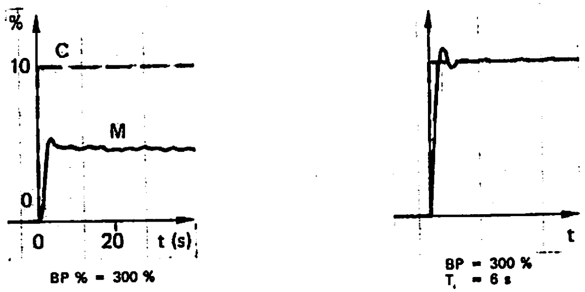



*Fig. 5.41* : Réglages par approches successives. Réponses à des variations de consigne avec TP = 2 s.

### 5.432 Application 2

Les paramètres du procédé sont : $G_s = 0{,}8$, $\theta = 1$ mn et $\tau = 205$ s.
Le temps de course de la vanne motorisée est de 20 s.
Le réglage par approches successives donne les résultats de la figure 5.42.

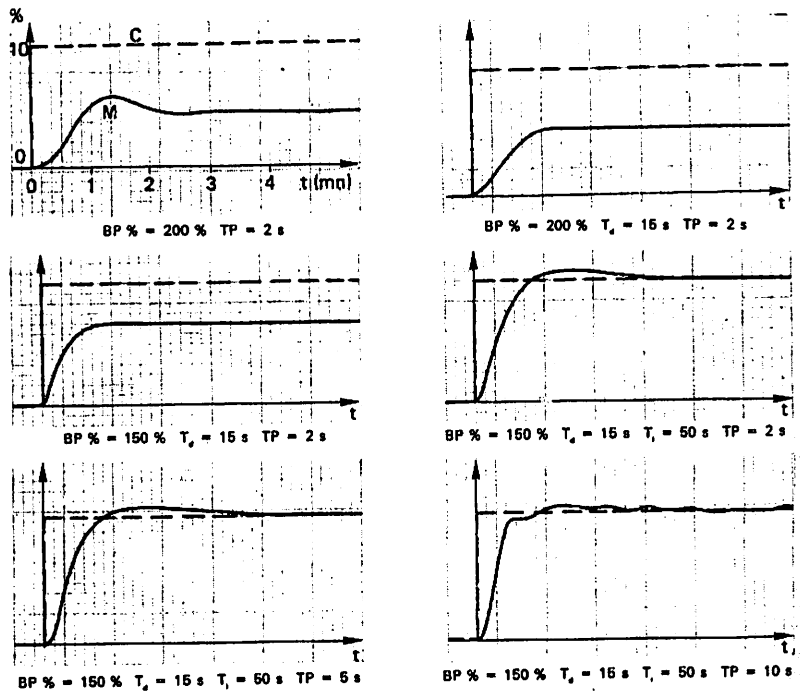



*Fig. 5.42* : Réglage par approches successives. Réponses à des variations de consigne pour différentes valeurs de $G_r$, $T_i$, $T_d$ et TP.



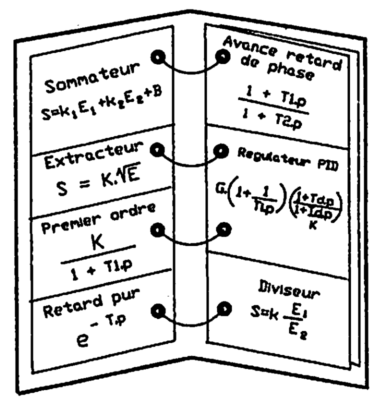
# Fonctions de transfert appliquées à la régulation

## NOTATIONS UTILISÉES DANS LE CHAPITRE 6

| | |
|---|---|
| a | : Amplitude d'un échelon ou pente d'une rampe. |
| C | : Consigne. |
| G | : Gain d'un module proportionnel. |
| $G_r$ | : Gain d'un régulateur. |
| $H_{(p)}$ <br> $H_{1(p)}$ $H_{2(p)}$ | : Fonction de transfert. |
| $H_{r(p)}$ | : Fonction de transfert régulante. |
| K | : Facteur de proportionnelle et gain transitoire. |
| M | : Signal de mesure. |
| N | : Niveau. |
| p | : Opérateur Laplacien. |
| P | : Pression. |
| Q | : Débit. |
| $R_{(p)}$ | : Fonction de transfert d'un régulateur. |
| S | : Signal de sortie. |
| t | : Variable temps. |
| T, T', $T_1$, $T_2$ | : Constante de temps d'un procédé et temps réglable d'un module. |
| $T_d$ | : Temps de dérivée. |
| $T_i$ | : Temps d'intégrale. |
| $T_e$, $T_s$ | : Température. |
| V | : Signal vanne. |
| $\Delta M$ | : Variation du signal de mesure. |
| $\Delta V$ | : Variation du signal vanne. |
| $\tau$ | : Retard pur. |



Dans la documentation technique des systèmes numériques de contrôle commande de procédé, la description des blocs logiciels peut se présenter sous la forme ci-dessous :




Dans cet exemple les fonctions où apparaît le terme p sont appelées fonctions de transfert.

Il est indispensable de savoir interpréter ces fonctions pour comprendre les boucles de régulation, dans lesquelles elles sont utilisées. Certaines de ces fonctions serviront à modéliser un procédé industriel, en vue de calculer les paramètres de réglage ou de définir l'algorithme de régulation.

Ce chapitre traite des notions de fonctions de transfert indispensables pour la compréhension de la suite de cet ouvrage.

## 6.1 EXPRESSION TEMPORELLE D'UN SIGNAL ET TRANSFORMÉE EN p

Considérons l'enregistrement d'un niveau N (fig. 6.1). En prenant 12 heures comme origine des temps, on peut traduire l'évolution de N entre 12 et 14 heures, par la relation : N = 50.t.

Ceci est l'expression d'un signal rampe de pente égale à 50 (vitesse d'évolution du niveau en millimètre par heure).

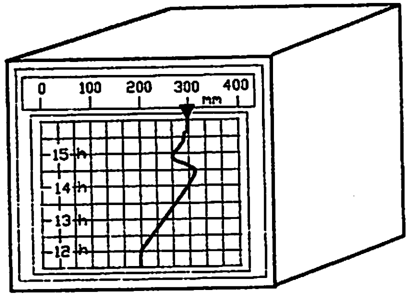



*Fig. 6.1 :* Enregistrement d'un niveau.

Entre 14 et 17 heures, la loi de variation de N est difficile à exprimer par une équation. On se contente de désigner le niveau par $N_{(t)}$. L'indice t indique que N est fonction de la variable temps.

$\boxed{N_{(t)} \text{ est l'expression temporelle du niveau N}}$

Les signaux temporels peuvent se mettre sous la forme opérationnelle, ce qui simplifie l'étude des régimes transitoires que l'on rencontre dans la régulation des procédés industriels. Pour exprimer une grandeur dans le domaine opérationnel, on remplace l'indice t par l'indice p (p opérateur Laplacien).

