple Q_a débit d'alimentation,
 Q_s débit de sortie)

θ : constante de temps
 n : ordre d'un système
 τ : temps mort

Régulateur

W : signal de consigne
 $\Delta W = w$: petite variation de consigne
 X : signal de mesure
 $\Delta X = x$: petite variation de mesure
 ε : signal d'écart mesure/consigne
 Y : signal réglant (de sortie) d'un régulateur
 $\Delta Y = y$: petite variation du signal réglant

G_r : gain d'un régulateur
 B_p : bande proportionnelle ($B_p = 100/Gr$)
 T_i : constante de temps d'action intégrale
 T_d : constante de temps d'action dérivée

Fonction de transfert

$H(p)$: fonction de transfert du procédé
 $C(p)$: fonction de transfert du régulateur
 $F(p)$: fonction de transfert en chaîne fermée
 $A(p) = C(p)H(p)$: fonction de transfert en chaîne ouverte

$H(j\omega)$: fonction de transfert isochrone
du procédé
 ω : pulsation (rad/s ou rad/min)
 G : gain logarithmique (décibels)
 φ : phase ou déphasage (degrés ou radians)

Second ordre

ξ : coefficient d'amortissement
 ω_n : pulsation propre non amortie
 ω_r : pulsation de résonance

D_1 : premier dépassement
 t_r : temps de réponse à $\pm 5\%$
 Q : facteur de résonance

Les désignations des grandeurs et les symboles utilisés pour les représenter sont répertoriés dans le tableau ci-dessus. Une remarque s'impose en ce qui concerne la notion de *gain*. Suivant la norme, un gain est le logarithme décimal d'un rapport de deux nombres de même nature (deux amplifications en tension ou en puissance par exemple). Un gain s'exprime en décibels (symbole : dB). De ce fait on peut dire que certains résultats sont abusivement appelés *gains* en contrôle et régulation. Ainsi le gain d'un régulateur n'est qu'une amplification d'action proportionnelle et un gain statique est un rapport de deux nombres, deux pourcentages souvent. L'utilisation très fréquente de ces expressions nous a conduit à les conserver mais il est évidemment exclu d'exprimer en décibels les résultats correspondants. De surcroît, pour faciliter le travail du lecteur et éviter des confusions nous avons retenu l'expression *gain logarithmique* pour désigner tout gain répondant à la définition de la norme.

SOMMAIRE

Grandeurs et symboles	4
1. Identification	6
Exercices	11
Solutions	18
2. Régulateur industriel	26
Exercices	29
Solutions	33
3. Stabilité	43
Exercices	47
Solutions	50
4. Précision	59
Exercices	61
Solutions	66
5. Réglage	73
Exercices	80
Solutions	86
6. Problèmes : simple boucle	101
Solutions	115
7. Problèmes : boucles imbriquées ou boucles particulières	139
Solutions	154
Boîtes à outils	187

L'identification d'un système est le fait de déterminer, généralement d'une façon expérimentale, la fonction de transfert de ce système. Deux cas sont à considérer : en chaîne ouverte (le système étudié n'est pas asservi) et en chaîne fermée (un régulateur asservit le système).

1. IDENTIFICATION EN CHAÎNE OUVERTE

On envoie (fig. 1.1) un signal d'entrée $Y(t)$ connu (impulsion, échelon ou rampe (fig. 1.2)) et on enregistre le signal de sortie $X(t)$ qui est analysé ensuite (fig. 1.3).

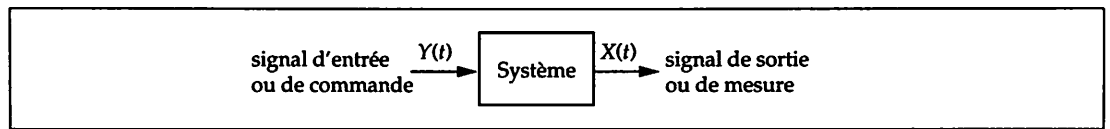
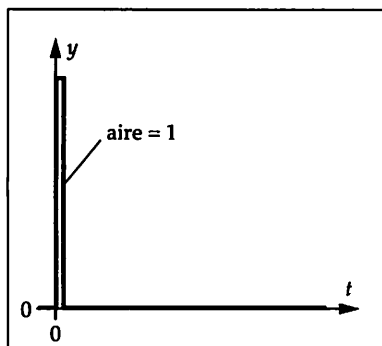
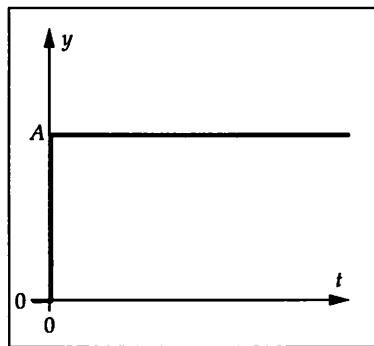


Figure 1.1. Système en chaîne ouverte

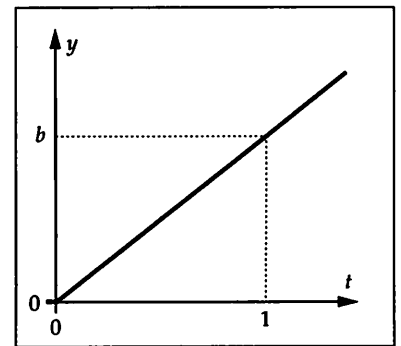
Aux transformées de Laplace $Y(p)$ et $X(p)$ des fonctions $y(t)$ et $x(t)$, petites variations de $Y(t)$ et $X(t)$, on associe la fonction de transfert $H(p)$ du système en chaîne ouverte : $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$



(a) Impulsion unitaire
 $y(t) = \delta(t)$; $Y(p) = 1$



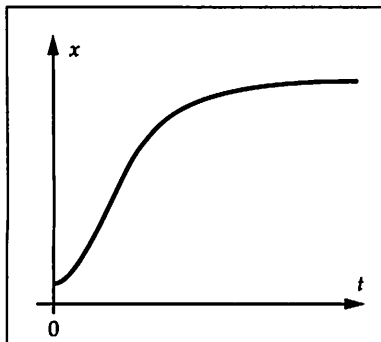
(b) Échelon d'amplitude A
 $y(t) = A u(t)$; $Y(p) = \frac{A}{p}$



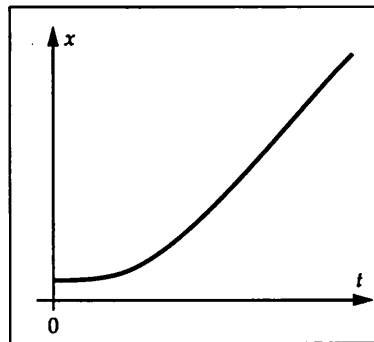
(c) Rampe de pente b
 $y(t) = b t u(t)$; $Y(p) = \frac{b}{p^2}$

Figure 1.2. Signaux d'entrée $y(t)$ les plus utilisés

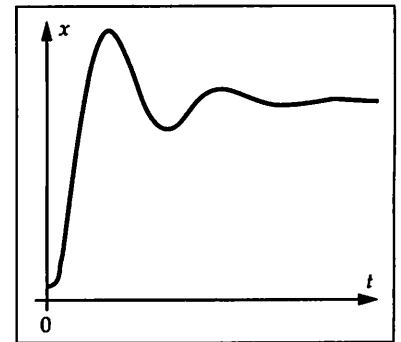
Signaux de sortie : on enregistre la courbe $x(t)$, petite variation de $X(t)$.



(a) Courbe « en S »



(b) Courbe « intégratrice »



(c) Courbe « avec oscillations »

Figure 1.3. Signal de sortie d'un système : courbes usuelles

L'allure de la courbe obtenue suggère la méthode à appliquer pour modéliser le procédé. Le meilleur modèle est celui dont la réponse est la plus proche de la courbe obtenue expérimentalement.

Lorsque le signal d'entrée est une impulsion, la courbe obtenue est appelée *réponse impulsionnelle*. Lorsque le signal d'entrée est un échelon, la courbe obtenue est appelée *réponse indicielle*.

1.1. Analyse de courbe « en S »

Parmi de nombreuses méthodes d'étude possibles, on retiendra les suivantes.

■ MÉTHODE DE STREJC

La réponse du procédé est modélisée par : $X(p) = \frac{\Delta X}{p(\theta p + 1)^n}$

Obtention de la constante de temps θ et de l'ordre n : tracer la tangente au point d'inflexion (fig. 1.4). Mesurer les durées T_u et T_a . La constante de temps θ et l'ordre n sont déterminés à partir du rapport T_u/T_a (voir Boîte à outils 3). La variation ΔX est mesurée directement.

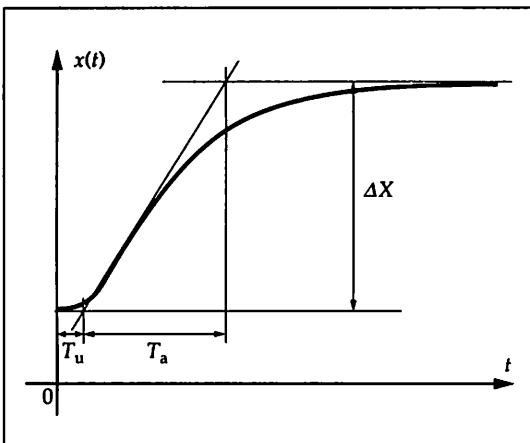


Figure 1.4. Courbe « en S » analysée par la méthode de Strejc

Si le signal d'entrée y est un échelon d'amplitude A , alors la fonction de transfert du procédé est :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{G_s}{(\theta p + 1)^n}$$

G_s est le gain statique du procédé : $G_s = \frac{\Delta X}{A}$

Il n'y a pas d'intégration dans $H(p)$, le procédé est dit naturellement stable ou autoréglant.

■ MÉTHODE DE STREJC-DAVOUST

La réponse du procédé est modélisée par : $X(p) = \frac{\Delta X e^{-\tau p}}{p(\theta p + 1)^n}$

Obtention du temps mort τ , de la constante de temps θ et de l'ordre n : le principe de cette détermination est analogue à celui de la méthode de Strejc, mais l'introduction d'un temps mort τ permet d'obtenir n entier. Pour cela, changer T_u en $T'_u + \tau$ pour que le rapport T'_u/T_a ait une valeur donnant n entier.

■ MÉTHODE DE BROÏDA

La réponse du procédé est modélisée par : $X(p) = \frac{\Delta X e^{-\tau p}}{p(\theta p + 1)^n}$

Obtention de la constante de temps θ et du temps mort τ : mesurer t_1 à $0,28\Delta X$ et t_2 à $0,40\Delta X$ (fig. 1.5). La variation ΔX est mesurée directement. Calculer : $\theta = 5,5(t_2 - t_1)$ et $\tau = 2,8 t_1 - 1,8 t_2$.

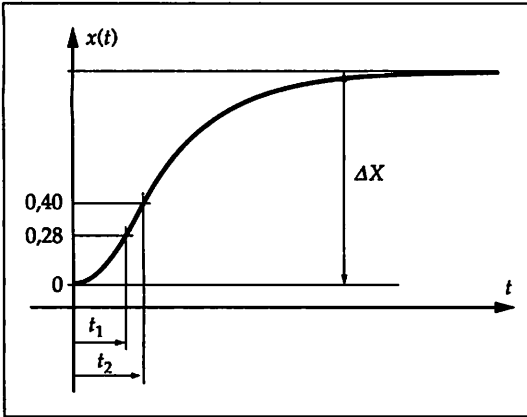


Figure 1.5. Courbe « en S » analysée par la méthode de Broïda

Si le signal d'entrée y est un échelon d'amplitude A , alors la fonction de transfert du procédé est :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{G_s e^{-\tau p}}{(\theta p + 1)}$$

G_s est le gain statique du procédé : $G_s = \frac{\Delta X}{A}$

Il n'y a pas d'intégration dans $H(p)$, le procédé est dit naturellement stable ou autorégulant.

■ MÉTHODE DE DE LA FUENTE

La réponse est aussi modélisée par : $X(p) = \frac{\Delta X e^{-\tau p}}{p(\theta p + 1)}$

Obtention de la constante de temps θ et du temps mort τ : le principe de cette détermination est analogue à celui de la méthode de Broïda, mais il faut mesurer t_1 à $0,27\Delta X$ et t_2 à $0,73\Delta X$. La variation ΔX est mesurée directement.

Calculer : $\theta = t_2 - t_1$ et $\tau = 1,31 t_1 - 0,31 t_2$.

À méthode différente résultat différent. La constante θ trouvée par la méthode de Strejc est différente de celle obtenue par la méthode de Broïda ou encore par celle de De La Fuente.

1.2. Analyse de courbe « intégratrice »

Deux méthodes sont utilisables.

■ MÉTHODE DE STREJC-DAVOUST

La réponse est modélisée par : $X(p) = \frac{c e^{-\tau p}}{p^2(\theta p + 1)^n}$

Obtention du temps mort τ , de la constante de temps θ et de l'ordre n : tracer l'asymptote D_1 à la courbe, sa parallèle D_2 par A' , la parallèle $A'A$ à l'axe des temps et le segment AC normal en A à $A'A$ (fig. 1.6). Calculer le rapport AB/AC .

Ce rapport permet de déterminer n (voir Boîte à outils 3, fig. 6) :

- si n est entier, calculer $\theta = A'A/n$ et le temps mort τ est nul ;

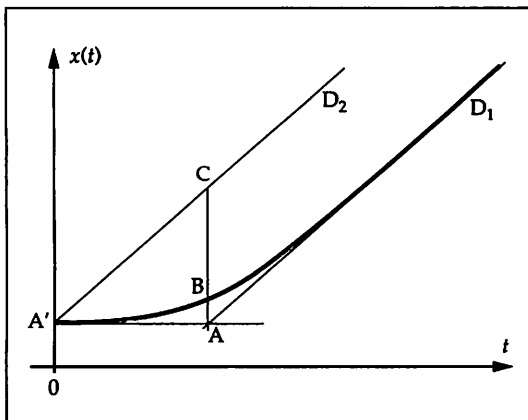


Figure 1.6. Courbe « intégratrice » analysée par la méthode de Strejc-Davoust

- si n n'est pas entier, déterminer le nouveau rapport AB/AC correspondant à la partie entière de n . Pour cela déplacer D_2 parallèlement à D_1 vers D_1 afin d'obtenir ce nouveau rapport. Le temps mort τ correspond alors à la translation effectuée par D_2 .

Calculer θ à partir de $A'A = \tau + n \theta$.

Calculer le coefficient directeur c de la courbe obtenue ($c = AC/A'A$).

Si le signal d'entrée y est un échelon d'amplitude A , alors la fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{k e^{-\tau p}}{p(\theta p + 1)^n}$$

k est le gain dynamique du procédé : $k = \frac{c}{A}$ (l'unité de k est l'inverse d'un temps).

Il y a une intégration dans $H(p)$, le procédé est dit naturellement instable ou intégrateur.

■ MÉTHODE RAPIDE

La réponse est modélisée par : $X(p) = \frac{c e^{-\tau p}}{p^2}$

Obtention du temps mort τ : tracer l'asymptote D_1 à la courbe $x(t)$ (fig. 1.7). Le temps mort est représenté par $A'A$. Calculer le coefficient directeur de D_1 : c'est la constante c .

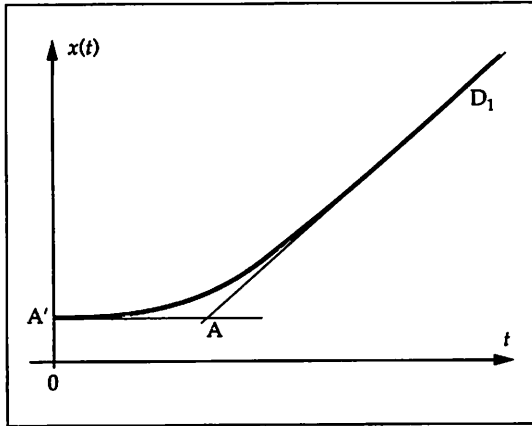


Figure 1.7. Courbe « intégratrice » analysée par une méthode rapide

Si le signal d'entrée y est un échelon d'amplitude A , alors la fonction de transfert du procédé est :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{k e^{-\tau p}}{p}$$

k est le gain dynamique du procédé : $k = \frac{c}{A}$ (l'unité de k est l'inverse d'un temps).

Il y a une intégration dans $H(p)$, le procédé est dit naturellement instable ou intégrateur.

1.3. Analyse de courbe « avec oscillations »

Le plus simple est de modéliser la réponse du procédé étudié par :

$$X(p) = \frac{\Delta X e^{-\tau p}}{p \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1 \right)}$$

Obtention du temps mort τ , du coefficient d'amortissement ξ , et de la pulsation propre non amortie ω_n : mesurer le premier dépassement D_1 et la pseudo-période T (fig. 1.8).

Avec les relations théoriques du second ordre donnant D_1 et T :

$$D_1 = e^{-\pi \xi / \sqrt{1 - \xi^2}} ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

calculer le coefficient ξ et ω_n . Mesurer t_1 et calculer le temps mort $\tau = t_1 - \frac{T}{2}$.

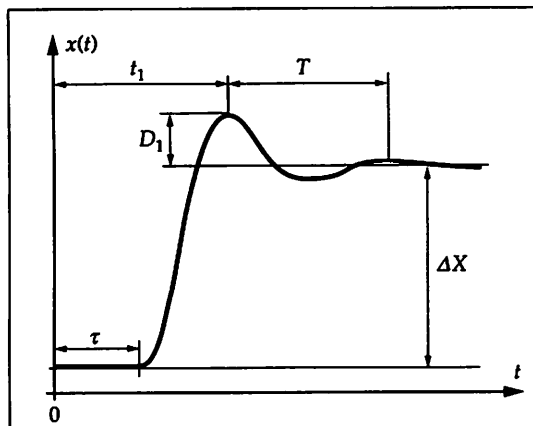


Figure 1.8. Analyse d'une courbe « avec oscillations »

Si le signal d'entrée y est un échelon d'amplitude A , alors la fonction de transfert du procédé est :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{G_s e^{-\tau p}}{\left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1 \right)}$$

G_s est le gain statique du procédé : $G_s = \frac{\Delta X}{A}$

Il n'y a pas d'intégration dans $H(p)$, le procédé est dit naturellement stable ou autoréglant.

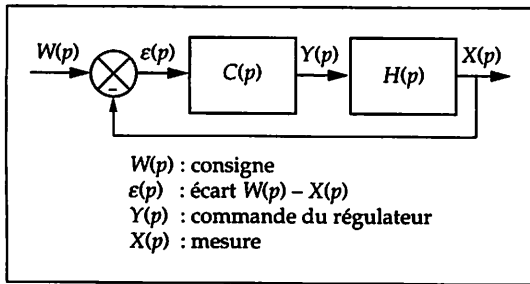


Figure 1.9. Chaîne fermée

L'identification en chaîne fermée d'un système de fonction de transfert $H(p)$ (fig. 1.9) comporte deux essais :

- le premier essai pour savoir si le procédé est naturellement stable (et dans ce cas on détermine le gain statique G_s) ou s'il est intégrateur ;
- le deuxième essai pour que le procédé effectue des oscillations sinusoïdales juste entretenues ; on enregistre ces oscillations.

2.1. Premier essai

Le régulateur de fonction de transfert $C(p)$ est à action proportionnelle avec un gain G_r faible (1 ou 0,5). Les conditions initiales sont : mesure = consigne.

Faire un échelon de consigne A .

Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste un écart statique $\varepsilon_s = (w - x)$ en régime permanent : $\varepsilon_s = \frac{A}{1 + G_r G_s}$; le procédé étudié est naturellement stable de gain statique G_s .

Si la mesure rejoint la consigne, le procédé étudié est naturellement instable ; pour savoir s'il possède une ou deux intégrations on peut produire une rampe de consigne $w = bt$:

- il y a une intégration si l'écart de vitesse $\varepsilon_v = (w - x)$ en régime permanent est non nul ; le gain dynamique k est calculé à l'aide de la relation : $\varepsilon_v = \frac{b}{G_r k}$;
- il y a deux intégrations si l'écart de vitesse $\varepsilon_v = (w - x)$ en régime permanent est nul, et le gain dynamique k' ne peut pas être déterminé.

2.2. Deuxième essai

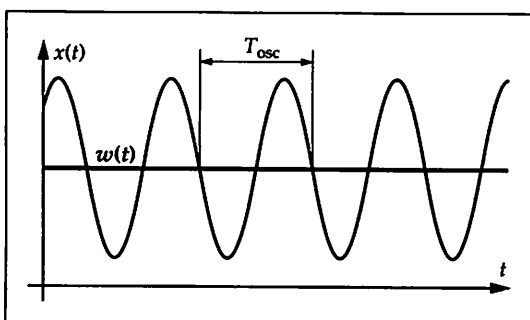


Figure 1.10. Oscillation juste entretenue

Le régulateur de fonction de transfert $C(p)$ a pour gain G_r . En augmentant le gain G_r , chercher à mettre le procédé en oscillation juste entretenue ; le signal de sortie $x(t)$ est enregistré (fig. 1.10).

Lorsque le procédé asservi fonctionne en régime harmonique, le gain G_r est appelé gain critique du régulateur G_{rc} et la période d'oscillation est T_{osc} .

La condition d'amplitude est alors : $|G_{rc} H(j\omega_{osc})| = 1$

La condition de phase est alors : $\text{Arg} [G_{rc} H(j\omega_{osc})] = -\pi$

À partir de ces deux équations, on trouve les paramètres du modèle imposé soit, par exemple, pour un procédé naturellement stable :

$$\text{modèle de Strejc : } H(p) = \frac{G_s}{(\theta p + 1)^n}$$

$$\text{modèle de Broïda : } H(p) = \frac{G_s e^{-\tau p}}{(\theta p + 1)}$$

$$\theta = \frac{T_{osc} \tan(\pi/n)}{2\pi}$$

$$\theta = \frac{T_{osc}}{2\pi} \sqrt{(G_{rc} G_s)^2 - 1}$$

$$G_{rc} G_s = [\cos(\pi/n)]^{-n}$$

$$\tau = \frac{T_{osc}}{2\pi} \left[\pi - \arctan \sqrt{(G_{rc} G_s)^2 - 1} \right]$$

(voir tableau Boîte à outils 3)

EXERCICES

Exercice 1

Il s'agit de déterminer la fonction de transfert d'un échangeur thermique. Une variation de 44 % à 60 % de la commande y du débit d'eau chaude a permis d'obtenir la réponse indicielle suivante de la mesure X de la température (fig. 1.11).

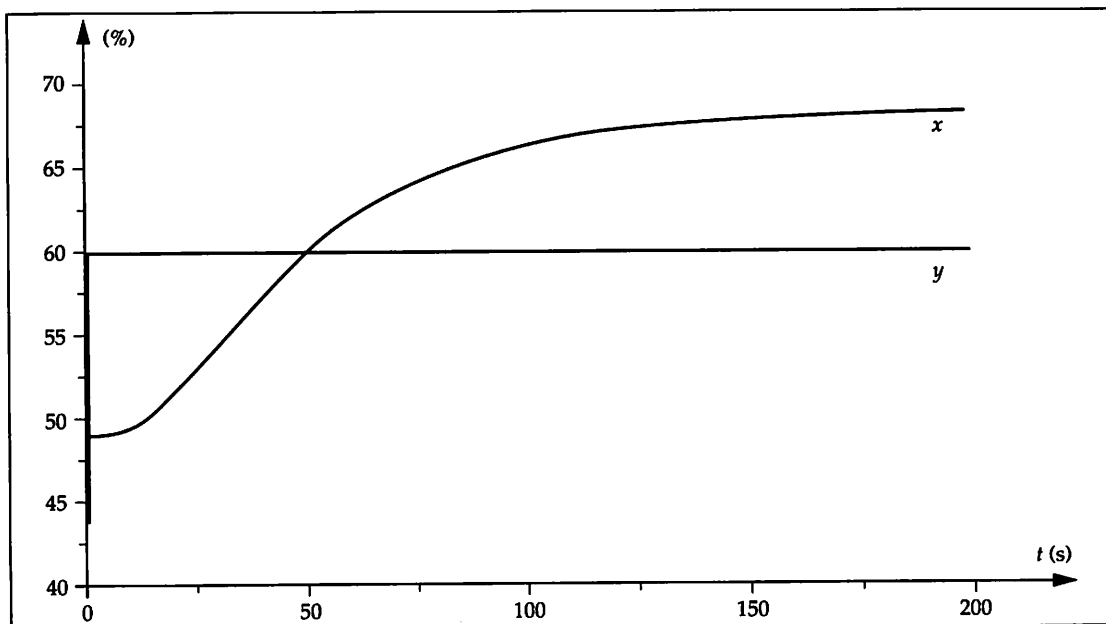


Figure 1.11

- 1 Donner la fonction de transfert $H_1(p)$ représentative de cet échangeur en appliquant la méthode de Broïda.
- 2 Donner la fonction de transfert $H_2(p)$ en utilisant la méthode de Strejc.

Exercice 2

La pression d'un gaz dans un réservoir doit être maintenue constante. Une vanne automatique est montée en sortie du réservoir; elle permet l'évacuation du gaz. Une variation rapide de la commande y de cette vanne, de 42 % à 50 %, a fait varier la mesure x de pression comme le montre le relevé suivant (fig. 1.12).

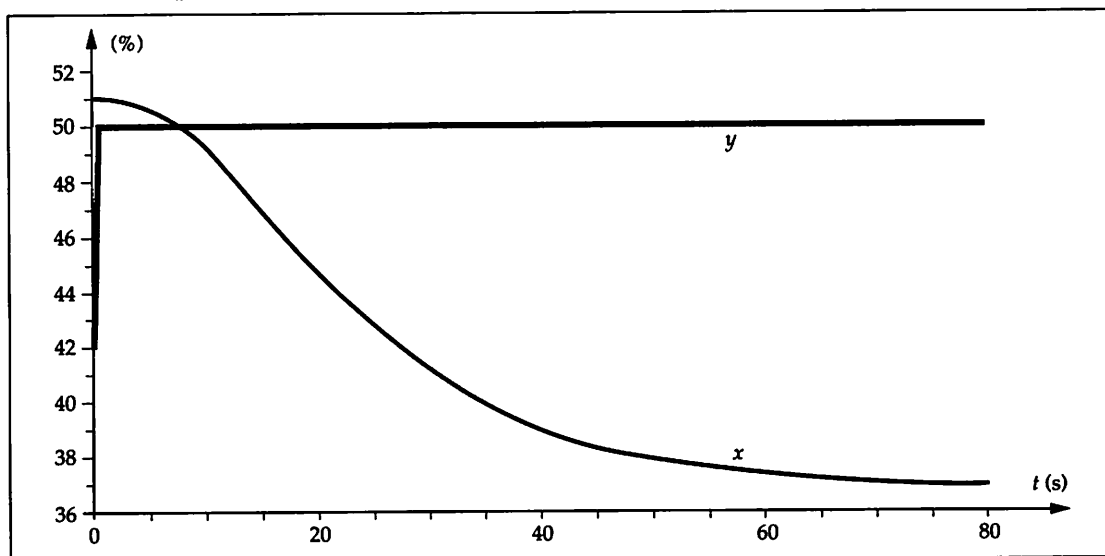


Figure 1.12

- 1 ▼ Ce procédé est-il naturellement stable? Pourquoi?
- 2 ▼ Trouver la fonction de transfert $H(p)$ de ce procédé en utilisant la méthode de Strejc-Davoust.

Exercice 3

Observer l'enregistrement de la figure 1.13, relevé en vue de l'identification du niveau X d'un décanteur industriel. Une variation y de 5 % de la commande de l'actionneur est considérée comme un échelon.

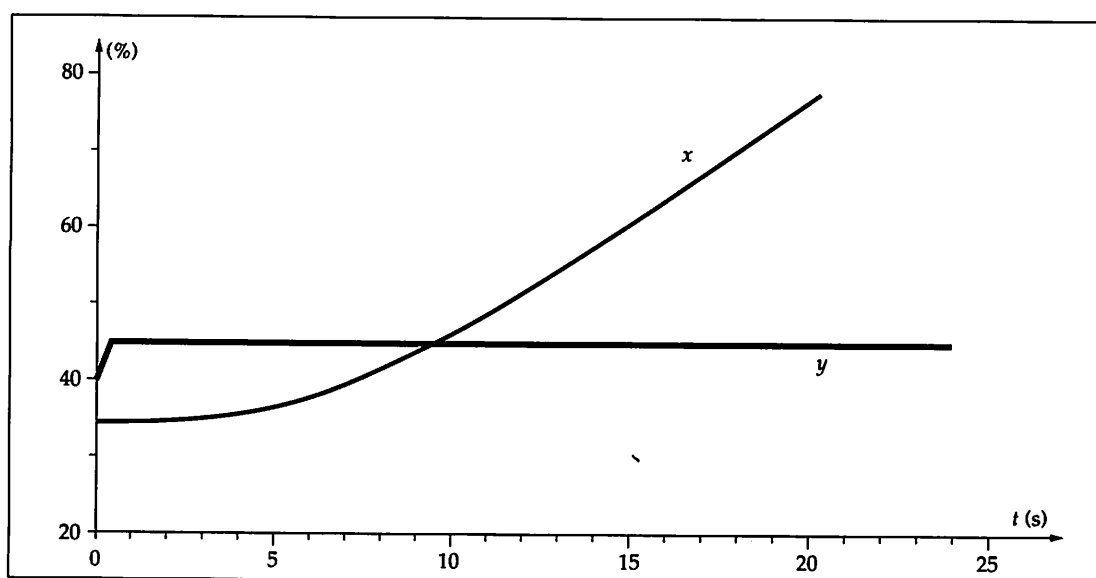


Figure 1.13

- 1 ▼ Calculer le gain dynamique k de ce procédé intégrateur.
- 2 ▼ Donner l'ordre n de ce procédé.
- 3 ▼ Évaluer la constante de temps θ .
- 4 ▼ Donner alors la fonction de transfert $H(p)$ représentant ce procédé.

Exercice 4

La grandeur réglée est le niveau x dans un ballon de chaudière industrielle. La réponse impulsionnelle a été enregistrée à l'aide d'un ordinateur. Cette réponse a été sauvegardée dans un fichier historique de mesures (à titre d'information : une mesure prise toutes les 50 ms). Elle est restituée, sans aucun traitement numérique de lissage ni de filtrage, comme le montre la figure 1.14.

- 1 ▼ Donner la fonction de transfert $H(p)$ représentative de ce procédé en utilisant le modèle de Strejc.
- 2 ▼ Pourquoi, pour un tel procédé, l'identification par la réponse impulsionnelle paraît-elle préférable à la réponse indicielle?

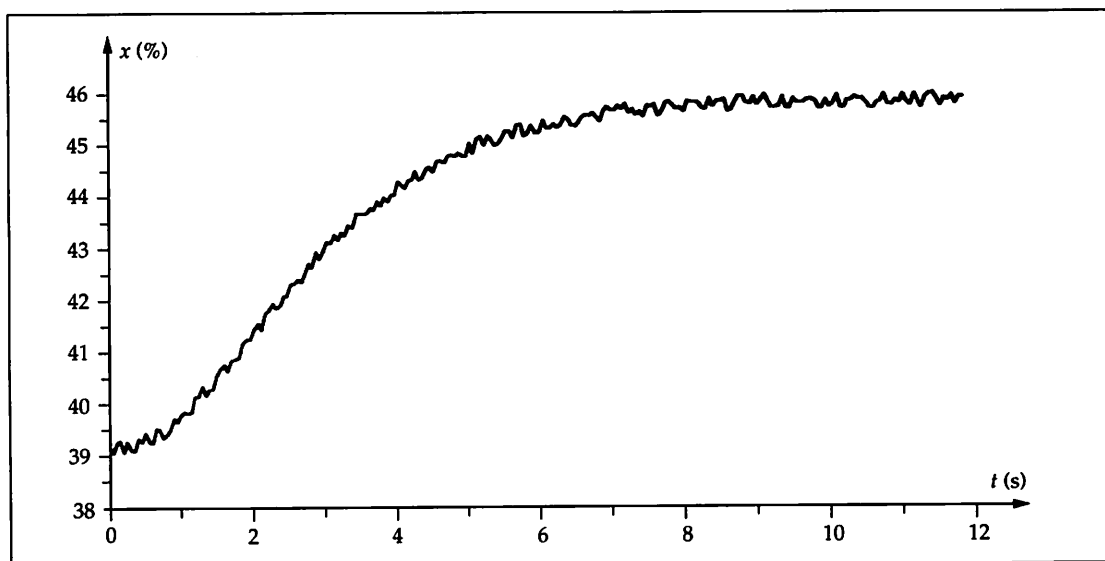


Figure 1.14

Exercice 5

Afin de ne pas provoquer de chocs thermiques sur les pièces traitées, un four de traitement thermique est mis en chauffe dans les conditions suivantes :

- la température initiale du four est de 25 °C ;
- le signal de commande de la vanne de gaz est $y(t) = 0,00375 t u(t)$ avec t en minutes ($u(t)$ étant la fonction échelon unité) ;
- lorsque la vitesse d'évolution de la température T_f devient constante et si T_f est inférieure à 350 °C (pour des raisons de sécurité), alors la commande Y est maintenue constante et égale à la dernière valeur prise.

Avec l'inertie thermique, la température évolue donc encore. Nous nous intéressons à la première partie de cette montée en température.

En étudiant l'enregistrement (fig. 1.15) de l'évolution de la mesure X de la température pendant le temps de mise en chauffe, il est possible d'identifier ce procédé.

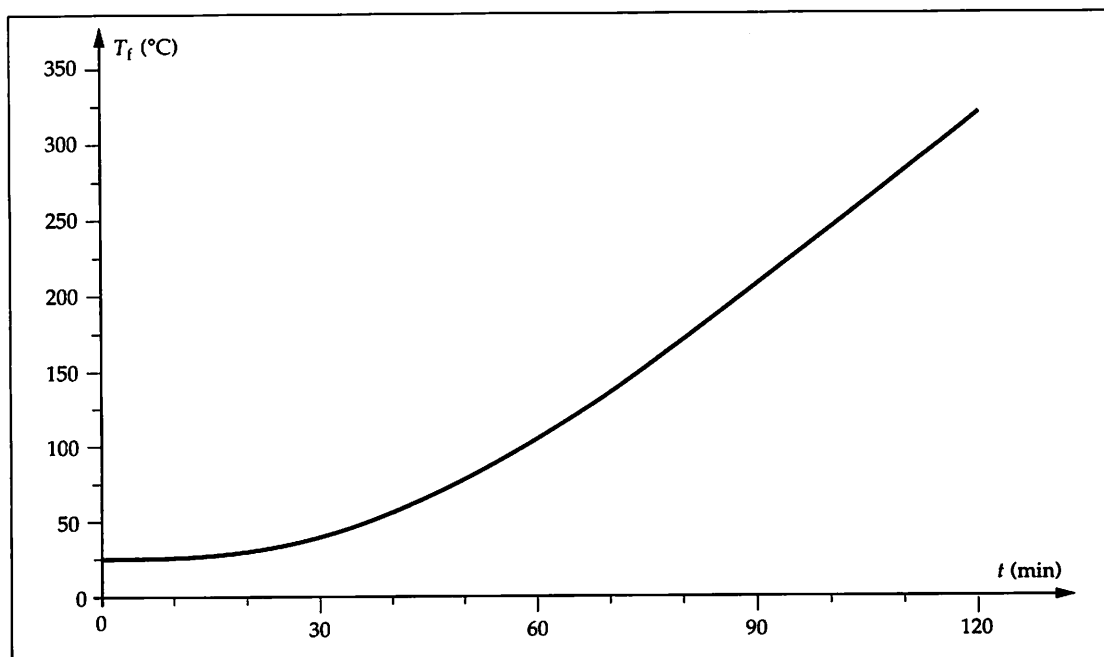


Figure 1.15

EXERCICES

- 1 Ce procédé est-il naturellement instable? Justifier la réponse.
- 2 L'étendue de mesure (EM) du capteur de température est 0 °C – 800 °C. Calculer le gain statique G_s de ce procédé.
- 3 Identifier ce procédé sous la forme : $H_1(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{G_s e^{-\tau_1 p}}{\theta_1 p + 1}$
- 4 Identifier ce procédé sous la forme : $H_2(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{G_s e^{-\tau_2 p}}{(\theta_2 p + 1)^n}$

Exercice 6

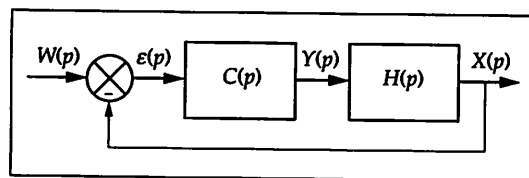


Figure 1.16

La pression dans un réservoir dépend d'un régulateur de fonction de transfert $C(p)$ et de gain 2. $H(p)$ est la fonction de transfert réglante. Le schéma de l'ensemble est représenté figure 1.16.

Après une variation en échelon de la consigne w , de 40 % à 45 %, on observe l'évolution de la mesure x de la pression (fig. 1.17).

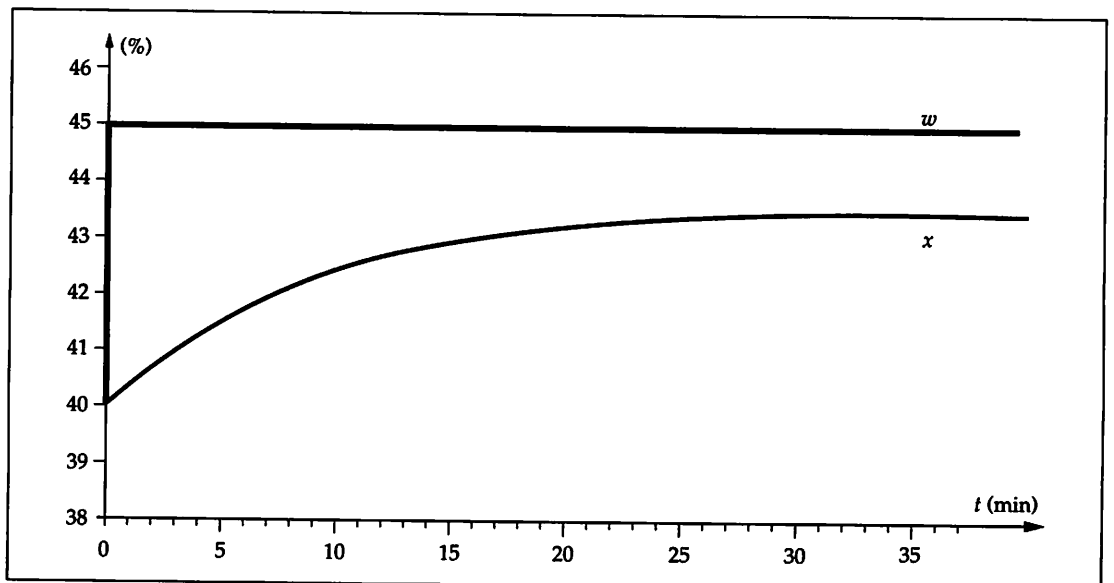


Figure 1.17

On note : $F(p) = \frac{X(p)}{W(p)}$

- 1 À l'aide de l'enregistrement, identifier $F(p)$ sous une forme simple.
- 2 Puisque $F(p)$ et $C(p)$ sont des fonctions de transfert connues, exprimer $H(p)$.
- 3 Quel est l'intérêt de cette méthode d'identification? Quelle en est la limite?

Exercice 7

Après quelques essais, qui peuvent être longs sinon délicats, en réglant à une valeur G_{rc} le gain du régulateur, de fonction de transfert $C(p)$, un condenseur thermique a été mis en oscillations entretenues. L'action intégrale et l'action dérivée étaient supprimées lors de cet essai d'identification en chaîne fermée.

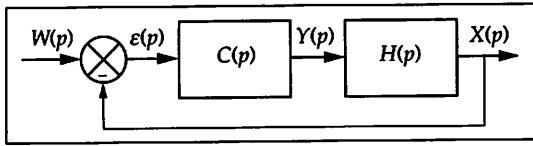


Figure 1.18

La fonction de transfert de ce procédé étant notée $H(p)$, l'ensemble peut être représenté par le schéma de la figure 1.18. La figure 1.19 présente les oscillations obtenues de la mesure $x(t)$ pour une variation de la consigne $w(t)$ de 45 % à 55 %.

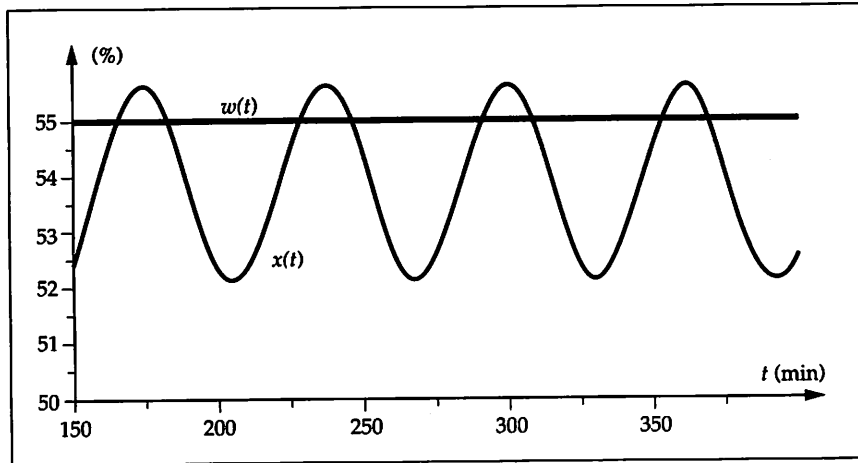


Figure 1.19

1 Ce procédé $H(p)$ semble être autorégulant. Quel détail permet de le confirmer ?

2 Sachant que $G_{rc} = 4$, calculer la fonction de transfert $H(p)$ qui sera représentée par une fonction d'ordre 3 et de classe 0, c'est-à-dire sous la forme :

$$H(p) = \frac{G_s}{p^0 (\theta p + 1)^3}$$

Exercice 8

Le service instrumentation, en accord avec le service production, a identifié le niveau d'eau d'un dégazeur thermique par la méthode de mise en oscillations entretenues appelée aussi méthode du « pompage ».

