



**Classes préparatoires
scientifiques**

Physique

MPSI-PCSI-PTSI

Programme 2013

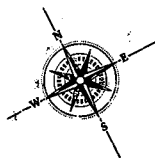
Éric Bellanger, Xavier Ducros, Michel Roy, Eddie Saudrais

Sous la direction de

Jérôme Perez et Vincent Renvoizé



Cap Prépa



Physique

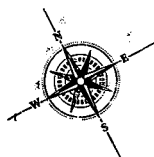
MPSI-PCSI-PTSI

Cours complet et exercices corrigés

Programme 2013

PEARSON

Cap Prépa



Physique

MPSI-PCSI-PTSI

Cours complet et exercices corrigés

Programme 2013

Sous la direction de

Jérôme Perez et Vincent Renvoizé

Éric Bellanger
Xavier Ducros
Michel Roy
Eddie Saudrais

Publié par Pearson France
Immeuble Terra Nova II
74, rue de Lagny
93100 Montreuil-sous-Bois

ISBN : 978-2-7440-7653-4
© 2013 Pearson France

Mise au point de la feuille de styles \LaTeX : Éric Bellanger
Mise en page \LaTeX : Vincent Renvoizé

Aucune représentation ou reproduction, même partielle, autre que celles prévues à l'article L. 122-5 2° et 3° a) du code de la propriété intellectuelle ne peut être faite sans l'autorisation expresse de Pearson France ou, le cas échéant, sans le respect des modalités prévues à l'article L. 122-10 dudit code.

Avant-propos

CET OUVRAGE est un cours de physique destiné à servir de support et de guide aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques. Il a été conçu de façon que les étudiants puissent mettre en pratique et développer leurs acquis à travers de nombreux exercices, dont la correction a été particulièrement soignée.

La tonalité générale de l'ouvrage s'inscrit directement dans l'état d'esprit du nouveau programme : les notions sont abordées progressivement, les outils mathématiques utiles sont présentés au fil des besoins, l'approche documentaire a été fondue dans les différents chapitres et de nombreuses références historiques émaillent le discours.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera dans un premier temps des définitions très souvent associées à des faits expérimentaux. Il se verra ensuite proposer une démarche synthétique le menant vers des lois, des théorèmes ou des principes. Les nombreuses applications envisagées dans le cadre du nouveau programme seront alors présentées. Le lecteur pourra enfin contrôler ses acquis en résolvant des exercices illustratifs, très progressifs et corrigés de façon détaillée. Tout au long de l'ouvrage, il s'habitue à un grand nombre de balises clairement identifiées : « Rappel », « Synthèse », « Méthode », « Attention », qui lui permettront d'ancrer son apprentissage. Chaque partie se conclut par un formulaire précis des notions abordées.

Les quatre parties de l'ouvrage traitent, dans l'ordre préconisé, les thèmes prévus au nouveau programme de première année des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques dans les filières MPSI, PCSI et PTSI.

◊ **La partie I – SIGNAUX PHYSIQUES** – met l'accent sur les signaux sinusoïdaux, qui jouent un rôle central dans l'approche des systèmes linéaires. Elle s'appuie sur une démarche inductive dans l'esprit du nouveau programme. On a recours au formalisme seulement lorsqu'il est nécessaire ; on dégage les similitudes de comportement entre systèmes analogues par une mise en équation pertinente utilisant variables réduites et paramètres caractéristiques adimensionnés ; on réalise des constructions graphiques claires pour appuyer un raisonnement ou un calcul. Cette partie contient, par exemple, l'introduction au monde quantique envisagée par le nouveau programme. Celle-ci est construite dans une démarche constructive à partir de l'interprétation des expériences fondatrices.

◊ **La partie II – MÉCANIQUE** – prend racine dans l'étude du mouvement du point matériel pour présenter certaines des notions les plus fondamentales de la physique, comme la vitesse, la force, le moment cinétique et l'énergie. À partir de situations simples, elle analyse certains modèles fondamentaux, comme le mouvement des planètes dans les champs de gravitation ou celui d'une particule chargée dans un champ électromagnétique stationnaire. Elle aborde également l'étude mécanique des solides indéformables dans les cas de mouvements simples prévus au programme.

◊ **La partie III – THERMODYNAMIQUE** – formalise l'étude des échanges énergétiques déjà abordée au lycée. Les principes de la thermodynamique sont présentés sur des situations simples (calorimétrie, compressions ou détentes de gaz parfaits) et sont progressivement appliqués à des situations plus complexes, pour aboutir à l'étude des machines thermiques (moteurs, réfrigérateurs, etc.).

◊ **La partie IV – INDUCTION ET FORCES DE LAPLACE** – détaille les propriétés du champ magnétique ainsi que ses effets sur les circuits électriques. Les phénomènes d'induction électromagnétique, décrits par la loi de Faraday, sont ensuite étudiés sur des géométries simples qui illustrent leurs nombreuses applications dans la vie courante (moteurs et générateurs électriques, cartes RFID, etc.).

Même si cet ouvrage s'adresse à des étudiants préparant un concours, il demeure avant tout un manuel de physique, et donc de philosophie naturelle. Les auteurs espèrent que les lecteurs sauront découvrir cette science passionnante dans l'enchaînement constructif proposé par le nouveau programme.

Les programmes de première année de CPGE diffèrent un peu d'une filière à l'autre. Celui de PTSI est très proche de celui de MPSI. Les notions propres à chacun des programmes MPSI et PCSI ont été clairement indiquées, en général à l'aide d'un triangle noté MP ou PC.

Les auteurs

Éric Bellanger, ancien élève de l'École normale supérieure de Lyon, est professeur en classes préparatoires PSI au lycée Stanislas (Paris). Il est docteur de l'Institut de physique du globe de Paris ; sa thèse porte sur l'étude de phénomènes de courte période dans le champ magnétique terrestre et sur le couplage des phénomènes d'origine interne avec la rotation de la Terre.

Xavier Ducros est professeur en classes préparatoires PC* au lycée Jacques Decour (Paris). Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan, ses centres d'intérêt en physique sont variés, et vont de l'histoire des sciences à la biophysique, en passant par les applications de la physique à la musique. Sa passion pour l'informatique l'a conduit à créer de nombreuses simulations informatiques de problèmes de physique, destinés aux étudiants, qu'il met à disposition sur son site Internet.

Vincent Renvoizé, ancien élève de l'École normale supérieure de Lyon, est professeur en classes préparatoires PSI au Lycée militaire de la Flèche. Il est docteur en astrophysique, sa thèse porte sur la dynamique et l'évolution des corps célestes compacts (densité supérieure à mille fois celle de l'eau). Il a coordonné les trois manuels de physique Cap Prépa de la deuxième année.

Michel Roy est professeur de chaire supérieure en détachement pour coordonner la création de l'ENIB, école d'ingénieurs en Tunisie, ainsi que d'une filière Technique avancée à Tunis, en partenariat avec l'ENSTA Paristech. Il a enseigné en classes préparatoires MP au lycée Descartes à Tours ainsi qu'en PSI au lycée Saint Louis à Paris. Son intérêt pour la physique va de l'épistémologie à la mécanique analytique et quantique.

Jérôme Perez est enseignant-chercheur à l'unité de mathématiques appliquées de l'École nationale supérieure des techniques avancées (ENSTA ParisTech) où il enseigne la physique et les mathématiques. Il est professeur du cours « Gravitation » du master d'astronomie et astrophysique d'Ile-de-France. Il est docteur HDR de l'université Paris VII en astronomie et astrophysique, chercheur associé à l'Institut d'astrophysique de Paris. Son sujet de recherche est la dynamique des systèmes auto-gravitants des galaxies à l'Univers primordial. Il est l'auteur de trois manuels de physique de second et troisième cycle : *Théorie des champs classiques*, *Gravitation classique* et *Éléments de physique statistique*, publiés par ENSTA ParisTech. Il est impliqué dans différents rouages des concours des grandes écoles d'ingénieurs. Enfin, il participe activement à la diffusion de la culture scientifique, notamment au festival international d'astronomie de Fleurance qu'il co-organise.

Eddie Saudrais est professeur en classes préparatoires PC au lycée Condorcet (Paris). Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan, il a collaboré à l'écriture de plusieurs ouvrages (lycée et CPGE). Musicien amateur, il est particulièrement intéressé par l'acoustique. Son intérêt pour la typographie l'a amené à développer plusieurs extensions pour L^AT_EX.

Table des matières

Avant-propos	v
Les auteurs	vii
Partie I Signaux physiques	1
1 Oscillateur harmonique	3
I Introduction, définitions	3
I.1 Exemple	3
I.2 Caractérisation du mouvement	3
II Oscillateur harmonique masse-ressort	5
II.1 Loi de Hooke	6
II.2 Mise en équation de l'oscillateur	8
II.3 Résolution de l'équation différentielle	10
II.4 Conservation de l'énergie	10
III Exercices	12
2 Propagation d'un signal	13
I Quelques définitions	13
II Propriétés générales des ondes mécaniques	14
II.1 Direction de propagation	14
II.2 Propriété d'une onde progressive monodimensionnelle	15
II.3 Superposition de deux ondes progressives	18
III Ondes sinusoïdales progressives	19
III.1 Propriétés générales	19
III.2 Double périodicité	19
IV Interférences à deux ondes	21
IV.1 Front d'onde - Onde plane	21
IV.2 Interférences	22
V Ondes stationnaires	27
V.1 Réflexion d'une onde progressive	27
V.2 Conditions aux limites : onde stationnaire	28
V.3 Corde fixée à ses deux extrémités : modes de vibration	29
VI Diffraction d'une onde	32
VI.1 Phénomène de diffraction	32
VI.2 Fentes de Young en lumière monochromatique	34
VII Exercices	38

3	Optique géométrique	43
I	Cadre de l'étude	43
I.1	Onde lumineuse	43
I.2	Approximation de l'optique géométrique, rayon lumineux . . .	45
I.3	Sources de lumière	46
II	Lois de Snell-Descartes	49
II.1	Réflexion	49
II.2	Réfraction	50
II.3	Conséquences immédiates	52
III	Formation des images; conditions de Gauss	54
III.1	Stigmatisme rigoureux	54
III.2	Objet et image; nature réelle ou virtuelle	55
III.3	Stigmatisme approché des systèmes centrés, aplanétisme	57
III.4	Aberrations	58
IV	Lentilles minces	60
IV.1	Définitions	60
IV.2	Relations de conjugaison, grandissements	62
IV.3	Constructions géométriques pour les lentilles	63
IV.4	Correspondance objet-image	66
IV.5	Présentation rudimentaire du fonctionnement de l'œil	70
IV.6	Quelques notions sur l'appareil photographique	71
V	Exercices	72
4	Introduction au monde quantique	83
I	Physique classique et physique quantique	83
II	L'effet photoélectrique	86
II.1	Description de l'expérience	86
II.2	Face à l'expérience	87
II.3	Les incohérences de l'interprétation classique	88
II.4	L'hypothèse d'Einstein sur la quantification du rayonnement . .	88
II.5	La nature singulière du photon	89
III	Expériences à une particule	92
III.1	Les outils d'observation	92
III.2	Expériences préliminaires	92
III.3	Expériences interférométriques	94
III.4	Un début de modèle mathématique	97
IV	Inégalités de Heisenberg spatiales	100
IV.1	Dispositif des trous de Young	100
IV.2	Principe d'indétermination de Heisenberg	102
IV.3	Application à l'oscillateur harmonique quantique	104
V	Confinement d'une particule libre	106
V.1	Étude d'une particule libre	106
V.2	Confinement de la particule	107
VI	Exercices	109
5	Circuits électriques dans l'ARQS	111
I	Courant électrique	111
I.1	Courant électrique et porteurs de charges	111
I.2	Intensité du courant électrique	112
II	Tension et potentiel	113

III	Lois de Kirchhoff, ARQS	114
III.1	Réseau	114
III.2	Loi des nœuds, ARQS	115
III.3	Loi des mailles	117
IV	Puissance et conventions pour les dipôles	118
IV.1	Puissance reçue - Convention récepteur	118
IV.2	Convention générateur	119
V	Dipôles linéaires classiques	119
V.1	Résistance	120
V.2	Condensateur	121
V.3	Bobine	123
VI	Association de résistances	124
VI.1	Lois d'associations de résistances	124
VI.2	Diviseurs de tension et de courant	126
VII	Modélisation linéaire d'une source	128
VII.1	Sources idéales de tension et de courant	128
VII.2	Sources réelles de tension et de courant	129
VII.3	Représentation équivalente de Thévenin	130
VIII	Point de fonctionnement	132
VIII.1	Caractéristique courant-tension d'un dipôle	132
VIII.2	Dipôles symétriques et polarisés	133
VIII.3	Point de fonctionnement d'un dipôle non linéaire	133
IX	Exercices	134
6	Circuit linéaire du premier ordre	139
I	Échelon de tension, notion de régime transitoire	139
I.1	Définition d'un échelon	139
I.2	Étude qualitative de deux circuits	139
II	Étude analytique du circuit RC	142
II.1	Tension aux bornes du condensateur	142
II.2	Courant électrique dans le circuit	143
II.3	Bilan énergétique	144
III	Étude analytique du circuit RL	146
III.1	Tension aux bornes de la bobine et courant	146
III.2	Aspects énergétiques	147
IV	Exercices	148
7	Oscillateurs amortis	151
I	Régime transitoire d'un oscillateur amorti	151
I.1	Analogies entre oscillateurs électrique et mécanique	151
I.2	Régime libre d'un oscillateur amorti	155
I.3	Étude analytique d'un oscillateur soumis à un échelon	158
II	Régime sinusoïdal forcé, impédances complexes	164
II.1	Signaux sinusoïdaux	164
II.2	Représentation de Fresnel	168
II.3	Représentation complexe	170
II.4	Impédance et admittance complexes	172

III	Excitation sinusoïdale d'un oscillateur	176
III.1	Présentation	176
III.2	Résonance en tension	177
III.3	Résonance en intensité	181
III.4	Étude de la phase	184
IV	Exercices	185
8	Filtrage linéaire	195
I	Signaux périodiques	195
I.1	Décomposition en série de Fourier	195
I.2	Analyse harmonique - Spectre	198
II	Quadripôle linéaire, filtrage	200
II.1	Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire	200
II.2	Modélisation de l'entrée et de la sortie d'un quadripôle	202
II.3	Filtres linéaires	204
III	Filtres linéaires passifs d'ordres un et deux	209
III.1	Filtre passe-bas d'ordre un	210
III.2	Filtre passe-haut d'ordre un	212
III.3	Filtre passe-bas d'ordre deux	214
III.4	Filtre passe-bande	216
IV	Filtrage d'un signal périodique	220
IV.1	Principe	220
IV.2	Exemple du filtrage d'un signal créneau pour obtenir une tension continue de valeur variable	221
IV.3	Illustrations	223
V	Exercices	224
	Formulaire sur les signaux	229
	Partie II Mécanique	241
9	Cinématique du point et du solide indéformable	243
I	Mouvement d'un point dans un référentiel	243
I.1	Instant d'un événement	243
I.2	Repérage d'un point	244
I.3	Lois horaires et trajectoire	245
I.4	Relativité du mouvement	246
I.5	Repérages classiques - Approche constructive du vecteur vitesse	247
II	Vecteurs vitesse et accélération	253
II.1	Dérivation temporelle d'un vecteur	253
II.2	Définition du vecteur vitesse	256
II.3	Définition du vecteur accélération	257
III	Exemples de mouvements simples	259
III.1	Mouvement rectiligne d'un point	260
III.2	Mouvement d'un point soumis à accélération constante	260
III.3	Mouvement de translation d'un solide	262
III.4	Mouvement circulaire d'un point	263
III.5	Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe	265
IV	Exercices	266