$\boxed{N_{(p)} \text{ est l'expression opérationnelle du niveau N}}$

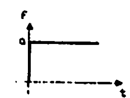
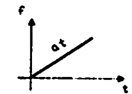
ou encore :

$\boxed{N_{(p)} \text{ est la transformée en p de } N_{(t)}}$

Le passage de $N_{(t)}$ à $N_{(p)}$, s'obtient à l'aide d'un calcul mathématique (transformée de Laplace). En pratique les résultats s'expriment sous forme de tableaux. Le tableau 6.1 donne la transformée en p des signaux rampe et échelon.



*Tableau 6.1 :* Transformées de Laplace

| Type de signal | Expression de $f_{(t)}$ | Représentation graphique de $f_{(t)}$ | Expression de $F_{(p)}$ |
|---|---|---|---|
| Échelon | $f_{(t)} = a$ |  | $F_{(p)} = \frac{a}{p}$ |
| Rampe | $f_{(t)} = a.t$ |  | $F_{(p)} = \frac{a}{p^2}$ |

***Exemple :*** Si l'on reprend l'exemple précédent, le signal rampe de pente égale à 50 s'écrit :

- En temporel : $N_{(t)} = 50.t.$
- En opérationnel : $N_{(p)} = \frac{50}{p^2}$

*Remarque :* Dans certains ouvrages, on utilise l'indice s à la place de l'indice p.

## 6.2 FONCTION DE TRANSFERT ET SCHÉMA FONCTIONNEL

Pour l'étude des régulateurs (chapitre 1), nous avons utilisé le schéma de la figure 6.2 pour représenter un régulateur PID de structure série. Remarquons que les grandeurs temporelles comportent l'indice t, alors qu'il ne figure pas dans les chapitres précédents où il est sous-entendu.

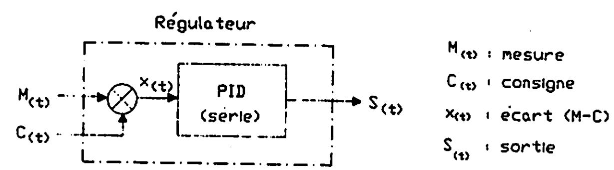
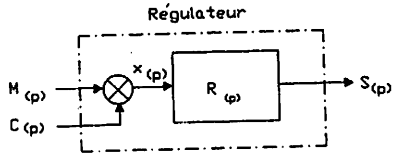



*Fig. 6.2.*

On peut remplacer l'écriture PID série par une expression mathématique, appelée fonction de transfert, que nous désignerons par $R_{(p)}$ et dont nous donnerons l'expression par la suite. Le schéma de la figure 6.2 est remplacé par celui de la figure 6.3, appelé schéma fonctionnel.

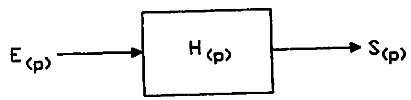



$M_{(p)}$ : transformée de $M_{(t)}$
$C_{(p)}$ : transformée de $C_{(t)}$
$x_{(p)}$ : transformée de $x_{(t)}$
$S_{(p)}$ : transformée de $S_{(t)}$
$R_{(p)}$ : fonction de transfert du régulateur

*Fig. 6.3* : Schéma fonctionnel d'un régulateur.

Tout système (instrument, élément de procédé) peut se mettre sous la forme du schéma fonctionnel de la figure 6.4. La fonction de transfert ~~et~~ est donnée par la relation :

$$\boxed{H_{(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}}}$$

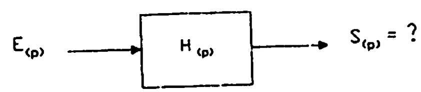



$E_{(p)}$ : grandeur(ou signal)d'entrée
$S_{(p)}$ : grandeur(ou signal)de sortie
$H_{(p)}$ : fonction de transfert du système

*Fig. 6.4* : Représentation générale d'un schéma fonctionnel.

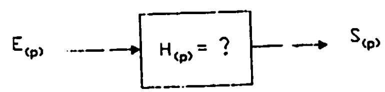
Il y a deux cas d'utilisation :

– $H_{(p)}$ est connue :




Cas d'un module de régulation par exemple. Pour un signal d'entrée $E_{(p)}$ donné, on peut en déduire le signal de sortie, donc vérifié le bon fonctionnement du module.

– $H_{(p)}$ est inconnue :




Cas d'un procédé industriel par exemple. Pour un signal d'entrée $E_{(p)}$ donné, l'analyse du signal de sortie nous permet de déterminer la fonction de transfert du procédé (chapitre 7, identification).



## 6.3 FONCTION DE TRANSFERT DES MODULES P, I ET D

Ce paragraphe reprend sous forme opérationnelle, l'étude des fonctions P, I et D vues au chapitre 1.

### 6.31 MODULE PROPORTIONNEL

Dans ce module la sortie est proportionnelle à l'entrée :
$S_{(t)} = K.E_{(t)}$ avec K facteur de proportionnalité ou G (gain) si les signaux d'entrée et de sortie sont de même nature.

La réponse à un échelon est donnée figure 6.5.

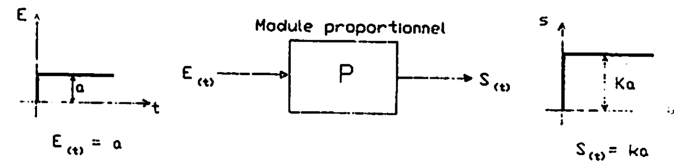



*Fig. 6.5* : Réponse à un échelon d'un module proportionnel.

Exprimons les signaux en opérationnel en utilisant le tableau 6.1.

La transformée en p de $E_{(t)} = a$ est $E_{(p)} = \frac{a}{p}$

La transformée en p de $S_{(t)} = K.a$ est $S_{(p)} = K \cdot \frac{a}{p}$

La fonction de transfert est :

$$H_{(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}} = \frac{K.a}{p} \cdot \frac{p}{a} = K$$

$$\boxed{H_{(p)} = K \text{ (ou G)}}$$

D'où le schéma fonctionnel suivant :

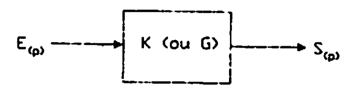



*Fig. 6.6* : Schéma fonctionnel d'un module proportionnel.

### 6.32 MODULE INTÉGRATEUR

Dans ce module, la sortie est proportionnelle à l'intégrale de l'entrée.

$$S_{(t)} = \frac{1}{T_i} \int_0^t E_{(t)}.dt$$

$T_i$ temps d'intégrale

La réponse à un échelon est donné figure 6.7.