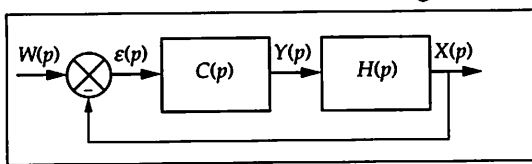


Figure 1.20

L'action intégrale et l'action dérivée du régulateur $C(p)$ étaient supprimées et le gain critique G_{rc} réglé au « pompage » était $G_{rc} = 5$. La fonction de transfert de ce procédé est notée $H(p)$ et le schéma de la figure 1.20 représente la boucle étudiée.

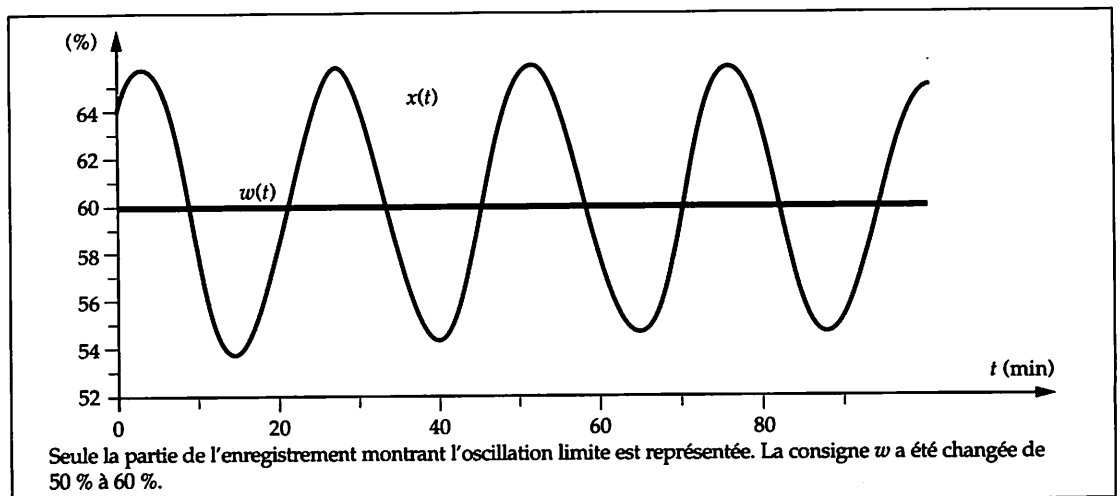


Figure 1.21

À l'aide de l'enregistrement (fig. 1.21),

- 1 Calculer la fonction de transfert $H(p)$ en l'exprimant par :

$$H_1(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{k}{p(Tp + 1)^2}$$

- 2 Calculer la fonction de transfert $H(p)$ en l'exprimant par :

$$H_2(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{k' e^{-\tau p}}{p(\theta p + 1)} \quad (k' = 0,1 \text{ min}^{-1})$$

Exercice 9

L'étude suivante porte sur la régulation du débit d'air d'un incinérateur industriel. Afin de déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du procédé en chaîne ouverte, une variation brusque de la commande y de la vanne régulatrice du débit d'air est effectuée de 40 % à 52 %. On obtient alors la réponse indicielle de la mesure x de ce débit d'air (fig. 1.22).

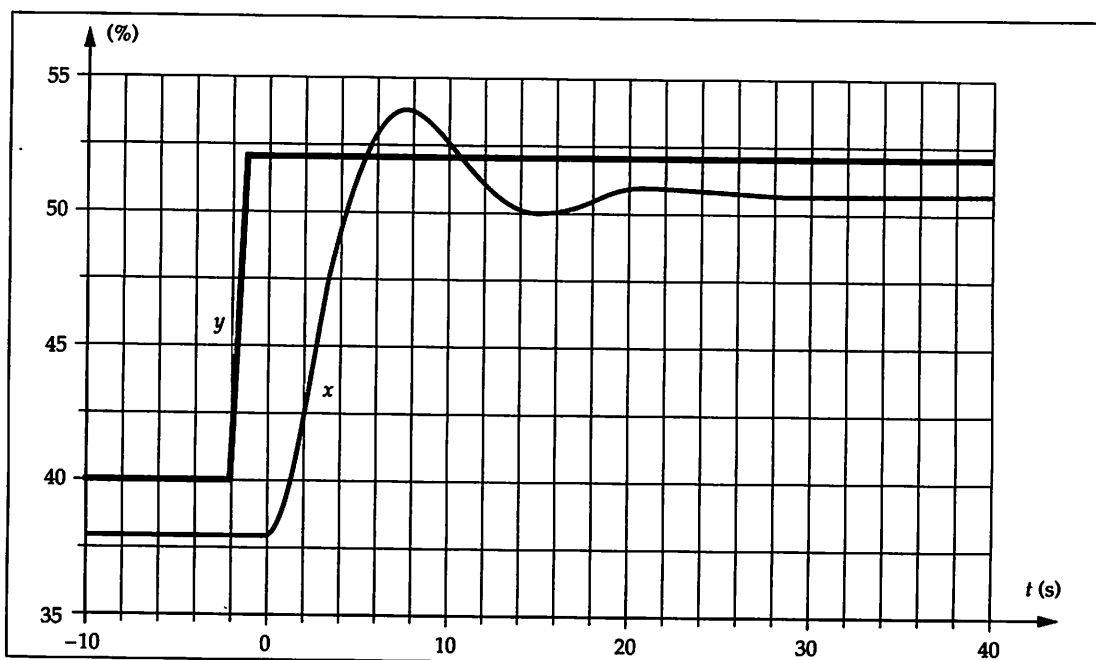


Figure 1.22

- 1 Ce procédé est-il naturellement stable? Justifier la réponse.
- 2 Des fonctions de transfert suivantes, laquelle peut être retenue pour modéliser ce procédé? Justifier le choix effectué.

$$H_1(p) = \frac{G_s}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

$$H_2(p) = \frac{G_s e^{-\tau p}}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

$$H_3(p) = \frac{G_s e^{-\tau p}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

$$H_4(p) = \frac{G_s(1 - Tp)}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

- 3 À l'aide de l'enregistrement (fig. 1.22), relever les caractéristiques spécifiques utiles à la détermination de tous les coefficients de $H(p)$.

Exercice 10

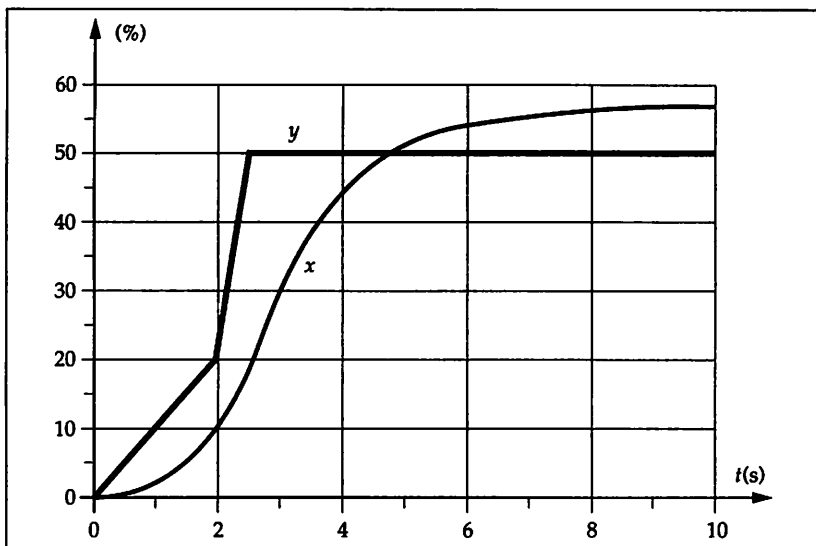


Figure 1.23

Pour connaître la fonction de transfert réglante d'une régulation de débit de sirop, on provoque, aussi rapidement que possible, un échelon de position pour la commande y du variateur de vitesse du moteur de la pompe. Cette commande est réalisée en mettant hors service la fonction régulation du régulateur qui est donc en position «manuel». L'enregistrement montre (fig. 1.23) la commande y effectuée ainsi que la mesure x du débit qui en résulte.

- 1 Que penser de l'échelon de position réalisé?
- 2 Ce système est-il naturellement stable? Expliquer pourquoi.
- 3 Quel est le gain statique G_s ?
- 4 Identifier ce système en remarquant que le signal d'entrée est, en fait, une rampe dans la première partie (la deuxième partie étant difficilement exploitable).

Pour toute résolution graphique, il est naturel d'observer une certaine dispersion dans les valeurs du fait de l'imprécision des tracés et mesures. Aussi les valeurs données en solution peuvent-elles être différentes de celles que chacun peut trouver; mais la fonction de transfert ne devrait pas être très éloignée de celle proposée : le modèle n'est qu'une représentation mathématique imparfaite du procédé réel.

Exercice 1

1 Méthode de Broïda

$$\Delta X = X \text{ finale} - X \text{ initiale} = (68,5 - 49) \% = 19,5 \%, \text{ donc } G_s = \frac{\Delta X}{\Delta Y} = 1,22$$

$$0,28 \Delta X = 5,46 \% \text{ à } t_1 = 30,3 \text{ s} \quad 0,40 \Delta X = 7,8 \% \text{ à } t_2 = 39 \text{ s}$$

$$\theta = 5,5 (t_2 - t_1) = 47,85 \text{ s, soit : } \theta = 48 \text{ s} \quad \tau = 2,8 t_1 - 1,8 t_2 = 14,6 \text{ s, soit : } \tau = 15 \text{ s}$$

$$Y(p) = \frac{0,16}{p} \text{ et } X(p) = \frac{0,195 e^{-15p}}{p(48p+1)}, \text{ on obtient : } H_1(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{1,22 e^{-15p}}{48p+1}$$

2 Méthode de Strejc

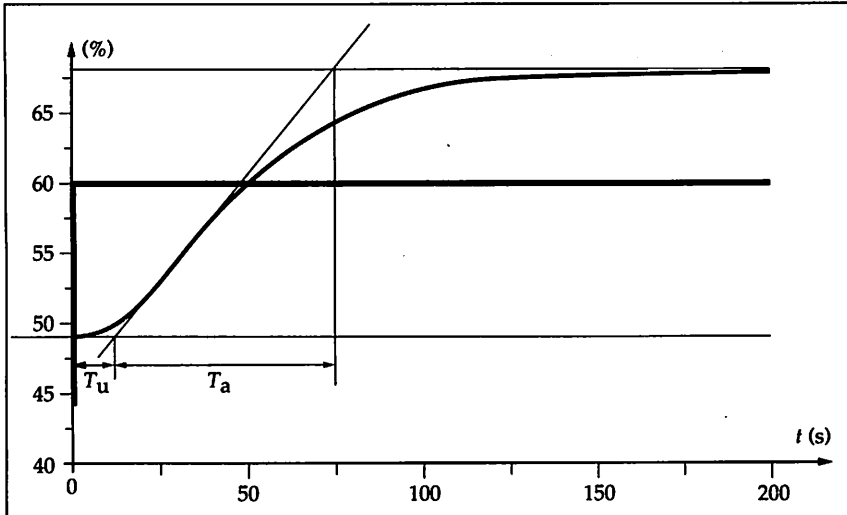


Figure 1.24

$$G_s = 1,22 \text{ (voir } \blacktriangledown \text{)}.$$

On relève figure 1.24 :

$$T_u = 11,9 \text{ s et } T_a = 65,5 \text{ s,}$$

donc : $T_u / T_a = 0,182$, soit $n = 2,7$
et $T = 18,5 \text{ s}$

$$\text{On a } Y(p) = \frac{0,16}{p}$$

$$\text{et } X_T(p) = \frac{0,195}{p(48p+1)^{2,7}}$$

on obtient :

$$H_2(p) = \frac{1,22}{(18,5p+1)^{2,7}}$$

La variation de la commande y en chaîne ouverte est déjà assez importante pour un procédé industriel. Il ne faut jamais oublier les dérangements momentanés, dans la fabrication par exemple, que peuvent engendrer les identifications en chaîne ouverte.

Exercice 2

1 Stabilité du procédé

Ce procédé est naturellement stable, ou encore autoréglant, car en chaîne ouverte :

- à un signal d'entrée borné (échelon sur Y) correspond un signal de sortie borné (pression X stabilisée);

- ou encore : d'une position initiale d'équilibre stable, le procédé sollicité par l'échelon y retrouve une nouvelle position d'équilibre stable.

2 Méthode de Strejc-Davoust

$$G_s = \frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{(37 - 51) \%}{(50 - 42) \%} = -1,75$$

Le signe négatif signifie simplement que le niveau baisse quand la commande augmente.

L'identification de Strejc-Davoust est une variante de celle de Strejc qui permet de présenter un modèle à nombre entier n de constante de temps θ , complété par un temps mort τ .

$T_u = 7,3$ s et $T_a = 30,2$ s, donc $T_u / T_a = 0,242$, soit $n = 3,2$ et $\theta = 7,8$ s.

Pour avoir n entier, soit ici $n = 3$, il faut $T_u / T_a = 0,218$. On introduit alors un temps mort τ tel que : $(T_u' - \tau) / T_a = 0,218$ et cela sans changer T_a . Soit $\tau = (7,3 - 0,218 \times 30,2)$ s $\tau = 0,72$ s, soit en arrondissant $\tau = 0,7$ s.

Soit $H(p) = \frac{-1,75 e^{-0,7p}}{(7,8p + 1)^3}$. À remarquer que ce temps mort de 0,7 seconde peut être

négligé devant les trois constantes de temps de 7,8 secondes.

Exercice 3

1 Gain dynamique

Le coefficient directeur c de l'asymptote de la courbe obtenue est :

$$c = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{(80 - 34) \%}{13,4} \text{ s}^{-1} \Rightarrow c = 3,43 \% \text{ s}^{-1}$$

Le gain d'un procédé intégrateur est appelé gain dynamique. Il a une unité inverse d'un temps (s^{-1}) et donc $k = \frac{c}{\Delta Y} = \frac{3,43}{5} \text{ s}^{-1} \Rightarrow k = 0,686 \text{ s}^{-1}$, ou en arrondissant

$$k = 0,7 \text{ s}^{-1}$$

2 Ordre n

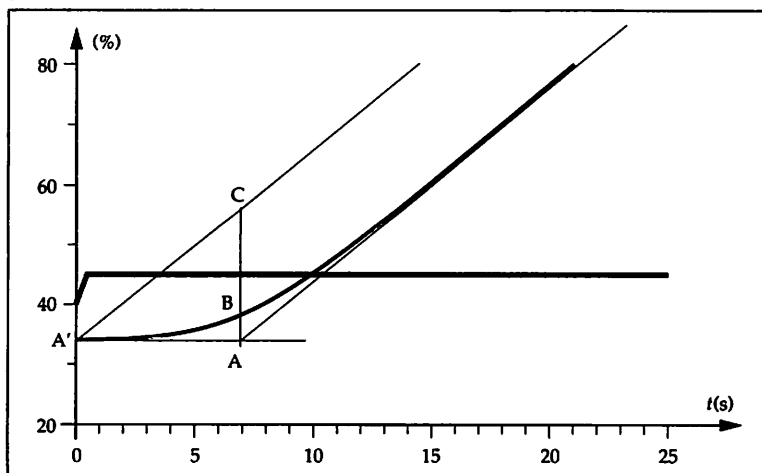


Figure 1.25

Sur le graphe fig. 1.25 on trace les points A, B et C et on relève $AB/AC = 0,235$.

Cette valeur reportée sur la figure 6 de la Boîte à outils 3 nous conduit à $n = 3$.

3 Constante de temps

$A'A = 6,9$ s et donc $n\theta = 6,9$ s, d'où $\theta = 2,3$ s

4 Fonction de transfert

On obtient donc :
$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{0,7}{p(2,3p + 1)^3}$$

Exercice 4

1 Modèle de Strejc

Le relevé des durées T_u et T_a donne : $T_u = 0,8$ s et $T_a = 3,7$ s, soit : $T_u/T_a = 0,216$.

La méthode de Strejc donne alors $n = 3$ et $\theta = 1$ s.

La variation de la mesure est : $\Delta X = (46 - 39) \% = 7 \%$.

En ne prenant pas en considération les bruits, la réponse du procédé est de la forme :

$$X(p) = \frac{\Delta X}{p(\theta p + 1)^n} = \frac{0,07}{p(p + 1)^3}$$

L'entrée est une impulsion unitaire $Y(p) = 1$, on obtient donc :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{0,07}{p(p + 1)^3}$$

2 Réponse impulsionnelle

Comme nous venons de le voir, un tel procédé est intégrateur et très rapide (variation de 45 % du niveau en 25 secondes). Ce procédé est en chaîne ouverte et donc non contrôlé; on ne modifie pas le niveau par un échelon afin de réduire le risque d'accident par montée soudaine du niveau. Il faut savoir que généralement les ballons de chaudière sont de petite capacité (sphères ou cylindres d'environ 1 à 2 mètres de diamètre) vis-à-vis des débits d'entrée et de sortie, et sont donc très sensibles aux variations de ces débits. Le plus difficile est de réaliser une entrée de forme impulsionnelle acceptable pour la commande de l'actionneur! Une méthode plus appropriée est sans doute celle en chaîne fermée (voir exercice 6).

Exercice 5

1 Stabilité du procédé

L'entrée y (la commande de la vanne) de ce procédé est une rampe et la sortie x (mesure de la température) est également une rampe (régime permanent), mais retardée par l'inertie thermique (régime transitoire). Ce procédé est donc naturellement stable.

Autre explication :

$$Y(p) = \frac{b}{p^2} \text{ et } X(p) \text{ est de la forme } \frac{c e^{-\tau p}}{p^2(\theta p + 1)} \text{ ou } \frac{c}{p^2(T p + 1)^n}$$

$$\text{donc : } H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{c e^{-\tau p}}{b(\theta p + 1)} \text{ ou } \frac{c}{b(T p + 1)^n}$$

2 Gain statique

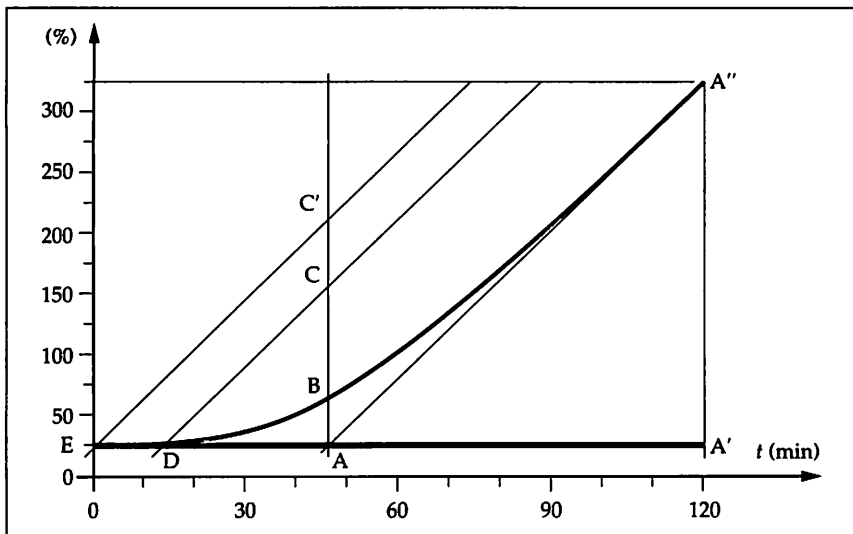


Figure 1.26

On relève sur l'asymptote

$\Delta X = 293 \text{ }^\circ\text{C}$, soit :

$\Delta X \% = 293 / EM = 293 / 800 = 36,7 \%$
pour $AA' = 72 \text{ min}$ (fig. 1.26).

On obtient :

$c = 0,367 / 72$, $c = 0,005 \text{ min}^{-1}$.

Le gain statique est :

$$G_s = c/b = 0,005 / 0,00375$$

soit : $G_s = 1,33$

3 Modèle de Broïda

Pour identifier avec seulement une constante de temps ($n = 1$), il faut savoir que le rapport AB/AC (fig. 1.26) doit être égal à 0,37. Il suffit donc de tracer la parallèle à l'asymptote AA'' sur l'enregistrement et de la translater pour obtenir ce rapport. On mesure alors la distance AD soit $\theta_1 = 30 \text{ min}$, puis ED soit $\tau_1 = 15 \text{ min}$.

La fonction de transfert est donc : $H_1(p) = \frac{1,33 e^{-15p}}{30p + 1}$

4 Modèle de Strejc

On trace la parallèle EC' à l'asymptote AA'' (fig. 1.26), puis on mesure AB et AC' , d'où : $AB/AC' = 44 / 193 = 0,228$ ce qui donne $n = 3$.

Comme EA représente $n\theta_2$ (à l'échelle choisie) on trouve $n\theta_2 = 47 \text{ min}$ et $\theta_2 = 15,7 \text{ min}$.

La fonction de transfert est donc : $H_2(p) = \frac{1,33}{(15,7p + 1)^3}$. À remarquer que $\tau_2 = 0$.

Exercice 6

1 Identification de $F(p)$

La courbe de la réponse indicielle n'a pas de point d'inflexion, ou celui-là n'est pas visible. $F(p)$ se présente donc sous la forme d'une fonction de transfert du premier ordre, soit :

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G'_s}{(\theta p + 1)}$$

avec G'_s défini en régime permanent par : $G'_s = \frac{\Delta X}{\Delta W} = \frac{43,7 - 40}{45 - 40} = 0,74$

On mesure θ à 63 % de la variation x , soit $\theta = 10 \text{ s}$ et donc : $F(p) = \frac{0,74}{(10p + 1)}$

2 Fonction de transfert $H(p)$

$\varepsilon(p) = W(p) - X(p)$ et $X(p) = C(p) H(p) \varepsilon(p)$, soit :

$$F(p) = \frac{C(p) H(p)}{1 + C(p) H(p)} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{F(p)}{C(p)[1 - F(p)]}$$

$$\text{soit : } H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{\frac{G'_s}{G_r - G_r G'_s}}{\frac{G_r \theta p}{G_r - G_r G'_s} + 1} = \frac{G_s}{Tp + 1} \quad \text{avec } G_r = \text{gain du régulateur.}$$

$$\text{avec : } G_s = \frac{G'_s}{G_r - G_r G'_s} = 1,4 \quad \text{et} \quad T = \frac{\theta}{1 - G'_s} = 38,5 \text{ s. On obtient : } H(p) = \frac{1,4}{(38,5 p + 1)}$$

3 Intérêt de cette méthode

Pour des raisons évidentes de sécurité, il est souhaitable d'identifier un réservoir sous pression en chaîne fermée. L'ensemble étudié est ainsi plus proche des futures conditions de fonctionnement puisque l'on tient compte, par exemple, des constantes de temps internes du régulateur et « du » point de fonctionnement.

La limite d'utilisation de cette méthode est surtout liée à la saturation de l'organe réglant ; en effet, il faut rester dans le domaine linéaire pour pouvoir valider l'identification.

Exercice 7

1 Procédé autoréglant

On observe : $\frac{\Delta X \text{ moyen}}{\Delta W} \neq 1$

La moyenne des oscillations de la mesure X n'est pas égale à la consigne W ; un écart persiste : la chaîne ouverte $C(p) H(p)$ ne possède donc pas d'intégrale. Le procédé est « naturellement stable » ou « autoréglant », ou encore appelé « non évolutif ».

2 Fonction de transfert $H(p)$

On désire identifier le procédé sous la forme : $H(p) = \frac{G_s}{p^0 (\theta p + 1)^3}$

$$\text{On connaît : } F(p) = \frac{C(p) H(p)}{1 + C(p) H(p)} = \frac{G_s G_r}{G_s G_r + (\theta p + 1)^3}$$

$$C(j\omega) H(j\omega) = \frac{G_s G_r}{(\theta j\omega + 1)^3}; \quad \text{donc pour } G_{rc} \text{ et pour la période mesurée } T_c \text{ on obtient :}$$

- le module : $|C(j\omega_c) H(j\omega_c)| = \frac{G_{rc} G_s}{\sqrt{\theta^2 \omega_c^2 + 1}^3} = 1$

- l'argument : $\text{Arg}(C(j\omega_c) H(j\omega_c)) = -3 \arctan(\theta \omega_c) = -\pi$

$$\text{et donc } \theta = \frac{T_c \tan(\pi/3)}{2\pi} \Rightarrow \theta = 17,3 \text{ min. et } G_s = \frac{\sqrt{\theta^2 \omega_c^2 + 1}^3}{G_{rc}} \Rightarrow G_s = 2$$

$$\text{La fonction de transfert est donc : } H(p) = \frac{2}{(17,3 p + 1)^3}$$

Exercice 8

1 Fonction de transfert $H_1(p)$

On désire identifier $H(p)$ sous la forme : $H_1(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{k}{p(Tp+1)^2}$

La fonction de transfert en chaîne fermée est : $F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p)H_1(p)}{1+C(p)H_1(p)}$

Lorsque le procédé effectue des oscillations entretenues, on a :

- le module : $|C(j\omega_c) H_1(j\omega_c)| = 1$
- l'argument : $\text{Arg}(C(j\omega_c) H_1(j\omega_c)) = -\pi$

$$\text{Soit : } |C(j\omega_c) H_1(j\omega_c)| = \frac{k G_{rc}}{\omega_c (T^2 \omega_c^2 + 1)} = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Arg}(C(j\omega_c) H_1(j\omega_c)) = -(\pi/2) - 2 \arctan(T\omega_c) = -\pi \quad \textcircled{2}$$

À partir de ②, on trouve : $T = T_c / 2\pi$. À partir de ①, on obtient : $k = \frac{(T^2 \omega_c^2 + 1) \omega_c}{G_{rc}}$.
Soit $T = 3,8 \text{ min}$ et $k = 0,1 \text{ min}^{-1}$.

La fonction de transfert est donc : $H_1(p) = \frac{0,1}{p(3,8p+1)^2}$

2 Fonction de transfert $H_2(p)$

On désire identifier $H(p)$ sous la forme : $H_2(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{k' e^{-\tau p}}{p(\theta p+1)}$

La fonction de transfert en chaîne fermée est : $F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p)H_2(p)}{1+C(p)H_2(p)}$

Lorsque le procédé effectue des oscillations entretenues, on a :

- le module : $|C(j\omega_c) H_2(j\omega_c)| = 1$
- l'argument : $\text{Arg}(C(j\omega_c) H_2(j\omega_c)) = -\pi$

$$\text{Soit : } |C(j\omega_c) H_2(j\omega_c)| = \frac{k' G_{rc}}{\omega_c \sqrt{\theta^2 \omega_c^2 + 1}} = 1 \quad \textcircled{3}$$

$$\text{Arg}(C(j\omega_c) H_2(j\omega_c)) = -(\pi/2) - \tau \omega_c - \arctan(\theta \omega_c) = -\pi \quad \textcircled{4}$$

Sur l'enregistrement donné, on relève la période $T_c = 24 \text{ min}$; on trouve alors :
 $\omega_c = 0,26 \text{ rad/min}$.

À partir de ③, on obtient : $\theta = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{\left[\frac{k' G_{rc}}{\omega_c}\right]^2 - 1} \Rightarrow \theta = 6,3 \text{ min}$.

À partir de ④, on obtient : $\tau = \frac{\pi/2 - \arctan(\theta \omega_c)}{\omega_c} \Rightarrow \tau = 2,1 \text{ min}$.

La fonction de transfert est donc : $H_2(p) = \frac{0,1 e^{-2,1p}}{p(6,3p+1)}$

La valeur de k' peut être trouvée par l'erreur de traînage (voir exercice 4, chapitre 4 – Précision).

Exercice 9

1 Stabilité du procédé

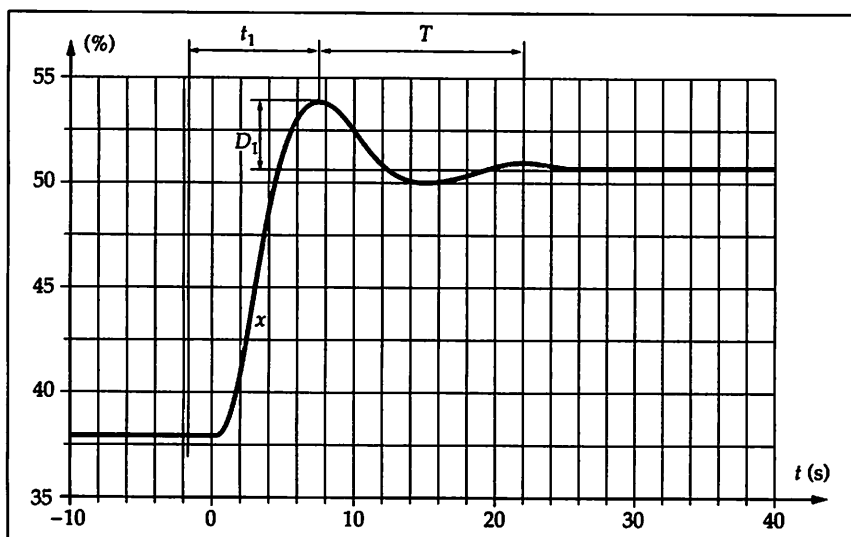
Ce procédé est naturellement stable, ou encore autoréglant, puisqu'à une entrée bornée (variation de Y) correspond une sortie bornée (variation de X). Pour une régulation de débit classique, cela paraît compréhensible.

La loi réelle entre la commande de la vanne régulatrice et le débit n'est presque jamais linéaire. Le procédé est oscillant amorti et non pas instable comme il est dit à tort. En fait, le signal est instable pendant le régime transitoire.

2 Choix du modèle

On a observé un temps mort de X par rapport à Y , et évidemment une oscillation amortie, c'est donc $H_2(p)$ qui est retenue. En effet, $H_1(p)$ ne contient pas de temps mort (ou retard pur); $H_3(p)$ comporte deux pôles réels ou encore un coefficient d'amortissement supérieur à 1, et le procédé ne peut effectuer d'oscillations amorties; $H_4(p)$ donnerait une réponse indicelle avec une tangente à l'origine négative, ce qui ne correspond pas à un temps mort.

3 Détermination des coefficients



La détermination de G_s est facile :

$$G_s = \frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{50,8 - 38}{52 - 40} = 1,067,$$

soit $G_s = 1,1$

Il reste à trouver τ , ω_n et ξ . Pour cela, il faut mesurer figure 1.27 :

- le premier dépassement $D_1 = 3\%$ pour ΔX . Pour $\Delta X = 100\%$, on a : $D_1 = 23,6\%$;
- le temps au premier dépassement D_1 , soit : $t_1 = 9\text{ s}$;
- la pseudo-période, soit $T = 14,8\text{ s}$.

En effet ces caractéristiques relevées expérimentalement sont liées par les relations théoriques suivantes :

Figure 1.27

$$D_1 = e^{-\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}}, T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{ et } t_1 = \tau + \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow \ln D_1 = -\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}, \text{ soit : } \xi = \sqrt{\frac{(\ln D_1)^2}{\pi^2 + (\ln D_1)^2}} \text{ et donc ici : } \xi = 0,42$$

$$\Rightarrow t_1 = \tau + \frac{T}{2}, \text{ soit : } \tau = 1,6\text{ s} \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T \sqrt{1-\xi^2}}, \text{ soit ici : } \omega_n = 0,47 \text{ rad s}^{-1}$$

On obtient : $H(p) = \frac{1,1 e^{-1,6p}}{p^2 + \frac{2 \times 0,42}{0,47} p + 1}$ ou : $H(p) = \frac{1,1 e^{-1,6p}}{4,53 p^2 + 1,79 p + 1}$

En pratique, à l'aide d'un logiciel « tableur » classique, il est assez facile par approches successives, en changeant les coefficients τ , ξ et ω_n , de comparer la courbe expérimentale avec un modèle théorique du second ordre.

Exercice 10

1 Échelon de position réalisé

La limitation de vitesse de variation du signal de sortie du régulateur ne permet pas d'effectuer un vrai échelon de position car ce procédé réagit très rapidement. L'opérateur peut penser réaliser un échelon de position mais pour le procédé il correspond à un échelon de vitesse (ou rampe) de 0 % à 20 % puis à un autre de 20 % à 50 %. Cette variation correspondrait à un échelon de position pour un système plus lent.

2 Stabilité du procédé

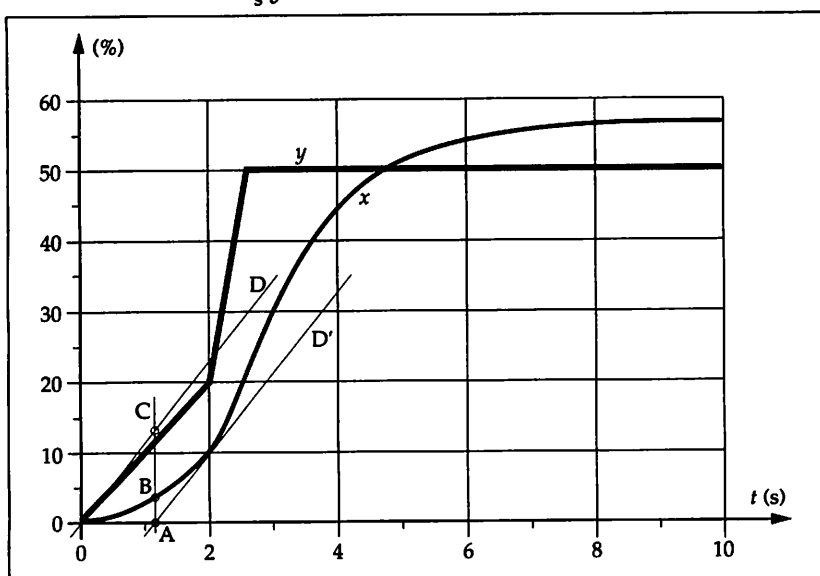
Pour une variation finale de 50 % de la commande, on observe une variation finale de la mesure de 57 %. Le procédé est donc naturellement stable ou autorégulant.

3 Gain statique

Il est calculé en régime permanent : $G_s = \frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{57}{50} \Rightarrow G_s = 1,14$

4 Identification

La rampe d'entrée, appliquée de 0 à 2 s, a pour équation : $y(t) = 0,1t u(t)$ (fig. 1.28). Pour exploiter le signal $x(t)$, il faut penser que si la rampe d'entrée $y(t)$ continuait au-delà de 2 s, la réponse $x(t)$ serait représentée par une droite $D'(t)$ d'équation $G_s y(t - n\theta) = 0,114 (t - n\theta)$.



On trace la droite D d'équation $d(t) = 0,114 t$. Puis, comme on ignore la valeur de θ , on cherche à tracer la droite D' , parallèle à D , tangente à la courbe $x(t)$ qui correspond le mieux avec la courbe théorique $D'(t)$ (dont on ignore le point d'intersection avec l'axe des temps). Cette méthode peu rigoureuse permet pourtant, dans bien des cas, une approche satisfaisante de la ou des valeurs des constantes de temps. On remarque que le rapport AB/AC vaut environ 0,34. La durée correspondant à $0A$ est égale à 1,2 s.

Figure 1.28

En théorie, un système du premier ordre est caractérisé par un rapport de 0,37 ; le procédé étudié ici peut donc être assimilé à un système du premier ordre ($n = 1$) de constante de temps $\theta = 1,2$ s.

La fonction de transfert est donc : $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{1,14}{1,2 p + 1}$

RÉGULATEUR INDUSTRIEL

1. CARACTÉRISATION D'UN RÉGULATEUR INDUSTRIEL

Le régulateur, qu'il soit de technologie pneumatique, électronique analogique ou électronique numérique, est dit industriel lorsqu'il comporte au moins les caractéristiques suivantes :

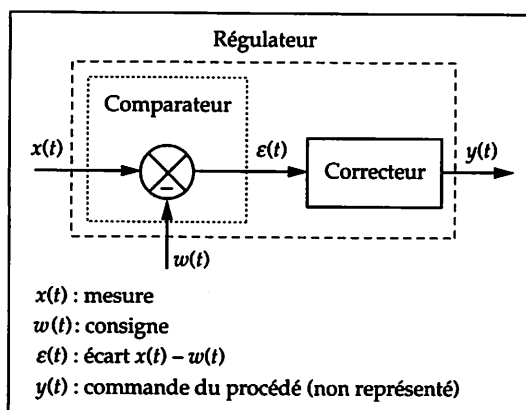
- un signal normalisé en entrée de mesure (x) et un signal normalisé en sortie de commande (y) visualisables ;
- une consigne (w) réglable et visualisable ;
- un réglage des paramètres de l'algorithme de calcul.

Un régulateur industriel électronique peut également comporter :

- des systèmes de traitement de la mesure comme une caractérisation spécifique (linéarisation de la réponse d'un thermocouple ou racine carrée) ou un filtrage anti-bruit ;
- des sélecteurs de consigne interne-externe, de commande automatique-manuelle et d'action directe-inverse ;
- des réglages d'alarme basse et d'alarme haute de la mesure ou de l'écart mesure-consigne et éventuellement d'un talon ajouté au signal de sortie ;
- des limiteurs de la consigne et de la sortie.

Cette liste est loin d'être exhaustive.

2. ALGORITHME DU RÉGULATEUR : ALGORITHME PID



Un régulateur est composé d'un comparateur et d'un correcteur (fig. 2.1).

La loi qui permet l'élaboration du signal de commande dépend de la structure interne du correcteur. L'algorithme ou loi de commande est l'association des trois actions élémentaires PID (proportionnelle, intégrale et dérivée).

Figure 2.1. Composition d'un régulateur

2.1. Actions élémentaires

■ ACTION PROPORTIONNELLE

Équation temporelle : $Y(t) = G_r \varepsilon(t) + Y_0$ avec G_r : gain, Y_0 : talon réglable ou centrage de bande proportionnelle.

Fonction de transfert : $C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r = \frac{1}{B_p}$ avec B_p : bande proportionnelle.

■ ACTION INTÉGRALE

Équation temporelle : $Y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + Y_0$ avec T_i : constante de temps d'action intégrale, Y_0 : valeur initiale de Y .

$$\text{Fonction de transfert : } C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$$

■ ACTION DÉRIVÉE

Équation temporelle : $Y(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ avec T_d : constante de temps d'action dérivée.

$$\text{Fonction de transfert : } C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = T_d p$$

L'action dérivée peut s'exercer soit sur l'écart, soit sur la mesure seule.

2.2. Différentes structures

Les actions élémentaires peuvent être associées de plusieurs façons.

■ STRUCTURE PARALLÈLE (FIG. 2.2)

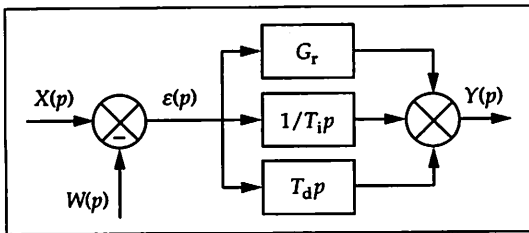


Figure 2.2. Régulateur à structure parallèle

Équation temporelle :

$$Y(t) = G_r \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0$$

$$\text{Fonction de transfert : } C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r + \frac{1}{T_i p} + T_d p$$

■ STRUCTURE SÉRIE (FIG. 2.3)

Équation temporelle : $Y(t) = \alpha G_r \varepsilon(t) + \frac{G_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + G_r T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0$

où $\alpha = \frac{T_i + T_d}{T_i}$ est le coefficient théorique d'interaction entre action intégrale et action dérivée.

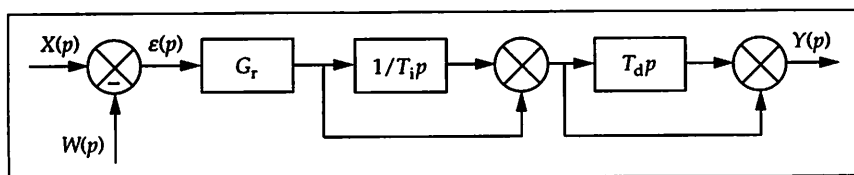


Figure 2.3. Régulateur à structure série

Fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$$

■ STRUCTURE MIXTE (FIG. 2.4)

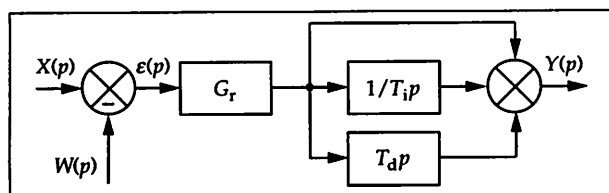


Figure 2.4. Régulateur à structure mixte (classique)

C'est la structure la plus utilisée actuellement par les constructeurs.

Équation temporelle :

$$Y(t) = G_r \varepsilon(t) + \frac{G_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + G_r T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0$$

Fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

D'autres structures mixtes sont possibles comme par exemple celle de la figure 2.5.