10	Dynamique du point	271
I	Lois de Newton	271
I.1	Principe d'inertie	271
I.2	Principe fondamental de la dynamique	273
I.3	Principe des actions réciproques	274
II	Lois de force	274
II.1	Lois d'interaction	274
II.2	Forces de gravitation	275
II.3	Forces élastiques	279
II.4	Liaisons et frottements	282
II.5	Forces électromagnétiques	285
III	Exercices	286
11	Travail, puissance et énergie	291
I	Puissance et travail	292
I.1	Puissance	292
I.2	Travail	293
II	Théorème de l'énergie cinétique	294
II.1	Théorème de la puissance cinétique	294
II.2	Théorème de l'énergie cinétique	295
III	Énergie mécanique	296
III.1	Forces conservatives	296
III.2	Théorème de l'énergie mécanique	298
III.3	Exemples de forces conservatives	300
IV	Mouvements unidimensionnels	302
IV.1	Définition et exemples	302
IV.2	Équilibre d'un système conservatif unidimensionnel	303
IV.3	Mouvement autour d'un équilibre	305
V	Exercices	308
12	Particules chargées dans des champs électrique et magnétique	313
I	Force de Lorentz	313
I.1	Force électrique	313
I.2	Force magnétique	314
I.3	Force électromagnétique de Lorentz	314
I.4	Force électromagnétique <i>vs</i> poids	315
I.5	Puissance et travail de la force de Lorentz	316
II	Particule chargée dans un champ électrique uniforme et permanent	317
II.1	Étude du mouvement	317
II.2	Utilisation pratique des champs électrostatiques	319
III	Particule dans un champ magnétique uniforme	324
III.1	Étude du mouvement	324
III.2	Applications physiques des champs magnétiques uniformes	326
IV	Exercices	329

13 Moment cinétique et applications	335
I Théorème du moment cinétique	335
I.1 Notion de moment	335
I.2 Théorème du moment cinétique	339
I.3 Applications	340
II Mouvements à force centrale	342
II.1 Forces centrales	342
II.2 Propriétés des mouvements à force centrale	343
III Forces centrales conservatives	345
III.1 Force centrale et énergie potentielle	345
III.2 Mouvements et forces centrales conservatives	347
IV Trajectoires dans un champ newtonien	349
IV.1 Définition et exemples	350
IV.2 Point soumis à une force newtonienne attractive, cas d'une trajectoire circulaire	351
IV.3 Lois de Kepler	354
IV.4 Trajectoire elliptique en astronomie	356
V Moment cinétique d'un système de points	357
V.1 Moment cinétique par rapport à un point	357
V.2 Théorèmes du moment cinétique d'un système de points	358
V.3 Notion de couple	361
V.4 Cas d'un solide indéformable	362
VI Exercices	367
 Formulaire de mécanique	 373
 Partie III Thermodynamique	 377
14 Description d'un système à l'équilibre	379
I Les différentes échelles de description	379
I.1 Échelle microscopique, libre parcours moyen	379
I.2 Échelle macroscopique	380
I.3 Échelle mésoscopique	380
II Théorie cinétique du gaz parfait	380
II.1 Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz	381
II.2 Pression cinétique	382
II.3 Température cinétique	384
III Description d'un système thermodynamique	385
III.1 Système thermodynamique	385
III.2 Grandeur extensive, grandeur intensive	386
III.3 Construction d'une grandeur intensive	387
III.4 Bilan d'une grandeur extensive	388
IV Équation d'état	390
IV.1 Équation d'état d'un fluide homogène	390
IV.2 Exemple du gaz parfait	390
IV.3 Exemple d'une phase condensée indilatable et incompressible	391

V	Énergie interne d'un système	391
V.1	Définition	391
V.2	Cas du gaz parfait monoatomique	392
V.3	Cas d'une phase condensée indilatable et incompressible	395
VI	Les fluides réels	396
VI.1	Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables	396
VI.2	Du gaz réel au gaz parfait	398
VII	Corps pur diphasé en équilibre	399
VII.1	Corps pur sous plusieurs phases	399
VII.2	Les états de la matière	399
VII.3	Diagramme de phases (p, T)	400
VII.4	Cas de l'équilibre liquide-vapeur	403
VIII	Équilibre liquide-vapeur de l'eau en présence d'une atmosphère inerte	410
IX	Exercices	415
15	Échanges d'énergie au cours d'une transformation	421
I	Transformation thermodynamique subie par un système	421
I.1	Introduction	421
I.2	Détermination de l'état d'équilibre final	423
I.3	Quelques transformations particulières	424
II	Échange d'énergie mécanique avec l'extérieur : travail des forces de pression	425
II.1	Travail mécanique	425
II.2	Travail des forces de pression lors d'une évolution élémentaire	425
II.3	Travail des forces de pression lors d'une évolution non élémentaire : cas particuliers	427
II.4	Principe du calcul du travail pour une transformation quasi stationnaire	428
II.5	Lien avec le diagramme de Clapeyron	431
II.6	Cas d'une transformation cyclique	432
III	Échange thermique d'énergie avec l'extérieur : transfert thermique	434
III.1	Notion de transfert thermique	434
III.2	Les différents types de transferts thermiques	435
III.3	Transformation adiabatique	436
III.4	Thermostat	436
III.5	Transformation monotherme	438
III.6	Transformation isotherme	438
IV	Exercices	439
16	Premier principe. Bilans d'énergie	443
I	Le premier principe de la thermodynamique	443
I.1	Conservation de l'énergie	443
I.2	Énoncé du premier principe	444

II	Enthalpie d'un système	452
II.1	Définition	452
II.2	Cas du gaz parfait	452
II.3	Cas d'une phase condensée incompressible et indilatable	452
II.4	Capacité thermique à pression constante	453
II.5	Cas particulier du premier principe : bilan d'enthalpie pour une transformation monobare	455
III	Étude de détente de gaz	456
III.1	Détente de Joule et Gay-Lussac	456
III.2	Détente de Joule-Thomson	458
IV	Application aux transitions de phase	462
IV.1	Enthalpie associée à une transition de phase	462
IV.2	Bilans énergétiques en présence de transitions de phases	465
V	Calorimétrie	468
V.1	Mesure de la capacité thermique d'un solide : méthode des mélanges	469
V.2	Mesure de la capacité thermique d'un liquide : méthode électrique	471
VI	Exercices	471
17	Deuxième principe. Bilans d'entropie	475
I	Le deuxième principe de la thermodynamique	475
I.1	Insuffisance du premier principe	475
I.2	Énoncé du deuxième principe	477
II	Interprétation statistique de l'entropie	480
III	Bilan d'entropie	484
III.1	Terme d'échange d'entropie	484
III.2	Variation d'entropie d'un système	484
III.3	Exemples	490
IV	Loi de Laplace	494
V	Cas particulier d'une transition de phase	497
VI	Exercices	500
18	Machines thermiques	505
I	Machines thermiques	505
I.1	Machines thermiques cycliques	505
I.2	Irréversibilité et inégalité de Clausius	505
II	Machines thermiques cycliques dithermes	507
II.1	Moteur cyclique ditherme	507
II.2	Réfrigérateur	509
II.3	Pompe à chaleur	511
II.4	Rendement et efficacité	512
III	Évolutions dans une machine réelle : modélisation du moteur à combustion interne	513
IV	Machines thermiques à écoulement de fluide permanent	516
IV.1	Premier principe de la thermodynamique pour un écoulement permanent	516
IV.2	Diagrammes thermodynamiques	521
V	Exercices	523
VI	Problèmes	525

19 Statique des fluides (PCSI)	535
I Modèle du milieu continu	535
I.1 Les différentes échelles de description d'un fluide	535
I.2 Pression dans un fluide	536
I.3 Champs de grandeurs intensives locales	537
II Statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme	537
II.1 Champ de pression dans un liquide (hydrostatique)	539
II.2 Modèle isotherme de l'atmosphère	541
III Le facteur de Boltzmann	545
III.1 Construction du facteur de Boltzmann	545
III.2 Utilisation du facteur de Boltzmann	546
IV Actions de pression	547
IV.1 Résultante d'actions de pression	547
IV.2 Poussée d'Archimède	549
V Équation locale de la statique des fluides	551
V.1 Équivalent volumique des actions de pression	551
V.2 Relation fondamentale de la statique des fluides	553
VI Exercices	554
 Formulaire de thermodynamique	 559
 Partie IV Induction et forces de Laplace	 565
 20 Le champ magnétique	 567
I Sources et cartes du champ magnétique	567
I.1 Aimant droit	567
I.2 Champs magnétiques créés par des courants	569
II Intensité du champ magnétique	570
II.1 Lien entre intensité et carte du champ magnétique	571
II.2 Lien entre courant et champ magnétique	572
II.3 Principe de superposition des champs magnétiques	574
III Moment magnétique	575
IV Exercices	578
 21 Actions d'un champ magnétique	 579
I Forces de Laplace	579
II Actions de Laplace sur une spire ou un aimant	582
III Effet moteur d'un champ magnétique tournant	585
IV Exercices	586
 22 Lois de l'induction	 591
I Aspect expérimental de l'induction	591
II Formalisation des lois de l'induction	591
III Exercices	594

23 Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps	597
I Phénomène d'auto-induction	597
I.1 Flux propre et inductance propre	597
I.2 Auto-induction et loi de modération de Lenz	601
I.3 Aspect énergétique de l'auto-induction	602
II Bobines en interaction	604
II.1 Inductance mutuelle entre deux bobines	604
II.2 Circuits couplés par induction mutuelle	605
II.3 Exemples d'applications des circuits couplés	606
II.4 Bilan énergétique pour deux circuits couplés	607
II.5 Transformateur de tension	608
III Exercices	610
24 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	613
I Conversion de puissance mécanique en puissance électrique	613
I.1 Dispositif des rails de Laplace	613
I.2 Freinage électromagnétique	617
I.3 Circuit en rotation dans un champ magnétique uniforme	619
II Conversion de puissance électrique en puissance mécanique	621
II.1 Moteur à courant continu à entrefer plan	621
II.2 Haut-parleur électrodynamique	623
III Exercices	625
Formulaire sur l'induction	629
Annexes	631
A Mesures et incertitudes	631
I Mesure physique et erreurs	631
I.1 Variabilité des mesures	631
I.2 Erreur systématique	632
I.3 Valeur vraie, erreur aléatoire	632
I.4 Fidélité et justesse	633
I.5 Évaluation de l'incertitude, incertitude type	633
II Évaluation de type A de l'incertitude	634
II.1 Généralités	634
II.2 Lois de distribution	636
II.3 Intervalle de confiance	637
III Évaluation de type B de l'incertitude	639
III.1 Informations constructeur	639
III.2 Encadrement expérimental	640
IV Incertitude type composée	640
IV.1 Propagation des erreurs	640
IV.2 Exemples	641
IV.3 Intervalle de confiance	642
V Régression linéaire, moindres carrés	642
V.1 Détermination graphique	643
V.2 Méthode des moindres carrés	643

B	Résolution des équations différentielles	645
I	Équations différentielles homogènes	645
I.1	Équation différentielle homogène du premier ordre	645
I.2	Équation différentielle homogène du deuxième ordre	646
II	Commentaires	648
II.1	Forme canonique	648
II.2	Linéarité	648
II.3	Stabilité	648
III	Filtre	649
III.1	Définitions	649
III.2	Conséquences	649
III.3	Fonction de transfert	649
C	Système international d'unités de mesure	651
I	Unités de base	651
II	Unités dérivées cohérentes	652
	Partie V Solutions des exercices	655
	Index	795

Première partie

SIGNAUX PHYSIQUES

L'ÉTUDE des signaux physiques joue un rôle tout particulier dans le nouveau programme des CPGE. En tant que modèle d'information à la fois spatiale et temporelle, le signal est une notion centrale dans de nombreuses parties du cursus. Ce modèle permettra aux étudiants d'aborder des outils ou des concepts très importants de la physique : les ondes et leurs principales propriétés, l'analyse harmonique, les bases de l'électrocinétique, l'utilisation des équations différentielles linéaires.

Dans ce contexte et conformément aux recommandations du programme, l'étude des signaux physiques sera généralement traitée en début d'année et en suivant le déroulement proposé dans cette partie : les différents chapitres dont elle est composée ne sont donc pas indépendants.

Le **bloc 1** s'articule autour d'un système simple et connu : l'oscillateur harmonique non amorti en mécanique. Ce système permet d'introduire simultanément le concept fondamental d'équation différentielle modèle de l'évolution temporelle, et le vocabulaire précis qui sera réinvesti par la suite. Les acquis de ce bloc seront réutilisés *a minima* tout au long des deux années de CPGE.

Le **bloc 2** est consacré à la propagation d'un signal. Il permettra de faire le lien entre l'observation de signaux qui se propagent et la traduction mathématique de cette propagation dans un contexte simple. La superposition de ces signaux et les phénomènes d'interférence apparaîtront alors clairement. L'étude des ondes stationnaires mettra en évidence le rôle essentiel des conditions aux limites dans ce type de problème. Enfin, le phénomène de diffraction sera étudié comme une propriété universelle de la propagation des ondes en présence d'obstacles. Ce bloc est fondamental, notamment en vue de l'introduction au monde quantique.

Le **bloc 3** porte sur l'optique géométrique. Il sert de point d'appui à de nombreuses approches expérimentales.

Une ouverture au monde quantique est abordée dans le **bloc 4**. À partir de l'étude des résultats expérimentaux de l'effet photoélectrique, le constat de l'insuffisance de la mécanique classique est fait. Un certain nombre de concepts purement quantiques sont alors déduits ou posés, comme la dualité onde-corpuscule, le rôle de la mesure, le caractère probabiliste, l'indétermination, la quantification ou les énergies du point zéro. Ce bloc a été spécialement adapté au caractère innovant qu'il présente dans le nouveau programme. Un effort particulier a visé à faciliter l'introduction des concepts modernes développés ici.

Le **cinquième** et dernier **bloc** est une introduction générale à l'électrocinétique. Il débute par une présentation des bases nécessaires à l'étude des circuits électriques dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS). Il se poursuit par l'étude des circuits linéaires du premier et du second ordre en régime libre puis forcé. Il se termine par une introduction au filtrage linéaire. Outre son apport incontournable comme pilier de très nombreuses approches expérimentales, ce bloc permet de mettre réellement en pratique les premiers outils mathématiques de base indispensables en physique.

Chapitre 1

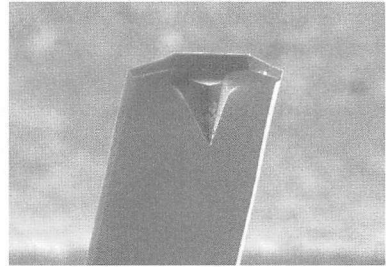
OSCILLATEUR HARMONIQUE

L'OSCILLATEUR harmonique étudié dans ce chapitre est un oscillateur mécanique constitué d'un ressort et d'une masse. Cet exemple simple permettra d'introduire le concept fondamental d'équation différentielle. Plus généralement, le modèle de l'oscillateur harmonique rend compte de l'évolution d'un système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable. Ainsi, nous retrouverons des oscillateurs dans le cadre de l'électricité (voir chapitre 7) ou du monde quantique (voir chapitre 4).

I. Introduction, définitions

I.1. Exemple

La photographie ci-contre montre la pointe de la sonde d'un microscope à force atomique (AFM) montée sur son levier. Cette pointe (d'une dimension de quelques micromètres) est approchée à très faible distance d'un échantillon dont on souhaite analyser la surface. Ce levier constitue un oscillateur mécanique, qui vibre librement à une fréquence de l'ordre de quelques kilohertz. Sous l'action des interactions entre la pointe de la sonde et la surface de l'échantillon, la fréquence de ces oscillations est modifiée. La mesure du décalage en fréquence permet d'analyser la forme de la surface de l'échantillon.



Pointe AFM

Définition 1.1. *Oscillateur*

Un oscillateur est un système dont l'évolution est périodique. L'oscillateur est dit harmonique si la dépendance temporelle des oscillations est sinusoïdale.

I.2. Caractérisation du mouvement

I.2.1. Vocabulaire

De manière générale, l'oscillateur mécanique harmonique est un dispositif dans lequel une grandeur physique x (la position de la pointe portée par le levier dans l'exemple ci-dessus) oscille au cours du temps, comme c'est le cas sur la figure 1.1.