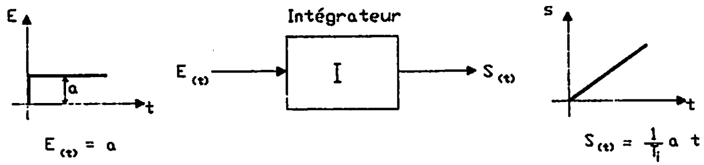



*Fig. 6.7 :* Réponse à un échelon d'un intégrateur.

La transformée en p de $E_{(t)} = a$ est $E_{(p)} = \frac{a}{p}$

La transformée en p de $S_{(t)} = \frac{a.t}{T_i}$ est $S_{(p)} = \frac{a}{T_i.p^2}$

La fonction de transfert est : $H_{(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}} = \frac{a}{T_i.p^2}.\frac{p}{a} = \frac{1}{T_i.p}$

$$\boxed{H_{(p)} = \frac{1}{T_i.p}}$$

D'où le schéma fonctionnel suivant :

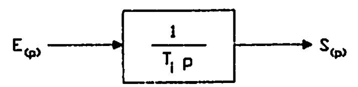



*Fig. 6.8 :* Schéma fonctionnel d'un intégrateur.

La sortie peut s'exprimer de deux façons :

$$S_{(t)} = \frac{1}{T_i}.\int_0^t E_{(t)}.dt \quad \text{ou} \quad S_{(p)} = \frac{1}{T_i}.\frac{E_{(p)}}{p}$$

On peut déduire que $\frac{E_{(p)}}{p}$ est identique à $\int E_{(t)}.dt$.

L'expression $\frac{1}{p}$ en opérationnel a la même signification que l'expression temporelle $\int dt$.

$$\boxed{\frac{1}{p} \text{ équivalent à : } \int dt}$$



## 6.33 MODULE DÉRIVATEUR

Dans ce module, la sortie est proportionnelle à la dérivée de l'entrée.

$T_d$ : temps de dérivée. $S_{(t)} = T_d.\frac{dE_{(t)}}{dt}$

La réponse à une rampe est représentée figure 6.9.

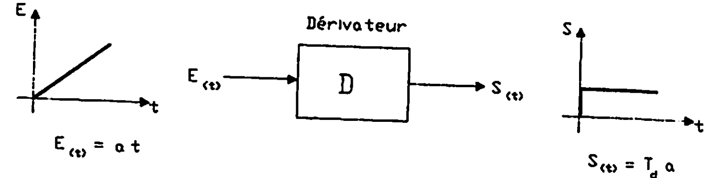



*Fig. 6.9 :* Réponse à une rampe d'un dérivateur.

La transformée en p de $E_{(t)} = a.t$ est $E_{(p)} = \frac{a}{p^2}$

La transformée en p de $S_{(t)} = T_d.a$ est $S_{(p)} = \frac{T_d.a}{p}$

La fonction de transfert est : $H_{(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}} = \frac{T_d.a}{p}.\frac{p^2}{a} = T_d.p$

$$\boxed{H_{(p)} = T_d.p}$$

D'où le schéma fonctionnel figure 6.10.

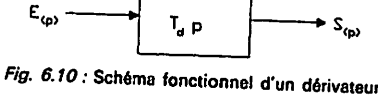



*Fig. 6.10 :* Schéma fonctionnel d'un dérivateur.

La sortie peut s'exprimer de deux façons :

$$S_{(t)} = T_d.\frac{dE_{(t)}}{dt} \quad \text{ou} \quad S_{(p)} = T_d.p.E_{(p)}$$

On peut déduire que $p.E_{(p)}$ est identique à $\frac{dE_{(t)}}{dt}$

L'expression p en opérationnel a la même signification que $\frac{d}{dt}$ en temporel.

$$\boxed{p \text{ équivalent à : } \frac{d}{dt}}$$

## 6.4 ASSOCIATION DES SCHÉMAS FONCTIONNELS ET FONCTIONS DE TRANSFERT ÉQUIVALENTES

Il est nécessaire dans les paragraphes suivants de déterminer la fonction de transfert d'un ensemble de schémas fonctionnels associés. Les associations élémentaires sont données par le tableau 6.2.

*Tableau 6.2 :* Association des fonctions de transfert.

| Type d'association | Schéma fonctionnel équivalent |
|---|---|
| $E_{(p)} \rightarrow H_{1(p)} \rightarrow H_{2(p)} \rightarrow S_{(p)}$<br>association série | $E_{(p)} \rightarrow H_{(p)} \rightarrow S_{(p)}$<br>$H_{(p)} = H_{1(p)} \cdot H_{2(p)}$ |
| $E_{(p)}$ → $H_{1(p)}$ (+), $H_{2(p)}$ (+) → ⊗ → $S_{(p)}$<br>association parallèle | $E_{(p)} \rightarrow H_{(p)} \rightarrow S_{(p)}$<br>$H_{(p)} = H_{1(p)} + H_{2(p)}$ |

*Exemple :* Recherche du schéma fonctionnel équivalent à celui de la figure 6.11 (a).


*Fig. 6.11.*

$$S_{(p)} = E_{(p)} \cdot H_{1(p)} + E_{(p)}$$
$$S_{(p)} = E_{(p)} \cdot (H_{1(p)} + 1)$$

$$H_{(p)} = \frac{S_{(p)}}{E_{(p)}} = H_{1(p)} + 1$$

## 6.5 SCHÉMAS FONCTIONNELS DES RÉGULATEURS

Les schémas fonctionnels des régulateurs PID avec dérivée sur l'écart sont donnés par le tableau 6.3 (voir tableau 1.5 chapitre 1)



*Tableaux 6.3 :* Schémas fonctionnels des régulateurs.
$G_r$ : gain de régulateur.
$T_i$ : temps d'intégrale.
$T_d$ : temps de dérivée.

| Type | Association des modules PID | Schéma fonctionnel équivalent |
|---|---|---|
| PID SÉRIE | $M_{(p)}$ (+), $C_{(p)}$ (−) → ⊗ → $G_r$ → $\frac{1}{T_i \cdot p}$ (+1) → $T_d \cdot p$ (+1) → $S_{(p)}$ | $M_{(p)}$ (+), $C_{(p)}$ (−) → ⊗ → $G_r\left(1+\frac{1}{T_i \cdot p}\right)(1+T_d \cdot p)$ → $S_{(p)}$ |
| PID PARALLÈLE | $M_{(p)}$ (+), $C_{(p)}$ (−) → ⊗ → $G_r$ + $\frac{1}{T_i \cdot p}$ + $T_d \cdot p$ → ⊗ → $S_{(p)}$ | $M_{(p)}$ (+), $C_{(p)}$ (−) → ⊗ → $G_r + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$ → $S_{(p)}$ |
| PID MIXTE | $M_{(p)}$ (+), $C_{(p)}$ (−) → ⊗ → $G_r$ → ($\frac{1}{T_i \cdot p}$ + 1 + $T_d \cdot p$) → ⊗ → $S_{(p)}$ | $M_{(p)}$ (+), $C_{(p)}$ (−) → ⊗ → $G_r\left(1+\frac{1}{T_i \cdot p}+T_d \cdot p\right)$ → $S_{(p)}$ |

## 6.6 MODULE RETARD PUR

La sortie de ce module recopie exactement l'entrée après un temps $\tau$ appelé retard, retard pur ou décalage (fig.6.12).