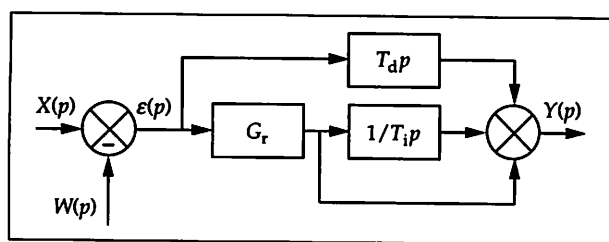


Figure 2.5. Régulateur à structure mixte (variante)

Équation temporelle :

$$Y(t) = G_r \varepsilon(t) + \frac{G_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0$$

Fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) + T_d p$$

3. SENS D'ACTION

La norme française impose les définitions suivantes :

- l'écart ε est défini comme la différence entre la mesure et la consigne, soit $\varepsilon = x - w$;
- le régulateur est à action directe si y augmente lorsque ε augmente ;
- le régulateur est à action inverse si y augmente lorsque ε diminue.

Toutes les équations temporelles ci-dessus ont été données en action directe. Un signe négatif doit être placé devant l'écart pour toute équation temporelle d'un régulateur à action inverse. Lorsque le régulateur est associé à un système à asservir, le régulateur est toujours considéré comme inverse (réaction négative sur la mesure x), le système est supposé comme évoluant en direct (une augmentation de y correspond à une augmentation de x) et cela même si c'est l'inverse qui a lieu réellement. La fonction de transfert correctrice $C(p)$ est ainsi toujours positive.

4. RÉGULATEUR NUMÉRIQUE

Toutes les fonctions de transfert données ci-dessus sont applicables aux régulateurs analogiques et aux régulateurs numériques. En effet, les progrès technologiques rendent les temps d'échantillonnage des régulateurs numériques de plus en plus courts (80 ms est une valeur courante) et les fonctions PID de tels régulateurs peuvent être assimilées à des fonctions continues. Les constructeurs fournissent leurs fonctions de transfert en p .

EXERCICES

Exercice 1

Il s'agit de vérifier le fonctionnement en chaîne ouverte d'un régulateur PID de structure série. L'équation donnant la grandeur de sortie s'écrit :

$$Y(t) - Y_0 = \alpha G_r \varepsilon(t) + \frac{G_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + G_r T_d \frac{d[\varepsilon(t)]}{dt}$$

où $Y_0 = 50\%$ est la valeur centrale de bande, $\alpha = \frac{T_i + T_d}{T_i}$ est le coefficient théorique d'interaction entre l'action intégrale et l'action dérivée, et $\varepsilon = x - w$ est l'écart. On fixe : $G_r = 2$, $T_i = 8$ min, $T_d = 1$ min et on a $X = W = 50\%$ pour $t \leq 0$.

- 1 Calculer et représenter graphiquement le signal de sortie $y(t)$ de ce régulateur soumis à une variation rapide de consigne $w(t)$ de 50 % à 60 %, la mesure restant constante.
- 2 Calculer et représenter graphiquement le signal de sortie $y(t)$ de ce régulateur soumis à une variation de consigne telle que, la mesure restant constante, $w(t) = 0,1 tu(t)$ avec t exprimé en minutes.
- 3 Le régulateur étant réglé maintenant en action inverse, que devient le signal de sortie $y(t)$ obtenu à la question 2 ? (Il est inutile de tout recalculer.)
- 4 Le régulateur étant toujours en action inverse, que devient ce même signal de sortie $y(t)$ de la question 2 si, au lieu de changer $w(t)$, on change $x(t)$?
- 5 Exprimer la fonction de transfert $C(p)$ du régulateur, et réaliser le schéma-bloc en indiquant les blocs P, I et D. Que penser d'une telle structure en ce qui concerne son réglage ?

Exercice 2

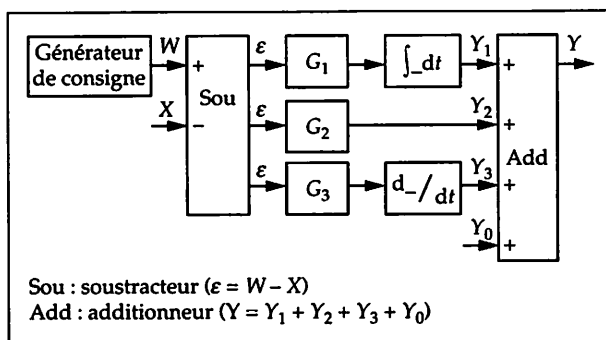


Figure 2.6

Le schéma d'un régulateur analogique réalisé à l'aide des fonctions élémentaires d'un logiciel de simulation est donné figure 2.6.

- 1 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce régulateur.
 - 2 Quelle est sa structure ? Que penser des réglages des actions ?
 - 3 On règle : $G_1 = 0,125 \text{ min}^{-1}$, $G_2 = 2$, $G_3 = 1 \text{ min}$, $Y_0 = 50\%$. La mesure reste constante.
- ▷ Calculer $Y(p)$ et $y(t)$, puis représenter la fonction $y(t)$:

- si $W(p) = 0,2/p$;
- si $W(p) = 0,1/p^2$;
- si $W(p) = \frac{0,1}{p(1+3p)}$.

Exercice 3

On se propose d'étudier un régulateur PID de structure série en chaîne ouverte. Les réglages sont les suivants : bande proportionnelle $B_p = 50 \%$, action directe, action intégrale inhibée, constante de temps d'action dérivée $T_d = 0,5 \text{ min}$, valeur centrale de bande $Y_0 = 50 \%$.

- 1 Donner l'expression du signal de sortie $Y(t)$ en fonction de la consigne $w(t)$ et de la mesure $x(t)$.
 - 2 Calculer et représenter le signal de sortie $Y_{ec}(t)$ pour un changement en échelon $w(t) = 0,1$.
 - 3 Calculer et représenter le signal de sortie $Y_{em}(t)$ pour un changement en échelon $x(t) = 0,1$.
 - 4 Calculer et représenter le signal de sortie $Y_{rc}(t)$ pour un changement en rampe $w(t) = 0,1t$.
 - 5 Calculer et représenter le signal de sortie $Y_{rm}(t)$ pour un changement en rampe $x(t) = 0,1t$.
- Sur ce régulateur on dispose d'un micro-interrupteur qui permet d'obtenir que l'action dérivée intervienne seulement sur le signal de mesure. L'ensemble constitue un régulateur dit PID/mesure.
- 6 Reprendre les questions 2, 3, 4 et 5.
 - 7 Après l'observation de ces essais, que conclure quant au choix de la dérivée sur l'écart ou sur la mesure ?

Exercice 4

Pour un régulateur de fonction de transfert $C(p)$, le signal de sortie Y est renvoyé à l'entrée de mesure. Le schéma fonctionnel du montage réalisé est donné figure 2.7.

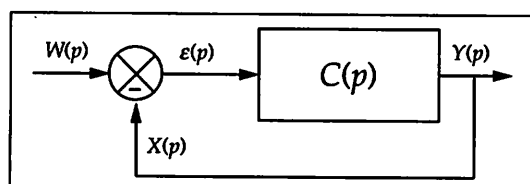


Figure 2.7

$$\text{On donne : } C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{(T_i p + 1)}{B_p T_i p}$$

où B_p désigne la bande proportionnelle.

1 Étude en action proportionnelle

On fixe : $B_p = 50 \%$, $Y_0 = 50 \%$, $W = X = 50 \%$ pour $t \leq 0$.

- ▷ Exprimer $\varepsilon(p)$ pour $W(p) = 0,1/p$. Calculer la valeur, notée ε_s , de $\varepsilon(p)$ en régime permanent.
- ▷ Représenter alors graphiquement $Y(t)$ et $W(t)$. Qu'observe-t-on ?

2 Étude en action proportionnelle et intégrale

On fixe : $B_p = 50 \%$, $T_i = 1 \text{ min}$, $Y_0 = 50 \%$, $W = X = 50 \%$ pour $t \leq 0$.

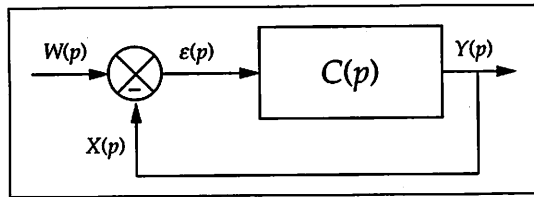
- ▷ Exprimer $\varepsilon(p)$ pour $W(p) = 0,1/p$. Calculer la valeur, notée ε_s , de $\varepsilon(p)$ en régime permanent.
- ▷ Représenter alors graphiquement $Y(t)$ et $W(t)$.

On revient aux mêmes conditions qu'à la question 2, mais pour $T_i = 20 \text{ s}$ et $W(p) = 0,1/p$.

- ▷ Représenter alors graphiquement $Y(t)$ et $W(t)$.
- ▷ Que peut-on déduire de ces essais ?

Exercice 5

Un régulateur est placé en chaîne fermée; sa sortie est reliée à l'entrée de mesure (fig. 2.8).



$$\text{On donne : } C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r + G_r T_d p$$

Figure 2.8

- 1 Calculer la valeur de $\varepsilon(p)$ en régime permanent, c'est-à-dire l'écart statique ε_s pour un échelon de consigne $w(t) = A$.
- 2 Calculer la valeur de $\varepsilon(p)$ en régime permanent, c'est-à-dire l'écart de vitesse ε_v pour un changement de consigne $w(t) = bt$.
- 3 Que déduire des questions 1 et 2 ?
- 4 Exprimer $Y(p)$ pour $W(p) = \frac{\alpha}{(T p + 1)^2}$, puis représenter graphiquement $y(t)$ et $w(t)$ pour les valeurs suivantes :
 $\alpha = 20\%$, $T = 1 \text{ min}$, $T_d = 0,1 \text{ min}$, $G_r = 2$, $Y_0 = 50\%$ et $W = X = 50\%$ pour $t \leq 0$.
- 5 Représenter graphiquement $Y(t)$ et $W(t)$ pour les valeurs suivantes :
 $\alpha = 20\%$, $T = 1 \text{ min}$, $T_d = 10 \text{ min}$ et $G_r = 2$.
- 6 Que déduire de l'observation des graphes obtenus aux questions 4 et 5 ?

Exercice 6

Afin de répondre à un besoin spécial d'asservissement, on élabore un correcteur tel que :

- la consigne W diminuée de la mesure X donne l'écart ε ;
- l'écart ε est amplifié par G_r et donne Y_1 ;
- la consigne W est amplifiée par un coefficient F et donne Y_2 ;
- la sortie Y est la somme de Y_1 et Y_2 .

- 1 Établir le schéma de ce correcteur et trouver $Y(p)$ en fonction de $W(p)$ et $X(p)$.
- 2 Calculer la réponse $y(t)$ à un échelon de consigne $w(t) = A u(t)$ et $x(t) = 0$ (pas de variation).
Tracer cette réponse pour $A = 0,1$; $G_r = 4$ et $F = 2$. Relever ensuite la variation $\Delta Y / \Delta W$ en régime permanent.
Pour la suite le correcteur est bouclé sur lui-même, c'est-à-dire que l'on a : $X = Y$.
- 3 Exprimer alors $H(p) = Y(p) / W(p)$.
- 4 Calculer la valeur de $\varepsilon(p)$ en régime permanent, c'est-à-dire l'écart statique ε_s quand $W(p) = A/p$. Quel réglage du correcteur permet d'obtenir $\varepsilon_s = 0$?
- 5 Quel peut être l'avantage de ce correcteur par rapport à un régulateur classique P ou PI ? Quel en est l'inconvénient ?

Exercice 7

Un régulateur PID doit apporter une déformation au lieu de transfert du procédé à corriger dans une zone de fréquences adéquate. Il faut donc connaître le comportement d'un tel régulateur selon la fréquence pour comprendre son action sur le procédé. Le régulateur étudié est de structure mixte :

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = \frac{G_r (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p}. \text{ On donne : } G_r = 1.$$

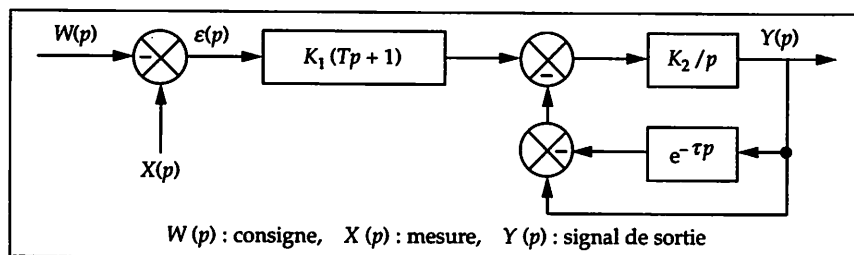
- 1 Déterminer les constantes de temps T_1 et T_2 du numérateur de $C(p)$ pour qu'elles soient réelles.
- 2 Quelle doit être la relation entre T_i et T_d pour obtenir $T_1 = T_2 = 0,5 T_i$?
- 3 Quelle valeur de pulsation ω permet d'obtenir $C(j\omega) = 1$?
- 4 Exprimer le module et l'argument de $C(j\omega)$ en fonction de T_1 et T_2 .
- 5 Tracer la représentation de Bode de $C(j\omega)$:
 - avec $T_i = 60$ s et $T_d = 15$ s ;
 - avec $T_i = 60$ s et $T_d = 6$ s.
- 6 Préciser quelle action (P, I ou D) affecte la zone des plus basses fréquences et quelle action affecte la zone des plus hautes fréquences. Pour $G_r \neq 1$, ces zones de fréquences sont-elles modifiées ? Pourquoi ?

Un régulateur réel comporte en fait un filtre passe-bas du premier ordre dont la constante de temps est T_d / N ; N étant une constante réglable. La fonction de transfert du régulateur réel est donc :

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \frac{1}{1 + \frac{T_d}{N} p}$$

- 7 Tracer la représentation de Bode de $C(j\omega)$. On donne : $G_r = 1$, $T_i = 60$ s, $T_d = 15$ s et $N = 10$. Quelle est la zone de fréquences qui est modifiée par l'introduction du filtre ?

N Exercice 8



Le calcul théorique appliqué à un procédé à réguler conduit à la réalisation d'un correcteur représenté par le schéma fonctionnel de la figure 2.10.

Figure 2.10

- 1 Exprimer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.
- 2 Montrer que dans ce correcteur se trouve un correcteur de type PI et réaliser le schéma faisant apparaître celui-ci.
- 3 Ce correcteur doit être réalisé par un système programmable, donc traité numériquement ; la période d'échantillonnage est T_e . À l'aide d'un schéma, expliquer l'organisation pratique de ce correcteur numérique.
- 4 On désigne par T_{co} le temps de conversion et par T_{ca} le temps de calcul. Donner la condition à satisfaire entre T_e , T_{co} et T_{ca} pour que le traitement numérique n'introduise pas de retard dans le procédé régulé.
- 5 Établir l'équation récurrente de ce correcteur à partir du schéma trouvé à la question 2.

Exercice 1

1 Signal de sortie du régulateur

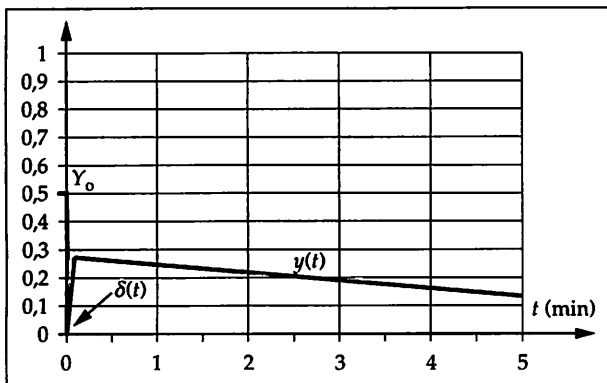


Figure 2.11

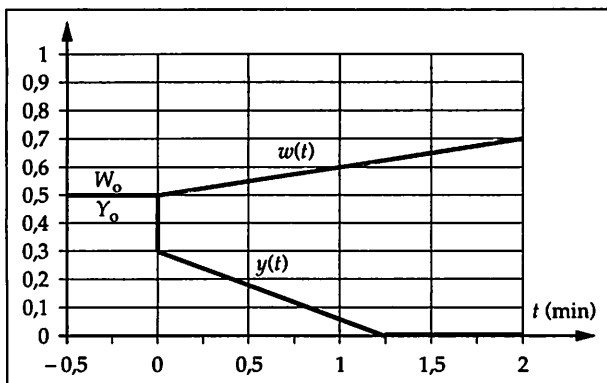
$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \Delta X(t) - \Delta W(t) \\ &= (50\% - 50\%) - (60\% - 50\%) u(t) = -10\% u(t) \\ Y(t) &= 50\% + (9/8) \times 2 \times [-10\%] u(t) + (2/8) \\ &\quad \times [-10\% t u(t)] + 1 \times 2 \times d[-10\% u(t)]/dt \\ Y(t) &= 27,5\% u(t) - 2,5\% t u(t) - 20\% \delta(t) \\ \text{soit : } Y(t) &= 0,275 - 0,025t - 0,2 \delta(t)\end{aligned}$$

Représentation graphique en figure 2.11.

On constate que la sortie subit un à-coup lors du changement brusque de consigne, ce qui n'est pas souvent toléré par un procédé.

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ s'explique par le fait que, physiquement, la valeur de W passe de 50 % à 60 % en un temps Δt très court, mais non nul, et donc que la dérivée existe. L'action dérivée théorique donne donc une impulsion, ou pic de la sortie. En réalité, cette impulsion peut être plus ou moins atténuée suivant la bande passante du régulateur.

2 Signal de sortie du régulateur pour une consigne en rampe



$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \Delta X(t) - \Delta W(t) \\ &= (50\% - 50\%) - (50\% + 10\% t - 50\%) = -10\% t \\ Y(t) &= 50\% + (9/8) \times 2 \times (-10\% t) + 1/8 \times (-10\%) t^2 \\ &\quad + 1 \times 2 \times d(-10\% t)/dt \\ \text{soit : } Y(t) &= 0,30 - 0,225t - 0,0125 t^2\end{aligned}$$

Représentation graphique en figure 2.12.

Figure 2.12

3 Régulateur à action inverse

Par définition, un régulateur est à sens d'action inverse lorsque sa sortie Y diminue quand son entrée ε (mesure - consigne) augmente.

Donc : $Y(t) = 0,7 + 0,225t + 0,0125 t^2$, c'est-à-dire que $Y(t)$ croît au lieu de décroître.

4 Changement sur $x(t)$

On trouve : $Y(t) = 0,3 - 0,225t - 0,0125 t^2$

5 Fonction de transfert de régulateur

À partir de l'équation temporelle, on obtient : $C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left[\frac{T_i}{T_i} + \frac{T_d}{T_i} + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right]$

$$C(p) = G_r \frac{T_i p + T_d p + 1 + T_i T_d p^2}{T_i p}. \text{ On obtient donc : } \boxed{C(p) = G_r \frac{(T_i p + 1)(T_d p + 1)}{T_i p}}$$

d'où le schéma suivant (fig. 2.13).

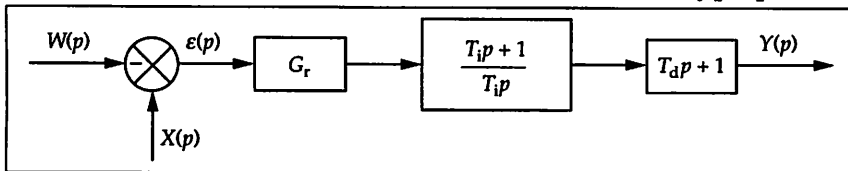


Figure 2.13

Une telle structure, dite aussi de type produit, impose un réglage délicat pour l'opérateur lorsque les trois paramètres P, I et D sont utilisés, puis qu'ils sont dépendants les uns des autres (à cause de α). Ceci est surtout vrai lorsque le réglage doit être obtenu par approches successives.

Exercice 2

1 Fonction de transfert du régulateur

La lecture du schéma donne : $Y(t) = G_1 \int_0^t \varepsilon(t) dt + G_2 \varepsilon(t) + G_3 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0$

$$Y(p) = \frac{G_1 \varepsilon(p)}{p} + G_2 \varepsilon(p) + p G_3 \varepsilon(p). \text{ Donc : } \boxed{C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{G_1}{p} + G_2 + p G_3}$$

2 Structure

C'est un régulateur à structure parallèle : il y a addition des actions pour donner le signal de sortie, et le gain G_2 n'est un facteur ni de l'action intégrale (pondérée par G_1), ni de l'action dérivée (pondérée par G_3). Les réglages de ces actions sont indépendants. Pour les mêmes valeurs P, I et D, la sortie évolue moins vite qu'un régulateur de type série (pour un gain de régulateur supérieur à 1).

3 Calcul de $Y(p)$

• Si $X(p) = 0$ et $W(p) = 0,2 / p$ alors $\varepsilon(p) = -0,2 / p$

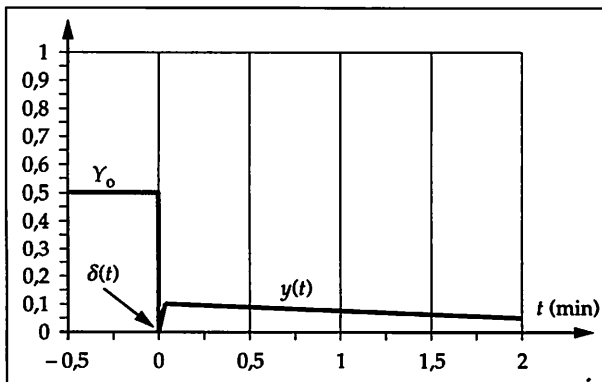


Figure 2.14

$$\text{Donc : } \boxed{Y(p) = \frac{-0,2 G_2}{p} - \frac{0,2 G_1}{p^2} - 0,2 G_3}$$

$$y(t) = -0,2 G_2 - 0,2 G_1 t - 0,2 G_3 \delta(t) \Rightarrow y(t) = -0,4 - 0,025 t - 0,2 \delta(t)$$

$$\text{On obtient : } \boxed{Y(t) = 0,1 - 0,025 t - 0,2 \delta(t)}$$

La figure 2.14 donne la représentation graphique de $Y(t)$.

• Si $X(p) = 0$ et $W(p) = 0,1 / p^2$ alors $\varepsilon(p) = -0,1 / p^2$

$$\boxed{Y(p) = \frac{-0,1 G_2}{p^2} - \frac{0,1 G_1}{p^3} - \frac{0,1 G_3}{p}}$$

La transformée inverse de Laplace de $Y(p)$ conduit à :

$y(t) = -0,1 G_2 t - 0,05 G_1 t^2 - 0,1 G_3$ et comme $Y(t) = y(t) + Y_0$, on obtient :

$$\boxed{Y(t) = 0,4 - 0,2t - 0,00625 t^2}. \text{ La figure 2.15 donne la représentation graphique de } Y(t).$$

• Si $W(p) = \frac{0,1}{p(1+3p)}$, on obtient : $Y(p) = \frac{-0,1 G_2}{p(3p+1)} + \frac{0,1 G_1}{p^2(3p+1)} + \frac{0,1 G_3}{3p+1}$

À l'aide des tables de transformées inverses de Laplace, on trouve :

$$y(t) = -0,1 G_2(1 - e^{-t/3}) - 0,1 G_1(3 e^{-t/3} + t - 3) - 0,033 G_3 e^{-t/3}$$

Soit : $Y(t) = 0,3375 - 0,1295 e^{-t/3} - 0,0125 t$

Le signal $Y(t)$ est représenté figure 2.16.

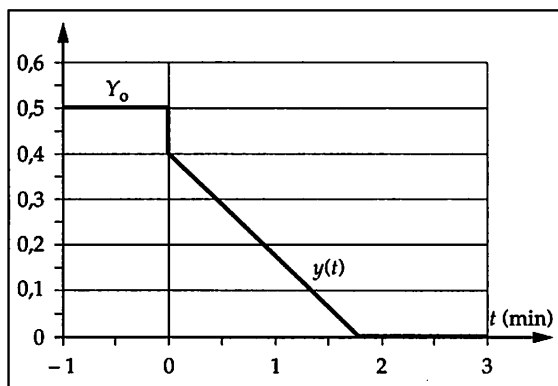


Figure 2.15

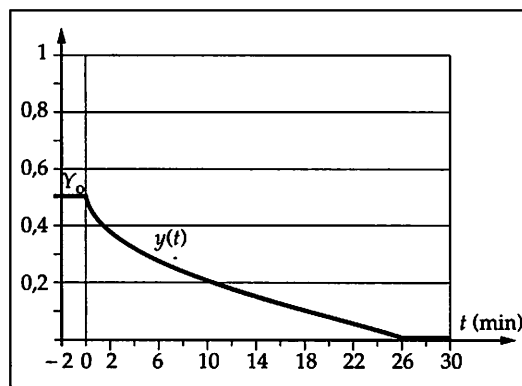


Figure 2.16

Exercice 3

1 Signal de sortie

L'équation de sortie d'un régulateur PID/écart de structure série est :

$$Y(t) - Y_0 = \alpha \frac{\varepsilon(t)}{B_p} + \frac{1}{B_p T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + \frac{T_d}{B_p} \frac{d[\varepsilon(t)]}{dt}$$

avec : $\varepsilon(t) = x(t) - w(t)$ et : $\alpha = \frac{T_i + T_d}{T_i}$, coefficient théorique d'interaction entre T_i et T_d .

2 Signal $Y_{ec}(t)$

Pour $w(t) = 0,1 u(t)$ alors $\varepsilon(t) = -0,1 u(t)$ et $Y_{ec}(t) = 0,3 - 0,1 \delta(t)$ (fig. 2.17).

3 Signal $Y_{em}(t)$

Pour $x(t) = 0,1 u(t)$ alors $\varepsilon(t) = 0,1 u(t)$ et $Y_{em}(t) = 0,7 + 0,1 \delta(t)$ (fig. 2.18).

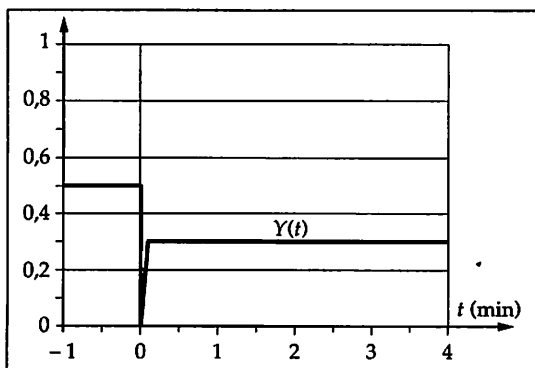


Figure 2.17

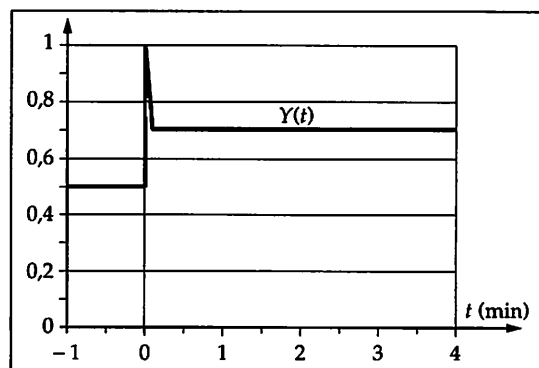


Figure 2.18

4 Signal $Y_{rc}(t)$

Pour $w(t) = 0,1 t u(t)$ alors $\varepsilon(t) = -0,1 t u(t)$, $Y_{rc}(t) = 0,4 - 0,2t$ (fig. 2.19).

5 Signal $Y_m(t)$

Pour $x(t) = 0,1 t u(t)$ alors $\varepsilon(t) = 0,1 t u(t)$, et $Y_m(t) = 0,6 + 0,2t$ (fig. 2.20).

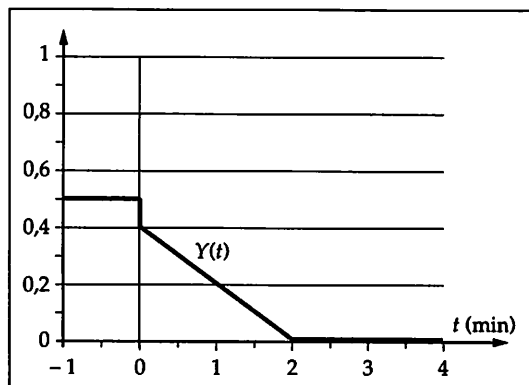


Figure 2.19

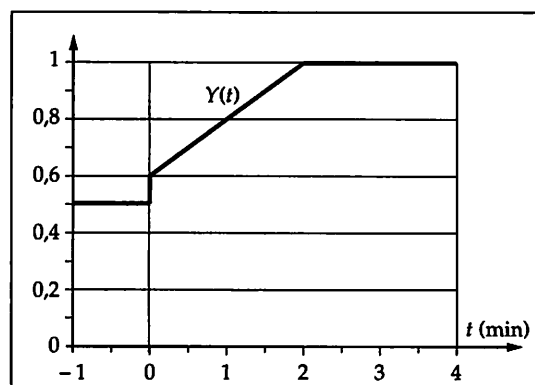


Figure 2.20

6 Signal de sortie du PID/mesure

$$L'équation devient : Y(t) - Y_0 = \frac{\varepsilon(t)}{B_p} + \frac{T_d}{B_p} \frac{d[x(t)]}{dt}$$

Les réponses précédentes deviennent :

$Y_{ec}(t) = 0,3$ car seule l'action proportionnelle est à prendre en compte.

$Y_{em}(t) = 0,7 + 0,1 \delta(t)$.

$Y_{rc}(t) = 0,5 - 0,2t$, car seule l'action proportionnelle est à considérer.

$Y_{rm}(t) = 0,6 + 0,2t$.

7 Dérivée sur mesure ou sur écart

En examinant ces essais, on peut observer qu'un échelon de la consigne engendre un à-coup pour le signal de sortie avec le régulateur PID/écart. Cet effet n'est pas toujours désirable avec un procédé contrôlé en chaîne fermée, car cela peut entraîner une usure prématurée de l'organe réglant et ne permet pas d'obtenir forcément un asservissement plus rapide (malgré l'action dérivée). Le risque d'à-coup est le même si ce régulateur est piloté par une consigne externe (calculateur élaborant la consigne ou encore montage en cascade) où des discontinuités peuvent survenir.

Si le régulateur n'est pas soumis à de brusques variations de consigne (par exemple s'il existe une limitation de vitesse de consigne), un régulateur PID/écart n'a pas cet inconvénient et peut donc être satisfaisant. Un filtre de premier ordre sur la sortie peut, si nécessaire, atténuer cet effet indésirable de l'à-coup.

En fait, c'est au technicien d'analyser le problème... et donc de décider de la solution en toute connaissance de cause !

Exercice 4

Consulter le chapitre 4 - Précision, si nécessaire.

1 En action proportionnelle

▷ Écart statique $\varepsilon(p) = \frac{W(p)}{1 + C(p)}$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \frac{0,1}{1 + G_r} \text{ donc : } \varepsilon_s = 0,033 = 3,3 \%, \text{ soit un écart relatif de } 33 \%.$$

▷ Représentation graphique de $Y(t)$ et $W(t)$

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{C(p)}{1+C(p)} \Rightarrow Y(p) = \frac{0,1 G_r}{p(1+G_r)} \text{ et donc } y(t) = 0,1 \frac{G_r}{1+G_r}, \text{ soit : } y(t) = 0,0666.$$

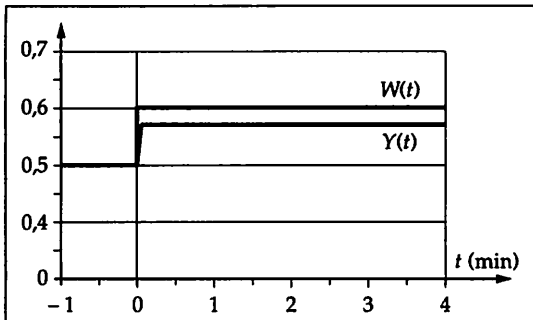


Figure 2.21

On a : $Y(t) = y(t) + Y_0 = 0,5666$ (fig. 2.21)

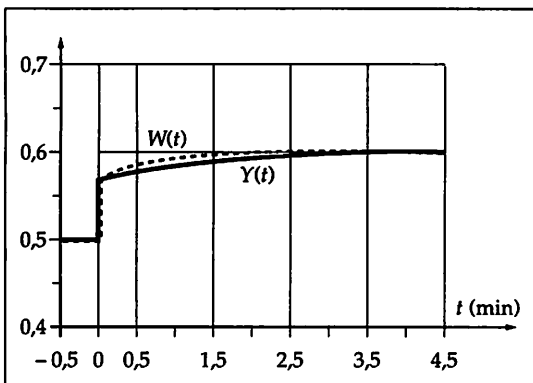
Le signal de sortie Y , qui est aussi le signal de mesure X , ne rejoint pas la consigne quel que soit le gain. La sortie théorique ici tracée sur la figure 2.21 ne tient pas compte du temps de réponse du régulateur. Si on observe une sortie réelle avec une montée de constante de temps du premier ordre, il peut y avoir un filtre passe-bas qui modifie le signal de sortie, ou de mesure. Dans la pratique, il faut vérifier les possibilités réelles du régulateur.

2 En action proportionnelle et intégrale

▷ Écart statique pour $W(p) = 0,1/p$: $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,1}{1 + G_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}}$, soit $\varepsilon_s = 0$

▷ Représentation graphique de $Y(t)$ et $W(t)$

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{C(p)}{1+C(p)} ; Y(p) = \frac{0,1}{p} \frac{G_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}}{1 + G_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}} ; \text{ soit } Y(p) = \frac{0,1}{p} \frac{T_i p + 1}{1 + T p} \text{ avec : } T = \frac{G_r + 1}{G_r} T_i$$



La transformée inverse de Laplace donne :

$$Y(t) - 0,5 = 0,1 + 0,1 \frac{T_i - T}{T} e^{-t/T}$$

soit : $Y(t) = 0,6 - 0,0333 e^{-t/1,5}$ (fig. 2.22)

▷ Représentation graphique de $Y(t)$ et $W(t)$ pour $T_i = 20$ s

$Y(t) = 0,6 - 0,0333 e^{-t/0,5}$ (fig. 2.22, courbe en pointillé)

Figure 2.22

▷ Conclusion des essais

Quel que soit le temps T_i , l'action intégrale supprime bien l'écart entre la mesure et la consigne. La réponse est d'autant plus rapide que la constante T est petite, et pour diminuer T il faut réduire T_i . La vérification de la fonction intégrale, par exemple, est alors plus rapide.

Exercice 5

1 Écart statique

$$\varepsilon(p) = \frac{W(p)}{1 + G_r(1 + T_d p)}$$

Avec $W(p) = A/p$; $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{A}{1 + G_r(1 + T_d p)} \right)$, on obtient : $\varepsilon_s = \frac{A}{1 + G_r}$

2 Écart de vitesse

$$W(p) = \frac{b}{p^2} ; \varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{b}{p(1 + G_r(1 + T_d p))} \right) \text{ et on trouve : } \varepsilon_v = \infty$$

3 Conclusion

Ce résultat confirme bien que l'action dérivée n'apporte pas la précision dans une chaîne fermée.

4 Représentation graphique de $Y(t)$ et $W(t)$

$$Y(p) = W(p) \frac{G_r(1 + T_d p)}{1 + G_r(1 + T_d p)}, \text{ soit : } Y(p) = \frac{\alpha}{(T p + 1)^2} \frac{G_r(1 + T_d p)}{1 + G_r(1 + T_d p)}$$

$$Y(p) = \frac{\alpha G_r}{(G_r + 1)} \frac{(1 + T_d p)}{(T p + 1)^2 (1 + \theta_d p)} \text{ avec : } \theta_d = G_r T_d / (1 + T_d)$$

À l'aide des tables de transformées de Laplace on obtient :

$$y(t) = \frac{\alpha G_r}{G_r + 1} \left\{ \frac{\theta_d - T_d}{(\theta_d - T)^2} e^{-t/\theta_d} + \left(\frac{T - T_d}{T^2(T - \theta_d)} t - \frac{T_d - \theta_d}{(T - \theta_d)^2} \right) e^{-t/T} \right\}$$

soit, pour $T_d = 0,1$ min, la réponse $Y(t)$ représentée figure 2.23.

5 Représentation graphique de $Y(t)$ et $W(t)$

On obtient, pour $T_d = 10$ min, la réponse $Y(t)$ représentée figure 2.24.

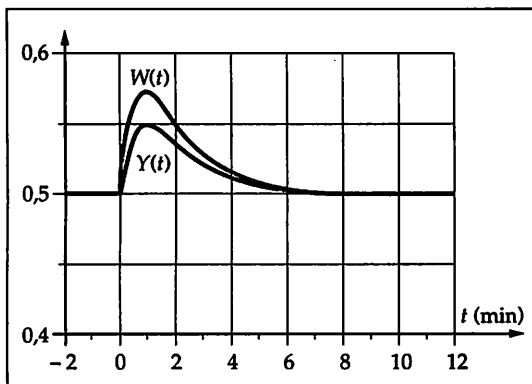


Figure 2.23

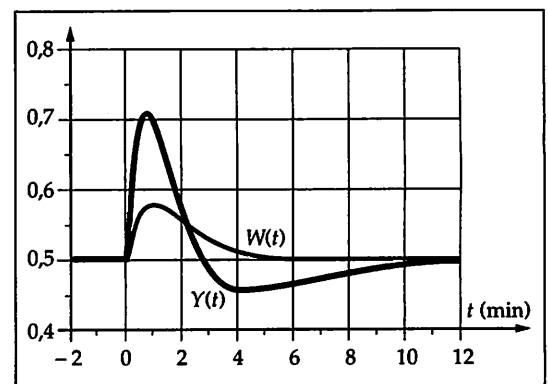


Figure 2.24

6 Observations

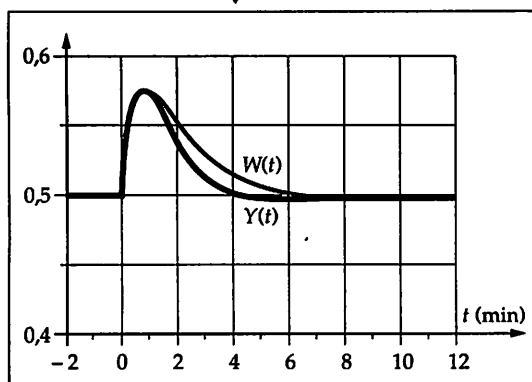


Figure 2.25

La figure 2.23 montre un signal $Y(t)$ qui suit, difficilement, l'évolution de l'entrée $W(t)$ avec une légère atténuation en amplitude. La constante de temps de la dérivée est le dixième de la constante de temps du signal d'entrée; l'action du régulateur apparaît ici surtout comme une action proportionnelle car l'action dérivée intervient peu. La figure 2.24 montre un signal $Y(t)$ qui reproduit en l'amplifiant l'oscillation de l'entrée $W(t)$. La constante de temps de la dérivée est égale à dix fois celle de la constante de temps du signal d'entrée; l'action dérivée est ici trop importante.

La figure 2.25 montre la réponse $Y(t)$ pour $T_d = 2,5$ min. On observe bien l'aspect « anticipateur » de l'action dérivée.

Industriellement, le bouclage du régulateur sur lui-même ne sert pas à grand-chose. L'exercice permet cependant d'observer l'influence de l'action dérivée en ce qui concerne la réponse à un signal de type perturbateur. Le signal $Y(t)$ de la figure 2.24 peut être interprété comme l'amplification néfaste de la dérivée d'un signal dont la constante de temps est dix fois plus petite que celle de l'action dérivée. Il faut donc retenir qu'une action dérivée bien « dosée » permet d'améliorer le temps de réponse d'un système un peu lent et mou, mais aussi qu'elle amplifie tous les bruits de haute fréquence.

Exercice 6

1. Schéma du correcteur

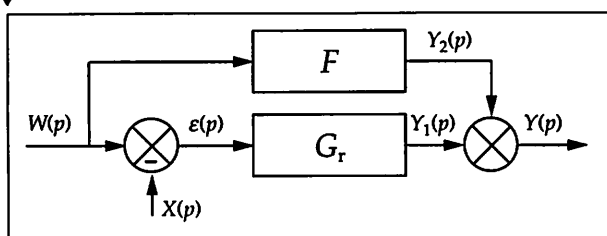


Figure 2.26

Le schéma du correcteur est donné figure 2.26.

$$Y(p) = F W(p) + G_r (W(p) - X(p))$$

2. Réponse $Y(t)$ à un échelon de consigne

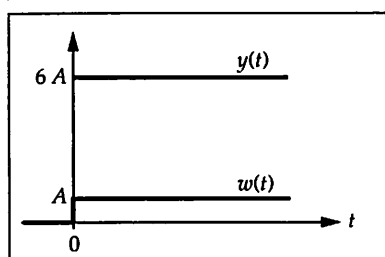


Figure 2.27

$$Y(p) = \frac{FA}{p} + G_r \frac{A}{p}$$

Soit, pour $F = 2$, $G_r = 4$ et $A = 0,1$:

$$Y(p) = \frac{0,2}{p} + \frac{0,4}{p} = \frac{0,6}{p}$$

$$y(t) = 0,6 u(t)$$

On obtient alors (fig. 2.27) : $\frac{\Delta Y}{\Delta W} = 6$.

3. Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F + G_r}{1 + G_r}$$

4. Écart statique

$$Y(p) = F W(p) + G_r \varepsilon(p) = X(p) \text{ donc } \varepsilon(p) = \frac{(1-F)}{(G_r-1)} W(p)$$

Pour $W(p) = \frac{A}{p}$, on a : $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{A}{p} \frac{1-F}{G_r-1} \right]$, soit $\varepsilon_s = \frac{A(1-F)}{G_r-1}$

et : $\varepsilon_s = 0$ si $F = 1$.

5. Avantage par rapport à un régulateur P

Ce correcteur permet d'obtenir $\varepsilon_s = 0$; ce qui n'est pas le cas avec une action P seule.

Avantage par rapport à un régulateur PI. Ce correcteur n'a pas d'effet déstabilisant par décalage de l'action intégrale de $-\pi/2$ rad. C'est important car il ne faut pas oublier qu'il sera relié à un procédé.

Inconvénient. Le gain observé sur le signal de sortie lors d'un changement de consigne n'est pas le gain affiché ou choisi au moyen du régulateur.

Attention aux effets déstabilisateurs en fonction des valeurs de F et G_r ! La stabilité reste à étudier avec la fonction de transfert réelle du procédé à asservir.

Exercice 7

1 Constantes de temps du numérateur de $C(p)$

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left[\frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} \right] = G_r \left[\frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p} \right]$$

Les constantes de temps T_1 et T_2 du numérateur de $C(p)$ sont réelles si $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire : $T_i^2 - 4 T_i T_d \geq 0$. Il faut donc : $T_d \leq T_i / 4$. Les constantes de temps sont :

$$T_1 = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right) \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right)$$

2 Relation entre T_1 et T_d

Pour avoir $T_1 = T_2 = 0,5 T_i$, il faut : $1 - 4 \frac{T_d}{T_i} = 0$, soit : $T_i = 4 T_d$

3 Valeur de la pulsation pour $C(j\omega) = 1$

$$C(p) = G_r \left[\frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p} \right] \quad \text{et} \quad C(j\omega) = \frac{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)}{T_i j\omega}$$

$$\text{On veut : } C(j\omega) = \frac{1 + (T_1 + T_2) j\omega - T_1 T_2 \omega^2}{T_i j\omega} = 1$$

$$\text{On a : } T_1 + T_2 = T_i \quad \text{et} \quad T_1 T_2 = \frac{1}{\omega^2}, \quad \text{on obtient : } \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}}$$

4 Module et argument de $C(j\omega)$

$$|C(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}{T_i \omega}; \quad \text{et} \quad \arg(C(j\omega)) = \arctan(T_1 \omega) + \arctan(T_2 \omega) - \frac{\pi}{2}$$

5 Représentation de Bode

• Pour : $T_i = 60$ s et $T_d = 15$ s (courbes 1, fig. 2.28 a et b)

$$\text{On obtient : } |C(j\omega)| = \frac{1 + 900 \omega^2}{60\omega} \quad \text{et} \quad \arg(C(j\omega)) = 2 \arctan(30\omega) - \pi/2$$

• Pour $T_i = 60$ s et $T_d = 6$ s (courbes 2, fig. 2.28 a et b)

On détermine, à 0,1 près par exemple : $T_1 = 53,2$ s et $T_2 = 6,8$ s

$$\text{On obtient } |C(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + 2830,2 \omega^2} \sqrt{1 + 46,2 \omega^2}}{60\omega}$$

$$\arg(C(j\omega)) = \arctan(53,2\omega) + \arctan(6,8\omega) - \pi/2$$

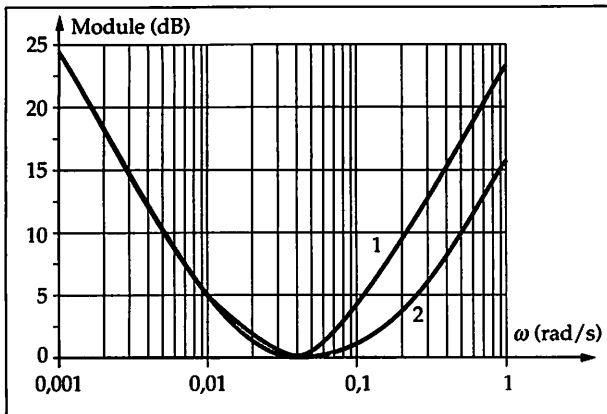


Figure 2.28 a

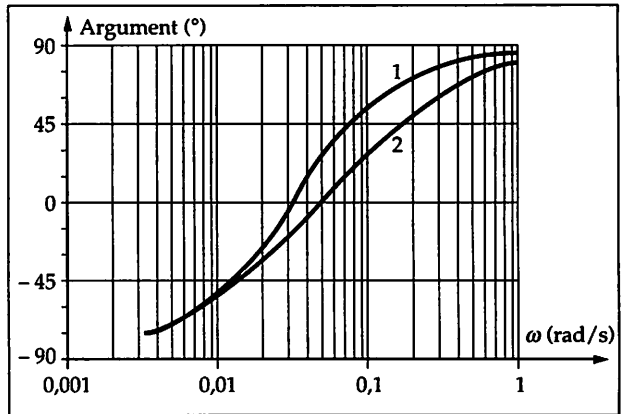


Figure 2.28 b

6 Action sur les fréquences

Comme on peut l'observer fig. 2.28 a et b, c'est l'action intégrale qui influence surtout la zone des basses fréquences. L'action dérivée a une influence notable dans la zone des hautes fréquences. L'action intégrale et l'action dérivée sont bien complémentaires. L'action proportionnelle modifie seulement l'amplitude, c'est-à-dire le module. La courbe représentative de $C(j\omega)$ est traduite verticalement de 6 décibels en module lorsque le gain du régulateur est $G_r = 2$ (car $20 \lg 2 = 6$ dB). L'argument de $C(j\omega)$ reste inchangé, et cela quelle que soit la valeur de G_r .

7 Action du filtre passe-bas

On introduit un filtre passe-bas de constante de temps $T_d/N = T_N$

$$\text{Module de } C(j\omega) : |C(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}{T_i \omega \sqrt{1 + T_N^2 \omega^2}}$$

$$\text{Argument de } C(j\omega) : \arg(C(j\omega)) = \arctan(T_1 \omega) + \arctan(T_2 \omega) - \pi/2 - \arctan(T_N \omega)$$

• Représentation de Bode de $C(j\omega)$ pour : $T_i = 60$ s, $T_d = 15$ s et $N = 10$ (fig. 2.29 a et b)

$$|C(j\omega)| = \frac{1 + 900 \omega^2}{60 \omega \sqrt{1 + 2,25 \omega^2}} ; \text{ et } \arg(C(j\omega)) = 2 \arctan(30 \omega) - \pi/2 - \arctan(1,5 \omega)$$

Le diagramme de Bode est modifié par le filtre passe-bas à partir de :
 $\omega = N / T_d \Rightarrow \omega = 0,66$ rad/s

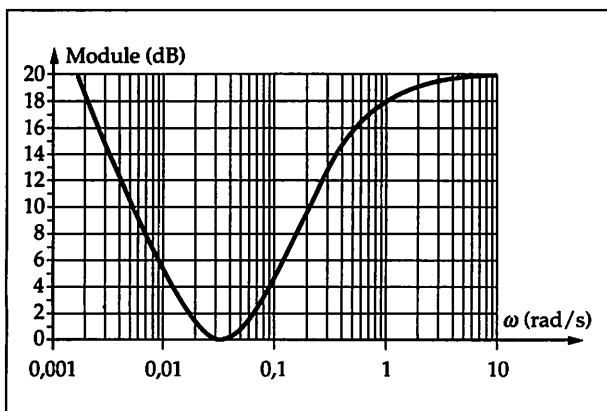


Figure 2.29 a

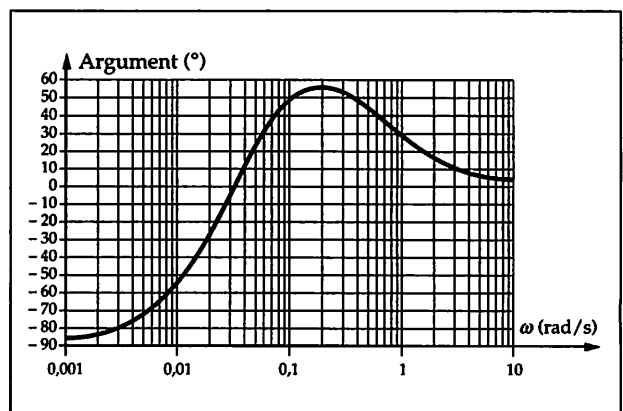


Figure 2.29 b

Exercice 8

1 Fonction de transfert $C(p)$ du correcteur

Le schéma proposé est celui d'un correcteur « compensateur de temps mort », encore appelé « prédicteur de Smith ».

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = K_1 (Tp + 1) \frac{K_2 / p}{1 + (K_2 / p)(1 - e^{-\tau p})}$$

2 Correcteur PI

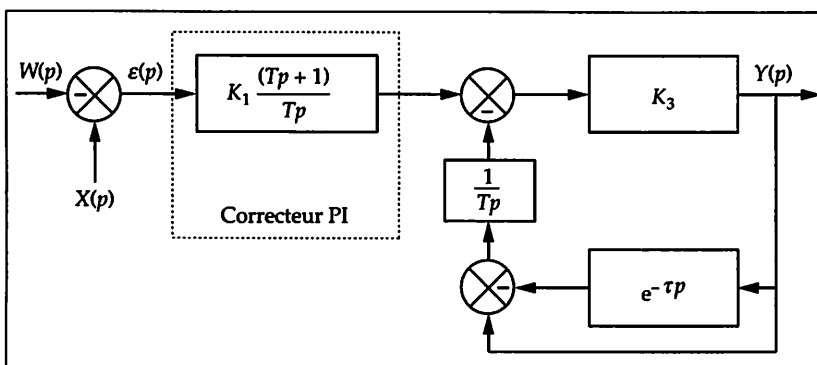


Figure 2.30

En posant $K_2 = K_3/T$, on peut écrire :

$$C(p) = \frac{K_1 (Tp + 1)}{Tp} \frac{K_3}{1 + \frac{K_3}{T} (1 - e^{-\tau p})}$$

Le premier facteur a bien la forme d'un correcteur PI et le schéma devient celui de la figure 2.30.

3 Organisation pratique du correcteur numérique (fig. 2.31)

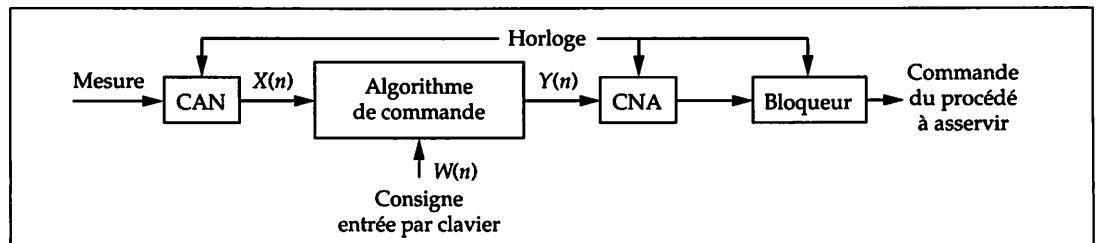


Figure 2.31

4 Condition de calcul

La somme $T_{co} + T_{ca}$ doit être bien inférieure à T_e (au moins 5 fois plus petite), sinon un retard pur est introduit dans la boucle d'asservissement et il faut en tenir compte.

5 Équation récurrente

Au schéma (fig. 2.30) correspond l'équation $C(p) = \frac{K_1 (Tp + 1)}{Tp} \frac{K_3}{1 + (K_3 / Tp)(1 - e^{-\tau p})}$

D'où l'équation différentielle : $T\dot{y}(t) + K_3 y(t) - K_3 y(t - \tau) = K_1 K_3 T \dot{\varepsilon}(t) + K_1 K_3 \varepsilon(t)$

Pour chaque terme de cette équation, on détermine le terme discret correspondant.

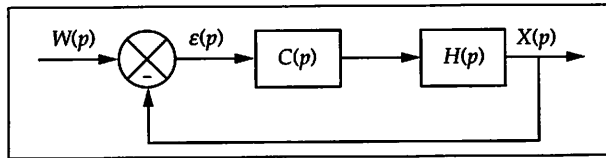
L'équation discrète est : $a_0 Y_n + a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-k} = b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1}$

avec $k = \tau / T_e$ et k nombre entier de périodes T_e ; $a_0 = T + K_3 T_e$; $a_1 = -T$; $a_2 = -K_3 T_e$; $b_0 = K_1 K_3 T + T_e$; $b_1 = -K_1 K_3 T$.

L'équation récurrente de la commande est : $Y_n = \frac{b_0}{a_0} \varepsilon_n + \frac{b_1}{a_0} \varepsilon_{n-1} - \frac{a_1}{a_0} Y_{n-1} - \frac{a_2}{a_0} Y_{n-k}$

Il reste à écrire le programme dans lequel les valeurs K_1 , K_3 , T et τ (ou k) devront être « accessibles » pour adapter les réglages au procédé contrôlé.

1. CONDITION DE STABILITÉ



$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p) H(p)}{1 + C(p) H(p)}$$

Figure 3.1. Système asservi à retour unitaire

Un système asservi à retour unitaire (fig. 3.1), de fonction de transfert $F(p)$ en chaîne fermée, est stable si son équation caractéristique $(1 + C(j\omega) H(j\omega) = 0)$ ne possède pas de zéro à partie réelle positive.

2. POINT CRITIQUE DE STABILITÉ

Lorsqu'un système asservi entre en oscillations (signal de sortie sinusoïdal) pour une entrée constante, ou même nulle, le système est en régime harmonique. On appelle ω_c la pulsation d'oscillation. L'équation caractéristique $C(j\omega_c) H(j\omega_c) + 1 = 0$ permet d'obtenir les conditions limites de stabilité :

$$|C(j\omega_c) H(j\omega_c)| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg}(C(j\omega_c) H(j\omega_c)) = -\pi$$

Ce régime est obtenu généralement pour une seule valeur du gain, notée G_c et appelée gain critique. Dans les courbes représentatives des fonctions de transfert, le point singulier de module 1 et d'argument $-\pi$ est appelé point critique.

3. CRITÈRES DE STABILITÉ

Des critères algébriques ou graphiques peuvent être choisis pour juger de la stabilité d'un système.

3.1. Critères algébriques

■ RÉSOLUTION ALGÈBRE

Appliquer les conditions limites de stabilité, c'est-à-dire :

- la condition d'amplitude : $|C(j\omega_c) H(j\omega_c)| = 1$
- la condition de phase : $\text{Arg}(C(j\omega_c) H(j\omega_c)) = -\pi$.

Déterminer la pulsation ω_c à partir de la condition de phase.

Calculer le gain critique G_c à l'aide de ω_c et de la condition d'amplitude.

■ CRITÈRE DE ROUTH

Ce critère permet de conclure à la stabilité, ou à l'instabilité, d'un système asservi à retour unitaire à partir des coefficients de son équation caractéristique.

Énoncé : soit un système asservi de fonction de transfert $F(p) = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Dén}(p)}$
avec $\text{Dén}(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0$

- Si l'un des coefficients a_i est nul, le système est instable.
- Si tous les coefficients a_i sont différents de zéro, il suffit qu'ils ne soient pas tous de même signe pour conclure à l'instabilité.
- Si tous les coefficients a_i sont de même signe, l'examen de la première colonne du tableau de Routh permet de conclure à la stabilité du système.

Pour établir le tableau de Routh :

Poser	p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
	p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
Calculer	p^{n-2}	A_1	A_2	A_3	
	p^{n-3}	B_1	B_2	B_3	
	...				
	p^2	M_1	M_2		
	p^1	N_1	N_2		
	p^0	O_1			

Tableau 3.1

$$\text{avec : } A_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, A_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, A_3 = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1}, B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}, O_1 = \frac{N_1 M_2 - M_1 N_2}{N_1}$$

Routh a établi que le système est stable si tous les termes de la première colonne sont de même signe. Dans le cas contraire, le nombre de changements de signe donne le nombre de pôles instables.

■ CRITÈRE DE JURY (SYSTÈME ASSERVI NUMÉRIQUE)

Ce critère permet de conclure à la stabilité, ou à l'instabilité, d'un système asservi à retour unitaire à partir des coefficients de son équation caractéristique écrite en Z .

Énoncé : soit un système asservi de fonction de transfert $F(Z) = \frac{\text{Num}(Z)}{\text{Dén}(Z)}$
avec $\text{Dén}(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + a_{n-2} Z^{n-2} + \dots + a_1 Z + a_0$

Il faut établir le tableau suivant :

		Z^0	Z^1	Z^2		Z^{n-j}		Z^{n-1}	Z^n	
Poser	1	a_0	a_1	a_2		a_{n-j}		a_{n-1}	a_n	
	2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_j		a_1	a_0	
Calculer	3	b_0	b_1	b_2		b_{n-j}		b_{n-1}		
	4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_j		b_0		
	5	c_0	c_1	c_2				c_{n-2}		
	6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}				c_0		
		$2n-5$	p_0	p_1	p_2		p_3			
		$2n-4$	p_3	p_2	p_1		p_0			
		$2n-3$	q_0	q_1	q_2					

Tableau 3.2

$$\text{avec : } b_j = a_0 a_j - a_n a_{n-j}; c_j = b_0 b_j - b_{n-1} b_{n-j-1}$$

$$q_0 = p_0 p_0 - p_3 p_3; q_1 = p_0 p_1 - p_3 p_2; q_2 = p_0 p_2 - p_3 p_1$$

Jury a établi que le système est stable si, pour $a_n > 0$, les trois conditions suivantes sont réunies :

- en remplaçant Z par 1 : le dénominateur Dén (1) est positif ;
- en remplaçant Z par -1 : le dénominateur Dén (-1) est positif pour n pair, le dénominateur Dén (-1) est négatif pour n impair.
- $|a_0| < a_n$; $|b_0| > |b_{n-1}|$; $|c_0| > |c_{n-2}|$; $|q_0| > |q_2|$.

3.2. Critère graphique

Les critères algébriques ne peuvent pas être appliqués à des systèmes complexes. Il est alors sage d'utiliser un critère graphique appelé règle du revers. Ce n'est pas le seul critère graphique, mais c'est le plus simple ! Celui-là permet de juger de la stabilité, ou de l'instabilité, d'un système asservi à partir de la courbe représentative de sa fonction de transfert en chaîne ouverte $C(j\omega)H(j\omega)$. Pour alléger l'écriture, on note : $A(j\omega) = C(j\omega)H(j\omega)$.

■ RÈGLE DU REVERS

Avec quelques adaptations, cette règle peut être appliquée dans le plan de Nyquist, dans le plan de Black ou encore dans les diagrammes de Bode.

• Dans le plan de Nyquist

Règle : un système asservi à retour unitaire est stable (fig. 3.2 a) si, en décrivant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en chaîne ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique (coordonnées $(-1, 0)$) à sa gauche. Il est instable (fig. 3.2 b) dans le cas contraire.

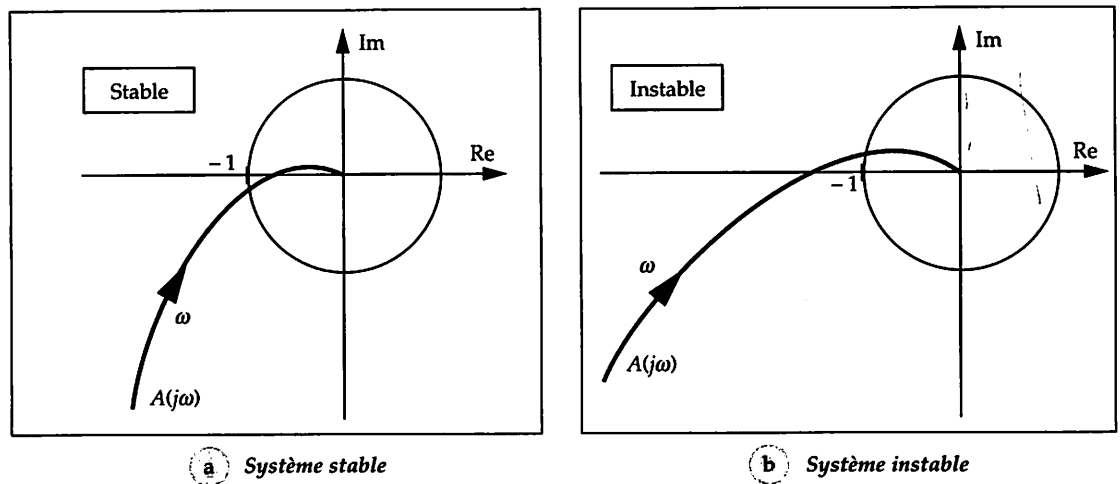


Figure 3.2. Lieu de Nyquist

• Dans le plan de Black

La représentation de la fonction de transfert dans le plan de Black est différente de celle dans le plan de Nyquist, aussi la règle du revers doit-elle être adaptée.

Règle : un système asservi à retour unitaire est stable (fig. 3.3 a) si, en décrivant la courbe représentative de sa fonction de transfert en chaîne ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique ($0 \text{ dB}, -180^\circ$) à sa droite. Il est instable (fig. 3.3 b) dans le cas contraire.

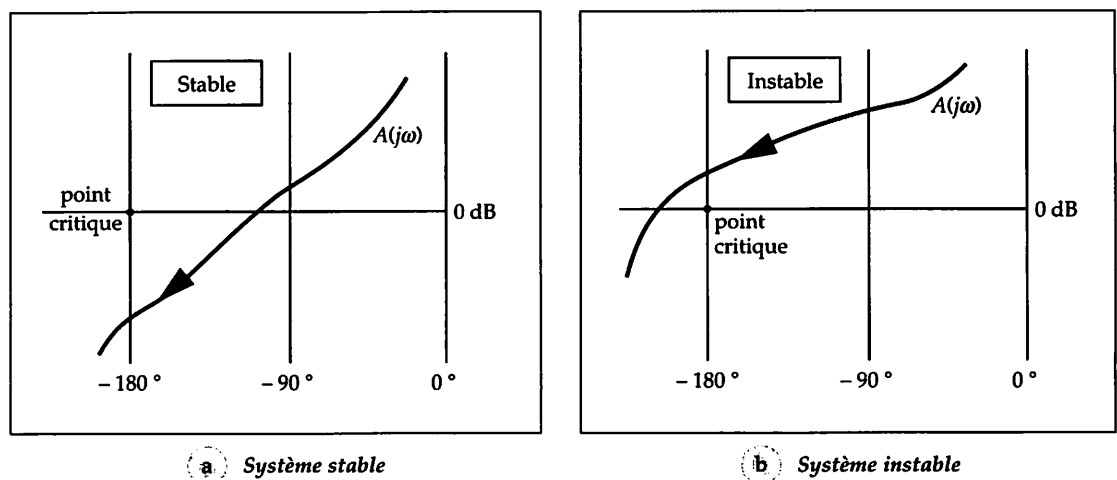


Figure 3.3. Lieu de Black

• Dans les diagrammes de Bode

Règle : un système asservi à retour unitaire est stable (fig. 3.4 a) si, pour la pulsation ω_c , la courbe du logarithme du module de $A(j\omega)$ passe en dessous du niveau 0 dB. Il est instable (fig. 3.4 b) dans le cas contraire.

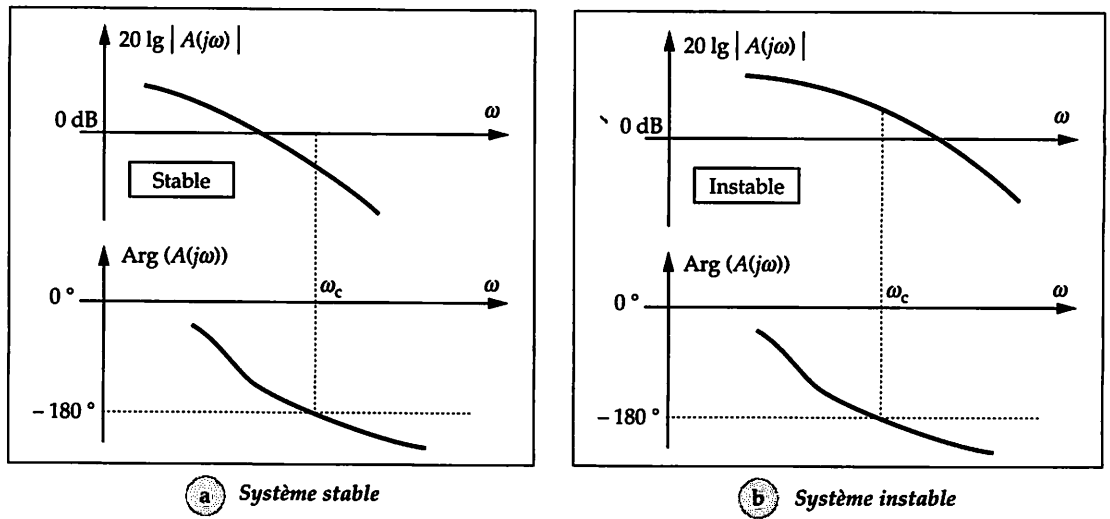


Figure 3.4. Diagramme de Bode

■ DEGRÉ DE STABILITÉ

Il ne suffit pas qu'un système soit stable, il faut qu'il soit suffisamment stable. En effet, l'évaluation de la fonction de transfert d'un système n'est pas toujours parfaite (petites constantes de temps ou légers temps morts négligés, hypothèses simplificatrices, incertitudes sur les paramètres ou les mesures lors des identifications). La courbe représentative de la fonction de transfert doit donc passer assez loin du point critique, et l'évaluation de cet « éloignement » est effectuée à l'aide de deux critères : la marge de gain et la marge de phase.

• Marge de gain, notée G_m : $G_m = 20 \lg \left[\frac{1}{|A(j\omega_\pi)|} \right] = 20 \lg \left[\frac{1}{A_\pi} \right] = 20 \lg A_m$.

• Marge de phase, notée φ_m : $\varphi_m = \pi + \text{Arg} [A(j\omega_1)]$ où ω_1 est la pulsation pour laquelle le module $|A(j\omega_1)| = 1$.

Un système est stable pour $G_m > 0$ ($A_m > 1$) et $\varphi_m > 0$.

Valeurs courantes des marges : $8 \text{ dB} < G_m < 15 \text{ dB}$ ($2,5 < A_m < 5,6$)

$40^\circ < \varphi_m < 60^\circ$

• Lecture graphique des marges de stabilité (fig. 3.5).

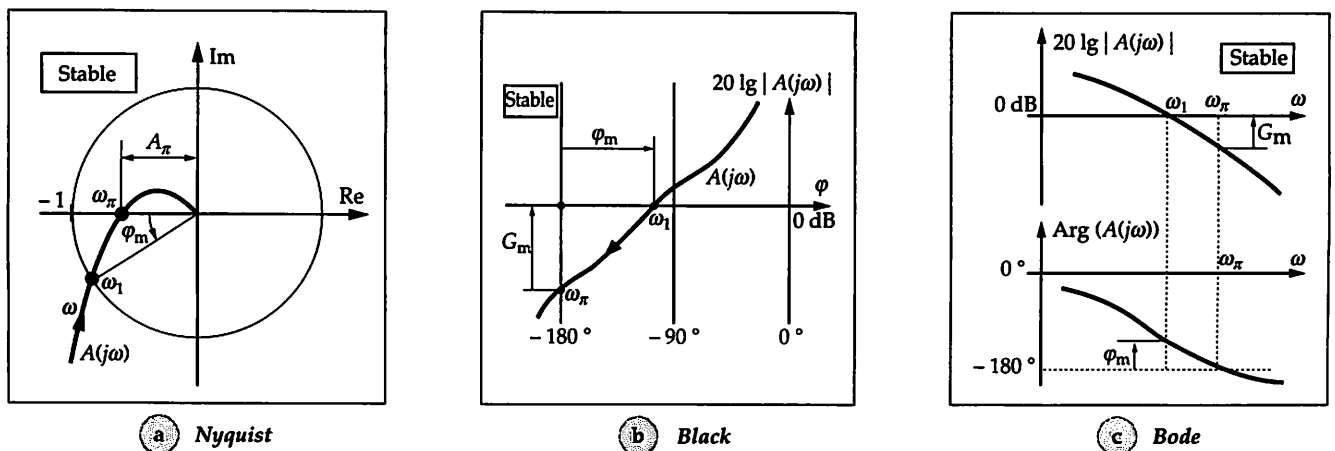


Figure 3.5. Marges de stabilité

EXERCICES

Convention : un système a une marge de phase ou une marge de gain uniquement s'il est régulier, c'est-à-dire si sa fonction de transfert en chaîne ouverte n'a que des pôles à partie réelle négative.

Exercice 1

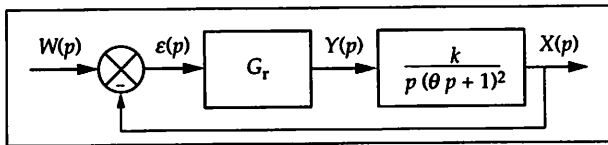


Figure 3.6

Un système asservi par un régulateur de gain G_r est représenté par le schéma fonctionnel de la figure 3.6. Par identification on a obtenu : $k = 0,08 \text{ s}^{-1}$ et $\theta = 20 \text{ s}$.

- 1 Calculer le module et l'argument de la fonction de transfert en chaîne ouverte notée $A(p)$.
- 2 Tracer la courbe de Nyquist de $A(p)$ pour $G_r = 1$.
- 3 Le système bouclé est-il stable ? Pourquoi ?

On fixe maintenant : $G_r = 0,4$.

- 4 Tracer la courbe de Nyquist de $A(p)$.
- 5 Mesurer le module A_r de $A(j\omega)$ pour $\varphi = -\pi$. Quelle est alors la marge de gain G_m ? Mesurer la marge de phase φ_m . Ce réglage assure-t-il une stabilité suffisante ?

Exercice 2

Un procédé doit être contrôlé par un régulateur de fonction de transfert $C(p)$ (fig. 3.7).

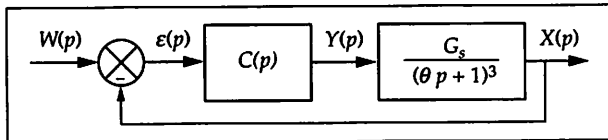


Figure 3.7

L'identification étant délicate car les signaux reçus sont entachés de bruits, elle est poursuivie afin d'améliorer la connaissance de G_s et de θ . Cependant, un modèle a été définitivement choisi. Le régulateur $C(p)$ est un PI de structure somme, c'est-à-dire : $C(p) = G_r + K_i/p$.

- 1 *A priori*, le domaine de stabilité est-il limité ? Pourquoi ?
 - 2 À l'aide du critère de Routh, déterminer les valeurs limites de G_r et K_i pour maintenir stable le système asservi.
 - 3 Les résultats numériques de l'identification sont les suivants : $G_s = 1,6$ et $\theta = 2 \text{ min}$. Une proposition de pré-réglage des actions du régulateur est : $G_r = 3$ et $K_i = 1 \text{ rep/min}$.
- ▷ G_s étant connu à $\pm 20 \%$, que penser de ces pré-réglages pour ce qui concerne la stabilité ?

Exercice 3

Un échangeur thermique a été identifié grâce à la méthode de Broïda. Il doit être contrôlé par un régulateur de fonction de transfert $C(p)$ comme le montre le schéma-bloc suivant (fig. 3.8).

On donne : $G_s = 2$; $\theta = 10 \text{ s}$ et $\tau = 2,5 \text{ s}$.

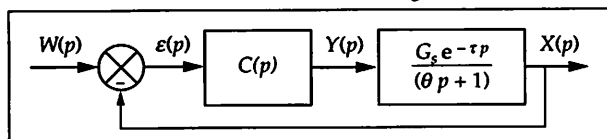


Figure 3.8

Le régulateur est de structure série :

$$C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$$

Le régulateur fonctionne en action proportionnelle seule avec $G_r = 1$.

- 1 Tracer la courbe de Nyquist de la fonction de transfert en chaîne ouverte de ce système. À partir de la courbe obtenue, trouver la valeur G_r à afficher pour assurer une marge de gain $G_m = 6$ dB.
- 2 Le régulateur est maintenant à action proportionnelle et intégrale.
 - ▷ Tracer la courbe de Nyquist de ce système pour $G_r = 1$ et $T_i = 2\theta$. En utilisant la courbe obtenue, trouver la valeur G_r à afficher pour assurer une marge de gain $G_m = 6$ dB.
 - ▷ Tracer la courbe de Nyquist pour $G_r = 1$ et $T_i = \theta$. Trouver la valeur G_r à afficher pour assurer une marge de gain $G_m = 6$ dB.
 - ▷ Tracer la courbe de Nyquist pour $G_r = 1$ et $T_i = \theta/2$. Trouver la valeur G_r à afficher pour assurer une marge de gain $G_m = 6$ dB.
 - ▷ Que penser de l'influence de l'action intégrale sur la stabilité de ce système ?
- 3 Le régulateur est maintenant à action proportionnelle, intégrale et dérivée avec $G_r = 1$, $T_i = \theta$ et $T_d = \tau/5$.
 - ▷ Tracer la courbe de Nyquist de ce système. En utilisant la courbe obtenue, trouver la valeur G_r à afficher pour assurer une marge de gain $G_m = 6$ dB.
 - ▷ Tracer la courbe de Nyquist pour $G_r = 1$, $T_i = \theta$ et $T_d = 0,5\tau$. En utilisant la courbe obtenue, trouver la valeur G_r à afficher pour assurer une marge de gain $G_m = 6$ dB.
 - ▷ Que penser de l'influence de l'action dérivée sur la stabilité de ce système ?

Exercice 4

Un régulateur de structure série, de fonction de transfert $C(p)$, contrôle un procédé de fonction de transfert $H(p)$.

$$H(p) = \frac{0,06}{p(8p+1)} \text{ et } C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) (1 + T_d p)$$

Les valeurs suivantes ont été adoptées : $G_r = 5$ et $T_i = 8$ min.

- 1 Tracer la courbe de Nyquist de la fonction de transfert en chaîne ouverte de ce système asservi pour les valeurs suivantes de T_d : 0 min, 1 min, 2 min et 4 min.
- 2 Que peut-on conclure quant à l'utilité de l'action dérivée pour la stabilité de ce système asservi ?

Exercice 5

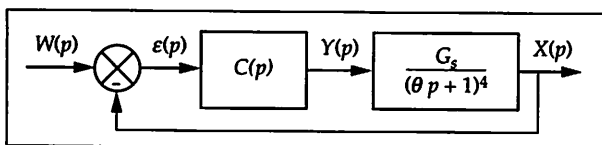


Figure 3.9

On désire étudier les marges de stabilité du système asservi schématisé figure 3.9 pour lequel on donne $G_s = 2,5$ et $\theta = 20$ s.

- 1 Tracer la courbe représentative de ce système dans le plan de Black pour $C(p) = G_r = 1$. Relever la marge de gain G_m et la marge de phase φ_m .
- 2 Reprendre la question 1, pour $C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ avec $G_r = 1$ et $T_i = 3\theta$.
- 3 Reprendre la question 1, pour $C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) (1 + T_d p)$ avec $G_r = 1$, $T_i = 3\theta$ et $T_d = \theta$.
- 4 Des régulateurs proposés aux questions précédentes, lequel apporte le moins de stabilité : P, PI ou PID ?
- 5 En gardant $T_i = 3\theta$ et $T_d = \theta$, quelle valeur de G_r faut-il choisir pour avoir une marge de phase φ_m de 45° ?

Exercice 6

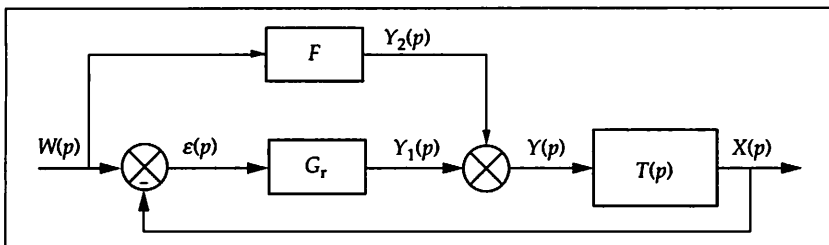


Figure 3.10

- ▷ Déterminer la valeur maximale de G_r qui assure la stabilité.

Le régulateur, étudié dans l'exercice 6 du chapitre 2 – Régulateur industriel, est associé à un procédé de fonction de transfert $T(p)$

$$(fig. 3.10). \text{ On a : } T(p) = \frac{G_s}{(\theta p + 1)^3}$$

avec $G_s = 0,25$, $\theta = 18$ s et $F = 2$.

N Exercice 7

Le niveau d'acide d'un réservoir doit être contrôlé par un régulateur numérique de fonction de transfert $C(Z)$. Le procédé est identifié et modélisé par la fonction de transfert échantillonnée-bloquée $H_b(Z)$.

$$C(Z) = G_r \text{ et } H_b(Z) = \frac{k T_e Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \text{ avec } T_e : \text{ période d'échantillonnage.}$$

- 1 Donner le schéma-bloc représentant ce système contrôlé par le régulateur.
- 2 Rechercher la ou les racines de l'équation caractéristique, puis donner la ou les valeurs limites de G_r pour ce qui concerne la stabilité.
- 3 Appliquer le critère du revers, et montrer que la valeur limite de G_r est bien celle trouvée à la question 2.
- 4 La valeur numérique de k est $0,05 \text{ s}^{-1}$. Le gain du régulateur G_r est 10. Quelle est alors la valeur limite de la période d'échantillonnage pour maintenir la stabilité ?

N Exercice 8

Un système d'amortissement mécanique destiné à être asservi numériquement par automate programmable a pour fonction de transfert $H_b(Z)$, bloqueur d'ordre zéro compris :

$$H_b(Z) = \frac{X(Z)}{Y(Z)} = \frac{b_0 Z^{-1} + b_1 Z^{-2}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}} \text{ (où } X : \text{ mesure, } Y : \text{ commande)}$$

Ce système est asservi par un correcteur $C(Z)$ tel que : $C(Z) = \frac{Y(Z)}{\varepsilon(Z)}$
 ε : écart entre X et la consigne W .

$$\text{Application numérique : } H_b(Z) = \frac{0,1910 Z^{-1} + 0,2799 Z^{-2}}{1 - 0,7753 Z^{-1} + 0,3263 Z^{-2}}$$

- 1 Établir le schéma-bloc correspondant au système asservi.
- 2 Pour $C(Z) = c_0$ ($c_0 > 0$), trouver la valeur limite de stabilité de c_0 à l'aide du critère de Jury.
- 3 Pour $C(Z) = \frac{c_0}{1 - Z^{-1}}$, quelle est la valeur limite de stabilité de c_0 ?
- 4 Pour $C(Z) = \frac{Y(Z)}{\varepsilon(Z)} = \frac{c_0 + c_1 Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}$, étudier le domaine de stabilité en fonction de c_0 et c_1 .
- 5 Voici quelques couples de réglage :

c_0	-0,2	-0,2	0,5	0,5	0,5	0,8	0,8	1,5
c_1	0,5	0,2	0,5	0,2	-0,1	0,5	-0,3	-1

- ▷ Dans ce tableau, quels sont les couples $(c_0 ; c_1)$ à exclure pour des raisons de stabilité ?

Exercice 1

1 Module et argument de $A(j\omega)$

La fonction de transfert en chaîne ouverte est : $A(p) = \frac{G_r k}{p(\theta p + 1)^2}$

Le module est : $|A(j\omega)| = \frac{G_r k}{\omega(\theta^2 \omega^2 + 1)}$

L'argument est : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan(\theta \omega)$

2 Courbe de Nyquist de $A(j\omega)$

Dans le plan de Nyquist avec $G_r = 1$, on obtient la courbe représentée figure 3.11.

3 Stabilité

Le système bouclé est stable puisque si la courbe représentative de $A(j\omega)$ est parcourue dans le sens des pulsations croissantes, le point critique $(-1, 0)$ reste à gauche. On peut dire aussi que le système bouclé est stable car la marge de gain est positive, ou la marge de phase est positive.

4 Nouvelle courbe de Nyquist de $A(j\omega)$

Dans le plan de Nyquist avec $G_r = 0,4$, on obtient la courbe représentée figure 3.12.

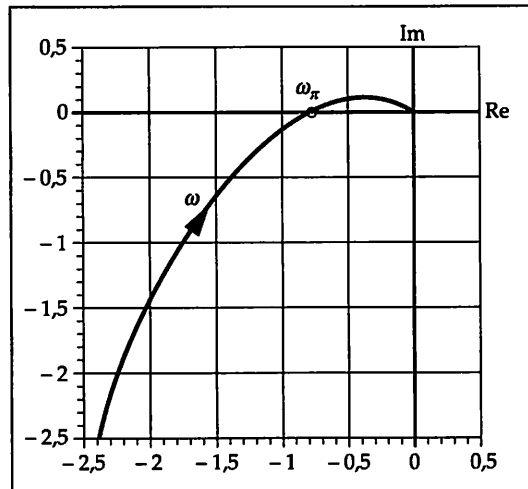


Figure 3.11

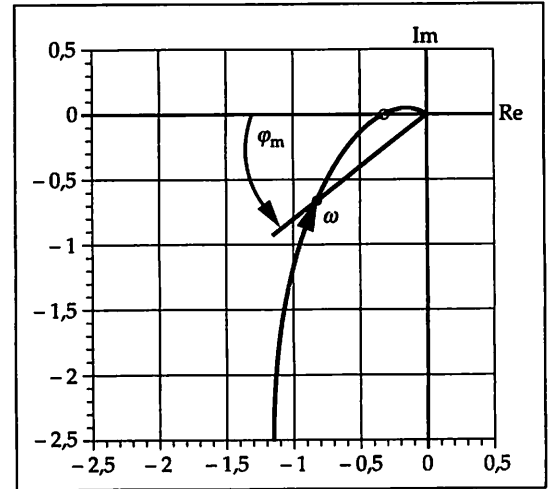


Figure 3.12

5 Marge de gain et marge de phase

Le module est $|A(j\omega)| = A_\pi = 0,32$

La marge de gain est donc : $G_m = 20 \lg(1/0,32) \Rightarrow G_m = 9,9 \text{ dB}$

La marge de phase mesurée est : $\varphi_m = 35^\circ$ (à la pulsation $\omega = 0,026 \text{ rad/s}$).