Sur cette figure, on constate que l'oscillation se fait entre deux valeurs extrêmes $\pm x_{\max}$; lors de la définition de la grandeur x , il a été décidé de prendre comme origine une position telle que la valeur moyenne de $x(t)$ soit nulle (cela revient à dire que x est le déplacement par rapport à la position d'équilibre, voir encadré « Méthode » page 8). La valeur x_{\max} est appelée amplitude de l'oscillation, à ne pas confondre avec l'amplitude crête à crête qui désigne l'écart entre les valeurs extrêmes (soit $2x_{\max}$).

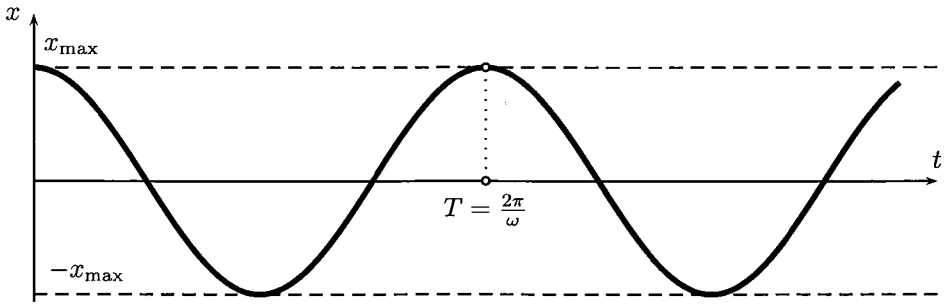


FIG. 1.1. Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique.

Définition 1.2. Amplitude

L'amplitude d'une oscillation harmonique est l'écart maximal à la valeur médiane (qui est aussi la valeur moyenne du fait de la symétrie des alternances).

Par ailleurs, les oscillations sont périodiques, de plus petite période T sur la figure 1.1. La fréquence f des oscillations est l'inverse de la période, $f = 1/T$. Enfin, la pulsation est la grandeur définie par $\omega = 2\pi f$. Fréquence et pulsation sont en principe homogènes l'une à l'autre, mais on emploiera systématiquement les unités *hertz* (Hz) pour les fréquences et *radian par seconde* pour les pulsations.

Définition 1.3. Fréquence et pulsation

Pour un signal harmonique de période T , sa fréquence est $f = \frac{1}{T}$, exprimée en hertz (Hz), et sa pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{T}$, exprimée en radian par seconde ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

Les oscillateurs mécaniques à l'échelle macroscopique sont souvent relativement lents, avec des fréquences caractéristiques allant de quelques fractions de hertz (ondes sismiques) à quelques dizaines de hertz (pendules, ressorts, etc.). Au contraire, les oscillateurs microscopiques ou formés de particules élémentaires (oscillations atomiques ou moléculaires) sont souvent très rapides, avec des fréquences jusqu'au domaine optique (10^{14} à 10^{15} Hz) ou plus.

I.2.2. Représentation mathématique

La grandeur $x(t)$ associée aux oscillations libres¹ d'un oscillateur harmonique est, par définition, sinusoïdale. Elle peut donc s'écrire $x(t) = x_{\max} \cos(\omega t)$. D'après les propriétés du cosinus, x_{\max} représente bien l'amplitude de l'oscillation. Par ailleurs, la fonction cosinus étant périodique de période 2π , la fonction $t \mapsto \cos(\omega t)$ est périodique de période $T = 2\pi/\omega$, et ainsi le facteur ω que l'on a introduit dans l'argument du cosinus correspond bien à la définition 1.3 de la pulsation. Enfin, le cosinus étant maximal lorsque son argument est nul, $x(0) = x_{\max}$ comme c'est le cas sur la figure 1.1. Il s'agit cependant là d'un cas particulier, et nous aurions pu choisir une autre origine des temps et écrire de manière plus générale $x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$, où φ est un réel quelconque. L'argument $(\omega t + \varphi)$ du cosinus est la *phase* de la grandeur x et φ est la *phase initiale* ou *phase à l'origine des temps* (voir figure 1.2). Sur cette figure, on a

1. On suppose dans ce chapitre que l'oscillateur évolue librement et n'est donc pas forcé par une excitation extérieure.

ajouté en gris un axe sur lequel la variable est ωt . En considérant cette variable sans dimension, la période du signal est 2π et la phase φ à l'origine apparaît clairement.

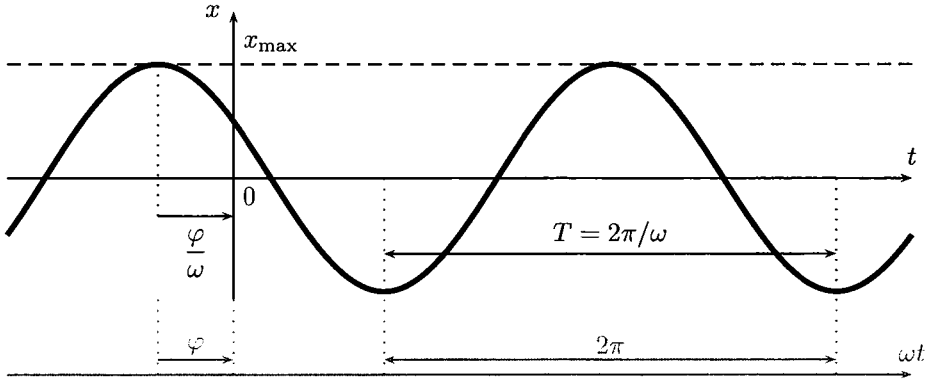


FIG. 1.2. Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique, phase à l'origine.

Puisque l'expression de la phase dépend du choix de l'origine des temps, ce sont en fait des différences de phases entre deux signaux qui auront un sens physique (voir section II page 164).

Notons enfin que la dépendance temporelle de x peut aussi se mettre sous la forme d'une somme d'un cosinus et d'un sinus ; en utilisant une formule de trigonométrie, $x(t) = x_{\max} \cos \varphi \cos(\omega t) - x_{\max} \sin \varphi \sin(\omega t)$. Nous verrons à la section II.3 (voir page 10) qu'une telle forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ est souvent plus pratique pour exploiter les conditions initiales (voir aussi l'annexe B sur la résolution des équations différentielles).

II. Oscillateur harmonique masse-ressort

Le dispositif étudié est constitué d'un mobile assimilable à une masse ponctuelle m au point M , relié à une extrémité d'un ressort, l'autre extrémité, notée A , étant fixe (voir figure 1.3). Un guide, non représenté, impose au point M de ne se déplacer que selon l'axe x , horizontal, et cela sans frottement (glissière parfaite). Les vecteurs \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z (non représenté) sont les vecteurs de base du repère orthonormé direct (ils sont donc unitaires, d'où le choix de la lettre u).

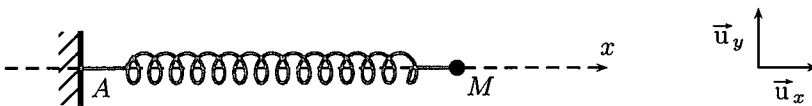


FIG. 1.3. Masse ponctuelle reliée à un ressort dont l'autre extrémité est fixe.

II.1. Loi de Hooke

Pour mettre en équation le problème, il faut modéliser l'action du ressort sur le mobile.

II.1.1. Présentation du ressort

Considérons un ressort initialement à vide (on parle de ressort ni tendu, ni comprimé) et notons ℓ_0 sa longueur à vide. Lorsqu'un opérateur tire sur un ressort de sorte que sa nouvelle longueur ℓ soit supérieure à sa longueur à vide ℓ_0 , celui-ci s'oppose à l'action de l'opérateur en exerçant une force qui tend à le ramener dans sa situation initiale. De la même manière, si l'opérateur comprime un ressort ($\ell < \ell_0$), celui-ci exerce une force qui tend de nouveau à le ramener dans sa situation initiale (voir figure 1.4).

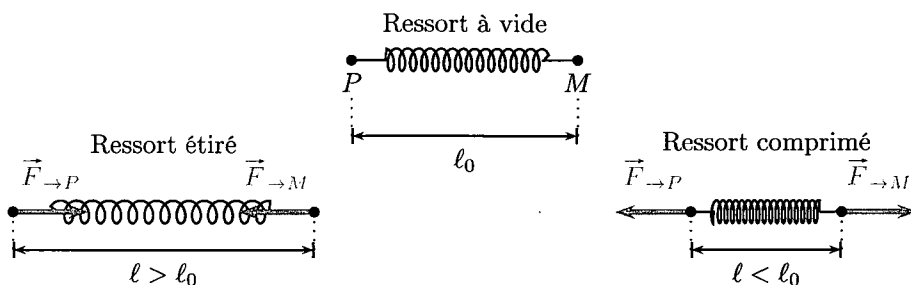


FIG. 1.4. Forces exercées par un ressort élastique sur ses extrémités.

On nomme souvent cette force « *force de rappel* ». En effet, en supposant l'extrémité P fixée², que l'on comprime ou que l'on étire le ressort, la force tend toujours à rappeler l'autre extrémité M vers la position correspondant au ressort à vide.

II.1.2. Modélisation linéaire de la force de rappel

Les forces exercées sur l'extrémité d'un ressort ne peuvent pas, au contraire des interactions fondamentales comme les forces de gravitation ou les forces électromagnétiques, faire l'objet d'une détermination exacte. La description donnée ici est donc phénoménologique (elle ne s'appuie pas sur un modèle théorique microscopique de la matière, mais elle est bien compatible avec les observations expérimentales). On distingue trois domaines de fonctionnement du ressort.

- ▶ S'il est très comprimé, les spires se touchent et il est impossible de le comprimer plus : sa longueur ne varie pas, même si on tente de le comprimer plus fort.
- ▶ S'il n'est ni trop comprimé ni trop tendu, on constate expérimentalement que la force de rappel est (approximativement) proportionnelle à l'allongement du ressort. C'est le domaine élastique de fonctionnement du ressort. Lorsqu'on relâche le ressort, il revient à sa position à vide initiale (fonctionnement réversible). Cette réversibilité du fonctionnement du ressort permet la fabrication d'oscillateurs.
- ▶ Si le ressort est trop tendu, la force de rappel devient très importante (elle n'est plus proportionnelle à l'allongement) et le ressort se déforme de façon irréversible : si on le relâche, il ne reprend pas sa forme initiale. On parle de déformation plastique (domaine de plasticité du ressort).

2. Comme c'est le cas sur la figure 1.3 où le point A est fixe.

Seul le domaine élastique est intéressant pour la fabrication d'oscillateurs. La force de rappel obéit (approximativement) à la loi de Hooke.

Loi 1.4. Loi de Hooke

Dans son domaine élastique de fonctionnement, un ressort exerce sur chacune de ses extrémités une force dirigée le long de l'axe du ressort, proportionnelle à l'allongement algébrique de celui-ci, et dirigée dans le sens qui s'oppose à la déformation du ressort.

Pour un ressort d'extrémités P et M , on note :

- ▶ ℓ_0 la longueur à vide ;
- ▶ $\ell = \|\overrightarrow{PM}\|$ la longueur à l'instant considéré ;
- ▶ k la constante de raideur du ressort.

La force exercée sur l'extrémité M (voir figure 1.4) s'écrit

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u} \quad \text{où} \quad \ell = MP \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\ell}. \quad (1.1)$$

La grandeur $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ s'appelle allongement algébrique du ressort.

Remarques

▶ L'allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ est une grandeur algébrique (il peut être positif ou négatif). S'il est positif, le ressort est effectivement plus long qu'au repos. S'il est négatif, il est plus court.

▶ Le vecteur $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\ell} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ est le vecteur unitaire dirigé de P vers M . Exprimée avec ce vecteur, la loi de Hooke traduit le fait que la force de rappel $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M}$ change de sens quand l'allongement change de signe. La figure 1.4 montre comment le signe de cet allongement commande le sens des forces exercées par le ressort sur les objets qui y sont liés.

▶ La constante k est appelée raideur du ressort. Plus elle est grande, plus la force de rappel croît vite avec l'allongement. Le ressort s'oppose donc fortement à une traction de l'opérateur : il est dit raide. On caractérise parfois le même ressort par sa *souplesse* $s = 1/k$.

La loi de Hooke est linéaire au sens où la force est proportionnelle à l'allongement (*ut tensio sic vis*, comme l'a énoncé Robert Hooke³ en 1678). La linéarité est une modélisation simple de la réalité, valable uniquement dans le domaine élastique.

Attention

Algébrisation et loi de Hooke

Les deux forces exercées à ses extrémités par un ressort élastique sont opposées. De plus, l'allongement de ce ressort dépend du déplacement de ses deux extrémités. En conséquence, les erreurs de signe sont fréquentes dans l'expression algébrique ou vectorielle de la force élastique. Ces erreurs conduisent en général à des solutions aberrantes des problèmes mécaniques. On peut les éviter en appliquant à la lettre la relation (1.1).

3. Robert Hooke (1635-1703) est un scientifique anglais dont le champ d'étude recouvre un large domaine. Il a notamment activement participé à la reconstruction de Londres après le grand incendie de 1666.

II.2. Mise en équation de l'oscillateur

II.2.1. Loi de la quantité de mouvement

Afin de mettre en équation le problème, nous allons appliquer la loi de la quantité de mouvement, ou deuxième loi de Newton (ou encore principe fondamental de la dynamique), en procédant par étapes.

- ▶ Le référentiel d'étude sera celui lié au laboratoire (le point A de la figure 1.3 page 5 est fixe dans ce référentiel), supposé galiléen.
- ▶ Il faut définir le système. On choisit le mobile M dont on souhaite connaître le mouvement.

En notant $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement du système, la loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F},$$

où $\sum \vec{F}$ est la somme des forces appliquées au système et \vec{a} l'accélération du mobile. Le système est soumis à :

- ▶ la force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$;
- ▶ le poids $m\vec{g}$, suivant la verticale (l'axe y sur la figure 1.3) ;
- ▶ la réaction \vec{R} du guide forçant le mobile à ne se déplacer que suivant x .

Le déplacement du mobile se fait suivant l'axe x , donc $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x$ parfois noté $\ddot{x}\vec{u}_x$. Son déplacement, guidé, se fait sans frottement, donc la réaction n'a pas de composante suivant \vec{u}_x . La projection de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe x conduit donc simplement⁴ à l'équation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(\ell - \ell_0).$$

II.2.2. Forme canonique de l'équation du mouvement

Le choix de l'origine n'a pas encore été fait. *A priori*, on pourrait penser à choisir l'origine en A ; ainsi, ℓ s'identifie à x et l'équation devient $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - \ell_0)$. Mais un autre choix, plus judicieux, est possible. En effet, si l'on choisit l'origine de manière à ce que ℓ soit égal à $\ell_0 + x$, l'équation s'écrit plus simplement $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. Cette origine correspond à la position d'équilibre du mobile puisque dans la position $x = 0$, $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{0}$.

Méthode

Choix de l'origine du référentiel

En choisissant une origine coïncidant avec la position d'équilibre du système, l'équation différentielle et par conséquent la solution prennent une forme plus simple.

4. La projection sur les autres composantes conduirait à montrer que $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$; la réaction du guide s'oppose au poids du mobile.

L'intérêt de ce choix sera notamment illustré dans l'exercice corrigé 1.5. Avec ce choix d'origine, l'équation différentielle s'écrit $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$. Posons $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, l'équation devient

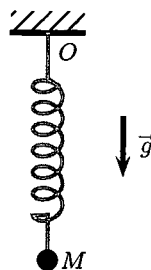
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.2)$$

D'après l'équation précédente, ω_0 a la dimension de l'inverse d'un temps (la dimension d'une pulsation, ce qui est compatible avec le symbole choisi pour cette grandeur). L'équation du mouvement ainsi présentée est appelée forme canonique de l'équation différentielle. L'intérêt d'une telle présentation sera discuté à la section I.1 du chapitre 7, page 151 (voir aussi l'annexe B page 645). Tous les oscillateurs harmoniques sont régis par une équation de cette forme.