Ce qui s'écrit : $S_{(t)} = E(t - \tau)$ avec $S_{(t)} = 0$ pour $t \leqslant \tau$.

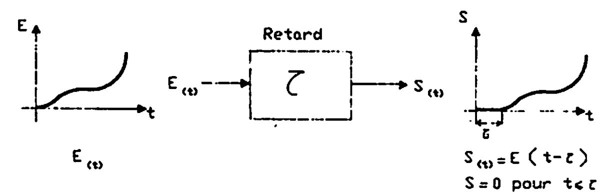



*Fig. 6.12.*

Le retard est exprimé par la fonction de transfert :

$$\boxed{H_{(p)} = e^{-\tau \cdot p}}$$

$\tau$ : retard (minute, seconde, (...))
e : base des logarithmes népériens e = 2.718.

Le schéma fonctionnel est donné figure 6.13.

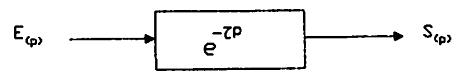



*Fig. 6.13 :* Schéma fonctionnel d'un système à retard.

Retenons que :

$\boxed{e^{-\tau.p} \text{ est équivalent à un retard pur } \tau}$

*Exemple* : La figure 6.14 illustre la réponse à une rampe d'un système à retard de deux secondes.

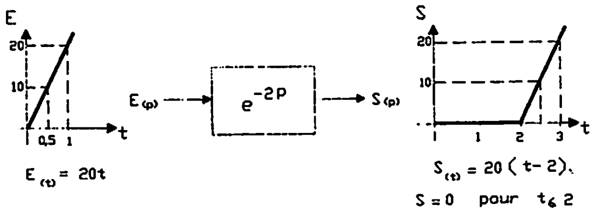



*Fig. 6.14.*

## 6.7 SYSTÈME DU PREMIER ORDRE

Considérons les systèmes représentés figure 6.15 :

- Pneumatique : vanne d'étranglement et volume.
- Électrique : résistance et capacité.

Ces deux systèmes sont appelés des systèmes du premier ordre. Les réponses à un échelon d'entrée, sont semblables dans les deux cas et s'expriment par la relation :

$$S_{(t)} = a.(1 - e^{-t/T})$$

Avec : e = 2.718 (base des logarithmes népériens).
a = amplitude de l'échelon d'entrée.
T = constante de temps.

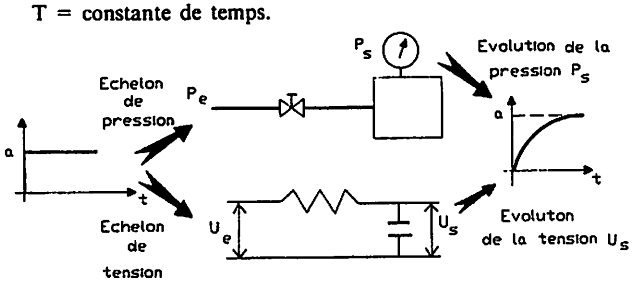



*Fig. 6.15.*



La constante de temps T est le temps au bout duquel la sortie est égale à 63 % de sa valeur finale (fig.6.16).
En effet :

$$S_{(t)} = a.(1 - e^{-t/T}) = a.(1 - 2.718^{-t/T})$$

Pour $t = T$ on a $S_{(T)} = a.(1 - 1/2.718) = 0,63.a$

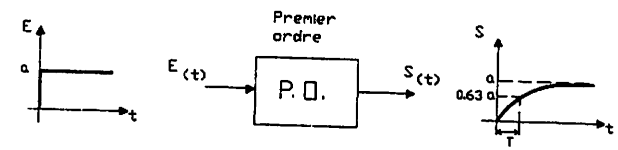



*Fig. 6.16.*

On vérifie également qu'au bout d'un temps t égal à 3T, on obtient :

$$S_{(3T)} = 0,95.a$$

Ce temps correspond au temps d'établissement (paragraphe 2.5).

### 6.71 SCHÉMA FONCTIONNEL D'UN SYSTÈME DU PREMIER ORDRE

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est :

$$\boxed{H_{(p)} = \frac{1}{1 + T.p}}$$

D'ou le schéma fonctionnel figure 6.17.

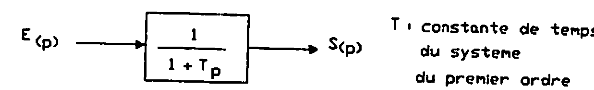



*Fig. 6.17 :* Schéma fonctionnel d'un système du 1er ordre.

### 6.72 SYSTÈME DU PREMIER ORDRE AVEC GAIN ET RETARD

Le schéma fonctionnel et la réponse à un échelon d'un système du premier ordre avec gain G et retard pur τ sont donnés par la figure 6.18.

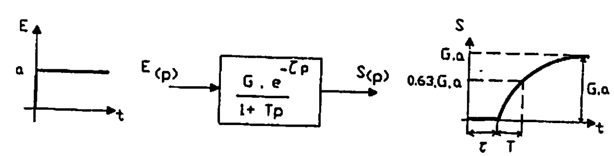



*Fig. 6.18.*

## 6.73 MISE EN SÉRIE DE PLUSIEURS SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE

Considérons trois systèmes du premier ordre en série, ayant des constantes de temps T identiques (fig. 6.19). Ils constituent un système du troisième ordre.

Il est intéressant de noter pour la suite que la réponse fait apparaître un retard, bien que le retard pur ne figure pas dans la fonction de transfert.

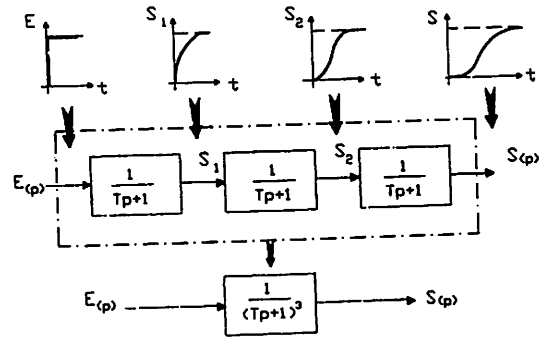



Fig. 6.19.