La marge de gain obtenue est correcte, mais la marge de phase peut s'avérer un peu juste surtout si tous les temps morts ou constantes de temps (même minimales) n'ont pas été pris en compte.

Exercice 2

1 Domaine de stabilité

La stabilité de ce système est limitée puisque le degré du dénominateur de la fonction de transfert en chaîne ouverte est supérieur à 2.

2 Critère de Routh

La fonction de transfert en chaîne ouverte $A(p)$ est :

$$A(p) = \left(G_r + \frac{K_i}{p} \right) \frac{G_s}{(\theta p + 1)^3} = \frac{G_r p + K_i}{p} \frac{G_s}{(\theta p + 1)^3}$$

$$A(p) = \frac{(G_r p + K_i) G_s}{p(\theta p + 1)^3 + (G_r p + K_i) G_s} = \frac{(G_r p + K_i) G_s}{\theta^3 p^4 + 3 \theta^2 p^3 + 3 \theta p^2 + (G_s G_r + 1) p + K_i G_s}$$

Le tableau du critère de Routh est établi à partir du dénominateur de $A(p)$ (tableau 3.3).

p^4	θ^3	3θ	$K_i G_s$
p^3	$3\theta^2$	$G_s G_r + 1$	0
p^2	α	$K_i G_s$	
p^1	β	0	
p^0	$K_i G_s$		

Tableau 3.3

$$\text{avec : } \alpha = \frac{3\theta^2 \times 3\theta - (G_s G_r + 1)\theta^3}{3\theta^2}$$

$$\text{et : } \beta = \frac{(3\theta - (G_s G_r + 1)\theta/3)(G_s G_r + 1) - 3\theta^2 K_i G_s}{3\theta - (G_s G_r + 1)\theta/3}$$

Tous les termes de la première colonne doivent être du même signe pour que le système soit stable. Comme θ^3 , $3\theta^2$ et $K_i G_s$ sont positifs, il faut que α et β soient positifs.

$$\alpha = \frac{3\theta^2 \times 3\theta - (G_s G_r + 1)\theta^3}{3\theta^2} > 0 \quad \text{soit : } G_r < 8/G_s \quad \textcircled{1}$$

$$\beta > 0 \quad \text{soit : } \frac{3(G_s G_r + 1)}{\theta G_s} - \frac{(G_s G_r + 1)^2}{3\theta G_s} > K_i \quad \textcircled{2}$$

3 Application numérique

La valeur proposée $G_r = 3$ est bien inférieure à la limite $\textcircled{1}$ ($8/G_s = 5$). La valeur $K_i = 1$ rep/min est satisfaisante pour $G_s = 1,6$ puisque la relation $\textcircled{2}$ obtenue est $K_i < 1,94$ rep/min.

Si l'on admet une incertitude de 20 % sur G_s alors $1,28 < G_s < 1,92$ et les relations respectives sont : pour $G_s = 1,28$, $K_i < 2,62$ rep/min et pour $G_s = 1,92$, $K_i < 1,31$ rep/min. Si la valeur de G_s est maximale, la valeur $K_i = 1$ rep/min est un peu forte du point de vue de la stabilité puisque le système est alors proche de l'instabilité. Si l'incertitude sur G_s ne peut pas être réduite, il vaut mieux diminuer la valeur de K_i par sécurité.

Exercice 3

1 Courbe de Nyquist

Le module est : $|A(j\omega)| = \frac{G_s G_r}{\sqrt{\theta^2 \omega^2 + 1}}$ et l'argument est : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -\tau \omega - \arctan(\theta \omega)$

La courbe de Nyquist pour $G_r = 1$ est représentée figure 3.13.

La marge de gain mesurée est : $G_m = 20 \lg(1/0,3) = 10,45 \text{ dB}$.

La marge de phase est ici supérieure à 90° .

Pour obtenir une nouvelle marge de gain $G'_m = 20 \lg(1/A'_r) = 6 \text{ dB}$, il faut :

$G'_r = A'_r / 0,3$, soit un nouveau gain : $G'_r = 1,67$

2 Action proportionnelle et intégrale

Le module est : $|A(j\omega)| = \frac{G_s G_r \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega \sqrt{\theta^2 \omega^2 + 1}}$

et l'argument est : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -\pi/2 - \tau \omega - \arctan(\theta \omega) + \arctan(T_i \omega)$

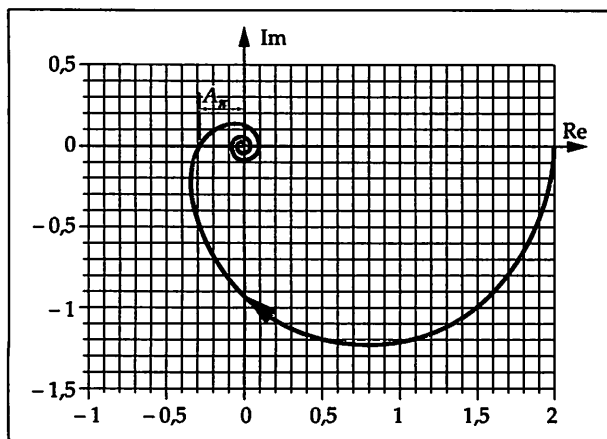


Figure 3.13

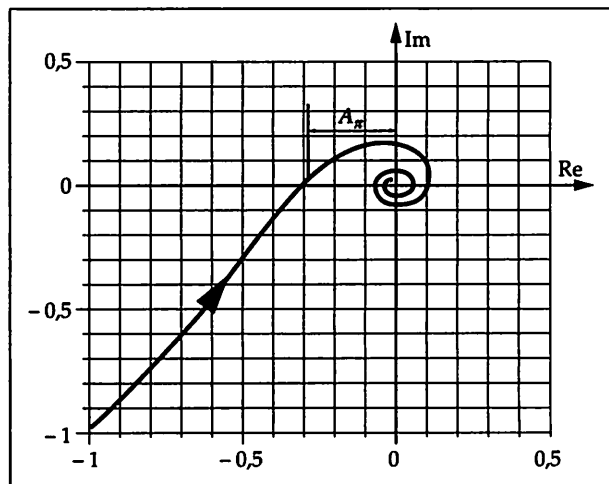


Figure 3.14

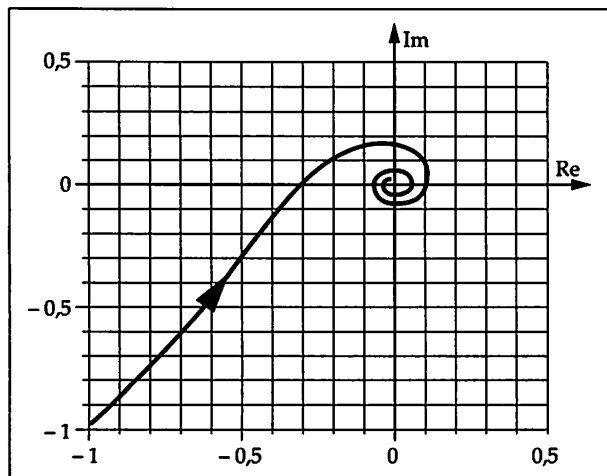


Figure 3.15

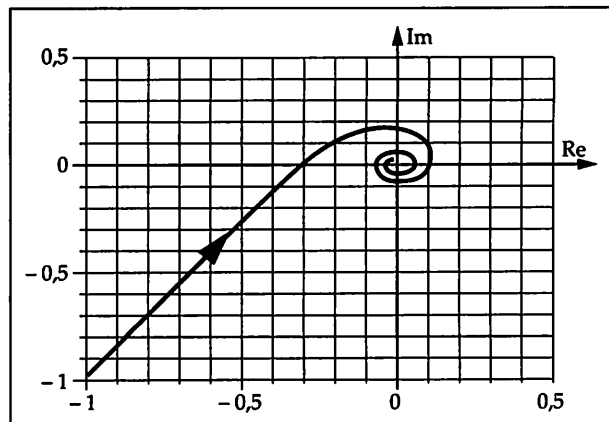


Figure 3.16

▷ **Courbe de Nyquist pour $G_r = 1$ et $T_i = 2\theta$ (fig. 3.14)**

La marge de gain mesurée est $G_m = 20 \lg (1/A_\pi) = 20 \lg (1/0,32) = 9,90$ dB.

On note que la marge de phase est ici d'environ 45° .

Pour obtenir une nouvelle marge de gain $G'_m = 20 \lg (1/A'_\pi) = 6$ dB, il faut :

$$G'_r = A'_\pi / 0,32, \text{ soit un nouveau gain : } G'_r = 1,56$$

▷ **Courbe de Nyquist pour $G_r = 1$ et $T_i = \theta$ (fig. 3.15)**

La marge de gain mesurée est $G_m = 20 \lg (1/0,33) = 9,63$ dB.

Attention, la marge de phase est ici inférieure à 45° !

Pour obtenir une nouvelle marge de gain $G'_m = 20 \lg (1/A'_\pi) = 6$ dB, il faut :

$$G'_r = A'_\pi / 0,33, \text{ soit un nouveau gain : } G'_r = 1,51$$

▷ **Courbe de Nyquist pour $G_r = 1$ et $T_i = \theta/2$ (fig. 3.16)**

La marge de gain mesurée est $G_m = 20 \lg (1/0,38) = 8,40$ dB.

Attention, la marge de phase est ici inférieure à 45° !

Pour obtenir une nouvelle marge de gain $G'_m = 20 \lg (1/A'_\pi) = 6$ dB, il faut :

$$G'_r = A'_\pi / 0,38, \text{ soit un nouveau gain : } G'_r = 1,32$$

▷ **Influence de l'action intégrale**

La marge de gain est de plus en plus faible lorsque le temps T_i est de plus en plus petit. Pour T_i faible devant la constante de temps du système, l'action intégrale est forte et la stabilité est moins bonne (marge de gain plus faible).

3 Action proportionnelle, intégrale et dérivée

$$\text{Le module est : } |A(j\omega)| = \frac{G_s G_r \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega \sqrt{\theta^2 \omega^2 + 1}}$$

$$\text{L'argument est : } \text{Arg}(A(j\omega)) = -\pi / 2 - \tau \omega - \arctan(\theta \omega) + \arctan(T_i \omega) + \arctan(T_d \omega)$$

▷ **Courbe de Nyquist pour $G_r = 1$, $T_i = \theta$ et $T_d = \tau/5$ (fig. 3.17)**

La marge de gain mesurée est $G_m = 20 \lg (1/0,23) = 12,76$ dB.

Attention, la marge de phase est encore inférieure à 45° !

Pour obtenir une nouvelle marge de gain $G'_m = 20 \lg (1/A'_\pi) = 6$ dB, il faut :

$$G'_r = A'_\pi / 0,23, \text{ soit un nouveau gain : } G'_r = 2,17$$

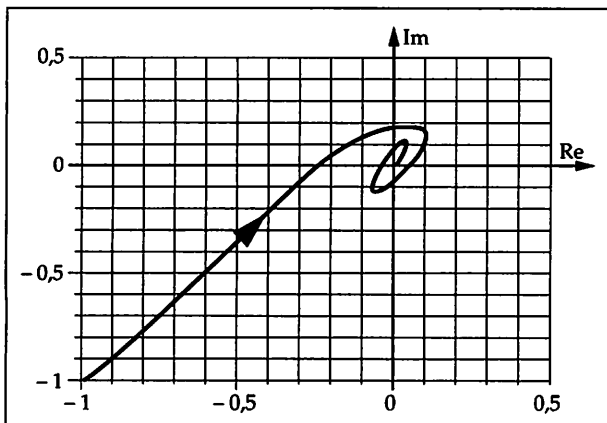


Figure 3.17

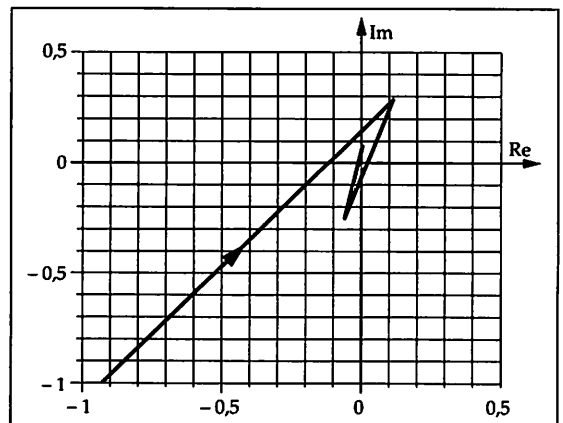


Figure 3.18

▷ **Courbe de Nyquist pour $G_r = 1$, $T_i = \theta$ et $T_d = 0,5\tau$ (fig. 3.18)**

La marge de gain mesurée est $G_m = 20 \lg(1/0,11) = 19,17$ dB.

La marge de phase est encore inférieure à 45° .

Pour obtenir une nouvelle marge de gain $G'_m = 20 \lg(1/A'_r) = 6$ dB, il faut :

$$G'_r = A'_r / 0,11, \text{ soit un nouveau gain : } G'_r = 4,54$$

▷ **Influence de l'action dérivée**

Lorsqu'elle est correctement dosée, l'action dérivée est bénéfique puisqu'elle permet de limiter le rôle néfaste du temps mort τ sur la stabilité. Cette action permet d'augmenter légèrement le gain G_r en maintenant une marge de gain suffisante. En présence d'un temps mort (ou retard pur), si le signal de mesure n'est pas fortement perturbé par du bruit, l'action dérivée est nécessaire pour obtenir une réponse dynamique avec une stabilité suffisante.

Exercice 4

1 **Courbe de Nyquist**

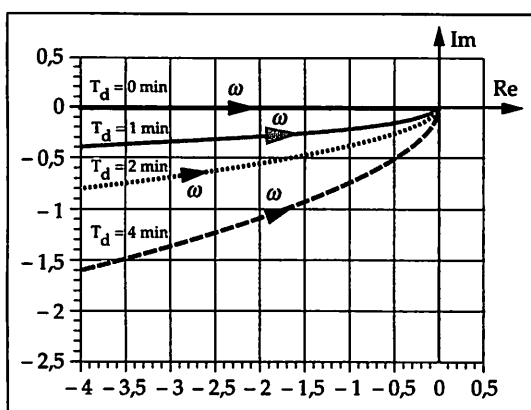


Figure 3.19

$$\text{Le module est : } |A(j\omega)| = \frac{0,06 G_r \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega \sqrt{8^2 \omega^2 + 1}}$$

$$\text{soit : } |A(j\omega)| = \frac{0,0375 \sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}}{\omega} \text{ et l'argument est :}$$

$$\text{Arg}(A(j\omega)) = -(\pi/2) - \arctan(8\omega) + \arctan(T_i \omega) + \arctan(T_d \omega)$$

$$\text{soit : } \text{Arg}(A(j\omega)) = -(\pi/2) + \arctan(T_d \omega)$$

2 **Conclusion (fig.3.19)**

Sans action dérivée ($T_d = 0$ min), le système est instable. Il est donc évident que pour un tel système bouclé, comportant deux intégrations, une action dérivée est absolument indispensable. Il faut cependant en limiter l'influence puisque les bruits et parasites (à partir d'une certaine fréquence) sont alors amplifiés. En outre, pour un asservissement (changement de consigne), il faut savoir que les effets de saturation de l'organe réglant, dus à une action dérivée importante, entraînent une diminution de la stabilité (la saturation étant l'un des phénomènes de non-linéarité).

Exercice 5

1 **Lieu de Black (action P)**

On calcule la fonction de transfert en chaîne ouverte $A(p) = \frac{G_s G_r}{(\theta p + 1)^4}$

$$\text{Le module est : } |A(j\omega)| = \frac{G_s G_r}{(\theta^2 \omega^2 + 1)^2} \Rightarrow G_{dB} = 20 \lg |A(j\omega)| = 20 \lg \left[\frac{2,5}{(400 \omega^2 + 1)^2} \right]$$

L'argument est : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -4 \arctan(\theta\omega) \Rightarrow \varphi = \text{Arg}(A(j\omega)) = -4 \arctan(20\omega)$

Le lieu de Black est représenté par la courbe 1 (fig. 3.20).

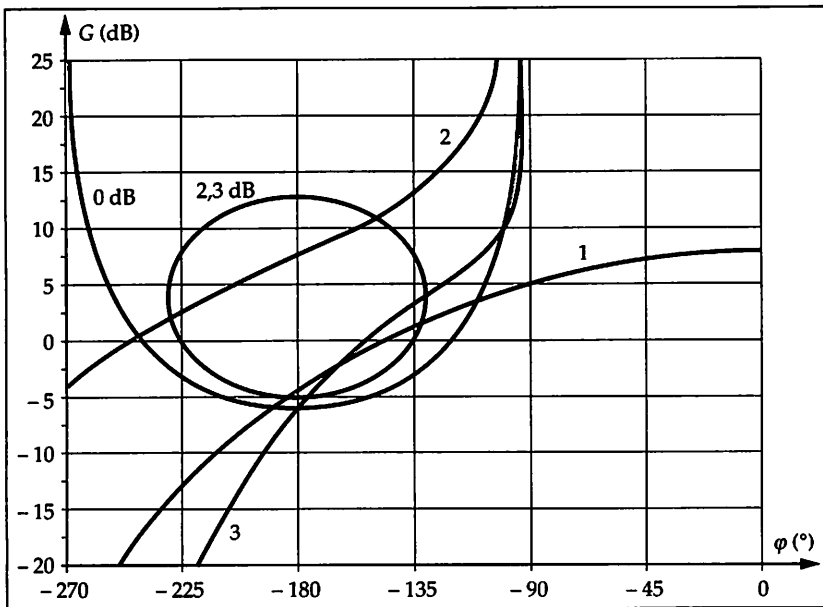
On obtient alors graphiquement : $G_m = 4,9$ dB et $\varphi_m = 36^\circ$

Le système asservi est stable, mais la marge de gain est faible par rapport aux valeurs généralement admises ($8 \text{ dB} < G_m < 15 \text{ dB}$).

2 Lieu de Black (action PI)

On calcule la fonction de transfert en chaîne ouverte : $A(p) = \frac{G_s G_r (T_i p + 1)}{T_i p (\theta p + 1)^4}$

Le module est : $|A(j\omega)| = \frac{G_s G_r \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega (\theta^2 \omega^2 + 1)^2} \Rightarrow G_{dB} = 20 \lg \left[\frac{2,5 \sqrt{3600 \omega^2 + 1}}{60\omega (400 \omega^2 + 1)^2} \right]$



L'argument est : $\text{Arg}(A(j\omega))$

$$= -4 \arctan(\theta\omega) + \arctan(T_i \omega) - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{Arg}(A(j\omega))$$

$$= -4 \arctan(20\omega) + \arctan(60\omega) - \frac{\pi}{2}$$

Le lieu de Black est représenté par la courbe 2 (fig. 3.20).

On obtient alors graphiquement :

$$G_m = -7,3 \text{ dB et } \varphi_m = -56^\circ$$

Le système asservi est instable car les deux marges sont négatives (il suffit qu'une seule des deux marges soit négative pour pouvoir conclure à l'instabilité du système).

Figure 3.20

3 Lieu de Black (action PID)

On calcule la fonction de transfert en chaîne ouverte : $A(p) = \frac{G_s G_r (T_i p + 1)(T_d p + 1)}{T_i p (\theta p + 1)^4}$

Le module est : $|A(j\omega)| = \frac{G_s G_r \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1}}{T_i \omega (\sqrt{\theta^2 \omega^2 + 1})^3} \Rightarrow G_{dB} = 20 \lg \left[\frac{2,5 \sqrt{1600 \omega^2 + 1}}{60\omega (400 \omega^2 + 1)^{3/2}} \right]$

L'argument est : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -3 \arctan(\theta\omega) + \arctan(T_i \omega) - \pi/2$

$$\Rightarrow \varphi = \text{Arg}(A(j\omega)) = -3 \arctan(20\omega) + \arctan(60\omega) - \pi/2$$

Le lieu de Black est représenté par la courbe 3 (fig. 3.20).

On obtient alors graphiquement : $G_m = 6,8 \text{ dB et } \varphi_m = 30^\circ$

4 P, PI ou PID ?

Le plus mauvais des trois réglages est celui du régulateur PI puisqu'il conduit à l'instabilité du système. En diminuant la valeur de G_r , soit par exemple avec $G_r = 0,4$, le système devient stable avec une marge de gain sensiblement égale à celle obtenue avec soit le régulateur P, soit le régulateur PID.

5 Valeur de G_r

La marge de phase actuelle est de 30° pour $G_r = 1$. Afin d'améliorer la stabilité il faut faire glisser le lieu de Black (courbe 3, fig. 3.20) vers le bas jusqu'à obtenir une marge de phase $\varphi_m = 45^\circ$. La translation effectuée vers le bas est d'environ 2,7 dB, le module G_{dB} doit être diminué de 2,7 dB.

Il faut donc que l'ancienne valeur de G_r soit multipliée par $10^{-2,7/20} = 0,73$, soit $G_r = 1 \times 0,73$.

Le réglage permettant d'obtenir une marge de phase d'environ 45° est donc :

$$G_r = 0,73 \quad T_i = 60 \text{ s} \quad T_d = 20 \text{ s}$$

Attention, ce réglage n'est pas unique, d'autres valeurs de G_r , T_i et T_d peuvent conduire à la même marge de phase ! Lors du réglage définitif, il faudra prendre en compte d'autres critères (voir chapitre 5 – Réglage).

Exercice 6

On détermine la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$:

$$X(p) = G_r T(p) W(p) - G_r T(p) X(p) + F T(p) W(p)$$

$$\text{soit : } F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{(G_r + F) G_s}{(\theta p + 1)^3 + G_r G_s} = \frac{(G_r + F) G_s}{\theta^3 p^3 + 3 \theta^2 p^2 + 3 \theta p + (G_s G_r + 1)}$$

Le tableau du critère de Routh est le suivant :

p^3	θ^3	3θ
p^2	$3\theta^2$	$G_s G_r + 1$
p^1	α	0
p^0	$1 + G_s G_r$	

Tableau 3.4

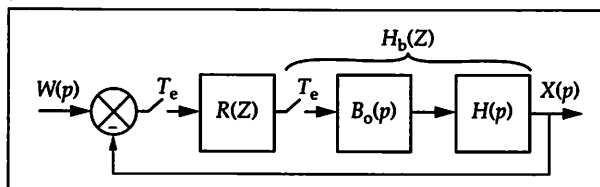
$$\text{avec : } \alpha = \frac{9\theta^3 - (G_s G_r + 1) \theta^3}{3 \theta^2}$$

θ , G_r et G_s étant positifs, la stabilité est assurée si $\alpha > 0$, soit : $G_r < 8/G_s$

Pour que l'erreur statique soit nulle (voir chapitre 4 – Précision), il faut prendre $G_r = 4$, et la stabilité est alors assurée.

Exercice 7

1 Schéma-bloc du système asservi



Il est donné figure 3.21.

Figure 3.21

2 Étude de la stabilité par la recherche des racines

On détermine la fonction de transfert en chaîne fermée $F(Z)$:

$$F(Z) = \frac{X(Z)}{W(Z)} = \frac{G_r k T_e Z^{-1}}{1 - Z^{-1} + G_r k T_e Z^{-1}}$$

L'équation caractéristique est : $1 + Z^{-1} + G_r k T_e Z^{-1} = 0$

On obtient donc une seule racine : $Z' = 1 - G_r k T_e$

Pour que le système soit stable, il faut que le module de Z' soit inférieur à 1, donc :

$$0 < G_r < 2/(k T_e)$$

3 Critère du revers

Le dénominateur $D(Z)$ de $F(Z)$ est étudié dans le plan complexe en remplaçant Z par $T_e p$ puis p par $j\omega$: $D(j\omega) = 1 + (G_r k T_e - 1) e^{-j\omega T_e} = 1 + A(j\omega)$.

Le module de $A(j\omega)$ est : $|A(j\omega)| = G_r k T_e - 1$, et l'argument de $A(j\omega)$ est : $\varphi = -\omega T_e$.

Pour que le système asservi soit stable, le module doit être inférieur à 1, il faut donc :

$$0 < G_r < 2/(k T_e)$$

On retrouve bien le résultat de la question 2.

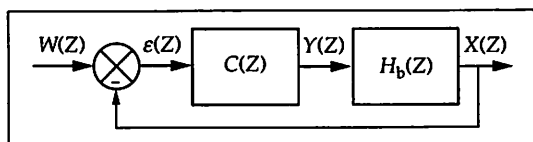
4 Valeur limite de la période d'échantillonnage

Il est évident que la limite de T_e est alors $T_e < 2/(k G_r)$, soit ici $T_e < 4 \text{ s}$. La sécurité incite à prendre une valeur bien inférieure, soit par exemple $T_e = 0,5 \text{ s}$, si le matériel le permet.

Exercice 8

1 Schéma-bloc du système asservi

$H_b(Z)$ est un système qui correspond en analogique à un second ordre dont les caractéristiques sont : $G_s = 0,8546$, $\xi = 0,56$, $\omega_n = 0,5 \text{ rad/s}$, $T_e = 2 \text{ s}$.



Comme $Z^{-1} = 1/Z$, le schéma-bloc est identique, qu'il soit exprimé en Z ou en Z^{-1} (fig. 3.22).

Figure 3.22

2 Valeur limite de stabilité de c_0 pour $C(Z) = c_0$

$C(Z) = c_0$: c'est un régulateur à action proportionnelle.

On détermine la fonction de transfert en chaîne fermée $F(Z)$:

$$F(Z) = \frac{X(Z)}{W(Z)} = \frac{c_0 b_1 + b_0 Z}{c_0 b_1 + c_0 b_0 Z + Z^2 + a_1 Z + a_2}$$

$$D(Z) = Z^2 + (a_1 + c_0 b_0) Z + (a_2 + c_0 b_1), \text{ soit : } D(Z) = \alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0$$

$$D(Z) = Z^2 + (-0,7753 + 0,1910 c_0) Z + (0,3263 + 0,2799 c_0)$$

Le critère de Jury impose :

- $D(1) > 0$, soit $D(1) = 0,4709 c_0 + 0,5510 > 0$, soit : $c_0 > -1,1701$;
- $D(-1) > 0$, soit $D(-1) = 0,0889 c_0 + 2,1016 > 0$, soit : $c_0 > -23,6400$;
- $|\alpha_0| < |\alpha_2|$, soit $|0,3263 + 0,2799 c_0| < 1$, soit : $-1,1701 < c_0 < 2,4069$.

Pour que ce système asservi soit stable, il faut réaliser : $0 < c_0 < 2,4069$

3 Valeur limite de stabilité de c_0 pour $C(Z) = \frac{c_0}{1 - Z^{-1}}$

$$C(Z) = \frac{c_0}{1 - Z^{-1}} = \frac{c_0 Z}{Z - 1} : \text{c'est un régulateur à action intégrale.}$$

On détermine la fonction de transfert en chaîne fermée $F(Z)$:

$$F(Z) = \frac{X(Z)}{W(Z)} = \frac{c_0 b_1 Z + c_0 b_0 Z^2}{Z^3 + (a_1 - 1 + b_0 c_0) Z^2 + (c_0 b_1 - a_1 + a_2) Z - a_2}$$

$$D(Z) = Z^3 + (a_1 - 1 + b_0 c_0) Z^2 + (c_0 b_1 - a_1 + a_2) Z - a_2 = \alpha_3 Z^3 + \alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0$$

$$D(Z) = Z^3 + (-1,7753 + 0,1910 c_0) Z^2 + (0,2799 c_0 + 1,1016) Z - 0,3263$$

Le critère de Jury impose :

- $D(1) > 0$, soit $D(1) = 0,4709 c_0 > 0$, soit : $c_0 > 0$;
- $D(-1) < 0$, soit $D(-1) = -0,0889 c_0 - 4,2032 < 0$, soit : $c_0 > -47,2801$;
- $|\alpha_0| < |\alpha_3|$ vérifié car $0,3263 < 1$;
- $|\alpha_0^2 - \alpha_3^2| > |\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3|$, soit $|-0,8935| > |-0,5223 - 0,3422 c_0|$, soit : $-4,1373 < c_0 < 1,0847$.

Pour que ce système asservi soit stable, il faut avoir : $0 < c_0 < 1,0847$

La valeur limite de c_0 est plus faible qu'en ∇ , cela est logique puisque l'action intégrale accentue l'instabilité en régulation numérique comme en régulation analogique.

4 Valeurs limites de stabilité de c_0 et c_1

$C(Z) = \frac{c_0 + c_1 Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} = \frac{c_0 Z + c_1}{Z - 1}$ est sans équivalent en utilisant un correcteur analogique.

$$F(Z) = \frac{X(Z)}{W(Z)} = \frac{c_0 b_0 Z^2 + (c_1 b_0 + c_0 b_1) Z + c_1 b_1}{Z^3 + (a_1 - 1 + b_0 c_0) Z^2 + (c_0 b_1 + c_1 b_0 - a_1 + a_2) Z + (c_1 b_1 - a_2)}$$

$$D(Z) = Z^3 + (a_1 - 1 + b_0 c_0) Z^2 + (c_0 b_1 + c_1 b_0 - a_1 + a_2) Z + (c_1 b_1 - a_2)$$

$$\text{soit } D(Z) = \alpha_3 Z^3 + \alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0$$

$$D(Z) = Z^3 + (-1,775 + 0,1910 c_0) Z^2 + (1,1016 + 0,2799 c_0 + 0,1910 c_1) Z + 0,2799 c_1 - 0,3263$$

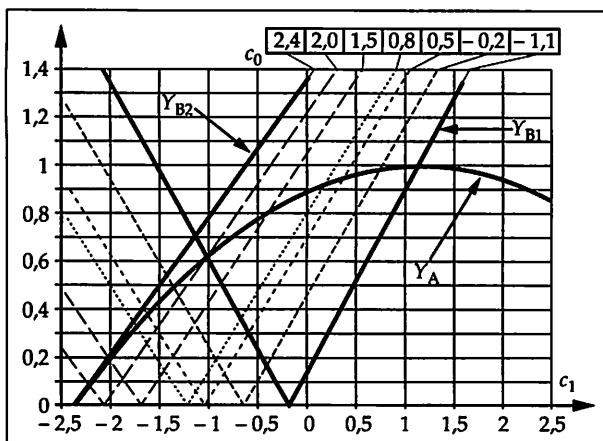


Figure 3.23

Le critère de Jury impose :

- $D(1) > 0$, soit $D(1) = 0,4709 (c_0 + c_1) > 0$, soit : $c_0 + c_1 > 0$;
- $D(-1) < 0$, soit $D(-1) = -0,0889 c_0 + 0,0889 c_1 - 4,2032 < 0$, soit : $c_1 < 47,2801 + c_0$;
- $|\alpha_0| < |\alpha_3|$, soit $0,2799 c_1 - 0,3263 < 1$ et $0,2799 c_1 - 0,3263 > -1$, soit : $-2,4069 < c_1 < 4,7385$;
- $|\alpha_0^2 - \alpha_3^2| > |\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3|$, soit : $Y_A > Y_B$ avec $Y_A = |0,0783 c_1^2 - 0,1827 c_1 - 0,8935|$ et $Y_B = |0,0535 c_0 c_1 - 0,6879 c_1 - 0,3422 c_0 - 0,5223|$.

L'informatique simplifie la visualisation de ces inéquations (fig. 3.23). À l'aide d'un logiciel « tableur »,

Y_A est tracée en fonction de c_1 , Y_B en fonction de c_1 et c_0 et pour $-2,4069 < c_1 < 4,7385$ et $c_0 + c_1 > 0$. Pour une valeur c_0 choisie, le système est stable si la courbe Y_B est en dessous de Y_A . Les courbes limites sont $Y_{B1} (c_0 = -1,1)$ et $Y_{B2} (c_0 = 2,4)$.

5 Couples de réglage (c_0 ; c_1)

Sur le graphe obtenu (fig. 3.26), on observe que seuls les deux couples ($c_0 = 0,5$; $c_1 = 0,5$) et ($c_0 = 0,8$; $c_1 = 0,5$) n'assurent pas la stabilité du système.

L'étude de la précision d'un système asservi a pour but d'évaluer l'aptitude de ce système à suivre différentes catégories de sollicitations d'entrée. Cette précision est théorique et ne tient compte ni des incertitudes des grandeurs en jeu ni de la précision des instruments utilisés dans la boucle d'asservissement.

1. DÉFINITION

Pour un système asservi (fig. 4.1), la précision se caractérise par la différence en régime permanent entre l'entrée (la consigne fixée) et la sortie (la mesure contrôlée). Cette différence s'appelle écart ou erreur et se note généralement ε . Le mot d'erreur faisant penser plutôt aux incertitudes de mesure, il serait plus judicieux de réserver le nom d'écart à cette différence entre entrée et sortie.

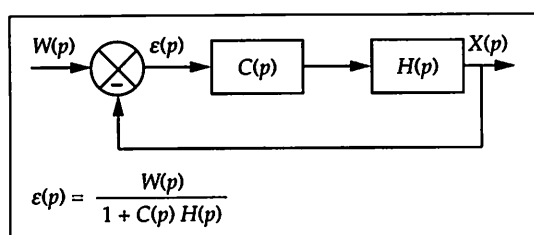


Figure 4.1. Système asservi

En régime permanent, la valeur de ε peut être calculée à l'aide du théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{W(p)}{1 + C(p)H(p)} \right]$$

Cet écart dépend de la nature de l'excitation à l'entrée. Aux trois sortes de signaux d'entrée correspondent trois expressions de l'écart :

■ ÉCART DE POSITION

Signal d'entrée : échelon de position (variation brusque en amplitude).

$$w(t) = A u(t) \text{ et } W(p) = \frac{A}{p}$$

Cet écart, appelé écart de position, écart statique ou de statisme, est noté ε_s .

■ ÉCART DE VITESSE

Signal d'entrée : échelon de vitesse ou rampe (variation linéaire du signal en fonction du temps).

$$w(t) = b t u(t) \text{ et } W(p) = \frac{b}{p^2}$$

Cet écart, appelé écart de vitesse ou écart de traînage, est noté ε_v .

■ ÉCART D'ACCÉLÉRATION

Signal d'entrée : échelon d'accélération (le signal est une fonction quadratique du temps).

$$w(t) = c t^2 u(t) \text{ et } W(p) = \frac{c}{p^3}$$

Cet écart, appelé écart d'accélération, est noté ε_a .

Pour le calcul de ε , il est intéressant de faire apparaître le nombre d'intégrations dans $C(p)H(p)$, soit : $C(p)H(p) = \frac{K}{p^\alpha} T(p)$ avec K : constante ; $T(0) = 1$; α : nombre d'intégrations, encore appelé « classe du système ».

Comme le montre le tableau 4.1 page suivante, plus α est élevé, meilleure est la précision du système asservi, mais plus la stabilité est compromise.

Entrée / Nombre d'intégrations	Échelon de position $w(t) = A u(t)$ $W(p) = \frac{A}{p}$	Échelon de vitesse $w(t) = b t u(t)$ $W(p) = \frac{b}{p^2}$	Échelon d'accélération $w(t) = c t^2 u(t)$ $W(p) = \frac{c}{p^3}$
$\alpha = 0$	$\varepsilon_s = \frac{A}{1+K}$	$\varepsilon_v \rightarrow \infty$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 1$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_v = \frac{b}{K}$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 2$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_v = 0$	$\varepsilon_a = \frac{c}{K}$

Tableau 4.1

2. PRÉCISION EN RÉGULATION NUMÉRIQUE

La méthode est exactement la même ; en régime permanent la valeur de ε peut être déterminée à l'aide du théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\frac{1 - Z^{-1}}{Z^{-1}} \varepsilon(Z) \right]$$

$C(Z) H(Z) = \frac{K}{(Z-1)^\alpha} T(Z)$ avec K : constante ; $T(1) = 1$; α : nombre d'intégrations, ou nombre de pôles égaux à 1.

Entrée / Nombre d'intégrations	Échelon de position $w(t) = A u(t)$ $W(Z) = \frac{AZ}{Z-1}$	Échelon de vitesse $w(t) = b t u(t)$ $W(Z) = \frac{b T_e Z}{(Z-1)^2}$	Échelon d'accélération $w(t) = c t^2 u(t)$ $W(Z) = \frac{c T_e^2 Z (Z+1)}{2 (Z-1)^3}$
$\alpha = 0$	$\varepsilon_s = \frac{A}{1+K}$	$\varepsilon_v \rightarrow \infty$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 1$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_v = \frac{b T_e}{K}$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 2$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_v = 0$	$\varepsilon_a = \frac{c T_e^2}{K}$

Tableau 4.2

La précision ainsi calculée ne tient compte d'aucune saturation en régime permanent. Seul l'échelon de position en entrée ne provoque pas de saturation et l'écart statique calculé peut toujours être mesuré en pratique. Lorsque les calculs de ε_v et ε_a conduisent à une valeur de plus de 100 %, ils ne donnent qu'un aperçu de l'aptitude du système asservi à suivre le signal d'entrée imposé.

EXERCICES

La précision d'un système asservi caractérise son aptitude à suivre un signal d'entrée déterminé (échelon, rampe ou accélération). Il ne faut pas la confondre avec la précision d'instrumentation. En effet, le calcul théorique de la précision d'asservissement conduit à un résultat supposé exempt de toute erreur ou incertitude! De ce fait, la différence consigne - mesure devrait s'appeler écart et non pas erreur mais, l'habitude aidant, les deux appellations restent usitées.

Exercice 1

Le schéma fonctionnel d'une régulation classique de niveau est donné figure 4.2.

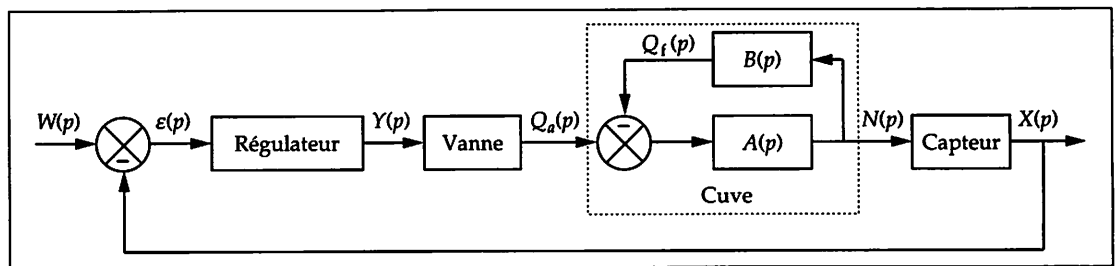


Figure 4.2

Les fonctions de transfert sont les suivantes :

- régulateur : $C(p) = G_r$;
- vanne automatique contrôlant le débit d'alimentation Q_a : $H_1(p) = \frac{G_1}{\theta_1 p + 1}$;
- cuve : $H_2(p) = \frac{G_2}{\theta_2 p + 1}$. Les fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$ ne sont pas détaillées ;
- capteur du niveau N : $H_3(p) = \frac{G_3}{\theta_3 p + 1}$.

On exprime W , X et Y sous forme de pourcentages.

Application numérique :

$G_r = 4$, $G_1 = 0,1 \text{ m}^3/\text{h}$, $G_2 = 2,5 \text{ h}/\text{m}^2$, $\theta_1 = 0,1 \text{ min}$, $\theta_2 = 2 \text{ min}$ et $\theta_3 = 0,02 \text{ min}$.

- 1 L'étendue de mesure (EM) du capteur est : 150 cm à 550 cm.
- 2 Calculer le gain statique G_3 .
- 3 Exprimer l'écart statique ε_s pour une variation en échelon de la consigne $W(p) = A/p$.
- 3 On adopte : $W = X = 50 \%$ pour $Q_a = Q_f$.
- 4 Exprimer ε_s en centimètres pour une variation de W correspondant à 40 cm. Quelle est alors la nouvelle valeur du niveau N ?
- 4 Exprimer l'écart de traînage ε_v pour une variation en rampe de la consigne $W(p) = b/p^2$.

Exercice 2

Le schéma fonctionnel de la figure 4.3 représente un procédé soumis à deux perturbations principales E_4 et E_5 .