EXERCICE CORRIGÉ 1.5.

On considère un mobile M assimilable à une masse ponctuelle m et pendu (verticalement) par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{u}_z$. L'origine du référentiel est tout d'abord prise en O , point d'accroche du ressort au plafond (voir figure). Le mouvement reste vertical.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position $z(t)$ du ressort, puis proposer un changement de variable afin de la mettre sous forme canonique.



Corrigé

Le système est le mobile de masse m (quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{z}\vec{u}_z$ puisque le mouvement reste vertical); le référentiel d'étude est le référentiel $Oxyz$ lié au laboratoire, supposé galiléen. Le système est soumis à la force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$ et à son poids $m\vec{g}$. Du fait du choix de l'origine, $\ell(t) = z(t)$ d'après l'orientation descendante de l'axe z .

En appliquant la loi de la quantité de mouvement,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z = -k[z(t) - \ell_0] \vec{u}_z + mg\vec{u}_z,$$

soit $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 \ell_0 + g$ en projection sur l'axe z (où l'on a introduit la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$).

Pour faire apparaître l'équation canonique, il faut changer l'origine de telle manière que le second membre disparaisse. Afin de traiter le problème de manière systématique, exploitons l'encadré « Méthode » page 8 et cherchons la position z_{eq} d'équilibre du système. Le système est à l'équilibre lorsque $\forall t, \ddot{z}(t) = 0$, ce qui conduit à $z_{\text{eq}} = \ell_0 + g/\omega_0^2 = \ell_0 + mg/k$. En posant $\xi = z - z_{\text{eq}}$, on obtient alors $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$ qui est la forme canonique de l'équation différentielle régissant un oscillateur harmonique.

Avec un peu d'habitude, la rédaction (rapide) d'un tel exercice ne prend que quelques lignes, en considérant directement l'origine du référentiel au point d'équilibre du mobile et en exploitant le fait qu'alors l'équation ne contient pas de terme constant (pas de second membre en reprenant la formulation de cette correction).

II.3. Résolution de l'équation différentielle

II.3.1. Solution générale

La résolution générale de l'équation différentielle (1.2) est l'objet de l'annexe B (voir page 645). Remarquons simplement ici que les fonctions $t \mapsto \cos(\omega_0 t)$ et $t \mapsto \sin(\omega_0 t)$ sont solutions de l'équation (1.2). En effet, par exemple, $\frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$. La solution générale de cette équation est une combinaison linéaire de ces deux fonctions

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t). \quad (1.3)$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes α et β .

La solution (1.3) est une fonction harmonique de pulsation ω_0 appelée *pulsation propre* de l'oscillateur harmonique.

II.3.2. Cas d'un mobile lâché sans vitesse initiale

Pour déterminer complètement la solution, il faut se donner deux conditions initiales ; il y a en effet deux constantes à déterminer dans l'équation (1.3). Nous allons supposer que le mobile est lâché sans vitesse initiale après avoir été écarté de sa position d'équilibre. Notons a sa position initiale, $x(0) = a$. La vitesse initiale nulle s'écrit $\frac{dx}{dt}(0) = 0$; injectée dans l'équation (1.3), on obtient $\frac{dx}{dt}(0) = -\omega_0 \alpha \sin(0) + \omega_0 \beta \cos(0) = 0$, soit $\beta = 0$. En écrivant ensuite $x(0) = a$, on obtient $\alpha = a$; le mouvement du mobile a donc pour équation

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t). \quad (1.4)$$

On remarque que la solution obtenue a la forme de celle discutée à la section I.2.2 (voir page 4) avec $x_{\max} = a$ et $\omega = \omega_0$. L'évolution temporelle est représentée à la figure 1.1 page 4.

L'exercice 1 (voir page 12) étudie le cas d'un mobile lancé avec une vitesse initiale.

II.4. Conservation de l'énergie

II.4.1. Énergie potentielle associée au ressort

Nous allons faire apparaître une équation énergétique en multipliant l'équation du mouvement par $v = \frac{dx}{dt}$. De manière plus générale, il s'agit d'effectuer le produit scalaire de la loi de la quantité de mouvement et de la vitesse. L'équation du mouvement devient alors

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dt} v = -kx \frac{dx}{dt}. \quad (1.5)$$

Or, $\frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$ et, de la même manière, $x \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} \right)$. Ainsi, l'équation (1.5) devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right). \quad (1.6)$$

Dans la parenthèse, au membre de gauche, on reconnaît l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2$ du mobile. Dans l'équation (1.6), c'est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique qui apparaît ; ce terme est homogène à une puissance (énergie par unité de temps).

Au membre de droite, on voit aussi apparaître la dérivée temporelle d'une quantité homogène à une énergie. En posant $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2$, l'équation (1.6) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{Cte.} \quad (1.7)$$

On reconnaît la conservation de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$. Le terme \mathcal{E}_p s'identifie donc à l'énergie potentielle élastique du ressort. Cette énergie potentielle est définie à une constante près, mais l'expression proposée ici conduit logiquement à une énergie potentielle nulle lorsque le ressort n'est ni tendu ni comprimé.

Définition 1.6. Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.$$

En fait, le membre de droite de l'équation (1.6) est la puissance fournie par la force de rappel élastique au mobile M , c'est-à-dire le travail fourni par cette force de rappel à M par unité de temps,

$$\mathcal{P}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} \cdot \vec{v} = -kx \vec{u}_x \cdot \frac{dx}{dt} \vec{u}_x = \frac{\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} \cdot d\vec{\ell}_M}{dt},$$

où le numérateur du dernier membre est bien le travail de la force élastique.

II.4.2. Illustration dans le cas du mobile lâché sans vitesse initiale

Reprenons la solution obtenue à la section II.3.2 dans le cas d'un mobile lâché sans vitesse initiale (voir équation (1.4)). En utilisant x_{\max} , plus parlant, la position du mobile est $x(t) = x_{\max} \cos(\omega_0 t)$. Sa vitesse est donc $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_{\max} \sin(\omega_0 t)$ et ainsi les énergies cinétique et potentielle ont pour expressions

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_{\max}^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \cos^2(\omega_0 t).$$

Leur somme est bien constante, conformément à l'équation (1.7),

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 [\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] = \frac{1}{2}kx_{\max}^2.$$

Cette conservation de l'énergie est illustrée sur la figure 1.5. L'énergie est initialement totalement sous forme d'énergie potentielle élastique. Lorsque l'énergie potentielle diminue (quand la longueur du ressort se rapproche de sa longueur à vide), l'énergie cinétique augmente; le transfert d'énergie d'une forme à l'autre assurant la conservation de l'énergie mécanique.

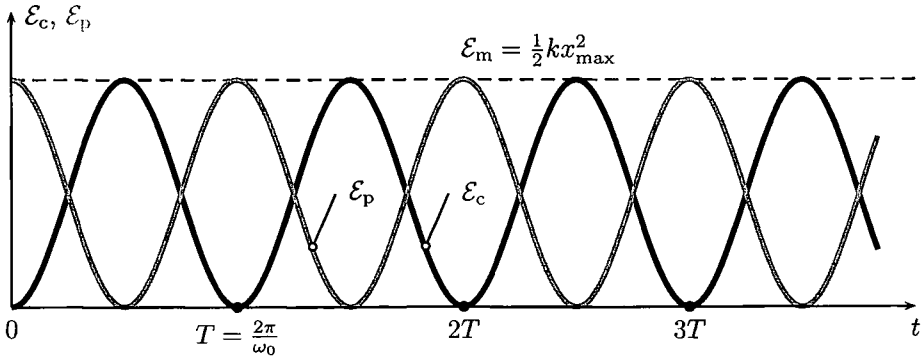


FIG. 1.5. Évolution temporelle des grandeurs énergétiques.

III. Exercices

1. Oscillateur lancé avec une vitesse initiale ★

(solution page 655)

On considère un mobile M de masse m lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 (voir figure 1.6). Il peut se déplacer horizontalement sur une glissière parfaite (sans frottement).

Le mobile est lancé avec une vitesse initiale v_0 à partir de sa position d'équilibre. Déterminer la loi d'évolution $x(t)$ de la position du mobile M .

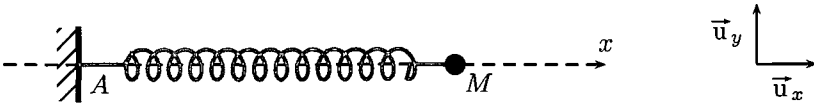


FIG. 1.6. Oscillateur harmonique.

2. Forces exercées par deux ressorts ★★

(solution page 655)

On fixe un mobile à deux murs par deux ressorts, de raideurs k_1 et k_2 et de longueurs à vide ℓ_{01} et ℓ_{02} (voir figure 1.7). Les points de fixation sont aux abscisses $x = 0$ et $x = L$. Exprimer la résultante des forces élastiques subies par le mobile. Montrer que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un unique ressort dont les caractéristiques sont à préciser.

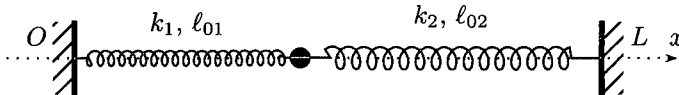


FIG. 1.7. Mobile relié à deux ressorts.

Chapitre 2

PROPAGATION D'UN SIGNAL

EN PHYSIQUE, on regroupe sous l'appellation « signal » toute information dépendant du temps et/ou de l'espace. Cette double dépendance sous-entend qu'un signal est susceptible de se déplacer dans l'espace et dans le temps. Dans ce chapitre introductif, nous allons étudier quelques-unes des propriétés de la propagation de ces signaux, dans le cas où ceux-ci sont assimilables à des ondes.

I. Quelques définitions

Définition 2.1. Perturbation mécanique

Une perturbation mécanique est une modification locale d'un milieu matériel.

Une vibration qui se déplace le long d'une corde initialement tendue, la chute d'une pierre dans un lac qui provoque des cercles concentriques se propageant à la surface de l'eau, sont deux exemples de perturbations. Il en existe bien d'autres que tout un chacun a pu mettre en évidence.

Définition 2.2. Propagation d'une onde

On appelle propagation d'une onde mécanique le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel sans transport de matière.

Une masse m fixée sur une corde met en évidence le fait que chacun des points de la corde s'écarte de sa position d'équilibre au passage de la perturbation, puis revient à sa position d'équilibre après le passage de celle-ci (voir figure 2.1 à gauche). Au passage de l'onde, la masse s'élève d'une hauteur H et voit donc son énergie potentielle de pesanteur augmenter de mgH . Cette énergie lui a été fournie par l'onde, mais la masse est restée à la même abscisse : il n'y a pas de transport de matière, il s'agit de la propagation d'une onde.

Définition 2.3. Onde transversale

Une onde est dite transversale lorsque le déplacement des points du milieu de propagation s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation.

Dans l'exemple schématisé à gauche de la figure 2.1, la perturbation engendrée sur la corde se propage de proche en proche dans la direction horizontale alors que les points de la corde se déplacent verticalement (d'abord de bas en haut, puis de haut en bas). En plus de se propager, cette onde est donc aussi transversale.

Remarque La corde constitue le milieu de propagation, elle ne se déplace pas dans son ensemble. Il n'y a pas de transport de matière. *Chaque point reproduit, à son tour, le mouvement du point précédent.* On notera qu'il est nécessaire que le milieu de propagation soit susceptible de se déformer ; il doit par conséquent posséder une certaine élasticité.

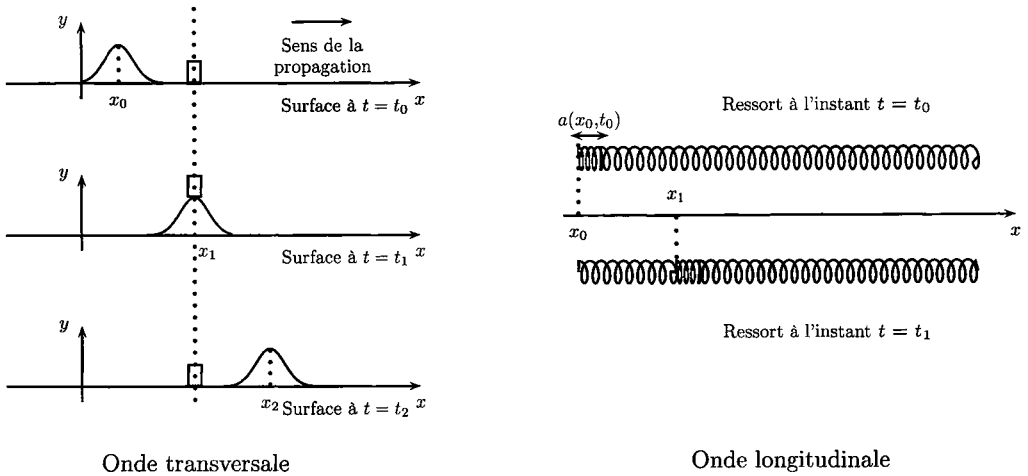


FIG. 2.1. Propagation d'une onde.

Définition 2.4. Onde longitudinale

Une onde est dite *longitudinale* lorsque le déplacement des points du milieu de propagation s'effectue dans la même direction que celle de la propagation.

Si la perturbation consiste en la compression de quelques spires d'un ressort horizontal (voir figure 2.1 à droite), une onde se propage dans la direction du ressort dès le relâchement de la compression : il s'agit donc d'une onde *longitudinale*.

Un son est une variation de pression. Sans contrainte particulière, il se propage dans toutes les directions depuis la source émettrice, on parle d'une onde sphérique.

Définition 2.5. Onde progressive

Une onde est dite *progressive* lorsque la perturbation se propage dans le milieu de propagation sans se déformer.

Les ondes de la figure 2.1 sont donc progressives.

II. Propriétés générales des ondes mécaniques**II.1. Direction de propagation**

Une onde se propage, à partir de la source, dans toutes les directions qui lui sont offertes. On distinguera ainsi les ondes à une, deux ou trois dimensions.

► La propagation est dite *monodimensionnelle* lorsqu'elle a lieu dans une seule direction (mais éventuellement dans les deux sens). C'est le cas, par exemple, de l'onde transversale se propageant le long d'une corde.

► Lorsque la propagation a lieu dans un plan (espace à deux dimensions), on dit qu'elle est *bidimensionnelle*. C'est le cas de l'onde engendrée à la surface de l'eau par le jet d'une pierre.

► Une onde sonore engendrée par un claquement de mains se propage dans les trois directions de l'espace. On parle alors d'une propagation *tridimensionnelle*.

II.2. Propriété d'une onde progressive monodimensionnelle

II.2.1. Célérité d'une onde progressive

Observons une onde progressive se propageant le long d'une corde vibrante. On identifie l'axe des abscisses avec la corde au repos. L'observation peut s'effectuer de deux manières.

► On peut tout d'abord photographier la corde à différents instants. Les différentes photos sont présentées à gauche sur la figure 2.2. On peut voir un ébranlement se déplacer *sans se déformer* le long de la corde.

► On peut également observer un point particulier au cours du temps. Sur la partie droite de la figure 2.2, on observe que le point source O et un point M quelconque de la corde ont des mouvements identiques. On remarque également que le mouvement de M est *en retard* par rapport à celui du point O .