Si l'ordre du système est élevé, on applique la relation suivante :

$$\frac{1}{(1 + T.p)^n} \# e^{-\tau.p} \quad \text{avec} \quad \tau = n\,T$$

## 6.74 FILTRAGE

Considérons le schéma de la figure 6.20, ou l'entrée E d'un système du premier ordre est soumis à un échelon de durée égale à t'. La sortie S restitue pratiquement l'échelon d'entrée si la constante de temps T du système est très faible par rapport à la durée de l'échelon (fig. 6.20 (a)). Dans le cas contraire le système est trop lent pour suivre les évolutions du signal d'entrée et ce dernier est pratiquement éliminé (fig. 6.20 (b)).

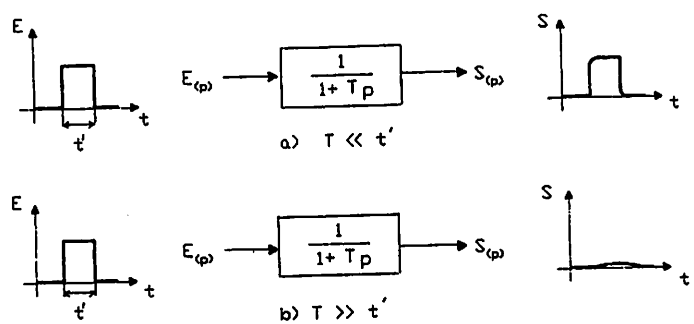



Fig. 6.20.



Figure 6.21, le système du premier ordre est soumis à un signal constitué d'échelons de durées variables. Les échelons dont la durée est très faible par rapport à la constante de temps T, sont éliminés par le système ; c'est l'effet de filtrage.

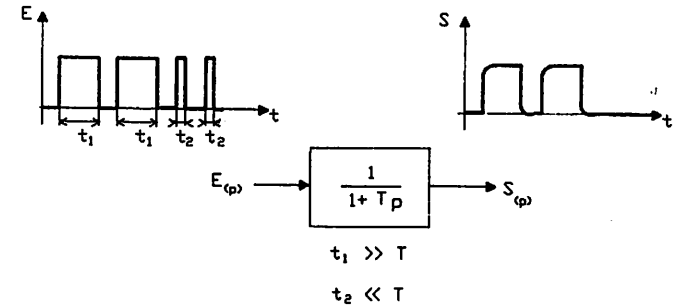



Fig. 6.21.

L'essai avec un signal sinusoïdal montre, figure 6.22, que l'on peut pratiquement éliminer les hautes fréquences, d'où le nom de filtre passe bas donné au système du premier ordre. Précisons que si les basses fréquences passent, leur amplitude est atténuée dans une proportion qui dépend du réglage de T.

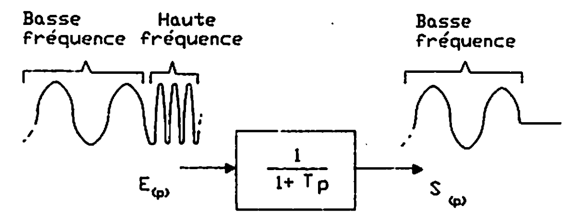



Fig. 6.22.

Un système du premier ordre est souvent placé à l'entrée des récepteurs (enregistreurs, régulateurs, systèmes numériques) de façon à éliminer, si nécessaire, le bruit sur le signal de mesure (fig. 6.23).

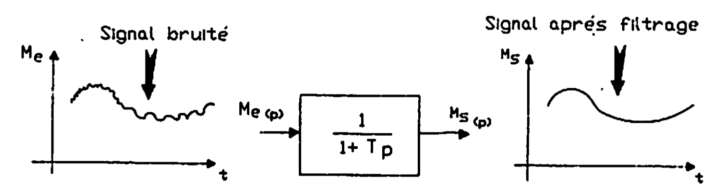



Fig. 6.23.

# 6.8 MODULE DÉRIVÉE FILTRÉE

## 6.81 SCHÉMA FONCTIONNEL ET DÉRIVÉE FILTRÉE

La réponse à un échelon d'un dérivateur montre la rapidité d'action de cette fonction. Pour permettre un amortissement et une limitation de la sortie on utilise une dérivée filtrée dont la fonction de transfert est :

$$H_{(p)} = \frac{T_d.p}{1 + \frac{T_d}{K}.p}$$

$T_d$ : temps de dérivée.
K : gain transitoire.
$\frac{T_d}{K}$ : constante de temps.

Les réponses à un échelon d'une dérivée pure et d'une dérivée filtrée sont données figure 6.24.

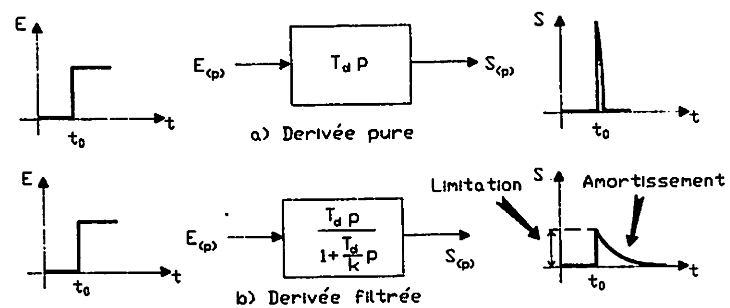



*Fig. 6.24.*

Le schéma fonctionnel figure 6.25 montre que le module dérivée filtrée est équivalent à une dérivée pure et un premier ordre de constante de temps $\frac{T_d}{K}$.

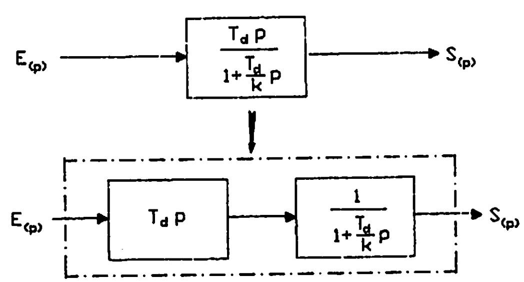



*Fig. 6.25.*



## 6.82 ÉTUDES DE LA RÉPONSE A UN ÉCHELON

La réponse à un échelon d'entrée d'amplitude a est donnée par l'expression :

$$S_{(t)} = a.K.e^{-\frac{K.t}{T_d}} \qquad \text{Soit : } S_{(t)} = \frac{a.K}{2{,}718^{\frac{K.t}{T_d}}}$$

Au temps : t = 0 on a $S(0) = \frac{a.K}{(2{,}718)^0}$ donc $S(0) = a.K$

Au temps : $t = \frac{Td}{K}$ on a $S(\frac{T_d}{K}) = \frac{a.K}{(2.718)^1}$

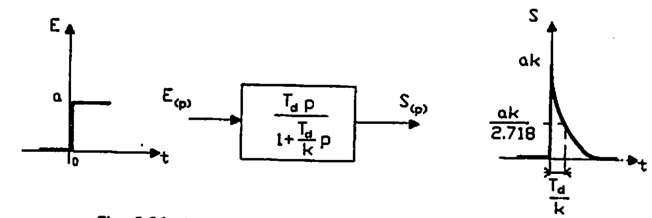



*Fig. 6.26 :* Réponse à un échelon d'une dérivée filtrée.