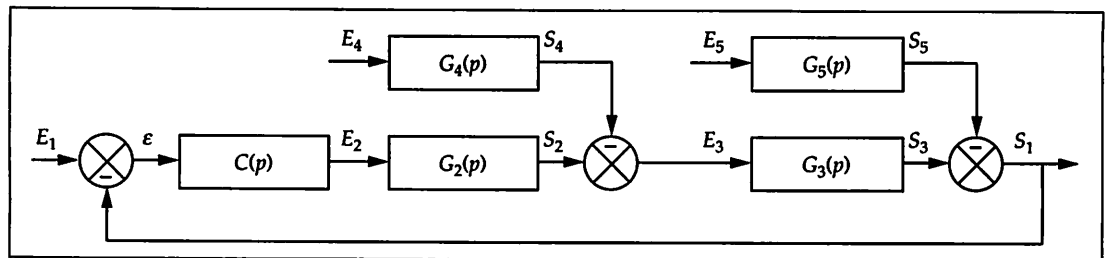


Figure 4.3

Les fonctions de transfert sont :

$$C(p) = G_r; \quad G_2(p) = \frac{G_2}{(\theta_2 p + 1)^2}; \quad G_3(p) = \frac{G_3}{p}; \quad G_4(p) = \frac{G_4}{\theta_4 p + 1}$$

$$G_5(p) = \frac{G_5}{\theta_5 p + 1}$$

- 1 Exprimer $\varepsilon(p)/E_1(p)$, $\varepsilon(p)/E_4(p)$ et $\varepsilon(p)/E_5(p)$. Que constate-t-on?
 - 2 Exprimer les écarts de statisme ε_{s1} pour $E_1(p) = a_1/p$, ε_{s4} pour $E_4(p) = a_4/p$, ε_{s5} pour $E_5(p) = a_5/p$. Que constate-t-on?
 - 3 Le service régulation décide d'ajouter une action intégrale : $C(p) = G_r + \frac{1}{T_i p}$
- ▷ Exprimer alors ε_{s1} pour $E_1(p) = a_1/p$, ε_{s4} pour $E_4(p) = a_4/p$, ε_{s5} pour $E_5(p) = a_5/p$. Que peut-on déduire de ces résultats?

Exercice 3

Le schéma de la figure 4.4 représente un procédé $H(p)$ contrôlé par un régulateur $R(p)$ commandant une vanne $V(p)$ par l'intermédiaire d'un positionneur $P(p)$. La mesure est assurée par le capteur $C_a(p)$. Les deux fonctions de transfert perturbatrices principales sont $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

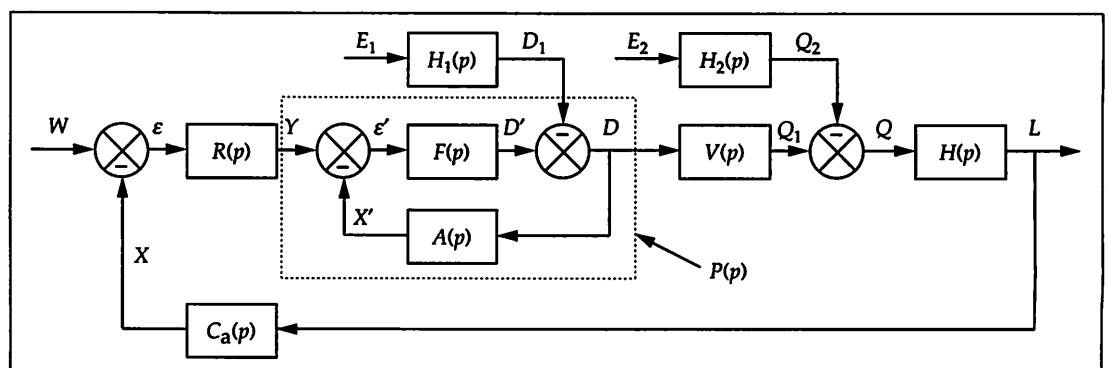


Figure 4.4

Les fonctions de transfert sont :

$$R(p) = G_r; \quad F(p) = \frac{G_s}{(T p + 1)^2}; \quad V(p) = \frac{G_v}{T_v p + 1}; \quad C_a(p) = \frac{1}{T_c p + 1}; \quad H(p) = \frac{G e^{-\tau p}}{T p + 1};$$

$$A(p) = A; \quad H_1(p) = \frac{G_1}{(T_1 p + 1)}; \quad H_2(p) = \frac{G_2}{(T_2 p + 1)}$$

On donne : $G_r = 4$; $G_s = 5$; $G_v = 1$; $G = 1$; $A = 0,05$; $G_1 = 1,5$ et $G_2 = 2$.

1 Dans un premier temps, le positionneur n'est pas en fonctionnement, c'est-à-dire que la fonction de transfert $P(p) = D(p)/Y(p) = 1$.

- ▷ Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $W(p)$, $\varepsilon(p)$ en fonction de $E_1(p)$ puis $\varepsilon(p)$ en fonction de $E_2(p)$.
- ▷ Déterminer ε_s pour $W(p) = a/p$, ε_s pour $E_1(p) = b/p$, puis ε_s pour $E_2(p) = c/p$. Que constate-t-on ?
- ▷ Exprimer $\varepsilon'(p)$ en fonction de E_1 , puis déterminer ε'_s pour $E_1(p) = b/p$.

2 Le positionneur est maintenant en fonctionnement.

- ▷ Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $W(p)$, $\varepsilon(p)$ en fonction de $E_1(p)$ puis $\varepsilon(p)$ en fonction de $E_2(p)$.
- ▷ Déterminer ε_s pour $W(p) = a/p$, ε_s pour $E_1(p) = b/p$, puis ε_s pour $E_2(p) = c/p$. Que constate-t-on ?
- ▷ Exprimer $\varepsilon'(p)$ en fonction de E_1 , puis déterminer ε'_s pour $E_1(p) = b/p$. Que constate-t-on ?

Exercice 4

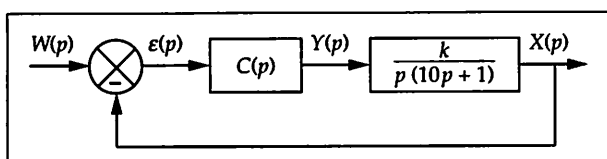


Figure 4.5

Le procédé schématisé sur la figure 4.5 doit être contrôlé par un régulateur à action proportionnelle ($C(p) = G_r$). On ne connaît pas la valeur de k de la fonction de transfert du procédé.

- 1 Exprimer l'erreur $\varepsilon(p)$ en fonction de $W(p)$.
- 2 Déterminer l'écart de position ε_p pour $W(p) = 0,2/p$.
- 3 Déterminer l'écart de traînage ε_v pour $W(p) = 0,05/p^2$.
- 4 Proposer une méthode expérimentale pour déterminer la valeur de k en chaîne fermée. Quelle valeur de G_r peut-on adopter pour la détermination de k ?

Exercice 5

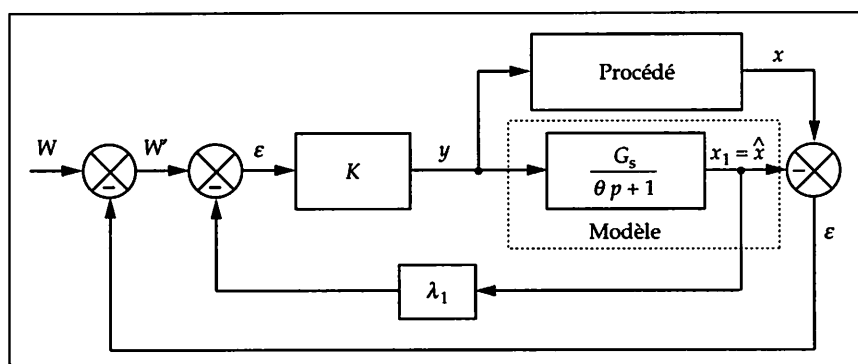


Figure 4.6

Cet exercice propose l'étude de la précision d'un procédé contrôlé par un correcteur à modèle de référence. La technique du correcteur à modèle de référence est numérique. Cependant, pour une approche simple, le système étudié est monovariante et traité avec les outils analogiques classiques. Le système étudié est représenté par le schéma de la figure 4.6.

- 1 Dans un premier temps, l'étude ne porte que sur le correcteur, le procédé n'est donc pas relié.
 - ▷ Démontrer que pour $\lambda_1 = 1$, le rapport X_1/W' est différent de 1 en régime permanent, pour toute variation en échelon de W' .
 - ▷ Déterminer l'expression de λ_1 pour obtenir $X_1/W' = 1$ en régime permanent. Que faudrait-il ajouter au correcteur pour obtenir $X_1 = W'$ dans une régulation classique ?

2 Le procédé de fonction de transfert $H(p)$ est maintenant piloté par le correcteur et son modèle.

- ▷ Exprimer $Y(p)/W(p)$.
- ▷ Déterminer alors $X(p)/W(p)$, puis démontrer que $X/W = 1$ en régime permanent. Que peut-on constater ?

Exercice 6

Un procédé (fig. 4.7) de fonction de transfert réglante $F_1(p) F_3(p)$ est contrôlé par un régulateur $C_1(p)$. La fonction de transfert perturbatrice $F_2(p)$ est contrôlée par un régulateur de tendance $C_2(p)$.

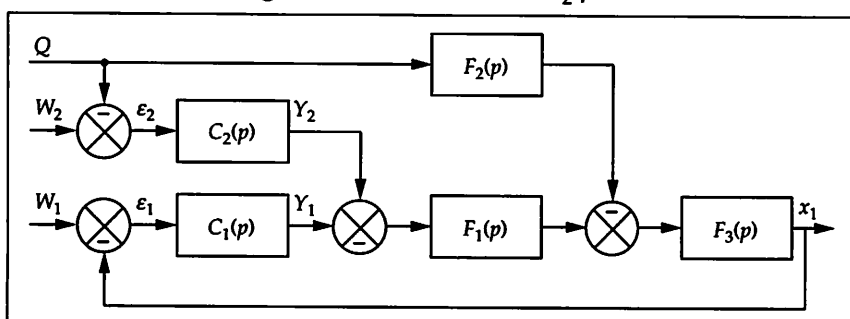


Figure 4.7

La fonction de transfert réglante est composée de $F_1(p)$ et $F_3(p)$:

$$F_1(p) = \frac{G_1 e^{-\tau p}}{(\theta_1 p + 1)}$$

$$\text{et } F_3(p) = \frac{G_3}{(\theta_3 p + 1)^2}$$

Le régulateur est à structure parallèle : $C_1(p) = G_{r1} + K_{i1}/p$.

La fonction de transfert perturbatrice a été identifiée sous la forme : $F_2(p) = \frac{G_2 e^{-\tau p}}{(\theta_2 p + 1)}$

1 Exprimer $X_1(p)$ en fonction de $W_1(p)$, $W_2(p)$ et $Q(p)$.

2 Les consignes W_1 et W_2 sont constantes. L'étude porte donc sur la grandeur perturbatrice Q .

- ▷ Exprimer $\varepsilon_1(p)$.
- ▷ Déterminer $C_2(p)$ pour que X_1 ne subisse pas de variation lorsqu'une perturbation en échelon de la grandeur Q est appliquée au procédé. Une modification peut-elle être apportée au schéma proposé figure 4.7 ?
- ▷ Pour un changement en échelon de la consigne W_2 , le régulateur $C_2(p)$ peut-il assurer l'égalité : mesure $Q(p) =$ consigne $W_2(p)$? Pourquoi ?

N Exercice 7

La position d'un robot mécanique est asservie grâce à un correcteur numérique dont l'algorithme est programmé dans une carte spécialisée. Le schéma-bloc représentant cet ensemble est donné figure 4.8.

$H_b(Z)$ est la fonction de transfert en Z bloquée du système en chaîne ouverte, c'est-à-dire qu'elle comprend la fonction de transfert du système $H(p)$ et la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro $B_o(p)$.

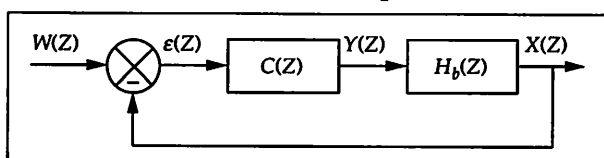


Figure 4.8

La période d'échantillonnage est fixée à $T_e = 0,1$ s.

La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{\alpha}{p(\theta p + 1)} \text{ avec } \alpha = 0,008 \text{ s}^{-1} \text{ et } \theta = 0,5 \text{ s.}$$

EXERCICES

1 Exprimer la fonction de transfert en Z^{-1} bloquée du système en chaîne ouverte $H_b(Z)$. On notera : $\beta = \exp(-T_e/\theta)$.

2 Le correcteur numérique proposé est $C(Z) = G_r \frac{k - Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}$, avec $k = 1 \text{ s}^{-1}$ et $G_r = 4$.

- ▷ Exprimer $\varepsilon(Z)$.
- ▷ Calculer l'écart de position ε_p lors d'un changement en échelon de consigne $w(t) = a u(t)$.
- ▷ Calculer l'écart de vitesse ε_v lors d'un changement en rampe de consigne $w(t) = b t u(t)$ avec $b = 0,01 \text{ s}^{-1}$.

3 On fixe maintenant : $k = 0,5 \text{ s}^{-1}$ et $G_r = 4$.

- ▷ Calculer l'écart de position ε_p lors d'un changement en échelon de consigne $w(t) = a u(t)$.
- ▷ Calculer l'écart de vitesse ε_v lors d'un changement en rampe de consigne $w(t) = b t u(t)$ avec $b = 0,01 \text{ s}^{-1}$.
- ▷ À l'aide du résultat trouvé à la question précédente, et sans faire de calcul, préciser à quelle sorte de correcteur analogique correspond ce correcteur numérique.

Exercice 1

1 Gain statique du capteur

$$G_3 = \frac{\Delta X}{\Delta N} = \frac{1}{5,5 - 1,5} \Rightarrow G_3 = 0,25 \text{ m}^{-1}$$

2 Écart statique

$$\varepsilon(p) = W(p) - X(p) = W(p) - \varepsilon(p) \frac{G_r G_1 G_2 G_3}{(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_3 p + 1)}$$

$$\text{donc : } \varepsilon(p) = \frac{W(p)(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_3 p + 1)}{G_r G_1 G_2 G_3 + (\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_3 p + 1)}$$

$$\text{Pour } W(p) = A/p, \text{ on a : } \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \frac{A}{G_r G_1 G_2 G_3 + 1}$$

Pour $A = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$, soit $A = 0,4/4 = 10 \%$

$$\varepsilon_s = \frac{0,1}{4 \times 0,1 \times 2,5 \times 0,25 + 1} = 0,08, \text{ soit : } \varepsilon_s = 8 \% \text{ et } \varepsilon_s = (0,08 \times 40) \text{ cm} \Rightarrow \varepsilon_s = 32 \text{ cm}$$

3 Valeur du niveau

$x = w - \varepsilon_s = 0,10 - 0,08 = 0,02$; la variation du niveau est donc $\Delta N = 0,02 \times 40 = 8 \text{ cm}$.
Le niveau réel atteint est $N = [150 + (0,5 \times 400) + 8] \text{ cm} \Rightarrow N = 358 \text{ cm}$ et la consigne de niveau est 390 cm.

4 Écart de traînage

$$\text{On a toujours : } \varepsilon(p) = \frac{W(p)(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_3 p + 1)}{G_r G_1 G_2 G_3 + (\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_3 p + 1)}$$

Pour $W(p) = \frac{b}{p^2}$ on a :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{b}{p^2} \frac{(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_3 p + 1)}{G_r G_1 G_2 G_3 + (\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)(\theta_3 p + 1)} \right] \Rightarrow \varepsilon_v = \infty$$

Cela signifie surtout que le niveau ne suit pas la consigne tant que celle-là est une rampe. Bien sûr, en pratique l'erreur n'est pas infinie puisque la consigne en rampe ne dure pas indéfiniment !

Exercice 2

1 Expression de l'écart en fonction des signaux d'entrée

$$\text{On trouve : } \frac{\varepsilon(p)}{E_1(p)} = \frac{1}{1 + C(p) \frac{G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}}$$

Attention ! pour le calcul les fonctions $G_4(p)$ et $G_5(p)$ sont en série avec la boucle d'asservissement :

$$\frac{\varepsilon(p)}{E_4(p)} = - \frac{\frac{G_4 G_3}{p(\theta_4 p + 1)}}{1 + C(p) \frac{G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}} \quad \frac{\varepsilon(p)}{E_5(p)} = - \frac{\frac{G_5}{\theta_5 p + 1}}{1 + C(p) \frac{G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}}$$

On constate que le numérateur de ces fonctions de transfert change, le dénominateur étant toujours identique. Il est donc logique d'obtenir un écart ε différent en fonction de l'entrée considérée (E_1 , E_4 ou E_5).

2 Écarts de statisme

$$\text{Pour } E_1(p) = \frac{a_1}{p} \text{ on a : } \varepsilon_{s1} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{a_1}{p} \frac{1}{1 + \frac{G_r G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}} \right] \Rightarrow \varepsilon_{s1} = 0$$

L'écart de statisme est nul parce que le procédé est intégrateur.

$$\text{Pour } E_4(p) = \frac{a_4}{p} \text{ on a : } \varepsilon_{s4} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{a_4}{p} \frac{\frac{G_4 G_3}{p(\theta_4 p + 1)}}{1 + \frac{G_r G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}} \right] \Rightarrow \varepsilon_{s4} = -a_4 \frac{G_4}{G_r G_2}$$

$$\text{Pour } E_5(p) = \frac{a_5}{p} \text{ on a : } \varepsilon_{s5} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{a_5}{p} \frac{\frac{G_5}{\theta_5 p + 1}}{1 + \frac{G_r G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}} \right] \Rightarrow \varepsilon_{s5} = 0$$

Lorsque la perturbation indicielle est appliquée avant la fonction de transfert $G_3(p)$ (procédé intégrateur), l'écart est constant et non nul. En revanche, lorsque la perturbation indicielle est appliquée après la fonction de transfert $G_3(p)$, l'écart est nul.

3 Écarts de statisme avec l'action intégrale

$$\text{Pour } E_1(p) = \frac{a_1}{p} \text{ on a : } \varepsilon_{s1} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{a_1}{p} \frac{1}{1 + \left(G_r + \frac{1}{T_i p}\right) \frac{G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}} \right] \Rightarrow \varepsilon_{s1} = 0$$

$$\text{Pour } E_4(p) = \frac{a_4}{p} \text{ on a : } \varepsilon_{s4} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{a_4}{p} \frac{\frac{G_4 G_3}{p(\theta_4 p + 1)}}{1 + \left(G_r + \frac{1}{T_i p}\right) \frac{G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}} \right] \Rightarrow \varepsilon_{s4} = 0$$

$$\text{Pour } E_5(p) = \frac{a_5}{p} \text{ on a : } \varepsilon_{s5} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{a_5}{p} \frac{\frac{G_5}{(\theta_5 p + 1)}}{1 + \left(G_r + \frac{1}{T_i p}\right) \frac{G_2 G_3}{p(\theta_2 p + 1)^2}} \right] \Rightarrow \varepsilon_{s5} = 0$$

Bien que le procédé comporte une intégration, dans $G_3(p)$, il est nécessaire de régler une action intégrale dans le régulateur pour annuler l'écart ε lors des perturbations en échelon. L'action dérivée sera sûrement nécessaire pour obtenir une stabilité satisfaisante pour un tel ensemble (pour cela se reporter aux exercices proposés sur la stabilité, chapitre 3).

Exercice 3

1 Positionneur non activé

▷ Expression de l'écart

$$\frac{\varepsilon(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)} ; \frac{\varepsilon(p)}{E_1(p)} = -H_1(p) \frac{V(p) H(p) C_a(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)}$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{E_2(p)} = -H_2(p) \frac{H(p) C_a(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)}$$

▷ Écarts de statisme sans positionneur

Pour $W(p) = a/p$ on a :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{a}{p} \left[\frac{1}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)} \right] = \frac{a}{1 + G_r G_v G} \Rightarrow \varepsilon_s = 0,17 a$$

Pour $E_1(p) = b/p$ on a :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{b}{p} H_1(p) \frac{V(p) H(p) C_a(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)} \right] = -\frac{b G_1 G_v G}{1 + G_r G_v G} \Rightarrow \varepsilon_s = -0,31 b$$

Pour $E_2(p) = c/p$ on a :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{c}{p} H_2(p) \frac{H(p) C_a(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)} \right] = -\frac{c G_2 G}{1 + G_r G_v G} \Rightarrow \varepsilon_s = -0,41 c$$

L'écart ε_s n'est pas le même si l'on agit sur $W(p)$ ou si le système subit $E_1(p)$ ou $E_2(p)$.

▷ Écart ε' sans positionneur

$$\varepsilon' = Y \text{ puisque } P(p) = 1. \quad \frac{\varepsilon'(p)}{E_1(p)} = -H_1(p) \frac{V(p) H(p) C_a(p) R(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)}$$

Pour $E_1(p) = b/p$ on a :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{b}{p} H_1(p) \frac{V(p) H(p) C_a(p) R(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p)} \right] = -\frac{b G_1 G_v G G_r}{1 + G_r G_v G} \Rightarrow \varepsilon_s = -1,24 b$$

2 Positionneur en fonctionnement

▷ Expression de l'écart

$$\frac{\varepsilon(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + R(p) P(p) V(p) H(p) C_a(p)} ; \frac{\varepsilon(p)}{E_1(p)} = -H_1(p) \frac{V(p) H(p) C_a(p)}{1 + R(p) H(p) C_a(p) P(p) V(p)}$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{E_2(p)} = -H_2(p) \frac{H(p) C_a(p)}{1 + H(p) C_a(p) R(p) P(p) V(p)}$$

▷ Écarts de statisme avec positionneur

Le gain statique de $P(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p) A(p)}$ est : $G_p = \frac{G_s}{1 + G_s A}$

Pour $W(p) = a/p$ on a :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{a}{p} \frac{1}{1 + R(p) P(p) V(p) H(p) C_a(p)} \right] = \frac{a}{1 + G_r G_p G_v G} \Rightarrow \varepsilon_s = 0,06 a$$

Pour $E_1(p) = b/p$ on a :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{b}{p} H_1(p) \frac{V(p) H(p) C_a(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p) P(p)} \right] = -\frac{b G_1 G_v G}{1 + G_r G_v G G_p} \Rightarrow \varepsilon_s = -0,09 b$$

Pour $E_2(p) = c/p$ on a :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{c}{p} H_2(p) \frac{H(p) C_a(p)}{1 + R(p) V(p) H(p) C_a(p) P(p)} \right] = - \frac{c G_2 G}{1 + G_r G_v G G_p} \Rightarrow \varepsilon_s = -0,12 c$$

Quelle que soit l'entrée en échelon appliquée au système, l'écart de statisme ε_s est plus petit avec le positionneur (cela est vrai si le gain G_p est bien supérieur à 1).

▷ Écart ε' avec positionneur

Attention, car la relation entre $\varepsilon'(p)$ et $E_1(p)$ est une somme de deux fonctions! On obtient alors :

$$\frac{\varepsilon'(p)}{E_1(p)} = -H_1(p) \left[\frac{A(p)}{1 + A(p) F(p)} + \frac{V(p) H(p) C_a(p) R(p)}{1 + V(p) H(p) C_a(p) R(p) F(p)} \right]$$

Pour $E_1(p) = b/p$ on a :

$$\varepsilon'_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-p \frac{b}{p} H_1(p) \left(\frac{A(p)}{1 + A(p) F(p)} + \frac{V(p) H(p) C_a(p) R(p)}{1 + V(p) H(p) C_a(p) R(p) F(p)} \right) \right]$$

$$\text{soit : } \varepsilon'_s = -b G_1 \left(\frac{A}{1 + A G_s} + \frac{G_v G_r}{1 + G_r G_v G G_s} \right) \Rightarrow \varepsilon'_s = -0,348 b$$

L'écart de statisme ε'_s est également plus petit avec le positionneur. Cela est tout à fait normal puisque le rôle du positionneur est de lutter contre les perturbations agissant sur la vanne (frottement du clapet ou de la tige de commande, actions de déséquilibre dues à des variations de la pression différentielle aux bornes de la vanne).

Exercice 4

1 Expression de $\varepsilon(p)$

$$\frac{\varepsilon(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + \frac{G_r k}{p(10p+1)^2}}$$

$$\text{L'écart entre } W \text{ et } X \text{ est : } \varepsilon(p) = \frac{p(10p+1)^2}{p(10p+1)^2 + G_r k} W(p)$$

2 Écart de position

Pour $W(p) = 0,2/p$ on obtient l'écart de position :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{0,2}{p} \frac{p(10p+1)^2}{p(10p+1)^2 + G_r k} \right] \Rightarrow \varepsilon_p = 0$$

3 Écart de traînage

Pour $W(p) = 0,05/p^2$ on obtient l'écart de traînage :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{0,05}{p^2} \frac{p(10p+1)^2}{p(10p+1)^2 + G_r k} \right] \Rightarrow \varepsilon_v = \frac{0,05}{G_r k}$$

4 Méthode expérimentale

Pour obtenir expérimentalement la valeur de k en chaîne fermée, il suffit de générer une rampe de consigne de pente assez douce (par exemple : $0,05 \text{ min}^{-1}$) et d'attendre le régime permanent. La mesure de l'écart final entre W et X permet d'avoir la valeur expérimentale de ε_v , et, connaissant la valeur de G_r , on peut alors déterminer k .

Plusieurs essais seront sûrement nécessaires, car il faut trouver un compromis entre la précision de mesure de ε_v et la stabilité du procédé. Il faut donc commencer en choisissant un gain G_r assez faible.

Exercice 5

1 Procédé non rellé

▷ Rapport X_1/W' différent de 1

$$\frac{X_1(p)}{W'(p)} = \frac{KG_s}{\theta p + 1 + KG_s}. \text{ En régime permanent on obtient donc : } \frac{X_1}{W'} = \frac{KG_s}{1 + KG_s} \neq 1$$

c'est-à-dire que la mesure ne rejoint pas la consigne.

▷ Expression de λ_1

$$\frac{X_1(p)}{W'(p)} = \frac{KG_s}{\theta p + 1 + \lambda_1 KG_s}, \text{ soit : } \lambda_1 = 1 - \frac{1}{KG_s}$$

La mesure estimée (celle du modèle) rejoint la consigne en régime permanent, malgré le manque d'action intégrale.

Dans une régulation classique, c'est-à-dire avec un retour unitaire, il faut mettre une action intégrale pour obtenir une erreur statique nulle avec un tel procédé (autorégulant).

2 Procédé en fonctionnement

▷ Fonction de transfert $\frac{Y(p)}{W(p)}$. On a :
$$\frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{K}{1 + K \left[H(p) + \frac{G_s}{\theta p + 1} (\lambda_1 - 1) \right]}$$

▷ Fonction de transfert $\frac{X(p)}{W(p)}$. On a : $X(p) = H(p) Y(p)$;

$$\frac{X(p)}{W(p)} = \frac{KH(p)}{1 + K \left[H(p) + \frac{G_s}{\theta p + 1} (\lambda_1 - 1) \right]} ; \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{X(p)}{W(p)} \right) = \frac{KH(p)}{1 + K \left[H(p) + \frac{G_s}{\theta p + 1} (\lambda_1 - 1) \right]}$$

et $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{KG_s}$, on obtient donc : $\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{X(p)}{W(p)} \right) = \frac{KH(p)}{KH(p)} = 1$, c'est-à-dire que la mesure est égale à la consigne malgré un manque d'action intégrale.

Exercice 6

1 Expression de $X_1(p)$

En utilisant le théorème de superposition, on obtient :

• pour $W_2(t)$ et $Q(t)$ constantes :
$$\frac{X_1(p)}{W_1(p)} = \frac{C_1(p) F_1(p) F_3(p)}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)}$$

• pour $W_1(t)$ et $Q(t)$ constantes :
$$\frac{X_1(p)}{W_2(p)} = \frac{C_2(p) F_1(p) F_3(p)}{1 + C_2(p) F_1(p) F_3(p)}$$

- pour $W_2(t)$ et $W_1(t)$ constantes :

$$\frac{X_1(p)}{Q(p)} = -\frac{C_2(p) F_1(p) F_3(p)}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)} - \frac{F_2(p) F_3(p)}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)} = -\frac{F_3(p) [C_2(p) F_1(p) + F_2(p)]}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)}$$

et donc :

$$X_1(p) = \frac{C_1(p) F_1(p) F_3(p)}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)} W_1(p) + \frac{C_2(p) F_1(p) F_3(p)}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)} W_2(p) - \frac{F_3(p) [C_2(p) F_1(p) + F_2(p)]}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)} Q(p)$$

2 Étude de la grandeur perturbatrice Q

- ▷ Expression de $\varepsilon_1(p)$

$\varepsilon_1(p) = W_1(p) - X_1(p)$ et comme $W_1(p) = 0$, on a $\varepsilon_1(p) = -X_1(p)$, soit :

$$\varepsilon_1(p) = -X_1(p) = \frac{F_3(p) [C_2(p) F_1(p) + F_2(p)]}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)} Q(p)$$

- ▷ Détermination de $C_2(p)$

On cherche à annuler l'écart statique ε_{1s} lorsque $q(t) = a$, soit :

$$\varepsilon_{1s} = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon_1(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{a F_3(p) [C_2(p) F_1(p) + F_2(p)]}{1 + C_1(p) F_1(p) F_3(p)} \right]$$

Pour obtenir $\varepsilon_{1s} = 0$, il faut que $C_2(p) F_1(p) + F_2(p) = 0$, soit : $C_2(p) = -\frac{F_2(p)}{F_1(p)}$

La modification à apporter est le changement de signe de $C_2(p)$, Y_2 doit intervenir négativement sur $F_1(p)$. Cette modification, anodine en apparence, est d'une importance capitale puisqu'en pratique elle permet d'assurer le bon fonctionnement de l'ensemble.

- ▷ Échelon de consigne

Le régulateur $C_2(p)$ ne permet pas d'établir l'égalité entre la mesure Q et la consigne W_2 parce que la chaîne est ouverte.

Exercice 7

1 Fonction de transfert en chaîne ouverte

$$H_b(Z^{-1}) = \mathcal{Z} [B_o(p) H(p)] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-T_e p}}{p} H(p) \right]$$

$$H_b(Z) = (1 - Z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{H(p)}{p} \right] = (1 - Z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{\alpha}{p^2 (\theta p + 1)} \right] = \alpha \left[\frac{T_e Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} - \frac{\theta(1 - \beta) Z^{-1}}{1 - \beta Z^{-1}} \right]$$

2 $k = 0,5 \text{ s}^{-1}$ et $G_r = 4$

- ▷ Écart $\varepsilon(Z) = \frac{W(Z)}{C(Z) H_b(Z) + 1}$

▷ **Écart de position**

$w(t) = a u(t)$ donc : $W(Z) = \frac{a}{1-Z^{-1}}$. L'écart de position est $\varepsilon_p = \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\frac{1-Z^{-1}}{Z^{-1}} \varepsilon(Z) \right]$

$$\varepsilon_p = \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\frac{1-Z^{-1}}{Z^{-1}} \frac{a}{1-Z^{-1}} \frac{1}{1 + \alpha G_r \left[\frac{T_e Z^{-1}}{1-Z^{-1}} - \frac{\theta(1-\beta) Z^{-1}}{1-\beta Z^{-1}} \right]} \right] \Rightarrow \varepsilon_p = 0$$

▷ **Écart de vitesse**

$w(t) = b t u(t)$ donc : $W(Z) = \frac{b T_e Z}{(Z-1)^2} = \frac{b T_e Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$

$$\varepsilon_v = \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\frac{1-Z^{-1}}{Z^{-1}} \frac{b T_e Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2} \frac{1}{1 + \alpha G_r \left[\frac{T_e Z^{-1}}{1-Z^{-1}} - \frac{\theta(1-\beta) Z^{-1}}{1-\beta Z^{-1}} \right]} \right] \Rightarrow \varepsilon_p = \frac{b}{\alpha G_r}$$

Application numérique : $\varepsilon_v = \frac{0,01}{4 \times 0,08} = 0,3125$, soit $\varepsilon_v = 31,25\%$, l'écart de vitesse est donc important.

3 $k = 0,5 \text{ s}^{-1}$ et $G_r = 4$

▷ **Écart de position**

L'expression de l'écart est toujours : $\varepsilon(Z) = \frac{W(Z)}{C(Z) H_b(Z) + 1}$

$W(Z) = \frac{a}{1-Z^{-1}}$ et l'écart de position est donc : $\varepsilon_p = \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\frac{1-Z^{-1}}{Z^{-1}} \varepsilon(Z) \right]$

$$\text{soit : } \varepsilon_p = \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\frac{1-Z^{-1}}{Z^{-1}} \frac{a}{1-Z^{-1}} \frac{1}{1 + \alpha G_r \frac{k-Z^{-1}}{1-Z^{-1}} \left[\frac{T_e Z^{-1}}{1-Z^{-1}} - \frac{\theta(1-\beta) Z^{-1}}{1-\beta Z^{-1}} \right]} \right]$$

soit : $\varepsilon_p = 0$, l'écart de position est toujours nul.

▷ **Écart de vitesse**

$W(Z) = \frac{b T_e Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$ et l'écart de vitesse est donc :

$$\varepsilon_v = \lim_{Z \rightarrow 1} \left[\frac{1-Z^{-1}}{Z^{-1}} \frac{b T_e Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2} \frac{1}{1 + \alpha G_r \frac{k-Z^{-1}}{1-Z^{-1}} \left[\frac{T_e Z^{-1}}{1-Z^{-1}} - \frac{\theta(1-\beta) Z^{-1}}{1-\beta Z^{-1}} \right]} \right]$$

soit : $\varepsilon_v = 0$, l'écart de vitesse est donc annulé.

▷ **Correcteur numérique**

L'écart de vitesse est nul avec un procédé intégrateur n'opérant qu'une seule intégration lorsque le correcteur classique à retour unitaire, analogique ou numérique, comporte une action intégrale. Ce correcteur numérique correspond donc à un correcteur analogique à action proportionnelle et intégrale.

Un critère de réglage d'une boucle de régulation doit permettre de répondre au plus grand nombre de contraintes exigées par le cahier des charges du procédé à réguler. Les besoins en régulation ou asservissement étant très variés, de nombreuses stratégies de réglage d'une boucle sont possibles. Les exigences du cahier des charges sont décrites soit dans le domaine fréquentiel, soit dans le domaine temporel. Le critère de réglage est alors fixé soit à partir de la forme de la réponse temporelle souhaitée pour un type d'excitation à l'entrée (par exemple la consigne est un échelon de position), soit à partir des marges de stabilité (marges de gain et de phase, facteur de résonance). Le critère précision est, bien entendu, intrinsèquement lié à celui du réglage.

1. RÉGLAGE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

L'idée de base est d'assurer une stabilité suffisante au système asservi malgré quelques variations, tant en ce qui concerne les constantes de temps que la non-linéarité de comportement. En imposant, dans le domaine fréquentiel, une marge de gain ou de phase au système asservi, en fait on fixe aussi l'allure de la réponse temporelle. La définition de ces marges a été donnée au chapitre 3 – Stabilité.

Pour obtenir cette garantie de stabilité et donc régler les paramètres du régulateur, il faut connaître la fonction de transfert en chaîne ouverte du procédé, et celle du correcteur ou régulateur envisagé. Lorsque cette fonction de transfert en chaîne ouverte est complexe, le calcul des actions du régulateur peut être difficile, voire impossible; dans ce cas la détermination graphique (de préférence assistée par ordinateur) par les diagrammes de Bode, le lieu de Black ou le lieu de Nyquist, reste la meilleure.

Le but du correcteur est de déformer la courbe représentative de la fonction de transfert en chaîne ouverte de façon que la courbe correspondante en chaîne fermée satisfasse à la marge la plus restrictive du cahier des charges. Une autre possibilité de réglage est d'utiliser, non pas les marges de gain et de phase, mais le facteur de résonance Q . L'idée est alors, toujours en déformant la courbe représentative de la fonction de transfert en chaîne ouverte, d'obtenir une courbe en chaîne fermée qui soit voisine de celle d'une fonction de transfert d'un second ordre équivalent de gain 1 (précision), d'amortissement ξ choisi en fonction du dépassement D_1 fixé (stabilité), et de pulsation propre non amortie ω_n la plus élevée possible (temps de réponse).

1.1. Facteur de résonance

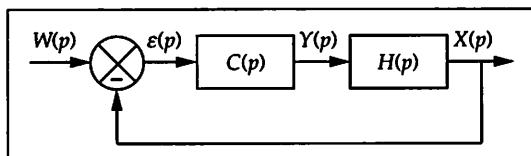


Figure 5.1. Système asservi à retour unitaire

Pour un système asservi à retour unitaire (fig. 5.1) :

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p) H(p)}{1 + C(p) H(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)}$$

Le facteur de résonance Q est défini par : $Q = \frac{F_{\text{maxi}}}{F(0)}$. Il peut être exprimé en décibels : $Q_{\text{dB}} = 20 \lg F_{\text{maxi}} - 20 \lg F(0)$.

La pulsation de résonance ω_r est la pulsation pour laquelle $|F(j\omega)|$ passe par sa valeur maximale F_{maxi} . Dans l'abaque de Black (fig. 5.2), la résonance s'observe par la tangence à un contour isomodule de Black à la pulsation ω_r . Lorsque la fonction de transfert en chaîne ouverte possède une intégration, la valeur de Q correspond

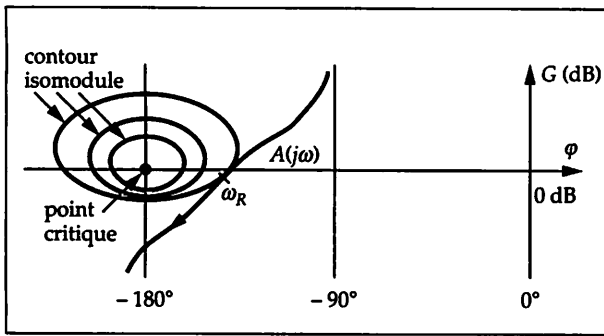


Figure 5.2. Courbe représentative de $A(j\omega)$ dans l'abaque de Black

directement au contour isomodule de Black puisque $F(0) = 1$.

Fixer une valeur à ce coefficient revient en pratique à donner des valeurs minimales aux marges de gain et de phase. Plus la courbe représentative de $A(j\omega)$ s'approche du point critique, moins le système asservi est amorti. Les valeurs couramment utilisées sont $1,1 < Q < 1,3$ (ou respectivement en décibels : $0,83 \text{ dB} < Q < 2,3 \text{ dB}$).

Pour un système du second ordre, le coefficient d'amortissement ξ est directement lié au facteur Q par la relation : $Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ (Boîte à outils 1, figure 2.)

1.2. Réglage du correcteur

Le régulateur PID déforme la courbe représentative de la fonction de transfert aux basses fréquences par l'action intégrale et aux plus hautes fréquences par l'action dérivée. Le rapport habituellement admis entre « hautes » et « basses » fréquences est de l'ordre de 4, c'est pourquoi la relation $T_i = 4 T_d$ est souvent appliquée. Un point de cette courbe n'est pas déplacé par cette déformation. Ce point, pivot de la déformation, correspond à la pulsation ω_a telle que $\omega_a = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}}$.

Tracer la courbe de Black de $A(j\omega)$ pour un gain G_r unitaire du régulateur de structure mixte.

Fixer la valeur de l'amortissement ξ en fonction de la réponse temporelle désirée. Choisir ω_a sur $A(j\omega)$ d'autant plus près de l'axe vertical -90° que l'on souhaite un amortissement important.

À partir de la valeur choisie pour ω_a , calculer $T_i = \frac{2}{\omega_a}$ et $T_d = \frac{1}{2\omega_a}$.

Tracer la courbe de Black $A(j\omega)$ pour $G_r = 1$, $T_i = \frac{2}{\omega_a}$ et $T_d = \frac{1}{2\omega_a}$.

Ajuster la valeur de G_r pour translater verticalement la courbe de Black afin d'obtenir ce que l'on veut imposer :

- marge de gain G_m ou marge de phase φ_m ;
- ou facteur de résonance Q .

Retoucher éventuellement G_r , T_i et T_d pour ajuster la réponse temporelle.

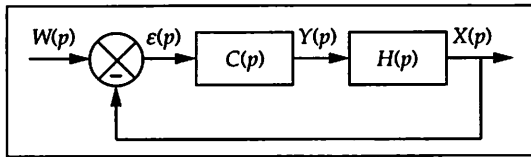
2. RÉGLAGE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Il s'agit d'obtenir, en chaîne fermée, une réponse temporelle bien définie pour une excitation d'entrée imposée. Généralement on désire, pour une variation de la consigne en échelon de position, soit une réponse du premier ordre, soit une réponse du deuxième ordre apériodique ou périodique amortie. Attention cependant ! les fonctions perturbatrices n'ayant pas été prises en compte lors de l'élaboration du correcteur, leurs influences sur la forme de la courbe de réponse ne sont pas connues.

Le régulateur PID est limité à ses trois actions (voir chapitre précédent) et, par conséquent, cette méthode de réglage se limite à des procédés ayant des fonctions de transfert relativement simples.

À partir du schéma-bloc (fig. 5.3 a), on cherche les valeurs des coefficients du régulateur $C(p)$ qui permettent d'obtenir la réponse désirée pour $X(p)$ (fig 5.3 b).

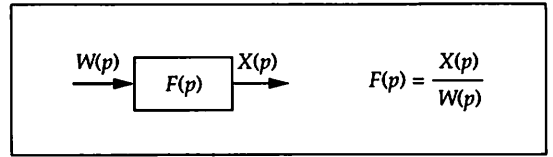
On a :



a) Schéma-bloc du système étudié

$$\frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)}$$

On veut obtenir :



b) Fonction de transfert désirée

avec soit : $F(p) = \frac{1}{1 + \theta p}$ ①

soit : $F(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$ ②

Dindeleux a appelé ① le critère « idéal » et ② le critère « parfait ».