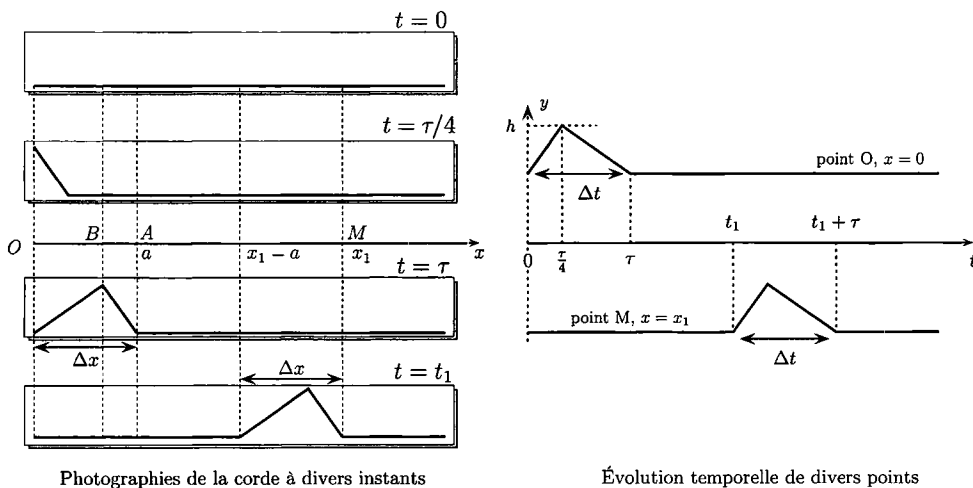


FIG. 2.2. Exemple d'une onde progressive sur une corde.

Le déplacement du point M , d'abscisse x_1 , commence avec un retard t_1 par rapport à celui de O . L'ébranlement se déplace donc avec une *célérité* $c = \frac{x_1}{t_1}$.

Définition 2.6. Célérité d'une onde progressive

Soit t_1 et t_2 les instants où une onde progressive atteint respectivement deux points M_1 et M_2 d'un milieu unidimensionnel. La célérité c d'une telle onde est égale au quotient de la distance séparant les deux points par la durée qui sépare les dates de passage de l'onde en ces points,

$$c = \frac{M_1 M_2}{t_2 - t_1}.$$

Considérons une perturbation se propageant le long d'une corde vibrante.

- ▶ Dans une observation à $t = \text{cte}$ de l'ensemble de la corde, on note Δx la longueur de la portion de corde soumise à un déplacement ; cette portion de corde se déplace à la célérité c .
- ▶ Dans une observation à $x = \text{cte}$ d'un point particulier de la corde au cours du temps, on note Δt la durée du mouvement de ce point.

Il existe alors une relation entre ces deux observations.

Théorème 2.7. Observation spatiale - Observation temporelle

Si Δx est la largeur spatiale d'une perturbation et Δt sa durée temporelle, alors cette perturbation se propage à la célérité

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Remarque La célérité est homogène à une vitesse. Elle correspond à la vitesse de propagation. On réserve toutefois le mot vitesse à un déplacement de matière ; or, dans le cas d'une onde, ce n'est pas la matière qui se déplace.

II.2.2. Facteurs influençant la célérité d'une onde

L'étude expérimentale ou la modélisation théorique de la propagation des ondes mécaniques permettent de déduire un certain nombre de propriétés de leur célérité.

- ▶ Tant que l'amplitude de la perturbation reste faible devant les longueurs caractéristiques du milieu de propagation, la célérité est indépendante de l'amplitude de la déformation de ce milieu. La célérité est alors une caractéristique du milieu qui est dit *linéaire*.
- ▶ Si la célérité est indépendante de la forme de la perturbation, alors le milieu est dit *non dispersif*.
- ▶ Pour un même milieu, la célérité dépend du type d'onde qui s'y propage. Dans un ressort par exemple, une onde longitudinale ne se propage pas avec la même célérité qu'une onde transversale. De même, une onde transversale se propageant à la surface d'un liquide possède une célérité beaucoup plus faible qu'une onde de pression longitudinale se propageant dans ce liquide. Lors d'un tremblement de terre, il existe des ondes transversales et longitudinales qui se propagent, chacune avec une célérité différente.
- ▶ La propagation d'une onde mécanique dans le vide est impossible. Pour se propager, les ondes mécaniques ont besoin de déformer le milieu de propagation. Il est donc nécessaire que ce dernier possède des propriétés élastiques.
- ▶ La célérité dépend des caractéristiques du milieu et notamment de sa compressibilité, qui dépend elle-même de la température du milieu. Par exemple, la célérité du son est plus grande dans un liquide que dans un gaz.

II.2.3. Modèle général pour une onde progressive

La perturbation qui se propage sur la corde vibrante est engendrée par le mouvement de la source. Le mouvement d'un point M de la corde peut être décrit par une fonction $s(M, t) = s(x, t)$. En particulier, pour une perturbation de durée τ , le mouvement de

la source est parfaitement déterminé si l'on connaît une fonction $f(t)$ telle que

$$\begin{cases} s(0,t) = f(t) & \text{si } t \in [0,\tau], \\ s(0,t) = 0 & \text{si } t > \tau. \end{cases}$$

Dans l'exemple de la figure 2.2, $f(t)$ représente le triangle de durée Δt avec, en particulier, $s(0, \frac{\tau}{4}) = h$. Le mouvement d'un point M de la corde est alors décrit par la fonction $s(x,t)$ telle que

$$\begin{cases} s(x,t) = g(t) & \text{si } t \in [t_1, t_1 + \tau], \\ s(x,t) = 0 & \text{si } t < t_1 \text{ et } t > t_1 + \tau. \end{cases}$$

Dans le cas d'une propagation sans déformation, la fonction $g(t)$ correspond à la fonction $f(t)$ translatée du retard t_1 , donc $g(t) = f(t - t_1)$. En effet, $f(u)$ est non nul si $u = (t - t_1) \in [0, \tau]$, c'est-à-dire si $t \in [t_1, t_1 + \tau]$. Dans l'exemple de la corde vibrante, un point M d'abscisse x commence à reproduire le mouvement de la source O avec un retard $t_1 = \frac{x}{c}$.

On peut généraliser ce modèle construit sur la corde vibrante à tous les phénomènes de propagation monodimensionnelle. La fonction $s(M,t)$ peut ainsi représenter par exemple :

- un déplacement vertical $y(x,t)$ pour la corde vibrante ;
- un déplacement horizontal dans le cas d'un ressort ;
- une pression $p(x,t)$ dans le cas d'une onde sonore longitudinale.

Théorème 2.8. Forme mathématique pour une onde progressive

Soit une onde progressive monodimensionnelle de célérité c se propageant sur un axe (O, \vec{u}_x) dans le sens des x croissants. Soit M un point du milieu de propagation d'abscisse x . La perturbation $s(M,t)$ en M à l'instant t s'écrit

$$s(M,t) = s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (2.1)$$

Supposons qu'à l'instant t , la perturbation se situe à l'abscisse x ; à l'instant $t + \delta t$, elle se sera propagée et aura atteint le point d'abscisse $x + \delta x$ tel que

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t + \delta t - \frac{x + \delta x}{c}\right).$$

On en déduit donc que $\delta t = \frac{\delta x}{c}$, et on retrouve bien évidemment l'expression de la célérité $c = \frac{\delta x}{\delta t}$.

Supposons maintenant que l'onde se propage dans le sens des x décroissants. Pour une variation temporelle δt positive, on aura une variation spatiale δx négative. La définition 2.6 ou le théorème 2.7 montrent que la célérité est toujours positive ; pour une propagation dans le sens des x décroissants, elle s'écrira donc $c = -\frac{\delta x}{\delta t} > 0$.

Pour une onde progressive monodimensionnelle de célérité c se propageant sur un axe (O, \vec{u}_x) dans le sens des x décroissants, la perturbation $s(M,t)$ en M s'écrit

$$s(M,t) = s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (2.2)$$

II.3. Superposition de deux ondes progressives

II.3.1. Principe de superposition

Considérons deux ondes progressives se propageant en sens inverse sur un même milieu matériel. Comme on peut l'observer sur la figure 2.3, si elles se rapprochent à l'instant t_1 , elles vont se superposer à un instant $t_2 > t_1$, puis s'éloigner sans être altérées à un instant $t_3 > t_2$. L'exemple de la figure 2.3 représente des ondes de même célérité, mais la situation est identique pour des ondes de célérités différentes. Cette observation illustre le *principe de superposition* dans le cas linéaire.

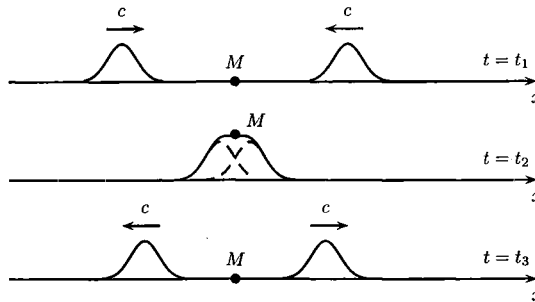


FIG. 2.3. Superposition de deux ondes.

Si le point M d'un milieu matériel, soumis à une action mécanique, subit un petit déplacement qui l'amène dans la position M_1 , ce déplacement est déterminé par le vecteur $\overline{MM_1}$. Soumis à une autre action mécanique agissant seule, son déplacement l'amène alors dans la position M_2 déterminée par le vecteur $\overline{MM_2}$.

Loi 2.9. Principe de superposition

Lorsque deux actions agissent simultanément sur un point M et l'amènent en M' , son déplacement $\overline{MM'}$ est la somme vectorielle des déplacements $\overline{MM_1}$ et $\overline{MM_2}$ correspondant à chacune de ces actions agissant séparément,

$$\overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{MM_2}.$$

II.3.2. Réflexion d'une onde progressive

Dans la réalité, le milieu dans lequel une onde mécanique se propage à partir d'une source S n'est jamais illimité. Par exemple, quand une onde arrive à l'extrémité d'une corde, on observe une onde réfléchie se propageant en sens inverse. On constate expérimentalement que :

- ▶ si cette extrémité est fixée à un support ne permettant plus la propagation, le phénomène de réflexion a lieu avec un changement du signe de la perturbation ;
- ▶ si l'extrémité est libre de tout mouvement, le phénomène de réflexion a lieu sans changement de signe de la perturbation.

Le phénomène de réflexion sera illustré sur la figure 2.9 (voir page 28) dans le cas des ondes progressives sinusoïdales que nous allons étudier à présent.

III. Ondes sinusoïdales progressives

III.1. Propriétés générales

La forme de l'onde se propageant dans un milieu dépend de la source du mouvement ainsi que de la célérité de cette onde dans le milieu. Nous allons étudier le cas d'une onde ayant une forme sinusoïdale générée, par exemple, par un oscillateur (*excitateur*) imposant à l'extrémité O d'une corde vibrante un mouvement harmonique.

Ce cas joue un rôle très important dans l'étude générale des ondes progressives. En effet, l'étude du filtrage des signaux physiques (voir chapitre 8) ou plus généralement l'analyse de Fourier permettent de montrer que toute fonction périodique peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales. En complétant ce résultat par le principe de superposition, nous pouvons affirmer que toute onde périodique peut être considérée comme une combinaison linéaire (superposition) d'ondes sinusoïdales. Ainsi, on peut dire que les ondes sinusoïdales sont les « briques » de base de l'étude des ondes de forme quelconque.

En reprenant l'exemple de la corde vibrante, une perturbation sinusoïdale (voir figure 2.4) apparaîtra au sein de la corde si le mouvement de son extrémité O peut s'écrire sous la forme $s(0,t) = y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$. La position verticale de l'excitateur par rapport à la position d'équilibre de l'origine O est donc repérée par la fonction $y(t)$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

- ▶ la quantité Y_m représente l'amplitude de la perturbation, son unité dépend de la nature de l'onde ;
- ▶ la quantité ω représente la pulsation temporelle de la perturbation sinusoïdale exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- ▶ la durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$ correspond à la période temporelle de la perturbation ;
- ▶ l'argument du cosinus $\omega t + \phi$ est la phase de l'onde en O à l'instant t ;
- ▶ l'angle ϕ est la phase de l'onde en O à l'origine des temps.

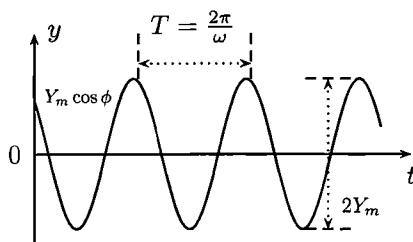


FIG. 2.4. Mouvement de la source.

III.2. Double périodicité

Si on connaît l'expression donnant le mouvement de la source, c'est-à-dire $s(0,t)$, on en déduit immédiatement l'expression donnant le mouvement d'un point M d'abscisse x du milieu de propagation $s(M,t) = s(x,t) = Y_m \cos(\omega(t - \frac{x}{c}) + \phi)$; en introduisant

la quantité $k = \frac{\omega}{c}$ appelée *pulsation spatiale*, mesurée en m^{-1} ,

on obtient l'expression générale d'une onde sinusoïdale progressive.

Définition 2.10. Onde monodimensionnelle sinusoïdale progressive

Une onde monodimensionnelle est dite *sinusoïdale progressive* si l'écart par rapport à la position de repos d'un point M d'abscisse x du milieu de propagation est repéré à l'instant t par la fonction

$$s(x,t) = Y_m \cos(\omega t - kx + \phi).$$

Comme précédemment, on peut observer le phénomène de propagation de deux manières :

- ▶ à t constant, ce qui revient à photographier le milieu de propagation à un instant donné; on constate alors que les perturbations ont une structure périodique dans l'espace (voir à droite de la figure 2.5);
- ▶ à x constant en observant le mouvement de chaque point du milieu de propagation; on remarque alors la périodicité temporelle de la perturbation (voir à gauche de la figure 2.5).

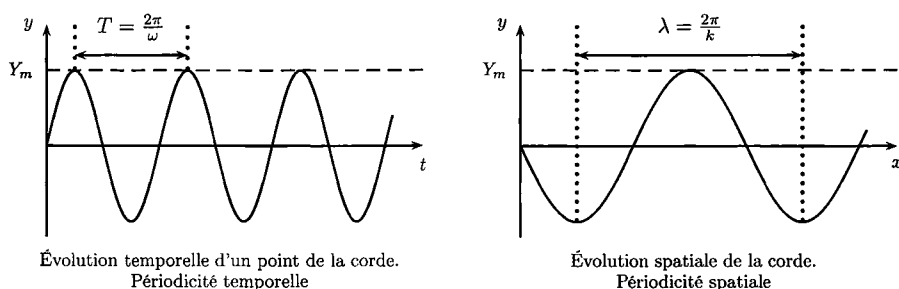


FIG. 2.5. Double périodicité.

La période temporelle de la perturbation a déjà été définie à partir de l'inverse de la pulsation.

Définition 2.11. Longueur d'onde

On appelle *longueur d'onde* λ la période spatiale de l'onde sinusoïdale périodique.

Puisque la longueur d'onde est une période spatiale, à chaque instant t on peut écrire $s(t,x) = s(t,x + \lambda)$. En explicitant la fonction s dans le cas de l'onde sinusoïdale progressive, on obtient alors

$$s(t,x) = Y_m \cos(\omega t - kx + \phi) = Y_m \cos[\omega t - k(x + \lambda) + \phi] = s(t,x + \lambda).$$

La fonction cosinus étant 2π -périodique, on peut donc écrire la relation fondamentale $k\lambda = 2\pi$. On sait aussi que $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT}$, où T est la période temporelle de l'onde et c sa célérité. Les caractéristiques λ , c , T et k de la propagation sont donc étroitement liées.

Théorème 2.12. Relations spatio-temporelles

	Période	Fréquence	Pulsation
Temporelle	$T = \frac{\lambda}{c}$	$f = \frac{1}{T}$	$\omega = 2\pi f$
Spatiale	$\lambda = cT$	$\kappa = \frac{1}{\lambda}$	$k = 2\pi\kappa$

IV. Interférences à deux ondes**IV.1. Front d'onde - Onde plane**

En reprenant notre caillou jeté dans l'eau, on peut observer la formation de cercles concentriques dont le centre est le point d'impact du caillou avec l'eau (voir figure 2.6). Tous les points d'un même cercle oscillent simultanément avec la même phase, c'est le front d'onde.

Définition 2.13. Front d'onde

Un front d'onde est une surface virtuelle formée par l'ensemble des points possédant la même phase au cours du temps.