*Exemple :* La figure 6.27 montre les réponses d'une dérivée filtrée, pour un temps de dérivée de 20 s et un gain transitoire réglé successivement à 0 ; 0,5 et 2.

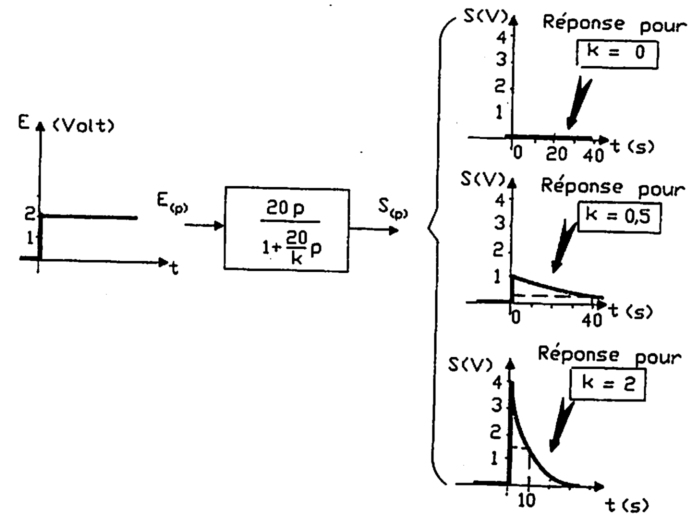



*Fig. 6.27.*

## 6.9 MODULE AVANCE RETARD DE PHASE

### 6.91 FONCTION DE TRANSFERT ET SCHÉMA FONCTIONNEL

Ce module, utilisé dans la régulation en boucle ouverte, a pour fonction de transfert :

$$H_{(p)} = \frac{1 + T_1.p}{1 + T_2.p}$$

Le schéma fonctionnel est donné figure 6.28(a). Le schéma équivalent figure 6.28(c) montre que ce module se compose d'un 1er ordre (retard) et d'une dérivée (avance).

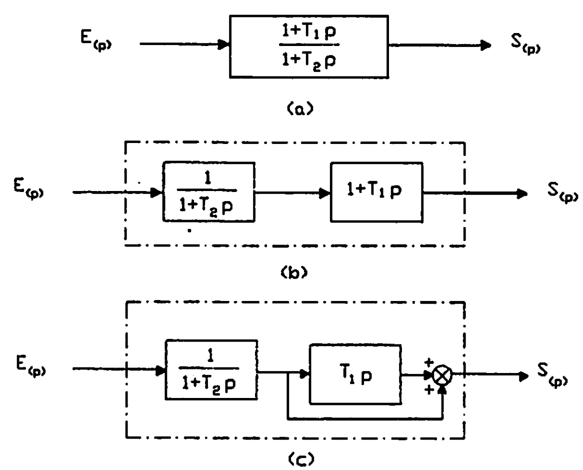



*Fig. 6.28 :* Schémas fonctionnels d'un avance retard de phase.

### 6.92 RÉPONSE A UN ÉCHELON

Remarquons que pour :

$T_1 = T_2$ on a $H_{(p)} = 1$ (la sortie recopie exactement l'entrée)

$T_1 = 0$ on a $H_{(p)} = \frac{1}{1 + T_2.p}$ (le module est un 1er ordre)

$T_2 = 0$ on a $H_{(p)} = 1 + T_1.p$ (la sortie est égale à l'entrée plus la dérivée de l'entrée)



$T_2 > T_1$ Le retard dû au 1er ordre prédomine sur l'avance due à la dérivée.

$T_1 > T_2$ L'avance prédomine sur le retard.

Ceci est illustré par la réponse à un échelon (fig. 6.29).

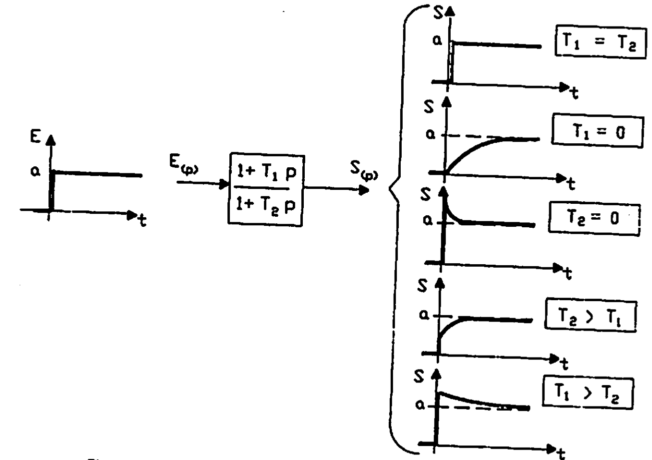



*Fig. 6.29 :* Réponse à un échelon d'un avance retard de phase pour différentes valeurs de $T_1$ et $T_2$.

## 6.10 FONCTION DE TRANSFERT D'UN PROCÉDÉ

### 6.101 PROCÉDÉ STABLE

Considérons le procédé de la figure 6.30. Le volume de liquide accumulé dans le bac pendant le temps dt est égal à la différence des volumes entrant et sortant durant cette même période.

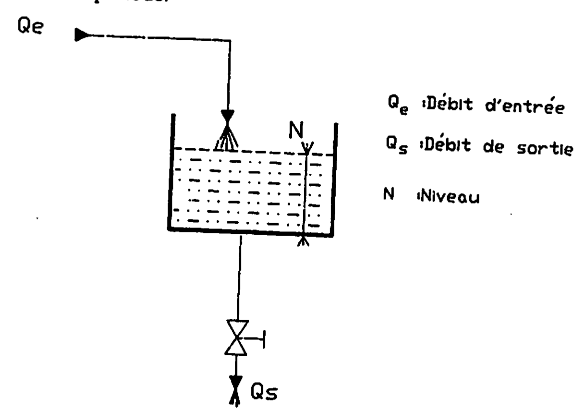



*Fig. 6.30.*

$$dV_{(t)} = (Qe_{(t)} - Qs_{(t)}).dt$$

or $\quad dV_{(t)} = S.dN_{(t)}$

Avec : S = section du bac ($m^2$).
$dN_{(t)}$ = variation de niveau correspondant à la variation de volume (m).

$$S.\frac{dN_{(t)}}{dt} = Qe_{(t)} - Qs_{(t)} : (1)$$

Dans cet exemple le débit de sortie est fonction du niveau. En considérant l'écoulement comme laminaire, on peut écrire la relation : $\quad Qs_{(t)} = \frac{N_{(t)}}{K}$

Avec : K = résistance due à la vanne de sortie (K est en $\frac{s}{m^2}$ si Qs est exprimé en $\frac{m^3}{s}$ et N en m).