Figure 5.3

On connaît entièrement $H(p)$ et bien sûr $F(p)$ puisque, à travers le cahier des charges, on a choisi θ , ou ξ et ω_n .

La fonction de transfert du régulateur est : $C(p) = \frac{F(p)}{H(p)[1 - F(p)]}$

Il ne reste qu'à identifier terme à terme pour obtenir le type de régulateur et les valeurs de ses paramètres.

Ce principe de réglage est utilisable avec d'autres fonctions $F(p)$ et d'autres sortes d'entrée (par exemple rampe ou accélération), mais aussi avec des correcteurs numériques.

3. RÉGLAGE DE NASLIN

Naslin propose une méthode de réglage dans laquelle la valeur du premier dépassement, pour un changement en échelon de position, est fixée généralement entre 10 et 40 %. Les calculs algébriques conduisent à un bon compromis rapidité-stabilité. Cette méthode s'appelle aussi méthode des polynômes normaux à amortissement réglable.

■ PREMIER CAS

La fonction de transfert en chaîne fermée est de la forme :

$$F(p) = \frac{a_0}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n}$$

La méthode de Naslin a été établie pour n compris entre 3 et 8.

Il faut :

- calculer les rapports caractéristiques suivants :

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} ; \alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} ; \alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2 a_4} ; \dots ; \alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}}$$

- fixer la valeur du premier dépassement désiré, soit D % ;
- calculer la valeur α correspondante par la relation empirique : $\lg D \% \approx 4,8 - 2\alpha$, si $1,5 < \alpha < 2,3$;
- écrire que tous les rapports caractéristiques sont égaux à α : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$;
- à partir de ces équations, calculer les paramètres (B_p, T_i, T_d) du régulateur.

Si l'on ne peut pas trouver $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, alors le dépassement réel sera inférieur à D % si α est inférieur à chacun des rapports caractéristiques ($\alpha \leq \alpha_1, \alpha \leq \alpha_2, \dots, \alpha \leq \alpha_n$), mais le temps de réponse sera plus long que prévu.

Si le numérateur de la fonction de transfert en chaîne fermée n'est pas constant, l'application des résultats précédents peut conduire à un dépassement réel supérieur au dépassement préalablement fixé.

La méthode de Naslin s'applique encore à condition de modifier la valeur de α .

■ DEUXIÈME CAS

La fonction de transfert en chaîne fermée est de la forme :

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n}$$

Remplacer α par $\alpha_c = 4\alpha - 4,5$ et recommencer le calcul.

■ TROISIÈME CAS

La fonction de transfert en chaîne fermée est de la forme :

$$F(p) = \frac{a'_0 + a'_1 p}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n} \text{ avec } a'_0 \neq a_0 \text{ et } a'_1 \neq a_1$$

La valeur de α provoque un plus grand dépassement que celui choisi initialement. L'amortissement correspond à α_e (α équivalent) donné par la relation :

$$\alpha_e = 1,5 + \frac{a'_0 a_1}{4 a_0 a'_1} (\alpha - 1,5)$$

Soit on remplace α par $\alpha_e = 1,5 + \frac{a'_0 a_1}{4 a_0 a'_1} (\alpha - 1,5)$ et on recommence le calcul, soit

on incrémente α jusqu'à trouver un coefficient α_e de valeur adéquate (informatique conseillée).

■ QUATRIÈME CAS

La fonction de transfert en chaîne fermée est de la forme :

$$F(p) = \frac{a'_0 + a'_1 p + a'_2 p^2}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n} \text{ avec } a'_0 \neq a_0, a'_1 \neq a_1 \text{ et } a'_2 \neq a_2$$

La valeur de α provoque un plus grand dépassement que celui choisi initialement. L'amortissement correspond à α_e (α équivalent) donné par la relation :

$$\alpha_e = 1,5 + \frac{\omega_0'^2}{16 \xi'^3 \omega_0^2} (\alpha - 1,5)$$

Soit on remplace α par $\alpha_c = 1,5 + \frac{16 \xi'^3 \omega_0^2}{\omega_0'^2} (\alpha - 1,5)$ avec : $\xi' = \sqrt{\frac{a_1'^2}{4 a_0' a_2'}}$,

$\omega_0 = \frac{a_0}{a_1}$ et $\omega_0' = \frac{a_0'}{a_1'}$ puis on recommence le calcul (il arrive souvent que la suite ne converge pas), soit on incrémente α jusqu'à trouver un coefficient α_e de valeur adéquate (informatique conseillée).

■ TEMPS DE RÉPONSE RÉDUIT

Naslin a établi que le temps de réponse réduit t_r (correspondant pour lui au premier dépassement) était sensiblement égal à : $t_r \approx \frac{2,2}{\omega_0}$, soit $t_r \approx \frac{2,2 a_1}{a_0}$

Dans le cas où le numérateur n'est pas une constante (cas 2, 3 et 4), il faut remplacer ω_0 par ω_{oc} , pulsation donnée par les relations suivantes :

<p>Pour les cas 2 et 3 prendre ω_{oc} tel que :</p> $\frac{1}{\omega_{oc}} = \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{2 \omega_0'} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1'}{a_0'}$	<p>Pour le cas 4 prendre ω_{oc} tel que :</p> $\frac{1}{\omega_{oc}} = \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0'} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1'}{a_0'}$
--	--

4. RÉGLAGE D'UNE RÉGULATION QUALITATIVE OPTIMALE (RQO)

Lorsqu'un système comporte plusieurs constantes de temps et un temps mort pur, le correcteur PID ne peut plus contrôler ce système de façon satisfaisante. Une autre stratégie de commande est nécessaire et la régulation qualitative optimale (RQO) est alors envisageable.

La RQO est une régulation par modèle de référence. Cette stratégie RQO a été proposée par Dindeleux vers 1969, à une époque où les systèmes numériques de contrôle-commande n'étaient pas encore développés. Aujourd'hui, cette stratégie est facile à mettre en œuvre, grâce notamment aux bibliothèques de fonctions préprogrammées des systèmes numériques de conduite actuels.

4.1. Principe d'une régulation par modèle de référence

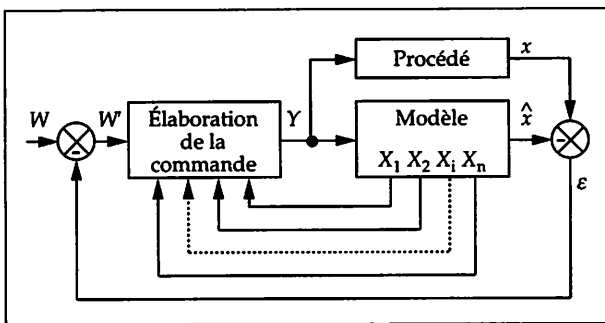


Figure 5.4. Principe d'une régulation par modèle de référence

Le procédé à réguler est commandé en parallèle avec le modèle du procédé (fig. 5.4). La commande Y est élaborée à l'aide de la connaissance des états x_i intermédiaires et de la réponse souhaitée. La commande Y dépend également de l'écart $x - \hat{x}$. Dans certains cas, l'algorithme de commande est modifié automatiquement en fonction de divers critères à partir d'observations et de calculs. L'avantage d'une telle régulation est sa très grande robustesse, c'est-à-dire sa très bonne aptitude à rester stable malgré les variations des paramètres du procédé réel.

■ PRINCIPE DE LA RQO

Comme dans le cas précédent, le procédé à réguler est commandé en parallèle avec le modèle du procédé. La commande Y est une combinaison linéaire élaborée à partir des états x_i intermédiaires, de l'écart $x - \hat{x}$ et dépend de la réponse souhaitée. L'algorithme de commande est déterminé une fois pour toutes en fonction d'une réponse désirée x pour un certain signal d'entrée w .

4.2. Détermination pratique de l'algorithme de calcul RQO

- Définir un modèle représentant au mieux le procédé (le modèle de Strejc à ordre entier est bien approprié pour la RQO).
- Établir la ou les équations d'états, c'est-à-dire la ou les relations entre les dérivées énièmes des états x_i , les états x_i et la commande Y , soit $x^{(n)} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, Y)$.
- Définir la réponse (ou « trajectoire ») désirée, généralement apériodique, entre \hat{x} et w' sachant qu'elle doit être du même ordre que le modèle défini précédemment.
- À partir de l'équation de la réponse imposée et des équations d'états, établir l'équation de commande, c'est-à-dire :

$$Y = f(w', x_1, x_2, \dots, x_n).$$

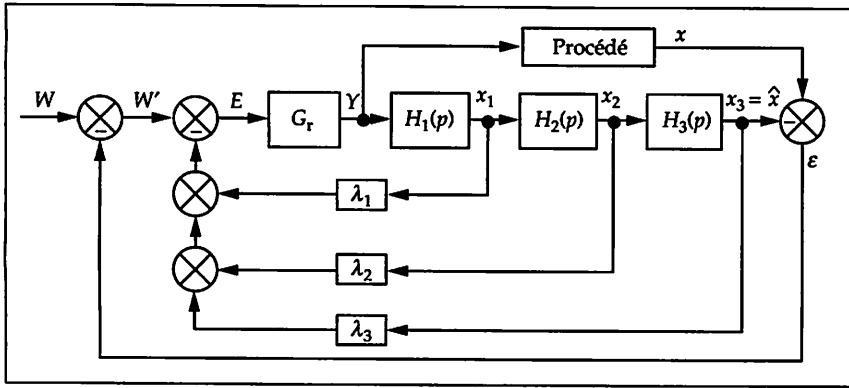


Figure 5.5. Régulation qualitative optimale d'un procédé

Le schéma de la figure 5.5 montre la RQO d'un procédé modélisé par trois fonctions de transfert (trois fonctions du premier ordre par exemple). La commande Y est une combinaison linéaire de x_1 , x_2 , x_3 et w' comme on peut l'observer sur le schéma :

$$Y = G_r [w' - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3]$$

où λ_1 , λ_2 , λ_3 et G_r sont des constantes.

Les fonctions préprogrammées des systèmes numériques de contrôle-commande sont exprimées avec l'opérateur de Laplace. Si la période d'échantillonnage est suffisamment petite devant la constante de temps du procédé à réguler, cette stratégie de RQO a l'avantage de pouvoir être directement appliquée sans avoir recours au calcul numérique.

5. RÉGLAGE PAR RÉGULATEUR PID NUMÉRIQUE R-S-T

5.1. Principe d'un régulateur R-S-T

C'est un régulateur PID numérique dont la commande est une moyenne, pondérée par les coefficients du régulateur, de la sortie mesurée X aux instants $t, t-1, t-2, \dots, t-n$, des valeurs précédentes de la commande Y aux instants $t-1, t-2, \dots, t-m$, et de la consigne W (fig. 5.6).

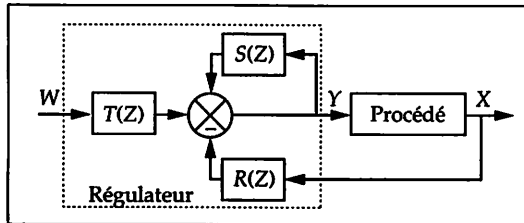


Figure 5.6. Procédé asservi par un régulateur R-S-T

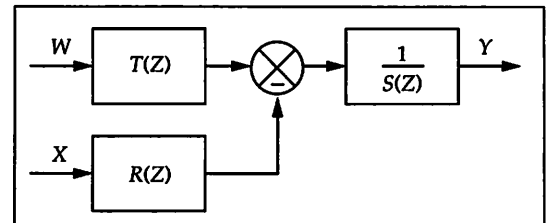


Figure 5.7. Structure d'un régulateur R-S-T

La structure d'un tel régulateur comprend trois fonctions R-S-T (fig. 5.7) et l'équation de la commande s'écrit :

$$Y(Z) = -\frac{R(Z)}{S(Z)} X(Z) + \frac{T(Z)}{S(Z)} W(Z)$$

avec $R(Z) = T(Z) = r_0 + r_1 Z^{-1} + r_2 Z^{-2}$ et $S(Z) = (1 - Z^{-1})(1 + s_1 Z^{-1})$.

La fonction de transfert échantillonnée en chaîne ouverte de l'ensemble CNA (convertisseur numérique analogique), BOZ (bloqueur d'ordre zéro), procédé continu et CAN (convertisseur analogique numérique), est notée $H_b(Z) = \frac{B(Z)}{A(Z)}$.

La fonction de transfert en chaîne fermée est : $F(Z) = \frac{B(Z) R(Z)}{A(Z) S(Z) + B(Z) R(Z)} = \frac{B(Z) R(Z)}{P(Z)}$

où $P(Z) = A(Z) S(Z) + B(Z) R(Z) = 1 + p_1 Z^{-1} + p_2 Z^{-2} + \dots + p_n Z^{-n}$ définit les pôles du système en chaîne fermée.

Les performances désirées en chaîne fermée sont exprimées en terme de pôles souhaités. Le plus souvent $P(Z)$ est un polynôme du 2^e degré correspondant à la discrétisation d'un système continu du 2^e ordre dont le coefficient ξ et la pulsation ω_n sont fixés.

5.2. Méthode de calcul des paramètres du régulateur PID numérique R-S-T

- Déterminer le modèle échantillonné du procédé discret.
- Spécifier les performances en chaîne fermée et déterminer $P(Z)$.
- À partir de l'équation $P(Z) = A(Z) S(Z) + B(Z) R(Z)$, calculer les coefficients des polynômes $R(Z)$, $S(Z)$ et $T(Z)$. Ce sont les paramètres du régulateur PID numérique R-S-T.
- Les éventuels dépassements indésirables en chaîne fermée peuvent être éliminés en remplaçant $T(Z) = R(Z)$ par $T(Z) = R(1)$.

Cette méthode de calcul ne s'applique qu'à un procédé continu modélisable par une fonction de transfert de degré égal à 2 au maximum, avec ou sans retard pur. Le retard pur du procédé doit être cependant inférieur à une période d'échantillonnage.

6. RÉGLAGE PRATIQUE DE ZIEGLER ET NICHOLS EN CHAÎNE FERMÉE OU MÉTHODE DU POMPAGE

Cette méthode, mise au point en 1942, est la plus connue des méthodes pratiques de réglage des boucles de régulation. Elle s'applique aussi bien à un procédé autoréglant qu'à un procédé intégrateur, à condition néanmoins qu'il soit possible de le mettre en pompage (oscillations juste entretenues). L'avantage de cette méthode est qu'il n'y a pas besoin de connaître la fonction de transfert du procédé et que le réglage (sans calcul compliqué) se fait directement sur le site.

Après avoir porté la mesure près du point de consigne désiré (manuellement ou automatiquement avec des valeurs « neutres » des paramètres PID), le régulateur est réglé en action proportionnelle seule. Le gain G_r est alors augmenté progressivement jusqu'à obtention du pompage sans que l'organe réglant ne soit jamais en saturation. Le gain critique G_{rc} du régulateur est le plus petit gain qui permet l'entretien des oscillations. La période d'oscillation T_{osc} est mesurée sur l'enregistrement.

Les réglages préconisés par Ziegler et Nichols, en fonction de la structure du régulateur utilisé, sont donnés dans le tableau 5.1.

	P	PI	PI parallèle	PID série	PID parallèle	PID mixte
G_r	$\frac{G_{rc}}{2}$	$\frac{G_{rc}}{2,2}$	$\frac{G_{rc}}{2,2}$	$\frac{G_{rc}}{3,3}$	$\frac{G_{rc}}{1,7}$	$\frac{G_{rc}}{1,7}$
T_i	Intégration annulée sinon T_i au maximum	$\frac{T_{osc}}{1,2}$	$\frac{2 T_{osc}}{G_{rc}}$	$\frac{T_{osc}}{4}$	$\frac{0,85 T_{osc}}{G_{rc}}$	$\frac{T_{osc}}{2}$
T_d	0	0	0	$\frac{T_{osc}}{4}$	$\frac{T_{osc} G_{rc}}{13,3}$	$\frac{T_{osc}}{8}$

Tableau 5.1

Ces valeurs peuvent ne pas convenir au cahier des charges, le dépassement pouvant être trop important; il faut alors légèrement modifier ces réglages (par exemple en diminuant G_r).

EXERCICES

Exercice 1

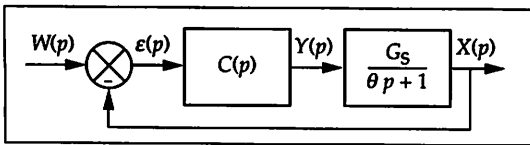


Figure 5.8

À partir du schéma-bloc de la figure 5.8, on se propose d'étudier les valeurs des coefficients du régulateur $C(p)$ qui permettent d'obtenir des réponses apériodiques de la mesure X . On impose $C(p) = G_r (1 + 1/T_i p)$

- 1 ▾ Déterminer la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$.
 - 2 ▾ À partir de $F(p)$, exprimer l'équation caractéristique.
 - 3 ▾ À partir de cette équation caractéristique, établir la relation donnant T_i/θ en fonction de G_r et G_s pour obtenir des réponses indicielles apériodiques.
 - 4 ▾ Représenter cette relation sur un graphe en précisant les zones où les réponses sont apériodiques et les zones où elles sont oscillantes amorties.
 - 5 ▾ On donne : le gain statique $G_s = 1,5$, la constante de temps $\theta = 50$ s.
- ▷ Quelles valeurs de réglage du régulateur faut-il adopter pour obtenir la réponse apériodique la plus rapide ?
- 6 ▾ Le régulateur est mis en position manuelle et on force sa sortie Y à 50 % ; la mesure X se stabilise alors à 50 %. La consigne W est ajustée à 50 %. Le régulateur est mis en mode automatique et un changement de 10 % de la consigne (échelon) est effectué.
- ▷ Tracer alors la réponse $x(t)$, ainsi que la commande $y(t)$ obtenue. Que constate-t-on ? Ces réglages peuvent-ils être conservés ? Pourquoi ?

Exercice 2

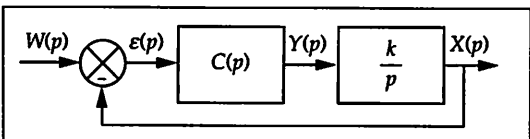


Figure 5.9

À partir du schéma-bloc de la figure 5.9, on se propose d'étudier les valeurs des coefficients du régulateur $C(p)$ qui permettent d'obtenir des réponses apériodiques de la mesure $X(p)$. Le régulateur disponible est tel que :

$$C(p) = G_r (1 + 1/T_i p)$$

- 1 ▾ Déterminer la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$.
- 2 ▾ Donner l'équation caractéristique de $F(p)$.
- 3 ▾ Exprimer la relation donnant T_i en fonction de G_r et k pour obtenir des réponses indicielles apériodiques.
- 4 ▾ Représenter cette relation sur un graphe en précisant les zones où les réponses sont apériodiques et les zones où elles sont oscillantes amorties. Que déduire de ce graphe ?

Exercice 3

On cherche à contrôler un procédé de fonction de transfert $H(p)$ à l'aide d'un régulateur de fonction de transfert $C(p)$. Pour cela deux contraintes sont définies :

- on exige une erreur statique ε_s nulle ;
- on souhaite que la réponse indicielle de la mesure $x(t)$ soit une réponse du premier ordre de constante de temps T .

La fonction de transfert du procédé est : $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{G_s}{(\theta p + 1)}$

- 1 ▾ Établir les schémas fonctionnels :
 - du procédé $H(p)$ contrôlé par $C(p)$;
 - de la fonction de transfert en chaîne fermée souhaitée, notée $F(p)$.

- 2 À partir des deux schémas établis, déterminer le régulateur $C(p)$ qui convient pour satisfaire aux deux contraintes énoncées.
- 3 Calculer les valeurs des actions du régulateur choisi pour que la réponse souhaitée en chaîne fermée soit deux fois plus rapide qu'en chaîne ouverte. Quelle est alors la marge de gain G_m ?

Exercice 4

La méthode d'identification du modèle appliquée à un procédé a permis d'établir la fonction de transfert $H(p)$ de celui-là :

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{G_s}{(\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)} \text{ où } X(p) \text{ est la mesure et } Y(p) \text{ la commande.}$$

En introduisant un régulateur, de fonction de transfert $C(p)$, en série avec ce procédé on cherche à obtenir une fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$ de la forme :

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1} \text{ où } W(p) \text{ est la consigne.}$$

- 1 Montrer qu'un régulateur PI de structure série peut satisfaire au fonctionnement désiré.
- 2 Pour l'application numérique on donne : $G_s = 1,5$; $\theta_1 = 4$ min et $\theta_2 = 10$ min.
 - ▷ Calculer les valeurs des paramètres du régulateur $C(p)$ pour obtenir un coefficient d'amortissement $\xi = 0,5$. Quelle est alors la pulsation propre non amortie ω_n ? Quelle est la valeur du premier dépassement D_1 de la réponse indicielle ?
- 3 Après une période d'essai du procédé il s'avère finalement qu'il est préférable d'obtenir la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$ suivante :

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{1}{(\theta_d p + 1)^2} \text{ avec } \theta_d = 8 \text{ min.}$$

- ▷ Calculer les valeurs des nouveaux paramètres du régulateur $C(p)$ pour obtenir une telle fonction de transfert.
- 4 On décide d'ajouter une action dérivée. On fixe $T_d = \theta_1$ et $T_i = \theta_2$.
 - ▷ Déterminer alors la fonction de transfert en chaîne fermée obtenue. Pour un changement de 10 % en échelon de W , calculer le temps de réponse à 5 % pour une bande proportionnelle $B_p = 37,5$ %.

Exercice 5

Un régulateur de fonction de transfert $C(p)$ est bouclé avec un procédé modélisé selon un système non évolutif du troisième ordre (fig. 5.10).

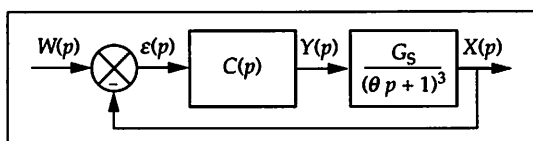


Figure 5.10

On donne : $G_s = 2$ et $\theta = 20$ s.

Le régulateur est de type PID de structure parallèle :

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r + \frac{K_i}{p} + T_d p$$

Les contraintes imposées pour le fonctionnement du procédé sont les suivantes :

- 1° Pour des raisons de sécurité, lors du régime transitoire le premier dépassement doit être inférieur à 8 % en valeur relative.
- 2° Lorsqu'un changement de consigne est effectué :
 - la mesure ne doit pas évoluer trop rapidement pour des raisons de fabrication ; le temps du premier dépassement doit être de 2 minutes au moins ;

• pour des raisons d'économie, le temps du premier dépassement doit être inférieur à 2,5 minutes.

- 1 En employant la méthode de Naslin, trouver les paramètres de réglage du régulateur satisfaisant à la première contrainte.
- 2 Les réglages ainsi trouvés satisfont-ils à la deuxième contrainte? Si oui, quel est le temps de réponse t_r prévisible? Si non, que préconiser?

Exercice 6

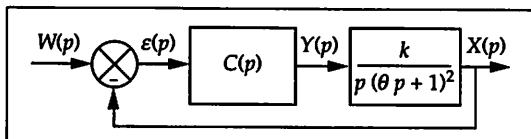


Figure 5.11

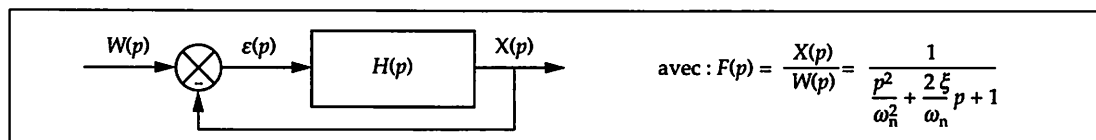
L'étude porte sur un procédé modélisé par un système intégrateur à double constante de temps θ . Celui-ci est contrôlé par un régulateur de fonction de transfert $C(p)$ (fig. 5.11) :

$$C(p) = G_r \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) (1 + T_d p) \text{ avec } k = 0,08 \text{ s}^{-1} \text{ et } \theta = 25 \text{ s.}$$

- 1 Exprimer la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$ obtenue.
- 2 Calculer $F(p)$ si les constantes de temps T_i et T_d sont supprimées. Donner alors une méthode de réglage de G_r (calcul non demandé).
- 3 Calculer $F(p)$ si $T_i = \theta$ et la constante de temps T_d est supprimée. Donner alors une méthode de réglage de G_r (calcul non demandé).
- 4 Calculer $F(p)$ si la constante de temps T_i est supprimée et $T_d = \theta$. Quelle méthode de réglage de G_r peut-on utiliser (calcul non demandé)?
- 5 Calculer $F(p)$ lorsque $T_i = T_d = \theta$. Quelle méthode de réglage de G_r est préconisée (calcul non demandé)?
- 6 Quel réglage paraît le meilleur compromis? Pourquoi?

Exercice 7

Le but de cet exercice théorique est d'établir une correspondance entre le coefficient d'amortissement ξ d'un système asservi du second ordre, la marge de phase φ_m et le facteur de résonance Q .



$$\text{avec : } F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

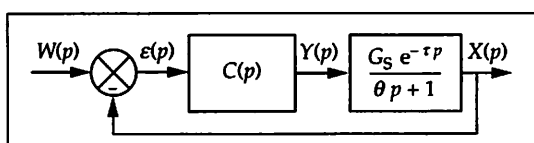
Figure 5.12

- 1 À l'aide du schéma fonctionnel de la figure 5.12 et de $F(p)$, déterminer la fonction de transfert $H(p)$.
 - 2 Calculer le module et l'argument de $H(j\omega)$.
 - 3 Exprimer la marge de phase φ_m en fonction de ξ et ω_n . Exprimer la pulsation réduite $u = \omega/\omega_n$ en fonction de ξ et φ_m .
 - 4 Déterminer ensuite la relation $\varphi_m = f_1(\xi)$.
 - 5 On désigne par Q le facteur de résonance et par M_{pw} le pic de résonance.
- ▷ Exprimer le module F_r (en décibels) de $F(ju)$ pour la pulsation réduite de résonance $u_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$. Exprimer la relation entre Q et M_{pw} puis la relation $M_{pw} = f_2(\xi)$.

- 6 Donner la relation $f_3(\xi)$ entre la valeur M_{pt} du premier dépassement de la réponse indicielle et ξ .
- 7 Établir les graphes de $\varphi_m = f_1(\xi)$, $M_{pw} = f_2(\xi)$, et $M_{pt} = f_3(\xi)$. Quelle est la valeur de ξ pour $Q = 2,3$ dB? Quelle est alors la valeur de φ_m ?

Exercice 8

L'étude porte sur un procédé modélisé par la méthode de Broïda. Celui-là est contrôlé par un régulateur de fonction de transfert $C(p)$ comme le montre la figure 5.13.



Le régulateur PID série a pour fonction de transfert :

$$C(p) = G_r \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$$

Figure 5.13

- 1 Établir la fonction de transfert en chaîne ouverte, notée $A(p)$, du système asservi étudié. Les valeurs trouvées lors de l'identification sont : $\theta = 40$ s, $\tau = 8$ s et $G_s = 1,25$.
- 2 **Étude en action proportionnelle**
 - ▷ Exprimer le module et l'argument de $A(j\omega)$ pour $G_r = 1/G_s$.
 - ▷ Tracer la courbe de Nyquist de $A(j\omega)$. Déterminer la marge de gain G_m et la marge de phase φ_m . Que peut-on en conclure?
- 3 **Étude en action proportionnelle et intégrale**
 - ▷ Exprimer le module et l'argument de $A(j\omega)$ si $T_i = \theta$.
 - ▷ Tracer la courbe de Nyquist de $A(j\omega)$ pour $G_r = 1/G_s$. Déterminer la marge de gain G_m et la marge de phase φ_m .
 - ▷ Déterminer la valeur de G_r pour que la marge de gain soit $G_m = 6$ dB.
- 4 **Étude en action proportionnelle, intégrale et dérivée**
 - ▷ Exprimer le module et l'argument de $A(j\omega)$ si $T_i = \theta$.
- 5 On impose une marge de gain $G_m = 6$ dB et un temps d'action dérivée $T_d = 1/\omega_c$.
 - ▷ Déterminer les valeurs de G_r et T_d .

Exercice 9

On désire contrôler un procédé de fonction de transfert $H(p)$ par un régulateur PID de structure mixte (fig. 5.14).

Les exigences imposées à cette régulation sont, par ordre d'importance : une marge de gain de 10 dB, un écart statique nul, un dépassement maximal de 20 % de la réponse

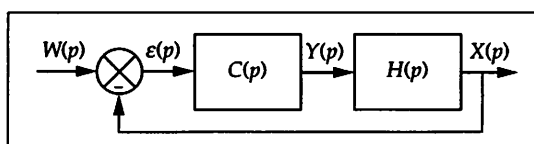


Figure 5.14

indicielle et une réponse indicielle la plus rapide possible. Une étude préliminaire en régime harmonique de $H(p)$ a permis de relever le module, noté A , et l'argument, noté φ , pour différentes pulsations ω (tableau 5.2).

ω (rad/s)	0,004	0,016	0,039	0,056	0,080	0,101	0,125	0,136	0,152	0,187	0,242
A (dB)	-3,9	-4,0	-4,7	-5,4	-6,7	-7,9	-9,4	-10,1	-11,1	-13,2	-16,0
φ (°)	-5,1	-20,1	-49,2	-67,4	-92,5	-111,6	-132,7	-142,3	-156,0	-180,7	-213,8

Tableau 5.2

EXERCICES

- 1 Tracer le lieu de Black de $C(p) H(p)$ lorsque $C(p) = G_r = 1$.
- 2 Quel est l'ordre de grandeur de la pulsation ω_a envisageable pour la correction de cette courbe représentative de cette fonction de transfert ?
- 3 La pulsation choisie est $\omega_a = 0,125$ rad/s.
- ▷ À partir de cette valeur, calculer les constantes de temps T_i et T_d .
- 4 À partir des valeurs des constantes T_i et T_d trouvées, et pour $G_r = 1$, tracer le lieu de Black de $C(p) H(p)$.
- 5 En supposant le système asservi comme un système du second ordre équivalent, calculer la valeur du facteur de résonance Q à régler.
- 6 Régler le gain G_r pour obtenir le facteur de résonance Q calculé.
- 7 La marge de gain est-elle respectée ? La précision demandée est-elle obtenue ? Quelle est la pulsation de résonance ω_r ?

Exercice 10

Cet exercice porte sur l'étude d'un correcteur par modèle de référence. Ce type de correction utilise normalement la technique par retour d'état et nécessite l'emploi mathématique des matrices. Bien que cette technique soit surtout appliquée à des systèmes multivariables et de façon numérique, l'étude est proposée sur un système monovarié et traitée avec les outils analogiques classiques.

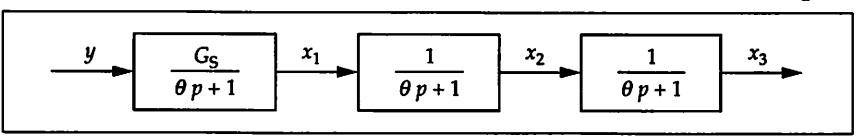


Figure 5.15

Le procédé a été identifié et modélisé par un système autorégulant du troisième ordre (fig. 5.15).

- 1 Établir les équations d'états du modèle seul, c'est-à-dire les relations $\dot{x}_1 = f(x_1, y)$, $\dot{x}_2 = f(x_1, x_2)$ et $\dot{x}_3 = f(x_2, x_3)$.

Le schéma fonctionnel représente la structure de l'ensemble asservi où l'on distingue le procédé, le modèle et le correcteur. Le correcteur associe une action proportionnelle aux retours d'états λ_1, λ_2 et λ_3 (fig. 5.16).

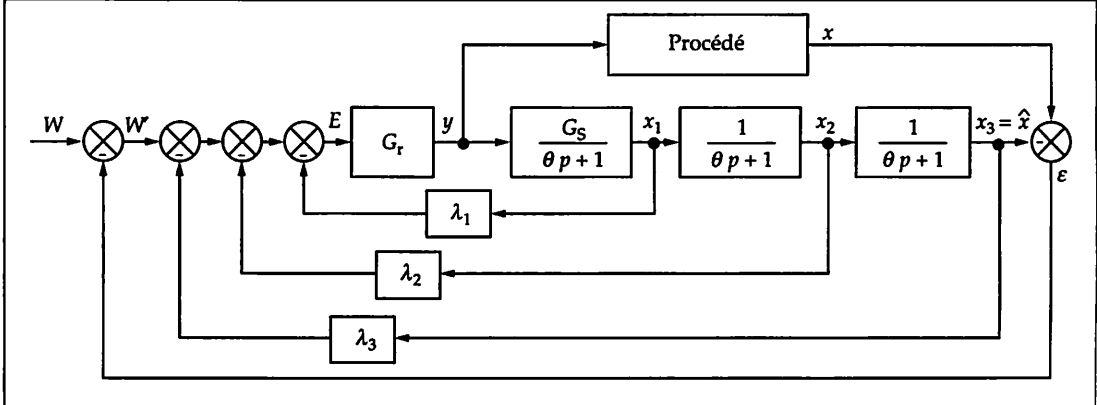


Figure 5.16

À noter que l'état x_3 est aussi la mesure estimée \hat{x} .

- 2 À partir des équations d'états, montrer que la réponse que l'on peut imposer entre la consigne corrigée W' et la mesure estimée \hat{x} est : $\frac{\hat{X}(p)}{W'(p)} = \frac{1}{(\theta_d p + 1)^3}$, θ_d étant la constante désirée pour la réponse.
- 3 Exprimer la commande y en fonction de w', x_1, x_2, x_3 .

EXERCICES

- 4 Donner les expressions de G_r , λ_1 , λ_2 , λ_3 à régler dans le correcteur en fonction des paramètres du procédé G_s , θ et de la constante imposée θ_d .
- 5 Calculer les valeurs de G_r , λ_1 , λ_2 , λ_3 sachant que $G_s = 0,8$, $\theta = 4$ min et la constante de temps imposée $\theta_d = 2$ min.

N Exercice 11

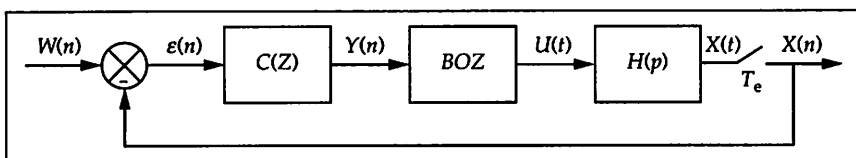


Figure 5.17

Un correcteur numérique $C(Z)$ est chargé d'asservir le procédé de fonction de transfert $H(p)$ (fig. 5.17). BOZ signifie « bloqueur d'ordre zéro ». La période d'échantillonnage est T_e et $H(p) = \frac{k}{p}$.

- 1 Déterminer la fonction de transfert bloquée (avec le BOZ) $H_b(Z) = X(Z)/Y(Z)$.
En chaîne fermée, lors d'une variation de consigne en échelon de position, on désire obtenir une mesure identique à la consigne après une période d'échantillonnage.
- 2 Déterminer le correcteur $C(Z)$.
- 3 Établir l'équation récurrente de ce correcteur.
- 4 Déterminer le correcteur $C(Z)$ pour obtenir une fonction de transfert en chaîne fermée correspondant à un premier ordre de constante de temps T .

N Exercice 12

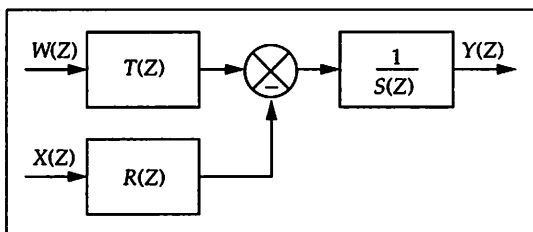


Figure 5.18

On se propose de déterminer les paramètres d'un régulateur PID numérique de structure R-S-T qui asservit un procédé de fonction de transfert échantillonnée bloquée $H_b(Z)$. Voici le schéma-bloc de ce régulateur (fig. 5.18).

R , S et T sont des polynômes exprimés en Z^{-1} .
 $X(Z)$ est la mesure, $W(Z)$ est la consigne et $Y(Z)$ est la sortie du régulateur. On fixe :
 $R(Z) = T(Z) = r_0 + r_1 Z^{-1} + r_2 Z^{-2}$ et $S(Z) = (1 - Z^{-1})(1 + s_1 Z^{-1})$

- 1 Exprimer l'équation $Y(Z)$ du régulateur en fonction de $W(Z)$ et $X(Z)$.
La fonction de transfert en Z^{-1} du procédé, bloqueur d'ordre zéro compris, est :
$$H_b(Z) = \frac{b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}$$
. Elle correspond à un système du second ordre en continu.
- 2 Déterminer les paramètres du régulateur R-S-T nécessaires à l'obtention d'une fonction de transfert en chaîne fermée telle que $F(Z) = \frac{c_1 Z^{-1}}{1 + p_1 Z^{-1}}$ corresponde à un système continu du premier ordre de constante de temps θ .
On donne : $a_1 = -1,6172$, $a_2 = 0,6689$, $b_1 = 0,0511$, $b_2 = 0,0651$ (cela correspond, pour un second ordre, à $\xi = 0,8$ et $\omega_n = 0,25$ rad/s).
On fixe $p_1 = -e^{-T_c/\theta}$ avec une constante de temps $\theta = 17$ s, $T_c = 1$ s et $c_1 = 1 + p_1$.
- 3 Calculer à 10^{-4} près les valeurs des paramètres de ce régulateur.
- 4 Avec ces valeurs et pour un changement en échelon de position de la consigne $w(t)$, la mesure $x(t)$ rejoint-elle bien la consigne $w(t)$? Pourquoi?

Exercice 1

1 Fonction de transfert en chaîne fermée

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r G_s (1 + T_i p)}{T_i p (\theta p + 1) + G_r G_s (1 + T_i p)}$$

2 Équation caractéristique

On peut écrire : $F(p) = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Dén}(p)}$

L'équation caractéristique est : $\text{Dén}(p) = T_i \theta p^2 + (G_r G_s + 1) T_i p + G_r G_s = 0$

3 Relation entre G_r , G_s et T_i/θ

On note $G = G_r G_s$. On a : $T_i \theta p^2 + (G_r G_s + 1) T_i p + G_r G_s = 0$. Le discriminant est :

$$\Delta = (G + 1)^2 T_i^2 - 4G T_i \theta$$

Pour obtenir des réponses indicielles apériodiques, il faut avoir : $\Delta \geq 0$.

On obtient alors : $\frac{T_i}{\theta} \geq \frac{4G}{(1+G)^2}$

4 Représentation graphique (fig. 5.19)

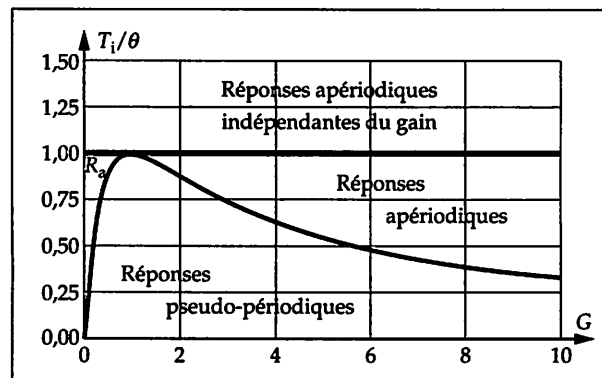


Figure 5.19

5 Valeurs de réglage

Au-delà de $T_i/\theta = 1$, la réponse est apériodique et indépendante du gain.

Le réglage proposé peut être : $T_i = \theta = 50$ s et $G_r = 5$, mais il existe beaucoup d'autres possibilités !

6 Réponse à un échelon

$X(p) = \frac{1}{\frac{T_i}{G} p + 1} W(p)$. Soit pour $w(t) = 0,1 u(t)$: $x(t) = 0,1 (1 - e^{-Gt/T_i}) u(t)$

$Y(p) = \frac{G_r (T_i p + 1)}{T_i p + G} W(p)$; $Y(p) = \frac{W(p) (T_i p + 1)}{G_s (T p + 1)}$ et, pour $W(p) = 0,1/p$:

$$y(t) = \frac{0,1}{G_s} \left(1 + \frac{T_i - T}{T} e^{-t/T} \right) u(t)$$

En observant la réponse (fig. 5.20), on constate que tant que le changement de consigne est inférieur ou égal à 10 % le signal de commande $y(t)$ n'entraîne pas de saturation et la réponse $x(t)$ demandée est assurée. Si le signal $y(t)$ provoque une saturation, le domaine de travail n'est plus linéaire et on ne peut pas garantir une réponse apériodique.