Dans l'air, avec un haut-parleur omnidirectionnel, les fronts d'ondes sonores ne seront plus des cercles concentriques mais des sphères centrées sur la source. Un front d'onde sera donc une sphère dont tous les points sont situés à une même distance de la source et qui vibrent en phase. Remarquons que dans le cas d'une propagation sans perte, la puissance transportée se répartit sur des sphères de plus en plus grandes ; aussi, la puissance par unité de surface diminue au fur et à mesure de la propagation. Si \mathcal{P}_0 est la puissance émise par la source, lorsque l'onde atteint un point de l'espace situé à la distance r de la source, la puissance par unité de surface en ce point s'écrit $p = \frac{\mathcal{P}_0}{4\pi r^2}$. C'est notamment pour cette raison que le son est moins intense lorsque l'on s'éloigne de sa source.

Plus on s'éloigne du centre d'une sphère, plus la courbure de celle-ci semble faible : au voisinage de l'axe de propagation Ox , les points qui vibrent en phase semblent appartenir à un plan. Avec une bonne approximation, les ondes sont alors considérées comme *planes*.

Définition 2.14. Onde plane

Une onde est dite plane si ses fronts d'ondes sont des plans.

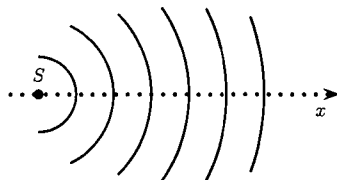


FIG. 2.6. Fronts d'onde.

IV.2. Interférences

Une onde qui se propage transporte de l'énergie. Ainsi, une densité volumique d'énergie est associée à toute onde. L'analyse de plusieurs exemples, qui sera menée en deuxième année, montre que la densité d'énergie volumique $\mathcal{E}_{\text{vol}}(M,t)$ associée à une onde $s(M,t)$ est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde,

$$\mathcal{E}_{\text{vol}}(M,t) = K s^2(M,t).$$

La constante K , qui dépend du type d'onde considéré, assure l'homogénéité de la relation.

Souvent, les capteurs sont sensibles à la moyenne temporelle de \mathcal{E}_{vol} . Par exemple, le tympan suit les vibrations mécaniques de l'onde sonore $s(M,t)$, mais la sensation auditive (intensité sonore) est proportionnelle à la moyenne temporelle de $s^2(M,t)$.

Définition 2.15. Intensité d'une onde

L'intensité $I(M)$ d'une onde $s(M,t)$ est proportionnelle à la moyenne temporelle de $s^2(M,t)$,

$$I(M) = K \langle s^2(M,t) \rangle.$$

On peut calculer l'intensité totale lorsque deux ondes s_1 et s_2 se superposent en un point de l'espace. D'après le principe de superposition, l'onde résultante est

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t).$$

Pour simplifier, on oublie les notations du point M et de l'instant t dans les calculs qui suivent. Par définition, l'intensité de l'onde résultante est

$$\langle s^2 \rangle = \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2 \langle s_1 s_2 \rangle$$

Les deux premiers termes du membre de droite sont, par définition, les intensités respectives des ondes s_1 et s_2 . On constate alors que l'intensité totale $\langle s^2 \rangle$ n'est pas nécessairement la somme des intensités des deux ondes. Cela définit le phénomène d'interférences.

Définition 2.16. Interférences

Soit deux ondes s_1 et s_2 arrivant au même point M de l'espace. L'intensité en M s'écrit :

$$\langle s^2(M,t) \rangle = \langle s_1^2(M,t) \rangle + \langle s_2^2(M,t) \rangle + \underbrace{2 \langle s_1(M,t) s_2(M,t) \rangle}_{\substack{\text{terme} \\ \text{d'interférences}}}.$$

On dit qu'il y a interférences entre les deux ondes si le terme d'interférences est non nul. Cela signifie que l'intensité totale n'est pas la somme des intensités individuelles des deux ondes.

Les deux ondes sont dites cohérentes s'il y a interférences.

Dans certaines conditions, le terme d'interférences peut conduire à une intensité nulle en différents points. Par exemple, la superposition de deux ondes sonores peut parfois donner du silence en un point donné de l'espace.

Nous allons étudier les interactions entre deux ondes sonores produites par deux instruments de musique se faisant face (voir figure 2.7). Le récepteur est un micro que l'on peut déplacer le long de l'axe de propagation. Dans cette expérience, le milieu de propagation est l'air.

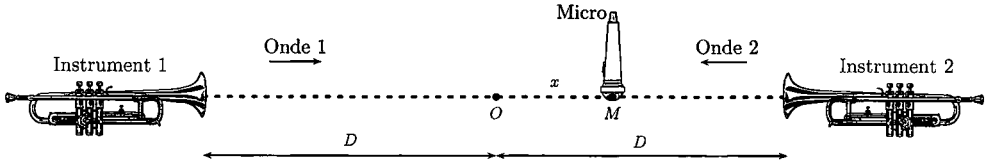


FIG. 2.7. Interférences de deux ondes sonores frontales (la figure n'est pas à l'échelle).

IV.2.1. État vibratoire du milieu de propagation

On suppose que les deux instruments sont les sources d'ondes sonores sinusoïdales progressives, l'une de fréquence $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi}$ et l'autre de fréquence $f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{\omega_2}{2\pi}$. Pour la source 1, on a donc $s_1(S_1, t) = y_1 = Y_m \cos(\omega_1 t)$ et, pour la seconde source, $s_2(S_2, t) = y_2 = Y_m \cos(\omega_2 t + \phi)$. Le fait de considérer une amplitude constante revient à ne pas considérer la diminution en r^{-1} de l'amplitude sonore : l'expérience doit donc être menée sur des échelles de distance convenables.

Dans les expressions de ces amplitudes, l'origine des phases a été prise pour la source 1 située en S_1 . Si l'on est suffisamment loin des sources, dans la région du micro par exemple, les deux ondes peuvent être considérées comme planes. On peut alors, sous ces conditions, étudier l'amplitude de l'onde en tout point de l'axe Ox , puis étendre le résultat dans tout le plan perpendiculaire à cet axe et passant par ce point.

Soit M un point du milieu de propagation situé à la distance x de l'origine O (voir figure 2.7), ce point est à la distance $D + x$ de S_1 et à $|x - D|$ de S_2 .

La perturbation engendrée par S_1 en M s'écrit donc

$$s_1(M, t) = s_1(x, t) = Y_m \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{D + x}{c} \right) \right] = Y_m \cos [\omega_1 t - k_1 (D + x)] ,$$

et celle engendrée par S_2 (qui se propage dans l'autre sens mais avec $x - D < 0$)

$$s_2(M, t) = s_2(x, t) = Y_m \cos \left[\omega_2 \left(t + \frac{x - D}{c} \right) + \phi \right] = Y_m \cos [\omega_2 t - k_2 (D - x) + \phi] .$$

D'après le principe de superposition, l'amplitude $s(x, t)$ de la perturbation effectivement observée en M sera la somme de $s_1(x, t)$ et $s_2(x, t)$, soit

$$s(x, t) = Y_m \cos [\omega_1 t - k_1 (D + x)] + Y_m \cos [\omega_2 t - k_2 (D - x) + \phi] . \quad (2.3)$$

Rappel Formules trigonométriques

L'étude des ondes fait souvent appel aux fonctions trigonométriques. Il est donc souvent très judicieux, car plus simple, d'utiliser le fait qu'un cosinus est la partie réelle d'une exponentielle complexe.

$$\cos(\omega t - kx) = \Re e \left(e^{i(\omega t - kx)} \right) \quad \text{et} \quad \sin(\omega t - kx) = \Im m \left(e^{i(\omega t - kx)} \right) \quad (2.4)$$

En utilisant astucieusement les formules d'Euler

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad (2.5)$$

on peut alors retrouver simplement de nombreuses formules trigonométriques. Dans le cadre des interférences, l'utilisation du principe de superposition conduit par exemple à l'addition de deux ondes sinusoïdales. Si ces deux ondes sont de même amplitude, on est donc amené au calcul de $\cos p + \cos q$, où p et q sont les phases de ces ondes.

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= e^{i\frac{p}{2}} \left[e^{i\frac{p}{2}} + e^{-i\frac{p}{2}} e^{iq} \right] \\ &= e^{i\frac{p}{2}} \left[e^{-i\frac{q}{2}} e^{i\frac{p}{2}} + e^{-i\frac{p}{2}} e^{i\frac{q}{2}} \right] e^{i\frac{q}{2}} \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \underbrace{\left[e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right]}_{2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on obtient alors

$$\cos p + \cos q = \Re e \left(e^{ip} + e^{iq} \right) = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right). \quad (2.6)$$

Un calcul du même acabit montrerait que

$$\cos p - \cos q = \Im m \left(e^{ip} + e^{iq} \right) = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right). \quad (2.7)$$

IV.2.2. Cas de deux sources synchrones

Supposons que les deux sources aient la même fréquence. C'est le cas par exemple lorsque les instruments jouent la même note. En posant $\omega = \omega_1 = \omega_2$, $k = \frac{\omega}{c}$ et en utilisant la relation trigonométrique (2.6), la vibration (2.3) au niveau du micro s'écrit

$$s(x,t) = \underbrace{2Y_m \cos \left(kx + \frac{\phi}{2} \right)}_{\text{Amplitude spatiale : } A} \cos \left(\omega t - kD + \frac{\phi}{2} \right).$$

Afin de simplifier les notations sans restreindre l'étude, plaçons-nous dans le cas particulier où $\phi = 0$. Dans ce cas, le point M évolue dans le temps avec un mouvement

de vibration sinusoidale d'amplitude

$$A = 2Y_m \cos(kx) = 2Y_m \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Cette amplitude dépend de la position x du point M où est placé le micro. En certains points appelés *nœuds*, l'amplitude est nulle et on n'y entend aucun son (l'intensité sonore $K \langle s^2 \rangle$ est nulle).

$$A = 0 \implies \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0 \implies x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

Remarque Cette propriété met en évidence le fait que, dans certaines situations, la somme de deux sons produit du silence. Certains casques antibruit sont conçus sur cette propriété.

En d'autres points appelés *ventres*, l'amplitude sonore est maximale.

$$|A| = 2Y_m \implies \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \pm 1 \implies x = n\frac{\lambda}{2} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

La distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs d'ordres n et $n + 1$ s'écrit donc

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}.$$

On pourra facilement vérifier que cette expression reste valable même lorsque $\phi \neq 0$. On dit que les ventres sont le siège d'interférences constructives, et les nœuds le siège d'interférences destructives.

IV.2.3. Cas de deux fréquences voisines : notion de battement

Si les deux sources émettent des ondes sonores de fréquences presque égales, on entend au niveau du micro un son unique dont l'amplitude modulée passe alternativement de fort à faible. Il s'agit d'un phénomène de battement que nous allons expliquer. Cette caractéristique audible des sources quasiment synchronisées est utilisée par les musiciens d'un orchestre pour accorder leurs instruments.

Posons $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, $\omega = \omega_1 - \omega_2 > 0$, $K = k_1 + k_2$, $k = k_1 - k_2$ et plaçons-nous dans le cas où $\phi = 0$. Toujours en utilisant la relation (2.6), l'onde (2.3) perçue au niveau du micro, d'abscisse x quelconque, s'écrit à présent

$$\begin{aligned} s(x,t) &= Y_m \{ \cos[\omega_1 t - k_1(D+x)] + \cos[\omega_2 t - k_2(D-x) + \phi] \} \\ &= 2Y_m \cos\left[\frac{1}{2}(\Omega t - KD - kx)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega t - kD - Kx)\right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

► Battement temporel

Sans grever la généralité de l'étude et afin d'expliquer l'expérience, on peut simplifier le calcul en se plaçant au point d'abscisse x_0 tel que $kD + Kx_0 = 0$, soit $x_0 = -\frac{k}{K}D$. L'onde perçue en ce point s'écrit

$$s(x_0,t) = \underbrace{2Y_M \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)}_{\text{Enveloppe}} \underbrace{\cos\left[\frac{\Omega}{2}t - \psi(x_0)\right]}_{\text{Porteuse}}. \quad (2.9)$$

La phase à l'origine, $\psi(x_0) = KD + kx_0 = \frac{K^2 - k^2}{K} D$, de cette onde n'a que peu d'importance dans le phénomène perçu. Si $\omega_1 \simeq \omega_2$ alors $\Omega \gg \omega$. Les périodes temporelles associées sont dans l'ordre inverse, soit $\tau = \frac{2\pi}{\Omega} \ll \frac{2\pi}{\omega} = T$. Le terme $\cos\left[\frac{\Omega}{2}t - \psi(x_0)\right]$ varie donc sinusoidalement dans le temps beaucoup plus vite que le terme $\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ dont la période est beaucoup plus grande. Le signal produit est donc une oscillation rapide (appelée *porteuse*) modulée par une oscillation lente (appelée *enveloppe*), illustrées par la figure 2.8 et précisées par la relation (2.9).

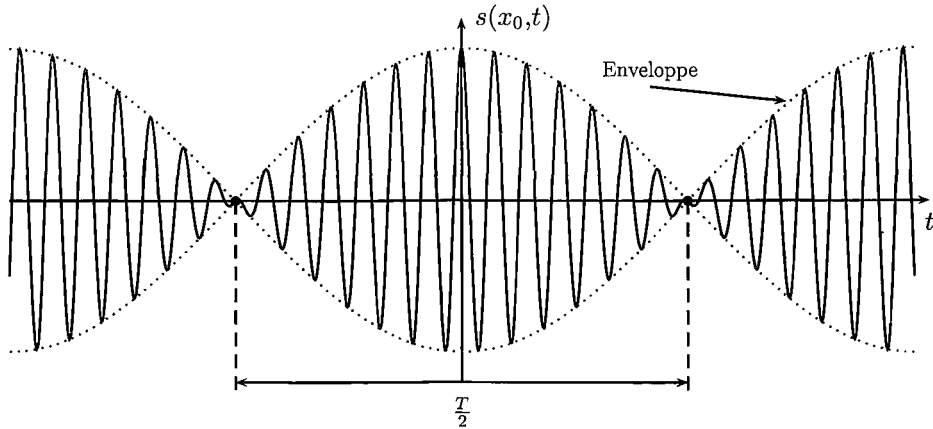


FIG. 2.8. Battement temporel en un point du milieu de propagation.

L'amplitude de la perturbation en un point M du milieu de propagation varie sinusoidalement au cours du temps; elle devient nulle périodiquement. La période de l'enveloppe est celle de la fonction $\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)$, c'est-à-dire $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La durée Δt entre deux annulations consécutives correspond à la durée entre deux zéros consécutifs de la fonction $\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)$, soit $\Delta t = \frac{T}{2}$.

Reprenons l'exemple de l'accord musical. L'accord parfait étant impossible, deux musiciens vont produire un *la* voisin. La fréquence du *la* est $f_{la} = 440$ Hz; supposons que le premier musicien joue un *la* de fréquence $f_1 = 443$ Hz et le second un *la* de fréquence $f_2 = 439$ Hz. Le chef d'orchestre situé quelque part entre ces deux musiciens va percevoir un *la* de fréquence $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) = 441$ Hz, modulé par un signal de période $T = (f_1 - f_2)^{-1} = 0,25$ s. S'il a l'oreille fine, il est parfaitement capable de détecter le désaccord et de tenter d'y remédier. On notera que le chef d'orchestre ne doit pas obligatoirement être situé strictement sur l'axe reliant les deux musiciens. Si l'onde est suffisamment plane, seule la projection orthogonale de sa position sur cet axe intervient.

► Battement dans l'espace

On peut également analyser la forme du milieu de propagation à un instant donné. En reprenant la même technique que pour le battement temporel, on considère maintenant l'instant t_0 tel que $\Omega t_0 - KD = 0$. La fonction cosinus est paire, on obtient donc

$$s(x, t_0) = 2Y_M \cos\left(\frac{kx}{2}\right) \cos\left[\frac{Kx}{2} + \varphi(t_0)\right],$$

avec maintenant $\varphi(t_0) = kD - \omega t_0$. L'analyse du comportement de la fonction $s(x, t_0)$ est identique à celle effectuée en un point donné, mais le battement se produit maintenant dans l'espace. L'enveloppe a pour équation $\cos\left(\frac{kx}{2}\right)$ et les oscillations rapides

ont pour période spatiale $\lambda = \frac{2\pi}{K}$. La période spatiale de l'amplitude modulante (l'enveloppe) est $\Lambda = \frac{2\pi}{k}$. La distance entre deux nœuds ou deux ventres successifs est $L = \frac{1}{2}\Lambda$.