En remplaçant Qs par $\frac{N}{k}$ dans l'expression (1) on obtient l'équation :

$$S.K.\frac{dN_{(t)}}{dt} + N_{(t)} = Qe_{(t)}.K \ (2)$$

Remplaçons $\frac{d}{dt}$ par p pour passer du domaine temporel au domaine opérationnel.

$$S.K.N_{(p)}.p + N_{(p)} = Qe_{(p)}.K$$

La fonction de transfert $H_{(p)}$ du procédé est : $\quad H_{(p)} = \frac{N_{(p)}}{Qe_{(p)}} = \frac{K}{1 + S.K.p}$

S.K est la constante de temps du procédé (unité de S.K : $m^2.s/m^2 = s$).
En posant $\;S.K = T$, on obtient la relation :

$$\boxed{H_{(p)} = \frac{K}{1 + T.p}}$$

Nous retrouvons l'expression d'un système du premier ordre vu au paragraphe 6.7, d'où le schéma fonctionnel de la figure 6.31.

$$Qe_{(p)} \longrightarrow \boxed{\frac{k}{1 + Tp}} \longrightarrow N_{(p)}$$

*Fig. 6.31* : Schéma fonctionnel du niveau.



La figure 6.32 représente un autre exemple de procédé avec son schéma fonctionnel.

Nous venons de voir ce que représente physiquement la fonction de transfert d'un procédé sans instrumentation. Dans le cas d'un procédé régulé, c'est à partir des signaux des instruments que l'on exprimera la fonction de transfert.

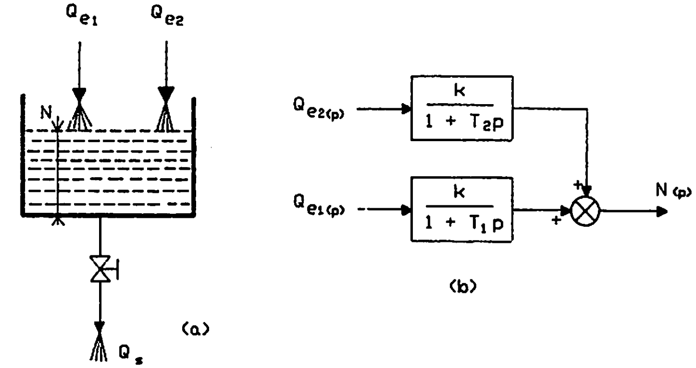



*Fig. 6.32* : P.C.F. et schéma fonctionnel d'un procédé.

Considérons le schémas (fig. 6.33) de la régulation de niveau du bac de la figure 6.30. Effectuons un échelon sur la sortie manuelle du régulateur. L'enregistrement du signal de mesure M du niveau donne le gain statique $G_s$ et la constante de temps T du procédé vus par le régulateur.

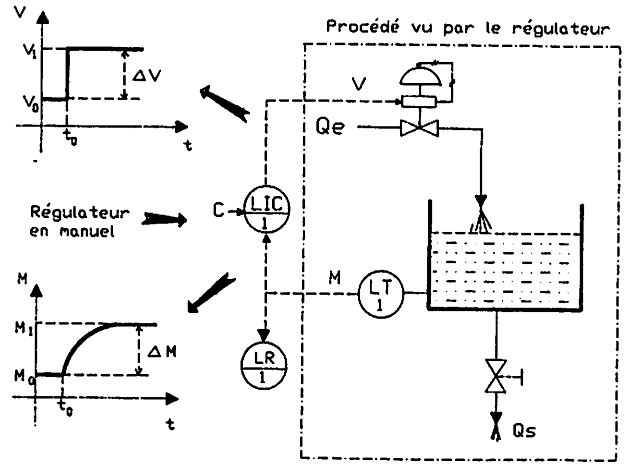



*Fig. 6.33.*

Le procédé peut se représenter par le schéma fonctionnel de la figure 6.34. Remarquons que la vanne, bien qu'incluse dans la fonction de transfert, est représentée par un cercle.

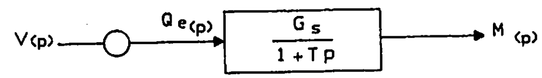



Fig. 6.34.

Si nous ajoutons une grandeur perturbatrice représentée par le débit d'entrée $Q'_e$ (fig. 6.35), nous obtenons le schéma fonctionnel de la figure 6.36 que l'on peut comparer à celle de la figure 6.32.

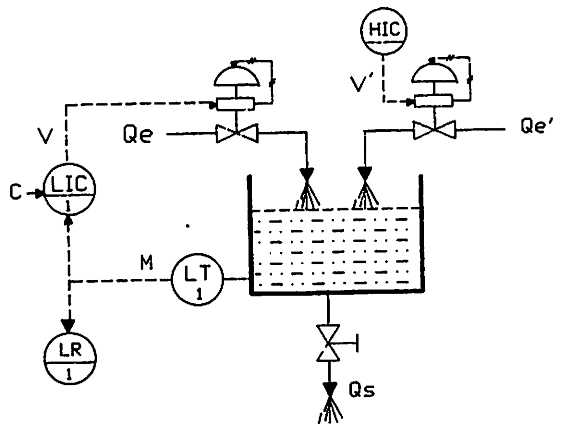



Fig. 6.35.

La fonction de transfert correspondant à l'entrée $Q_e$ est appelée fonction de transfert réglante, parce que $Q_e$ est la grandeur réglante. La fonction de transfert correspondant à l'entrée $Q'_e$ est dite fonction de transfert perturbatrice.

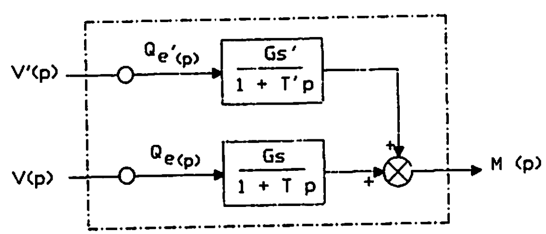
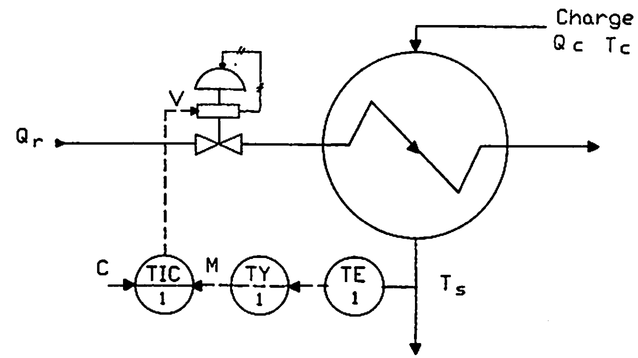



Fig. 6.36.