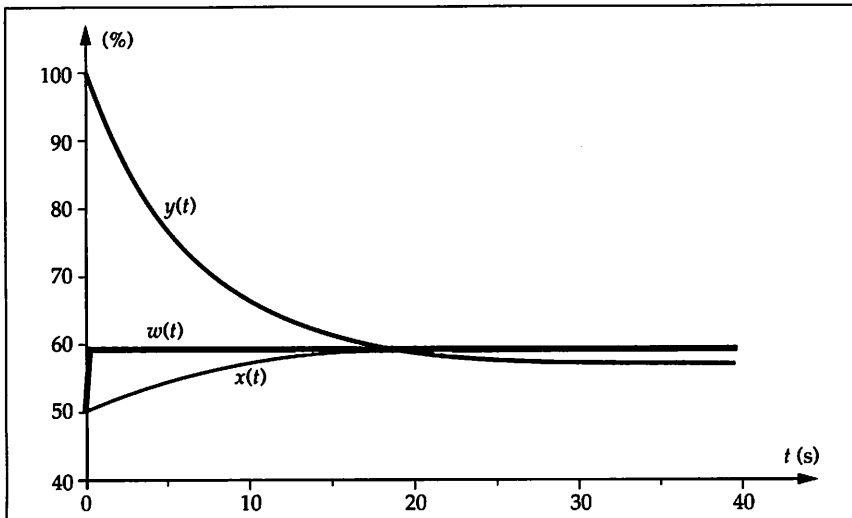


Figure 5.20

Les réglages $G_r = 5$ et $T_i = 50$ s peuvent donc être gardés. Toutefois il serait utile d'étudier les réponses à des perturbations pour confirmer ces réglages, ou pour les modifier.

Exercice 2

1 Fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r k (T_i p + 1)}{T_i p^2 + G_r k (T_i p + 1)}$$

2 Équation caractéristique

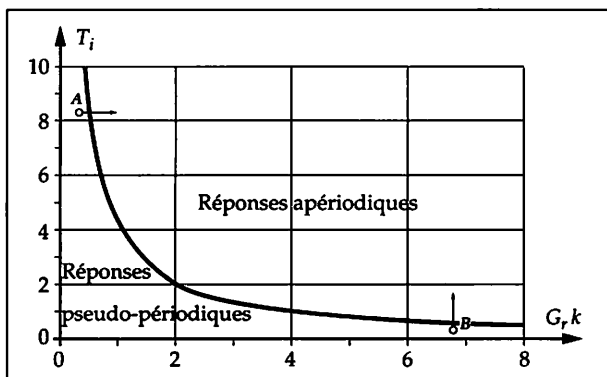
À partir de : $F(p) = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Dén}(p)}$, on obtient : $\text{Dén}(p) = T_i p^2 + G_r k T_i p + G_r k = 0$

3 Relation entre T_i , G_r et k

Le discriminant de l'équation caractéristique est : $\Delta = (G_r k T_i)^2 - 4 G_r T_i k$
 Pour obtenir des réponses indicielles apériodiques, il faut avoir : $\Delta \geq 0$.

On obtient alors : $T_i \geq 4 / G_r k$

4 Représentation graphique (fig. 5.21)



L'unité utilisée pour exprimer T_i n'est pas indiquée; elle doit être compatible avec celle utilisée pour k .

Dans la zone A : pour obtenir une réponse apériodique, pour une même valeur de T_i , il faut augmenter le gain G_r .

Dans la zone B : pour obtenir une réponse apériodique, pour une même valeur de G_r , il faut augmenter la constante de temps T_i .

Figure 5.21

Exercice 3

1 Schéma fonctionnel du système étudié (fig. 5.22)

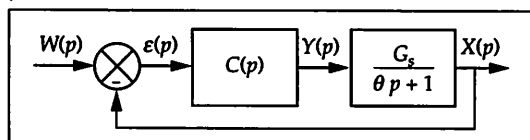


Figure 5.22

Schéma fonctionnel du système à obtenir

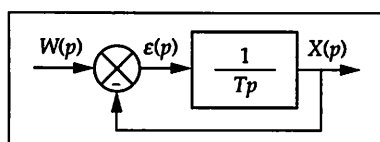


Figure 5.23

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{1}{Tp + 1}$$

En fixant un retour unitaire, le schéma à obtenir est représenté figure 5.23.

2 Détermination du régulateur

En identifiant les deux schémas (fig. 5.22 et fig. 5.23), on peut écrire : $C(p) \frac{G_s}{\theta p + 1} = \frac{1}{Tp}$

Il est facile d'obtenir : $C(p) = \frac{\theta p + 1}{G_s T p}$

ou encore : $C(p) = \frac{\theta}{G_s T} \frac{\theta p + 1}{\theta p} = \frac{1}{G_r} \frac{T_i p + 1}{T_i p}$

Il s'agit d'un régulateur PI de structure série avec : $G_r = \lambda / G_s$, $T = \theta / \lambda$, $T_i = \theta$.

3 Valeurs des actions du régulateur

La réponse désirée en chaîne fermée devant être deux fois plus rapide qu'en chaîne ouverte, on choisit donc : $\lambda = 2$. La marge de gain est bien sûr infinie puisqu'il s'agit d'un système du premier ordre ; la stabilité est absolue (quelle que soit la valeur de T_i).

Il faut donc régler : $G_r = 2 / G_s$ et $T_i = \theta$

Exercice 4

1 Fonction de transfert en chaîne fermée avec un régulateur PI de structure série

En égalant les deux fonctions de transfert, on obtient :

$$\frac{X(p)}{W(p)} = F(p) = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)} \quad \text{et} \quad F(p) = \frac{G_r G_s \frac{(T_i p + 1)}{T_i p}}{G_r G_s \frac{(T_i p + 1)}{T_i p} + (\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)}$$

Si $T_i = \theta_2$ la fonction de transfert en chaîne fermée est bien du second ordre :

$$F(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1} = \frac{1}{1 + \frac{T_i p (\theta_1 p + 1)}{G_r G_s}} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{\frac{T_i \theta_1 p^2}{G_r G_s} + \frac{T_i p}{G_r G_s} + 1}$$

2 Valeurs des paramètres du régulateur

En identifiant terme à terme les deux fonctions de transfert trouvées, on obtient :

$$1/\omega_n^2 = (T_i \theta_1)/(G_r G_s) \text{ et } 2\xi/\omega_n = T_i/(G_r G_s)$$

$$\text{De ces deux équations on tire : } G_r = \frac{T_i}{4 \theta_1 G_s \xi^2} \Rightarrow G_r = 1,67$$

La pulsation propre est $\omega_n = 0,25 \text{ rad/min}$

Le premier dépassement pour une réponse indicielle est $D_1 = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$
soit $D_1 = 16 \%$

3 Nouveaux paramètres du régulateur

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_s}{\theta_d^2 p^2 + 2 \theta_d p + 1} = \frac{1}{\frac{T_i \theta_1 p^2}{G_r G_s} + \frac{T_i p}{G_r G_s} + 1}$$

$$\text{soit : } \theta_d^2 = \frac{T_i \theta_1}{G_r G_s} \text{ et } 2 \theta_d = \frac{T_i}{G_r G_s}$$

Le temps T_i étant toujours fixé à θ_2 , on obtient alors : $G_r = 0,42$

Ces réglages correspondent à $\xi = 1$ et à $\omega_n = 0,125 \text{ rad/min}$.

4 Temps de réponse à 5 %

$$F(p) = \frac{G_r G_s (T_i p + 1)(T_d p + 1)}{G_r G_s (T_i p + 1)(T_d p + 1) + (\theta_1 p + 1)(\theta_2 p + 1)}$$

En fixant $T_i = \theta_2$ et $T_d = \theta_1$, la fonction de transfert est du premier ordre :

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{\theta_2}{G_r G_s} p} \text{ et la constante de temps est alors fixée par la valeur de } G_r.$$

$$\text{Pour } W(p) = 0,1/p, \text{ il vient : } X(p) = \frac{0,1}{p(1 + \theta p)} \text{ avec } \theta = \frac{\theta_2}{G_r G_s}$$

Pour une bande proportionnelle $B_p = 37,5 \%$ on a : $\theta = \frac{10 \times 37,5}{100 \times 1,5}$, soit $\theta = 2,5 \text{ min}$

Le temps $t_{5\%}$ pour obtenir 95 % de la variation de la mesure $x(t)$ est calculé à partir de :
 $0,95 \times 0,1 u(t) = 0,1 (1 - e^{-t_{5\%}/\theta}) u(t)$. Donc $t_{5\%} = -\theta \ln(0,05)$, soit $t_{5\%} = 2,5 \text{ min}$

Exercice 5

1 Paramètres de réglage, première contrainte

$$\text{On calcule : } F(p) = \frac{G_s \left(G_r + \frac{K_i}{p} + T_d p \right)}{(\theta p + 1)^3 + G_s \left(G_r + \frac{K_i}{p} + T_d p \right)} = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Dén}(p)}$$

$$\text{Dén}(p) = G_s K_i/p + (G_s G_r + 1) + (3\theta + T_d G_s) p + 3 \theta^2 p^2 + \theta p^3$$

Les rapports caractéristiques de Naslin sont :

$$\alpha_1 = \frac{(3\theta^2)^2}{(3\theta + T_d G_s) \theta^3} \quad \alpha_2 = \frac{(3\theta + T_d G_s)^2}{(G_s G_r + 1) 3\theta^2} \quad \alpha_3 = \frac{(G_s G_r + 1)^2}{G_s K_i (3\theta + T_d G_s)}$$

avec : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.

Pour obtenir un premier dépassement D_1 de 8 %, on utilise la formule empirique : $\lg D_1 = 4,8 - 2\alpha$, soit $\alpha = 1,95$. On trouve :

- à partir de $\alpha_1 = 1,95$: $T_d = \frac{1}{G_s} \left(\frac{9\theta}{\alpha_1} - 3\theta \right) \Rightarrow T_d = 16,15 \text{ s}$
- à partir de $\alpha_2 = 1,95$: $G_r = \frac{1}{G_s} \left(\frac{(3\theta + T_d G_s)^2}{3\theta^2 \alpha_2} - 1 \right) \Rightarrow G_r = 1,32$
- à partir de $\alpha_3 = 1,95$: $K_i = \frac{(G_s G_r + 1)^2}{\alpha_3 G_s (3\theta + T_d G_s)} \Rightarrow K_i = 0,037 \text{ rep/s}$

2 Paramètres de réglage, deuxième contrainte

Le temps de réponse t_r , prévisible avec ces réglages est :

$$t_r \approx \frac{2,2(G_s G_r + 1)}{G_s K_i}, \text{ soit } t_r = 108 \text{ s}, \text{ ce temps est inférieur à 2 minutes.}$$

Mais ces réglages ne sont valables que pour une fonction de transfert en chaîne fermée dont le numérateur est une constante, or ce n'est pas le cas ! En effet, la fonction de transfert en chaîne fermée obtenue est :

$$F(p) = \frac{G_s(G_r p + K_i + T_d p^2)}{p(\theta p + 1)^3 + G_s(G_r p + K_i + T_d p^2)} = \frac{\text{Num}(p)}{\text{Dén}(p)}$$

La valeur de $\alpha = 1,95$ va provoquer un dépassement plus grand et un temps t_r plus court. Il faut donc calculer un nouveau coefficient α_e (α équivalent) donné par la relation :

$$\alpha_e = 1,5 + \frac{\omega_0'^2}{16 \xi'^3 \omega_0^2} (\alpha - 1,5) \text{ avec : } \xi' = 0,5 \sqrt{\frac{G_r^2}{K_i T_d}}, \omega_0' = \frac{K_i}{G_r} \text{ et } \omega_0 = \frac{G_s K_i}{G_s G_r + 1}$$

On incrémente α jusqu'à trouver la bonne valeur de α_e comme le montre le tableau 5.3. L'utilisation de l'informatique est vivement conseillée.

Les nouveaux réglages obtenus sont :

$$T_d = 9,85 \text{ s}; G_r = 0,67; K_i = 0,015 \text{ rep/s}$$

Le temps au premier dépassement est : $t_r \approx \frac{2,2}{\omega_{osc}} \approx 2,2 \left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0'} \right)$

On obtient alors $t_r = 144 \text{ s}$ et le dépassement est $D_1 = 7,9 \%$. Ces réglages satisfont bien aux deux contraintes imposées.

α	Régulateur			Num(p)		Dén(p)	Correction	Résultats	
	T_d	G_r	K_i	ξ'	ω'_0	ω_0	α_e	t_r (s)	D_e (%)
1,95	16,19	1,32	0,037	0,855	0,028	0,016	1,64	59,4	33,5
1,98	15,49	1,24	0,034	0,859	0,027	0,015	1,65	65,2	31,1
2,01	14,81	1,17	0,031	0,862	0,026	0,014	1,67	71,3	28,7
2,04	14,15	1,09	0,028	0,865	0,026	0,013	1,69	77,9	26,3
2,07	13,51	1,03	0,026	0,867	0,025	0,013	1,71	85,1	23,7
2,10	12,89	0,96	0,024	0,869	0,025	0,012	1,74	92,8	21,2
2,13	12,28	0,90	0,022	0,870	0,024	0,011	1,77	101,0	18,6
2,16	11,70	0,84	0,020	0,870	0,024	0,011	1,80	109,9	16,0
2,19	11,12	0,79	0,018	0,870	0,023	0,010	1,84	119,4	13,4
2,22	10,57	0,74	0,017	0,869	0,023	0,010	1,88	129,5	10,9
2,25	10,03	0,69	0,016	0,867	0,023	0,009	1,93	140,4	8,6
2,26	9,85	0,67	0,015	0,866	0,023	0,009	1,95	144,2	7,9
2,27	9,67	0,66	0,015	0,865	0,023	0,009	1,97	148,0	7,2

Tableau 5.3

Exercice 6

1 Fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r k (T_i p + 1) (T_d p + 1)}{G_r k (T_i p + 1) (T_d p + 1) + T_i p^2 (\theta p + 1)^2}$$

2 Suppression des constantes de temps

$$\text{On a : } F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r k}{G_r k + p(\theta p + 1)^2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{G_r k} p + \frac{2\theta}{G_r k} p^2 + \frac{\theta^2}{G_r k} p^3}$$

Le dénominateur étant du 3^e ordre, il faut se préoccuper de la stabilité; G_r est alors choisi en fonction, par exemple, de la marge de gain imposée pour le procédé.

3 $T_i = \theta$

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r k (T_i p + 1)}{G_r k (T_i p + 1) + T_i p^2 (\theta p + 1)^2}$$

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r k}{G_r k + T_i p^2 (\theta p + 1)^2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{1 + \frac{\theta}{G_r k} p^2 + \frac{\theta^2}{G_r k} p^3}$$

Le dénominateur est du 3^e degré, la stabilité est donc à vérifier; en appliquant le critère de Routh on s'aperçoit qu'il manque le terme en p et que ce système est donc instable quelle que soit la valeur de G_r .

4 $T_d = \theta$

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_r k (T_d p + 1)}{G_r k (T_d p + 1) + p(\theta p + 1)^2}$$

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{\theta p + 1}{G_r k} p} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{G_r k} p + \frac{\theta}{G_r k} p^2}$$

Ici le domaine de stabilité n'est pas limité; le gain G_r est fixé, par exemple, en fonction du premier dépassement désiré, c'est-à-dire en choisissant le coefficient d'amortissement de $F(p)$.

5 $T_i = T_d = \theta$ $F(p) = \frac{1}{1 + \frac{\theta}{G_r k} p^2}$

Le système est par nature instable et cela quel que soit le gain G_r .

6 Meilleur compromis de réglage

Le réglage trouvé à la question 4 ne procure qu'une stabilité limitée. Les réglages 3 et 5 sont à éviter absolument.

Le meilleur compromis de réglage pour un tel procédé est celui de la question 4 puisqu'il permet d'avoir une erreur de statisme nulle, une stabilité absolue et un réglage fin de la réponse (apériodique ou pseudo-périodique).

Exercice 7

1 Détermination de $H(p)$

$$F(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1} = \frac{H(p)}{H(p) + 1}, \text{ soit : } H(p) = \frac{\omega_n}{2\xi p \left(1 + \frac{1}{2\xi \omega_n} p\right)}$$

2 Module et argument de $H(j\omega)$

Le module est : $|H(j\omega)| = \frac{\omega_n}{2\xi \omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{(2\xi \omega_n)^2}}}$; l'argument est : $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{\omega}{2\xi \omega_n}\right]$

3 Expression de la marge de phase φ_m

La marge de phase est définie pour un module égal à 1, donc :

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_n}{2\xi \omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{(2\xi \omega_n)^2}}} = 1$$

$$\varphi_m = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{\omega}{2\xi \omega_n}\right], \text{ soit : } \varphi_m + \arctan\left[\frac{\omega}{2\xi \omega_n}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Pour une variable $x > 0$, on a : $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.

La marge de phase est telle que : $\tan \varphi_m = \frac{2\xi \omega_n}{\omega}$ et la pulsation réduite est égale à :

$$u = 2\xi / \tan \varphi_m \quad \text{①}$$

4 Relation $\varphi_m = f_1(\xi)$

L'équation $[|H(j\omega)|]^2 = 1$ donne : $[|H(j\omega)|]^2 = \frac{\omega_n^2}{4\xi^2\omega^2 \left[1 + \frac{\omega^2}{4\xi^2\omega_n^2}\right]} = 1$

En remplaçant ω/ω_n par u , on trouve : $u^4 + 4\xi^2 u^2 - 1 = 0$

Le calcul de u donne : $u = -2\xi^2 - \sqrt{1 + 4\xi^4}$ ②

Les équations ① et ② permettent d'obtenir $\varphi_m = f_1(\xi)$:

$$\varphi_m = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}}$$

5 Module F_r et relation $M_{p\omega} = f_2(\xi)$

À partir de $F(j\omega)$, on peut écrire : $F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi u j - u^2}$

Pour la pulsation réduite de résonance : $u_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$, le module de $F(ju_r)$ est :

$$|F(ju_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

On a donc : $F_{r(\text{dB})} = -20 \lg(2\xi\sqrt{1 - \xi^2})$ qui correspond au module maximal pour $F(j\omega)$.

$Q = \frac{|F_{\text{maxi}}|}{|F_0|}$ donc : $Q_{\text{dB}} = |F_{\text{maxi}}|_{\text{dB}} - |F_0|_{\text{dB}}$ avec dans notre cas $|F_0|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$.

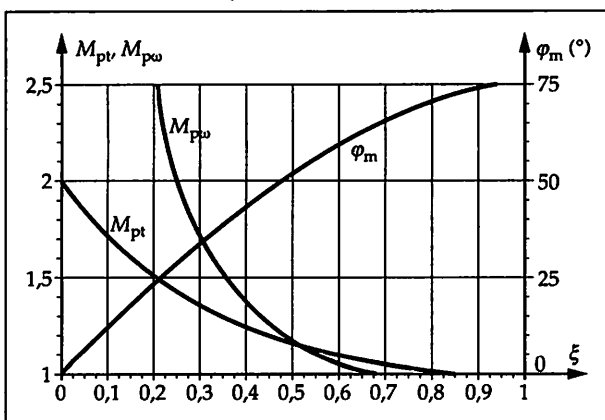
On a : $Q = M_{p\omega}$. La relation $M_{p\omega} = f_2(\xi)$ est : $M_{p\omega} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$

6 Module F_r et relation $M_{pt} = f_3(\xi)$

Le premier dépassement D_1 de la réponse indicielle d'un second ordre est :

$D_1 = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$ et $M_{pt} = 1 + D_1$. La relation $f_3(\xi)$ est donc : $M_{pt} = 1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

7 Graphes (fig. 5.24)



Pour $Q_{\text{dB}} = 2,3 \text{ dB}$, soit $Q = 1,3$, on trouve :

$$\xi = 0,43$$

$$\varphi_m = 45,8^\circ$$

Ces relations peuvent être appliquées pour des systèmes possédant un mode oscillatoire prédominant et d'ordre supérieur à 2.

Figure 5.24

Exercice 8

1 Fonction de transfert en chaîne ouverte $A(p)$

$$A(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \frac{(T_i p + 1)}{T_i p} (T_d p + 1) \frac{e^{-\tau p}}{(\theta p + 1)}$$

2 Étude en action proportionnelle

▷ Module et argument de $A(j\omega)$

Pour $G_r = 1/G_s$, on obtient : $A(j\omega) = \frac{e^{-\tau j\omega}}{(\theta j\omega + 1)}$

Module : $|A(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2 \omega^2}}$ et argument : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -\arctan(\theta\omega) - \tau\omega$

▷ Courbe de Nyquist (fig. 5.25)

Sur cette courbe, on mesure directement : $A_\pi = 0,12$ (à $\omega_\pi = 0,21$ rad/s) et $\varphi_m = \pi$

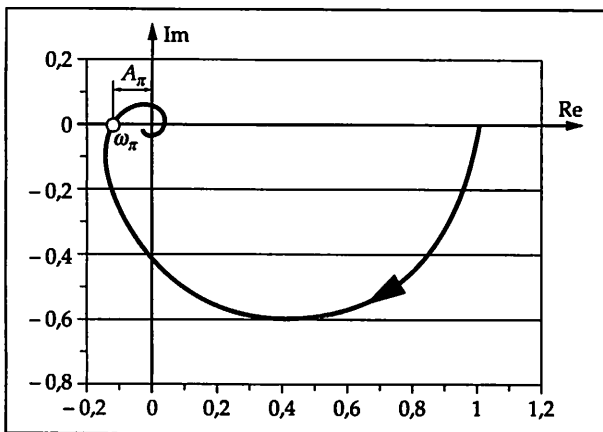


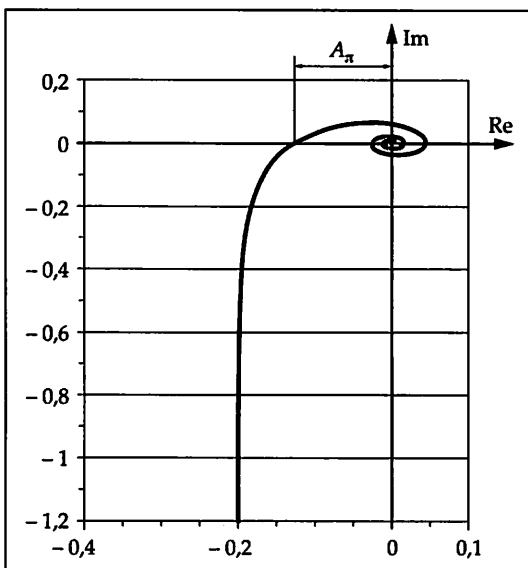
Figure 5.25

La marge de gain est :

$$G_m = 20 \lg(A_m) = 20 \lg(1/A_\pi) = 18,4 \text{ dB}$$

Bien que le rapport θ/τ soit propice au choix d'un régulateur de type PID, ce système est stable en action proportionnelle parce que le produit (gain du régulateur \times gain statique) est faible puisqu'égal à 1. En revanche, la réponse temporelle à un changement de consigne, ou à une perturbation, sera lente et la précision mauvaise (écart statique fini non nul). Une amélioration est nécessaire.

3 Étude en action proportionnelle et intégrale



▷ Module et argument de $A(j\omega)$

$$A(j\omega) = \frac{G_r (T_i j\omega + 1)}{T_i j\omega} \frac{G_s e^{-\tau j\omega}}{(\theta j\omega + 1)} = \frac{G_r G_s e^{-\tau j\omega}}{T_i j\omega}$$

Module : $|A(j\omega)| = \frac{G_r G_s}{T_i \omega}$

et argument : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -\pi/2 - \tau\omega$

▷ Courbe de Nyquist (fig. 5.26)

Sur ce graphe, on mesure directement :

$A_\pi = 0,13$ (à $\omega_\pi = 0,196$ rad/s) et $\varphi_m = 79^\circ$

La marge de gain est :

$$G_m = 20 \lg(A_m) = 20 \lg(1/A_\pi) = 17,7 \text{ dB}$$

Figure 5.26 Échelles différentes sur l'axe des imaginaires Im et sur l'axe des réels Re.

▷ **Marge de gain de 6 dB**

On désire avoir : $G_m = 6$ dB, soit : $A_m = 10^{(6/20)} = 2 = 1/A_\pi$, soit : $A_\pi = 0,5$

$A_\pi = G_r G_s / T_i \omega_\pi = 0,5$ donc : $G_r = 0,5 \times 40 \times 0,196 / 1,25 = 3,136$, soit : $G_r = 3$

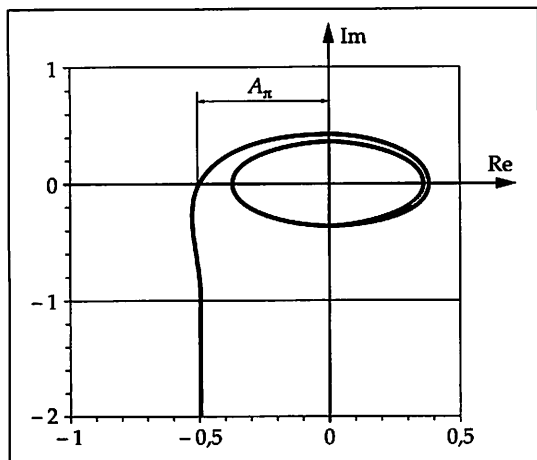
4 **Étude en action proportionnelle, intégrale et dérivée**

▷ **Module et argument de $A(j\omega)$**

$$A(j\omega) = \frac{G_r (T_d j\omega + 1)}{T_i j\omega} G_s e^{-\tau j\omega} \quad \text{Module : } |A(j\omega)| = \frac{G_r G_s \sqrt{1 + T_d^2 \omega^2}}{T_i \omega}$$

et argument : $\text{Arg}(A(j\omega)) = -\pi/2 + \arctan(T_d \omega) - \tau\omega$

5 **Valeurs de G_r et T_d**



On impose $G_m = 6$ dB, soit $A_\pi = 0,5$ et $T_d = 1/\omega_c$

$\text{Arg}(A(j\omega_c)) = -\pi/2 + \arctan(T_d \omega_c) - \tau \omega_c = -\pi$

donc $\omega_c = 3\pi/4\tau = 0,295$ rad/s

$$G_r = \frac{A_\pi T_i \omega_c}{G_s \sqrt{2}} = \frac{0,5 \times 40 \times 0,295}{1,25 \times \sqrt{2}}$$

soit $G_r = 3,33$ et $T_d = 3,39$ s

La régulation PID pour un tel système permet donc d'obtenir une stabilité correcte ($G_m = 6$ dB et $\varphi_m = 59^\circ$) et un écart de statisme nul sur un changement de consigne. La réponse temporelle risque d'être assez lente, le gain G_r étant limité pour des raisons de stabilité.

Figure 5.27 Échelles différentes sur l'axe des imaginaires Im et sur l'axe des réels Re.

Exercice 9

1 **Lieu de Black de $H(j\omega)$, noté H (fig. 5.28)**

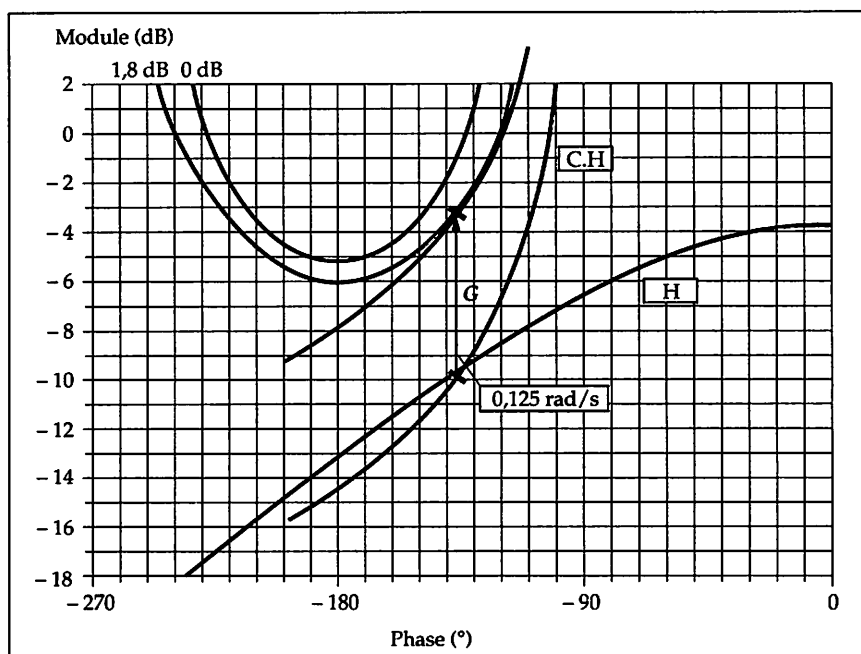


Figure 5.28

2 Ordre de grandeur de la pulsation ω_a

Puisque l'on souhaite un système en chaîne fermée avec un dépassement assez important (20 %), la pulsation ω_a à choisir doit être prise à une quarantaine de degrés à gauche de l'axe de phase -90° (fig. 5.28). À remarquer que plus on souhaite un système asservi amorti, plus il faut prendre la pulsation ω_a près de l'axe de phase -90° . Parmi les pulsations proposées, les valeurs envisageables sont :

$$\omega_a = 0,101 \text{ rad/s} \text{ ou } \omega_a = 0,125 \text{ rad/s}$$

3 Constantes de temps T_i et T_d

Pour un régulateur de structure mixte, on peut fixer : $\omega_a = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}}$

La relation classique $T_i = 4 T_d$ permet alors d'obtenir : $T_i = 16 \text{ s}$ et $T_d = 4 \text{ s}$

4 Lieu de Black de $C(p)H(p)$, noté C.H (fig. 5.28)

Pour tracer le lieu de Black de $C(p)H(p)$, il faut exprimer, tout d'abord, le module de $C(j\omega)$ et l'argument de $C(j\omega)$. En effet, le module de $C(j\omega)$ est multiplié par le module de $H(j\omega)$, et l'argument de $C(j\omega)$ va s'ajouter à l'argument φ de $H(j\omega)$.

$$C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = G_r \left(\frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} \right)$$

Pour $T_d \leq T_i/4$ les constantes de temps T_1 et T_2 du numérateur de $C(p)$ sont réelles. Après transformation, on trouve :

$$C(p) = G_r \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p} = G_r \left(\frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} \right)$$

$$\text{avec : } T_1 = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 T_d}{T_i}} \right) \text{ et } T_2 = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 T_d}{T_i}} \right)$$

$$\text{Pour } T_i = 4 T_d \text{ on a : } T_1 = T_i/2 = T_2 \text{ et } C(j\omega) = G_r \frac{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)}{T_i j\omega}$$

$$\text{Module : } |C(j\omega)| = G_r \frac{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}{T_i \omega} \Rightarrow |C(j\omega)| = \frac{1 + 64 \omega^2}{16 \omega}$$

$$\text{Argument : } \text{Arg}(C(j\omega)) = \arctan(T_1 \omega) + \arctan(T_2 \omega) - \pi/2 \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(C(j\omega)) = 2 \arctan(0,5 T_i \omega) - \pi/2$$

Le lieu de Black de $C(j\omega)H(j\omega)$, noté C.H, est représenté figure 5.28.

5 Valeur du facteur de résonance Q

Pour un système du deuxième ordre, un dépassement de 20 % correspond à un coefficient d'amortissement $\xi = 0,4$.

$$\text{Le facteur de résonance } Q \text{ d'un deuxième ordre est : } Q = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Pour $\xi = 0,4$, on obtient : $Q = 1,23$, soit $Q_{dB} = 1,8 \text{ dB}$

6 Réglage de gain G_r

Pour trouver le gain G_r à adopter, il faut translater la courbe C.H verticalement jusqu'à ce qu'elle soit tangente au contour isomodule 1,8 dB (fig. 5.28). La translation effectuée correspond à $G = 6,6$ dB; le gain du régulateur est donc : $G_r = 10^{(6,6/20)}$, soit : $G_r = 2,1$

7 Marge de gain, précision et pulsation de résonance

- Pour $G_r = 2,1$, la marge de gain mesurée (fig. 5.28) est : $G_m = 7,7$ dB.

La marge de gain de 10 dB n'est donc pas respectée.

Pour obtenir $G_m = 10$ dB, il faudrait : $G_r = 1,6$.

- L'intégrale de $C(p)$ permet d'obtenir un écart statique nul.

La précision exigée est donc obtenue.

- La pulsation de résonance mesurée (fig. 5.28) est : $\omega_r \approx 0,13$ rad/s

Exercice 10

1 Équations d'états du modèle seul

Elles sont obtenues à partir du schéma-bloc du modèle :

$$Y(p) = \frac{G_s}{1 + \theta p} X_1(p), \text{ soit : } \dot{x}_1(t) = \frac{1}{\theta} (G_s y(t) - x_1(t))$$

$$X_2(p) = \frac{1}{1 + \theta p} X_1(p), \text{ soit : } \dot{x}_2(t) = \frac{1}{\theta} (x_1(t) - x_2(t))$$

$$X_3(p) = \frac{1}{1 + \theta p} X_2(p), \text{ soit : } \dot{x}_3(t) = \frac{1}{\theta} (x_2(t) - x_3(t))$$

2 Réponse impossible entre \hat{x} et w'

Établissons la relation entre la dérivée énième, les états x_i et la commande y :

$$\hat{x} = x_3$$

$$\hat{\dot{x}} = \dot{x}_3 = \frac{1}{\theta} (x_2 - x_3)$$

$$\hat{\ddot{x}} = \frac{1}{\theta} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} (x_1 - x_2) - \frac{1}{\theta} (x_2 - x_3) \right]$$

$$\hat{\ddot{\dot{x}}} = \frac{1}{\theta} (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3) = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{1}{\theta} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \right]$$

$$\hat{\ddot{\dot{\dot{x}}}} = \frac{1}{\theta^2} \left[\frac{1}{\theta} (G_s y - x_1) - \frac{1}{\theta} (x_1 - x_2) - \frac{1}{\theta} (x_1 - x_2) + \frac{1}{\theta} (x_2 - x_3) \right]$$

$$\hat{\ddot{\dot{\dot{\dot{x}}}}} = \frac{1}{\theta^3} [G_s y - 3 x_1 + 3 x_2 - x_3]$$

La dérivée troisième de \hat{x} étant une combinaison linéaire des états x_i et de la commande y , la relation que l'on peut imposer entre \hat{x} et y (ou entre \hat{x} et w') est du troisième ordre, soit :

$$\frac{\hat{X}(p)}{W'(p)} = \frac{1}{(\theta_d p + 1)^3}$$

3 Équation de la commande y

La commande y est obtenue à partir de la relation du troisième ordre imposée et des équations d'états :

$$\theta_d^3 \hat{\ddot{x}} + 3 \theta_d^2 \hat{\dot{x}} + 3 \theta_d \hat{x} + \hat{x} = w'$$

$$\frac{\theta_d^3}{\theta^3} [G_s y - 3 x_1 + 3 x_2 - x_3] + \frac{3 \theta_d^2}{\theta^2} [x_1 - 2 x_2 + x_3] + \frac{3 \theta_d}{\theta} [x_2 - x_3] + x_3 = w'$$

En posant $\mu = \frac{\theta_d}{\theta}$ on obtient l'équation de la commande :

$$y = \frac{1}{\mu^3 G_s} [w' - 3 \mu^2 (1 - \mu) x_1 - 3 \mu (1 - \mu)^2 x_2 - (1 - \mu)^3 x_3]$$

4 Expression des paramètres du correcteur

La commande peut s'écrire sous la forme : $y = G_r [w' - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3]$

Avec : $G_r = \frac{1}{\mu^3 G_s}$; $\lambda_1 = 3 \mu^2 (1 - \mu)$; $\lambda_2 = 3 \mu (1 - \mu)^2$; $\lambda_3 = (1 - \mu)^3$

5 Valeur des paramètres du correcteur

Avec $\mu = 0,5$ et $G_s = 0,8$ on obtient : $G_r = 10$; $\lambda_1 = 0,375$; $\lambda_2 = 0,375$; $\lambda_3 = 0,125$

Exercice 11

1 Fonction de transfert échantillonnée bloquée $H_b(Z)$

Si on note $B_o(p)$ la fonction de transfert en p du bloqueur d'ordre zéro (BOZ), on obtient la transformée en Z de $B_o(p) H(p)$: $H_b(Z) = \mathcal{Z}[B_o(p) H(p)]$

$$H_b(Z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \frac{k}{p} \right] = (1 - Z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{k}{p^2} \right]$$

Avec : $\mathcal{Z} \left[\frac{k}{p^2} \right] = k \frac{T_e}{(1 - Z^{-1})^2}$, on trouve : $H_b(Z) = \frac{k T_e Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}$ ou $H_b(Z) = \frac{k T_e}{Z - 1}$

2 Fonction de transfert du correcteur

Puisque l'on veut obtenir l'égalité entre le signal de consigne et le signal de mesure après seulement une période d'échantillonnage, la fonction désirée en chaîne fermée est $F(Z) = Z^{-1}$.

Connaissant la fonction de transfert en chaîne fermée $F(Z)$, on détermine la fonction de transfert du correcteur $C(Z)$:

$$C(Z) = \frac{F(Z)}{(1 - F(Z)) H_b(Z)}$$

soit : $C(Z) = \frac{(1 - Z^{-1}) Z^{-1}}{(1 - Z^{-1}) k T_e Z^{-1}}$, c'est-à-dire : $C(Z) = 1/k T_e = G_r$

Il s'agit d'un correcteur proportionnel de gain G_r .

3 Équation récurrente du correcteur

$C(Z) = \frac{Y(Z)}{\varepsilon(Z)} = G_r$. L'équation récurrente est donc très simple puisque : $Y_n = G_r \varepsilon_n$

4 Nouvelle fonction de transfert du correcteur

Si on note $\beta = e^{-T_e/T}$, la fonction de transfert désirée en chaîne fermée est :

$$F(Z) = \frac{(1-\beta)Z^{-1}}{1-\beta Z^{-1}}$$

$$C(Z) = \frac{F(Z)}{(1-F(Z))H_b(Z)} = \frac{\frac{(1-\beta)Z^{-1}}{1-\beta Z^{-1}}}{\left[\frac{1-\beta Z^{-1} - (1-\beta)Z^{-1}}{1-\beta Z^{-1}} \right] \frac{k T_e Z^{-1}}{1-Z^{-1}}}$$

Soit en simplifiant : $C(Z) = \frac{(1-\beta)}{k T_e}$. Il s'agit d'un correcteur proportionnel.

Exercice 12

1 Équation du régulateur

$$Y(Z) = -\frac{R(Z)}{S(Z)} X(Z) + \frac{T(Z)}{S(Z)} W(Z)$$

2 Détermination des paramètres du régulateur R-S-T

Si on note : $H_b(Z) = \frac{b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}} = \frac{B(Z)}{A(Z)}$

et : $F(Z) = \frac{c_1 Z^{-1}}{1 + p_1 Z^{-1}} = \frac{B_m(Z)}{P(Z)}$

On trouve : $F(Z) = \frac{B(Z)R(Z)}{A(Z)S(Z) + B(Z)R(Z)} = \frac{B_m(Z)}{P(Z)}$

D'où : $A(Z)S(Z) + B(Z)R(Z) = P(Z)$. On obtient donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 &= b_1 r_0 + s_1 + a_1 - 1 & 0 &= b_2 r_0 + b_1 r_1 + s_1 a_1 - s_1 + a_2 - a_1 \\ 0 &= b_2 r_1 + b_1 r_2 + s_1 a_2 - s_1 a_1 - a_2 & 0 &= b_2 r_2 - a_2 s_1 \end{aligned}$$

Les paramètres du régulateur sont alors :

$$\begin{aligned} r_0 &= [(p_1 a_1 - p_1 + a_1 - 1 - a_1^2 + a_2) b_2^2 + (a_1 - 1 - p_1) a_2 b_1^2 \\ &\quad + (p_1 a_1 - p_1 a_2 + a_1 - a_1^2 + a_1 a_2) b_1 b_2] / d \\ r_1 &= [(p_1 a_2 + (a_1 - a_2)^2) b_1 b_2 + (a_2^2 - a_1 a_2) b_1^2 + (p_1 (a_2 - a_1) - a_1 - a_2 a_1 + a_1^2) b_2^2] / d \\ r_2 &= [(a_2 b_1 b_2 (a_1 - a_2) + a_2 b_2^2 (a_1 - p_1 - 1) - a_2^2 b_1^2] / d \\ s_1 &= [(a_1 - a_2) b_1 b_2^2 - (1 + p_1 - a_1) b_2^3 - a_2 b_1^2 b_2] / d \\ \text{avec : } d &= (a_1 - 1) b_1 b_2^2 - b_2^3 - (a_2 - a_1) b_1^2 b_2 - a_2 b_1^3 \end{aligned}$$

3 Valeurs numériques

$$c_1 = 0,0571 \text{ et } p_1 = -0,9429$$

$$r_0 = 7,4932; \quad r_1 = -4,5227; \quad r_2 = 3,6945; \quad s_1 = 0,3595$$

4 Précision obtenue sur un échelon de consigne

La fonction de transfert en chaîne fermée finalement obtenue est :

$$F(Z) = \frac{X(Z)}{W(Z)} = \frac{(r_0 + r_1 Z^{-1} + r_2 Z^{-2}) c_1 Z^{-1}}{1 + p_1 Z^{-1}}$$

Pour $W(Z) = \frac{A}{1 - Z^{-1}}$, il vient : $X(Z) = \frac{(r_0 + r_1 Z^{-1} + r_2 Z^{-2}) c_1 Z^{-1}}{1 + p_1 Z^{-1}} \frac{A}{1 - Z^{-1}}$

En utilisant le théorème de la valeur finale on trouve : $X(1) = \frac{A(r_0 + r_1 + r_2) c_1}{1 + p_1} = 6,6649 A$

La mesure finale est égale à 6,6649 fois la consigne. Ce « défaut » résulte du fait que les pôles du numérateur $B(Z) R(Z)$ n'ont pas été compensés lors de l'élaboration des coefficients R-S-T. Il faudrait donc tenir compte de $F(1)$ dans le correcteur pour que la mesure soit égale à la consigne, et pour cela prendre $T(Z) = R(1)$ au lieu de $T(Z) = R(Z)$.