En un point M d'abscisse x et à un instant t quelconques, on peut récrire l'expression générale (2.8) sous la forme

$$s(x,t) = 2Y_M \cos \left[\frac{1}{2} (\Omega t - KD - kx) \right] \cos \left[\frac{\omega}{2} \left(t - \frac{x}{\frac{c}{\Omega}} \right) - \frac{kD}{2} \right].$$

On en déduit (voir relation (2.1) page 17) qu'au cours du temps, le point d'amplitude nulle se déplace avec une célérité $c_m = \frac{\omega}{\Omega}c$.

V. Ondes stationnaires

V.1. Réflexion d'une onde progressive

La présence d'une discontinuité dans le milieu de propagation est à l'origine du phénomène de réflexion.

Imposons par exemple que l'un des points, O l'origine d'abscisse $x = 0$, d'une corde vibrante soit fixé. L'amplitude de l'onde en ce point est donc nulle à chaque instant. Si une seule onde progressive se propage sur la corde avec une pulsation ω et un nombre d'onde k , son amplitude en un point quelconque sera $y_i(x,t) = Y_m \cos(\omega t - kx)$. On constate donc que l'hypothèse d'une onde unique est incompatible avec le fait que l'un des points de la corde soit fixé, car il faudrait alors imposer $Y_m = 0$. En considérant l'existence d'une onde réfléchie $y_r(x,t)$, on peut, par superposition, assurer la contrainte introduite par la discontinuité.

Comme on le voit sur la figure 2.9, ni l'onde incidente ni l'onde réfléchie ne sont telles que $y_i(0,t) = 0$ et $y_r(0,t) = 0$; par contre, à chaque instant t , on constate que $y_i(0,t) + y_r(0,t) = 0$. La naissance de l'onde réfléchie peut donc être vue comme la conséquence de la discontinuité.

Lorsqu'une onde incidente progressive rencontre une discontinuité dans un milieu de propagation (changement de milieu, point fixe, point libre), il se crée en ce point une onde réfléchie. On observe ensuite dans le milieu de propagation la superposition des deux ondes réfléchies et incidentes

$$y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t). \quad (2.10)$$

L'expression générale de l'amplitude de l'onde réfléchie au point $M(x)$ à l'instant t est $y_r(x,t) = A \cos(\omega' t + k' x + \phi)$. La célérité de l'onde réfléchie ne dépend que des caractéristiques du milieu de propagation¹; comme celle-ci se propage dans le même milieu que l'onde incidente, elle possède la même célérité, soit $c = \frac{\omega'}{k'}$. En écrivant $A = r Y_m$, où la constante r est appelée coefficient de réflexion en amplitude, on obtient

$$y(x,t) = Y_m \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + r \cos \left[\omega' \left(t + \frac{x}{c} \right) + \phi \right] \right\}. \quad (2.11)$$

1. Pour la corde, il s'agit par exemple de sa masse linéique et de sa tension.

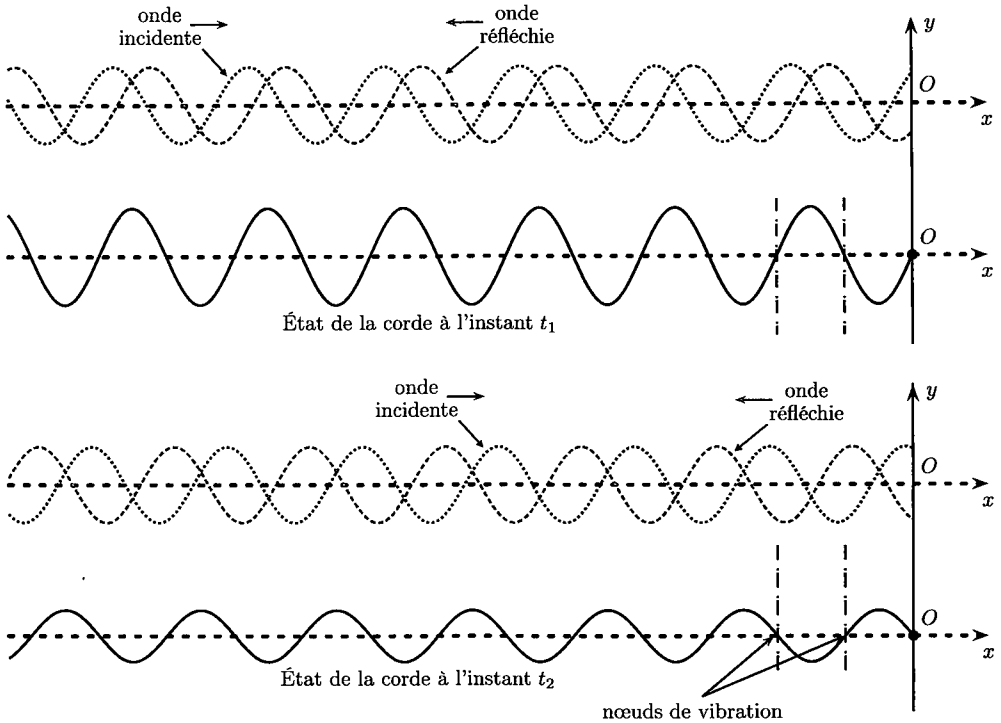


FIG. 2.9. Réflexion d'une onde incidente sur une corde fixée en un point.

V.2. Conditions aux limites : onde stationnaire

Nous allons chercher à déterminer les inconnues r , ϕ et ω' en utilisant la condition imposée par l'expérimentateur, c'est-à-dire $y(0,t) = 0$. En $x = 0$, la relation (2.11) s'écrit

$$\forall t, \cos(\omega t) + r \cos(\omega' t + \phi) = 0.$$

La présence du coefficient r n'empêche pas l'apparition d'un battement si $\omega' \neq \omega$; l'amplitude de O varie alors lentement. La seule façon pour que O reste fixe est d'imposer $\omega' = \omega$.

La présence d'une discontinuité dans le milieu de propagation d'une onde incidente progressive sinusoïdale induit la création d'une onde réfléchie progressive, sinusoïdale et de même pulsation.

De façon générale, on a donc $y(x,t) = Y_m \cos(\omega t - kx) + rY_m \cos(\omega t + kx + \phi)$. Ainsi, au point de fixation d'abscisse nulle, on doit avoir $y(0,t) = \cos(\omega t) + r \cos(\omega t + \phi) = 0$ à chaque instant. En se plaçant en $t = 0$, on trouve finalement la relation $1 + r \cos(\phi) = 0$ liant le coefficient de réflexion et la phase à l'origine de l'onde réfléchie.

Une solution possible consiste à choisir $\phi = 0$, ce qui impose alors $r = -1$. L'amplitude de l'onde réfléchie au point $M(x)$ à l'instant t est donc $y_r(x,t) = -Y_m \cos(\omega t - kx)$. L'état de la corde est dans ce cas modélisé par l'amplitude (voir relation (2.7))

$$y(x,t) = Y_m \cos(\omega t - kx) - Y_m \cos(\omega t + kx) = 2Y_m \sin(kx) \sin(\omega t).$$

L'expression trouvée est caractéristique d'une onde dite stationnaire.

Définition 2.17. Onde stationnaire

Une onde stationnaire est une onde dont l'amplitude s'écrit sous la forme factorisée

$$y(x,t) = f(x)g(t).$$

Le terme $(t - \frac{x}{c})$, caractéristique de la propagation, n'apparaît plus dans l'expression de l'amplitude. On parle de *séparation des variables*.

Remarque L'onde stationnaire obtenue en imposant $\phi = 0$ n'est qu'un cas particulier d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.

Dans le cas d'une onde stationnaire, certains points du milieu de propagation restent immobiles, ce sont les nœuds de vibration. Ces points sont caractérisés par le fait qu'à chaque instant, $y(x,t) = 0$. Ils sont donc définis par la relation $\sin(kx) = 0$ et sont situés aux abscisses $x_p^n = \frac{p\pi}{k} = p\frac{\lambda}{2}$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Il existe également des points dont l'amplitude de vibration reste maximale au cours du temps, ce sont les ventres de vibration. Ces points sont tels que $\sin(kx) = \pm 1$ et sont situés aux abscisses $x_p^v = \frac{\pi}{2k} + \frac{p\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}(p + \frac{1}{2})$ avec $p \in \mathbb{N}$.

La distance entre deux nœuds ou deux ventres de vibration est

$$x_{p+1}^{n,v} - x_p^{n,v} = \frac{\lambda}{2}. \quad (2.12)$$

V.3. Corde fixée à ses deux extrémités : modes de vibration

Introduisons à présent une seconde discontinuité dans le milieu de propagation. Cela est par exemple possible en choisissant une corde de longueur L , fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. On parle du problème de la corde de Melde. Une nouvelle condition aux limites est donc introduite ici, elle s'exprime par la relation

$$\forall t, y(L,t) = 0.$$

La présence d'un nœud de vibration en $x = L$ est donc imposée par cette discontinuité. Pour que la corde soit le siège d'une onde stationnaire, il est nécessaire d'avoir à chaque instant $y(L,t) = 2Y_m \sin(kL) \sin(\omega t) = 0$, soit $\sin(kL) = 0$. La longueur L de la corde étant fixée et *non nulle*, la pulsation spatiale k doit vérifier $kL = n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Elle ne peut donc prendre que des valeurs indexées par un nombre entier. On dit qu'elles sont *discrètes* et s'écrivent

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

La longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ne peut donc prendre, elle aussi, que des valeurs discrètes fixées par la longueur de la corde

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

On obtient ainsi un ensemble discret de solutions stationnaires pour la corde vibrante,

$$y_n(x,t) = Y_{m,n} \sin \left[\frac{n\pi}{L} x \right] \sin \left[\frac{n\pi c}{L} t \right], \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.13)$$

Chacune de ces solutions, indexée par un nombre entier, est appelée un *mode propre* de la vibration.

Attention

Valeurs discrètes

On pourrait modifier un peu l'écriture de la relation (2.13) en choisissant n dans l'ensemble \mathbb{N} (au lieu de \mathbb{N}^*). On obtiendrait alors, pour la longueur d'onde, une relation de la forme $L = \frac{1}{2}(n+1)\lambda_n$, avec $n \in \mathbb{N}$. La distinction entre \mathbb{N} et \mathbb{N}^* est primordiale, car une confusion entre les deux pourrait mener à $L = \frac{1}{2}n\lambda_n$ où n aurait (à tort) la valeur nulle, conduisant à une corde de longueur $L = 0$, ce qui est absurde.

Définition 2.18. Mode propre de vibration – Pulsation propre

Un mode propre de vibration est une onde stationnaire harmonique : tous les points du système vibrent sinusoidalement à la même fréquence en phase ou en opposition de phase.

Lorsque le milieu de propagation d'une onde est de dimension finie, les modes propres sont les ondes stationnaires compatibles avec les conditions aux limites. On observe une quantification des modes de vibration : seul un ensemble discret de pulsations temporelles $\{\omega_{n \in \mathbb{N}^*}\}$ est possible. Chacune des pulsations de cet ensemble est une pulsation propre du système.

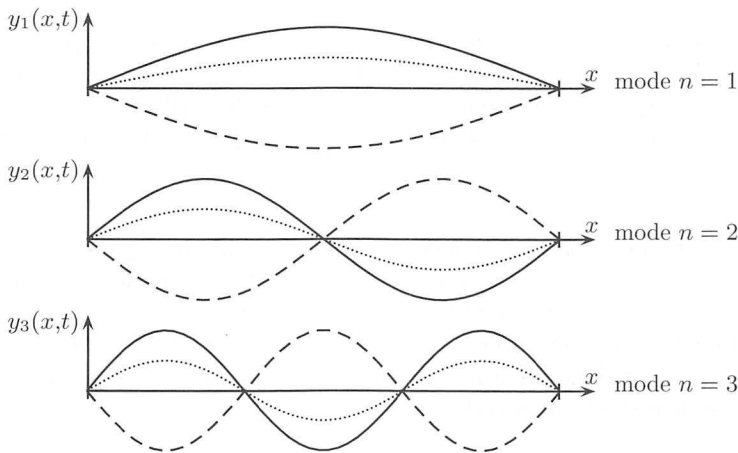


FIG. 2.10. Modes propres d'une corde vibrante.

La figure 2.10 représente les trois premiers modes propres d'une corde vibrante.

Un mode propre est tel que tous les points vibrent en phase ou en opposition de phase; le déphasage entre deux points x_1 et x_2 est donné par la comparaison des signes de $\sin\left[\frac{n\pi x_1}{L}\right]$ et $\sin\left[\frac{n\pi x_2}{L}\right]$: vibrations en phase si les signes sont identiques, en opposition de phase sinon.

Le mode correspondant à $n = 1$ est appelé *mode fondamental*. Il est caractérisé par une pulsation temporelle $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$ (ou une fréquence temporelle $f_1 = \frac{c}{2L}$) et une pulsation spatiale $k_1 = \frac{\pi}{L}$, soit une longueur d'onde $\lambda_1 = 2L$.

Chaque mode $n \geq 1$ est appelé *harmonique de rang n* . Il est caractérisé par une fréquence $f_n = nf_1$ et par une longueur d'onde $\lambda_n = \frac{1}{n}\lambda_1$.

La longueur d'un fuseau d'une onde stationnaire étant $\frac{\lambda}{2}$, on retrouve facilement le résultat précédent en considérant que l'on ne peut avoir qu'un nombre entier de fuseaux sur la longueur de la corde : un fuseau pour le mode fondamental, deux fuseaux pour le premier harmonique, etc.

Le principe de superposition indique que le mouvement général d'une corde vibrante de longueur L , fixée à ses deux extrémités, s'écrit comme une superposition de ses modes propres,

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{m,n} \sin\left[\frac{n\pi}{L}x\right] \sin\left[\frac{nc\pi}{L}t + \psi_n\right].$$

Les amplitudes $Y_{m,n}$ et les phases à l'origine des temps ψ_n sont déterminées par les conditions aux limites.

Synthèse

Les modes de vibration sont caractérisés par des pulsations ω_n multiples de la pulsation ω_1 du mode fondamental. Les modes de pulsation ω_n avec $n \geq 1$ sont appelés harmoniques. L'ensemble des harmoniques constitue les modes propres du système.

Le mouvement général d'un tel système s'écrit comme une combinaison linéaire de ses modes propres.

Remarque Lorsqu'un milieu borné (comme une corde fixée à ses deux extrémités) est excité en un point, on observe d'abord une onde progressive, se propageant du point d'excitation aux extrémités du milieu. Il se produit ensuite une première réflexion sur ces extrémités ; l'onde réfléchie atteindra l'extrémité opposée et se réfléchira de nouveau. L'onde résultante est donnée par la superposition de ces allers-retours. Les modes propres de vibration correspondent au cas d'une superposition constructive entre les ondes incidentes et réfléchies sur les extrémités ; il faut donc que ces ondes soient en phase, ce qui se produit pour des pulsations particulières (les pulsations propres du système). Le régime de vibration en modes propres ne pourra être observé qu'après un temps assez long pour qu'un nombre important d'allers-retours aient pu se produire.

Les modes propres d'un système sont aussi appelés modes normaux. On montre que l'énergie totale du système est la somme des énergies de chaque mode propre. Si l'on excite le système selon une pulsation propre, il ne vibrera que selon le mode propre correspondant ; les autres modes propres ne seront pas excités.