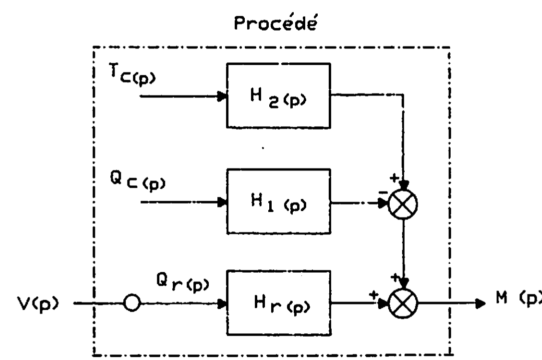
Dans le cas où l'on ne connaît pas la fonction de transfert du procédé, on utilise une symbolisation semblable à celle du schéma fonctionnel donné par la figure 6.38 qui correspond à un échangeur de chaleur (fig. 6.37).

La détermination pratique des fonctions de transfert d'un procédé sera vue au chapitre 7.




$Q_r$ : débit fluide caloporteur (grandeur réglante)
$T_s$ : température de sortie charge (grandeur réglée)
M : signal mesure (grandeur réglée)
V : signal vanne
$Q_c$ : débit de la charge (grandeur perturbatrice)
$T_c$ : température d'entrée charge (grandeur perturbatrice)

Fig. 6.37.




$H_{r(p)}$ : fonction de transfert réglante
$H_{1(p)}$, $H_{2(p)}$ : fonctions de transfert perturbatrices

Fig. 6.38.

## 6.102 PROCÉDÉ INSTABLE

Considérons le procédé de la figure 6.39, où le liquide est extrait du réservoir par une pompe à débit constant $Q_s$.

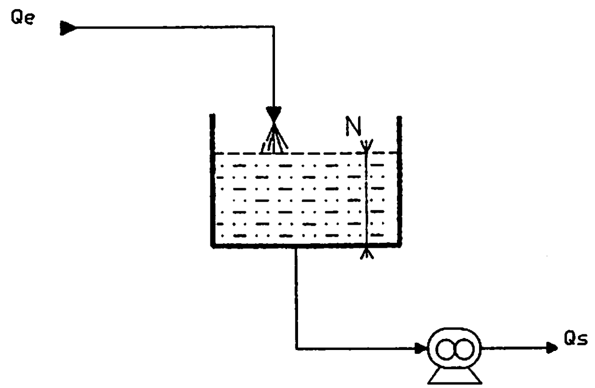



*Fig. 6.39.*

L'expression du niveau N est donnée par la relation :

$$N_{(t)} = \frac{1}{S} \cdot \int_0^t (Q_{e(t)} - Q_{s(t)}).dt$$

En remplaçant $\int .dt$ par $\frac{1}{p}$ on obtient l'expression opérationnelle :

$$N_{(p)} = \frac{1}{S} \cdot \frac{(Qe_{(p)} - Qs_{(p)})}{p}$$

d'où le schéma fonctionnel de la figure 6.40, dont la fonction de transfert est dite intégrateur pur. L'écriture générale de la fonction de transfert est :

$$H_{(p)} = \frac{K}{p} \quad \text{dans notre exemple} \quad K = \frac{1}{S}$$

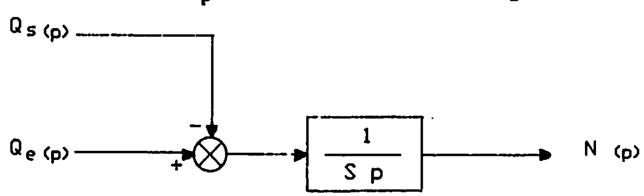



*Fig. 6.40.*



Dans le cas où le procédé est régulé (fig. 6.41), c'est la réponse à un échelon de vanne qui permet de déterminer le coefficient K caractéristique du bac, comme nous le verrons au chapitre 7.

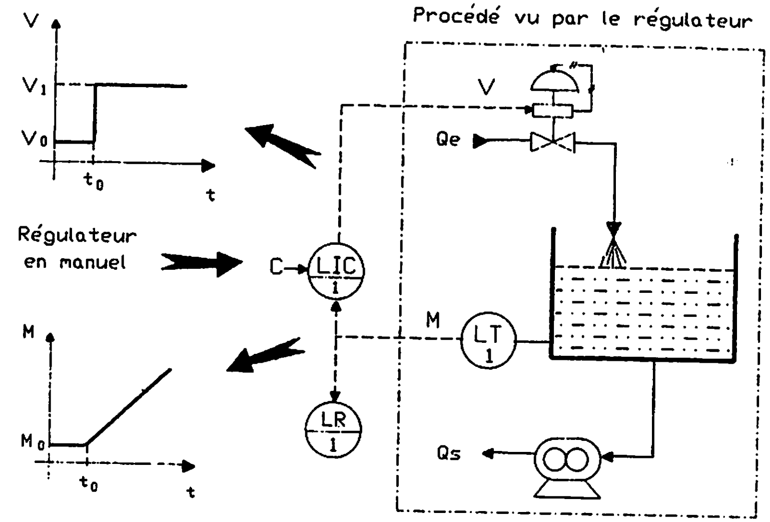



*Fig. 6.41.*

Le schéma fonctionnel est donné figure 6.42.

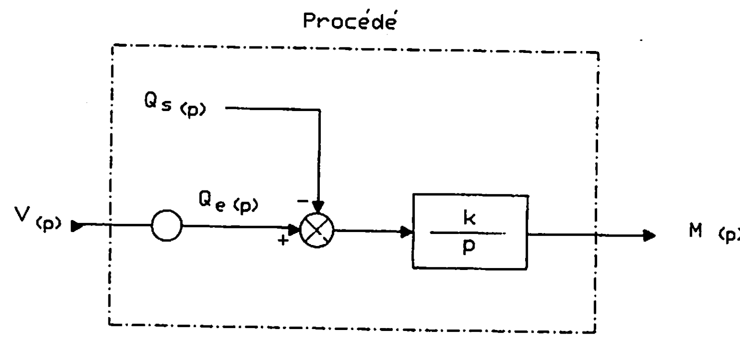



*Fig. 6.42.*

*Remarque :* Les fonctions de transfert ne s'appliquent qu'à des systèmes linéaires. (paragraphe 2.6). Du fait de la non-linéarité des procédés industriels l'utilisation des fonctions de transfert n'est valable qu'autour d'un point de fonctionnement.