VI. Diffraction d'une onde

VI.1. Phénomène de diffraction

Considérons une onde plane se propageant à la surface de l'eau. Elle est par exemple créée par un batteur actionné par un vibreur dans ce qu'il est convenu d'appeler une cuve à ondes, comme sur la figure 2.11. Dans cette expérience, la largeur du batteur (dimension orthogonale au plan de la figure) est un peu inférieure à la largeur de la cuve.

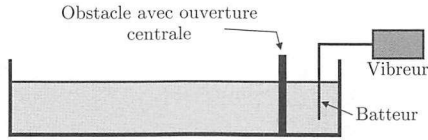


FIG. 2.11. Cuve à ondes (vue de profil).

S'il n'y a aucun obstacle dans la cuve, et si l'on néglige les effets de bord, tous les points situés sur une portion de droite parallèle au batteur vibrent en phase (génération d'une onde plane).

On dispose maintenant un obstacle qui sépare la cuve en deux régions, de telle sorte que l'onde ne puisse passer d'un côté à l'autre qu'en empruntant une petite ouverture de dimension a (voir figures 2.11 et 2.12). Le phénomène observé est appelé *diffraction*.

Définition 2.19. Diffraction

La diffraction est le phénomène qui se produit lorsqu'une limitation matérielle (obstacle) intervient dans le domaine de propagation d'une onde.

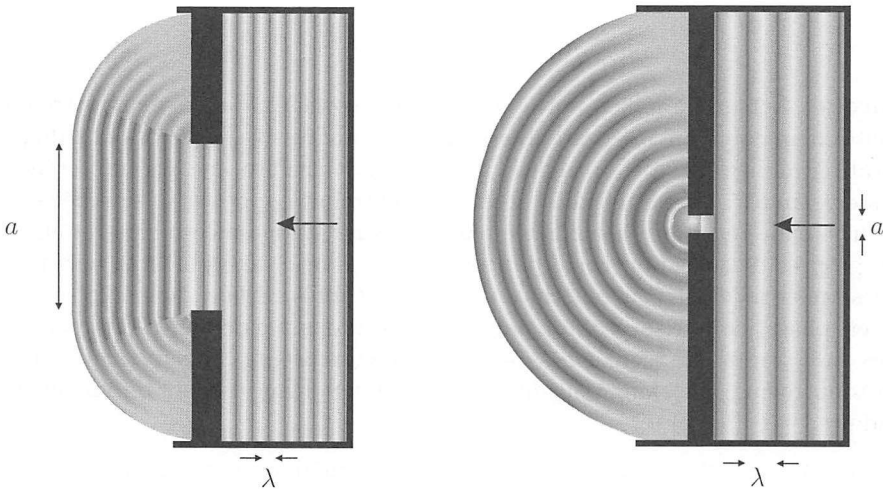


FIG. 2.12. Diffraction dans une cuve à ondes (vue de dessus).

Sur l'exemple des ondes de surface, on comprend bien que la taille caractéristique de l'ouverture (notée a dans l'exemple) et la période spatiale de l'onde (sa longueur d'onde λ) vont caractériser le phénomène de diffraction. Les deux expériences représentées sur la figure 2.12 permettent de se faire une idée du phénomène.

- Si $\lambda \ll a$, l'onde reste plane au-delà de l'obstacle dans la région située dans le prolongement de l'obstacle et dans le sens de propagation de l'onde incidente. Les bords de l'obstacle semblent transmettre l'onde uniquement dans une certaine ouverture angulaire, et les fronts de ces ondes sont courbés.
- Si $a \simeq \lambda$, l'ouverture se comporte quasiment comme une source ponctuelle presque omnidirectionnelle, qui émet une onde de même fréquence dans la région située au-delà de l'obstacle.

Ce constat expérimental peut s'interpréter dans le cadre du principe de Huygens.

Principe 2.20. *Principe de Huygens*

Chaque point d'un front d'onde primaire peut être considéré comme la source secondaire d'une onde de même fréquence que la primaire. Le front d'onde à un instant postérieur résulte de la somme des ondes sphériques issues de ces sources secondaires.

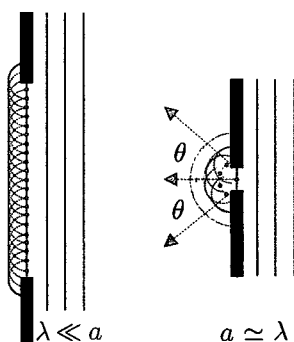


FIG. 2.13. Principe de Huygens.

Pour une onde plane incidente, chaque point du front d'onde peut donc être considéré comme une source secondaire ; la somme des ondes sphériques réémises par ces points à un instant postérieur redonne un front d'onde plan derrière l'ouverture (voir figure 2.13 à gauche), sauf près des bords de la partie transparente de l'obstacle. En effet, les zones opaques de l'obstacle ne contiennent plus de sources secondaires. Ainsi, près des bords de l'obstacle, il manque des ondes sphériques pour reformer une onde plane et la superposition des ondes réémises par les points de la zone transparente ne donne plus un front d'onde plan. L'essentiel de l'onde émergente se concentre dans un secteur angulaire (voir figure 2.13 à droite). Expérimentalement, on observe le résultat suivant, à connaître.

Théorème 2.21. *Diffraction par un obstacle*

Soit une onde plane de longueur d'onde λ rencontrant un obstacle de largeur a . Le faisceau émergent après l'obstacle est concentré dans une ouverture angulaire de demi-largeur θ telle que

$$\sin \theta \simeq \frac{\lambda}{a}.$$

Christiaan Huygens (1629-1695) a énoncé son principe en 1678 : il s'applique à tout type d'onde, mais fut introduit pour tenter d'expliquer la propagation de la lumière. Selon Huygens, la lumière est constituée de multiples ondes, chacune étant spécifique à une couleur. La déviation du rayonnement se fait en fonction des longueurs d'onde, le rouge étant moins dévié que le bleu et le violet. Son contemporain Newton (1642-1727) pensait de son côté que la lumière blanche du Soleil était composée d'un courant de particules. La théorie ondulatoire prit le dessus au cours du XIX^e siècle, avec notamment l'expérience de Young en 1801 (voir section VI.2) et les travaux de Fresnel qui, vers 1818, complète le principe de Huygens en le fondant sur un calcul. Ce principe est dès lors appelé principe de Huygens-Fresnel. Le point d'orgue de la théorie ondulatoire de la lumière intervient vers 1865 avec les équations de Maxwell qui sont au programme de seconde année des CPGE. L'effet photoélectrique (1887) et l'effet Compton (1922) mirent à nouveau en évidence le caractère corpusculaire de la lumière. C'est la physique moderne qui réconcilie ces deux conceptions : la lumière est dans certaines conditions une onde, dans d'autres un courant de photons, et en général ni l'un ni l'autre (voir chapitre 4).

VI.2. Fentes de Young en lumière monochromatique

Cette expérience menée en 1801 par Thomas Young² est, comme nous l'avons évoqué plus haut, importante dans le cheminement qui permet de comprendre la nature de la lumière. Dans d'autres conditions, elle se révélera fondamentale pour la construction de la physique quantique. Elle n'est pas strictement au programme des CPGE, mais permet à ce stade de se familiariser avec les interférences et de préparer le terrain pour l'immersion dans le monde quantique.

VI.2.1. Quelques définitions

Dans son aspect ondulatoire, la lumière est une onde électromagnétique caractérisée par un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} qui se propagent. Dans les conditions de l'expérience, le caractère vectoriel des champs n'intervient pas dans le phénomène observé. On se place dans *l'approximation scalaire* de l'optique ondulatoire. On notera $s(M,t)$ l'amplitude du champ en un point M à l'instant t . La puissance surfacique mesurée est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ,

$$\mathcal{P} = \alpha s^2(M,t) \quad \text{exprimée en } \text{W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Les appareils de mesure d'optronique sont sensibles à la puissance du signal lumineux ; leurs temps de réponse τ sont généralement beaucoup plus grands que la période du signal. Considérons par exemple un signal lumineux de couleur verte et de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, la fréquence de l'onde est alors $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Si l'appareil de mesure ne possède pas un temps de réponse $\tau < f^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ s}$, il ne pourra mesurer que la *valeur moyenne de la puissance* que l'on appelle *l'intensité lumineuse*.

2. Il est à noter que ce dernier l'a réalisée en utilisant la lumière produite par une bougie : les lasers n'existaient pas en 1801 !

Définition 2.22. Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse, notée \mathcal{I} , correspond à la valeur moyenne temporelle du carré de l'amplitude de l'onde associée au rayonnement lumineux.

$$\mathcal{I}(M) = \gamma \langle s^2(M,t) \rangle \quad (2.14)$$

Dans cette expression, la constante γ tient compte du coefficient de proportionnalité α , ainsi que de l'appareil de mesure. Lorsqu'on s'intéresse à des intensités relatives en divers points d'un écran, cette constante s'élimine dans les rapports.

VI.2.2. Description de l'expérience des fentes de Young

Considérons un faisceau parallèle monochromatique de longueur d'onde λ , éclairant un dispositif (voir figure 2.14) constitué d'une plaque opaque percée de deux fentes centrées sur les points F_1 et F_2 de l'axe Ox et symétriques par rapport au plan yOz ; on pose $\overline{F_1 F_2} = a \overline{u}_x$. On suppose que ce dispositif est placé sur un plan d'onde du faisceau incident. Tous les points de F_1 et de F_2 atteints par la lumière sont donc en phase, que l'on prendra nulle au niveau des deux fentes. Si on note $s(M,t)$ l'amplitude scalaire de l'onde lumineuse, on pourra donc écrire $s(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Dans cette expression, E_0 représente l'amplitude du champ électrique incident.

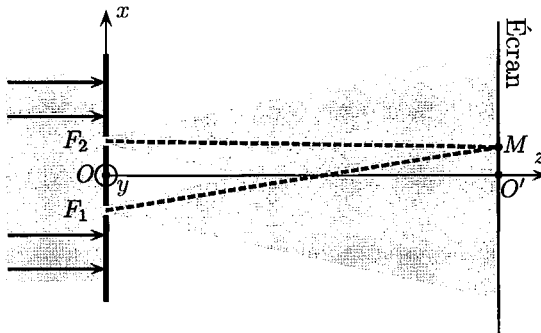


FIG. 2.14. Dispositif expérimental des fentes de Young.

Dans ce dispositif, les fentes F_1 et F_2 sont étroites et très longues dans la direction Oy . Chaque fente diffracte; si les fentes sont étroites, chaque faisceau émis est large. La diffraction n'intervient que lorsqu'il y a une limitation matérielle sur le chemin de l'onde: on peut considérer qu'il n'y aura pas, dans cette configuration, de diffraction dans la direction Oy . On peut ainsi se contenter d'une étude dans le plan xOz , la figure obtenue sera globalement invariante par translation selon l'axe \overline{u}_y .

Selon le principe de Huygens-Fresnel, tous les points des fentes peuvent être considérés comme des sources secondaires qui émettent des ondes sphériques dans toutes les directions. On suppose que le plan d'observation est suffisamment éloigné des fentes pour que l'onde puisse se comporter comme une onde plane, il suffit pour cela que $OO' \gg \lambda$.

On suppose de plus que la largeur de la fente $F_{i=1,2}$ est inférieure à ou de l'ordre de la longueur d'onde: on se trouve donc dans la situation de droite sur la figure 2.13 (voir page 33).

VI.2.3. Détermination de l'intensité lumineuse sur l'écran

L'amplitude de l'onde au niveau des fentes est $E_0 \cos(\omega t)$. L'amplitude de l'onde en M issue de la fente F_1 est $s_1(M, T) = E_0 \cos(\omega t - k\ell_1)$ avec $\ell_1 = F_1 M$, et celle issue de F_2 est $s_2(M, T) = E_0 \cos(\omega t - k\ell_2)$ avec $\ell_2 = F_2 M$.

On observera en M la superposition de ces deux ondes et on aura

$$s(M, t) = E_0 \cos(\omega t - k\ell_1) + E_0 \cos(\omega t - k\ell_2).$$

Afin de faciliter le calcul de cette superposition de deux ondes synchrones, il est préférable d'utiliser la notation complexe. L'onde en M qui résulte de l'interférence entre les deux ondes en provenance de F_1 et de F_2 s'écrit

$$\underline{s}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - k\ell_1)} + E_0 e^{i(\omega t - k\ell_2)} = E_0 e^{i(\omega t - k\ell_1)} \left[1 + e^{ik(\ell_2 - \ell_1)} \right].$$

Rappel

Valeur moyenne d'un signal harmonique

Par définition, la valeur moyenne d'un signal $f(t)$ de période T s'écrit

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Dans le cas d'un signal harmonique de période T s'écrivant $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on vérifie immédiatement que $\langle s(t) \rangle = 0$. Par contre,

$$\begin{aligned} \langle s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T S_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T S_0^2 [1 + \cos(2\omega t + \phi)] dt \\ &= \frac{1}{2} S_0^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En utilisant la notation complexe, on peut aussi écrire $\underline{s}(t) = S_0 e^{i(\omega t + \phi)}$. Si \underline{s}^* est le complexe conjugué de \underline{s} , on peut écrire

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \underline{s} \cdot \underline{s}^*.$$

En introduisant la différence de chemin optique $\delta = \ell_2 - \ell_1$, et en utilisant la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, l'intensité lumineuse relative en M s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \langle s^2(M, t) \rangle &= \frac{1}{2} \underline{s} \cdot \underline{s}^* = \frac{1}{2} E_0^2 \left(1 + e^{+ \frac{2i\pi\delta}{\lambda}} \right) \left(1 + e^{- \frac{2i\pi\delta}{\lambda}} \right) \\ &= E_0^2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right]. \end{aligned}$$

En introduisant l'intensité relative de l'onde incidente $\mathcal{I}_0 = \langle E_0^2 \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$, au niveau du point M de l'écran on observe donc

$$\mathcal{I}(M) = 2\mathcal{I}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right]. \quad (2.16)$$

On peut ainsi recenser les différentes propriétés de l'intensité lumineuse diffractée sur l'écran.

- L'intensité $\mathcal{I}(\delta)$ est une fonction périodique de période λ ,

$$\mathcal{I}(\delta + \lambda) = \mathcal{I}(\delta).$$

- Un point d'intensité maximale est tel que la différence de chemin optique δ en ce point est un multiple entier de la longueur d'onde,

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\max} = 4\mathcal{I}_0 \implies \delta = n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.23. Ordre d'interférence

On appelle ordre d'interférence le rapport $p = \frac{\delta}{\lambda}$.

Les points d'intensité maximale correspondent donc à un ordre d'interférence entier.

Remarque L'intensité maximale est $4\mathcal{I}_0$. Elle n'est donc pas égale à la somme des deux intensités maximales en provenance des deux sources synchrones, qui donnerait $2\mathcal{I}_0$. Cette propriété est caractéristique du phénomène d'interférence.

$$\mathcal{I}_{\max} > \mathcal{I}_{1, \max} + \mathcal{I}_{2, \max} = 2\mathcal{I}_0$$

- Les points d'intensité minimale correspondent à un ordre d'interférence p demi-entier.

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\min} = 0 \implies p = \frac{\delta}{\lambda} = n + \frac{1}{2} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

- Deux points M_1 et M_2 de l'écran, de même intensité, sont tels que

$$\delta(M_2) - \delta(M_1) = n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

En un point quelconque $M(x, y, D)$ de l'écran, nous avons

$$\ell_1 = \|\overrightarrow{F_1 M}\| = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

et

$$\ell_2 = \|\overrightarrow{F_2 M}\| = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}.$$

Nous sommes donc en mesure d'écrire l'expression générale de la différence de chemin optique $\delta = \ell_2 - \ell_1$ en un point quelconque. Cependant, on montre et on observe que les interférences ne sont visibles qu'au voisinage de l'axe de symétrie du système, c'est-à-dire au voisinage du point O' de l'écran.

Dans ce voisinage de $x = 0$ et $y = 0$, un développement limité au second ordre donne

$$\ell_1 = 1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2D} + \frac{y^2}{2D} + o(x^2) + o(y^2)$$

et

$$\ell_2 = 1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D} + \frac{y^2}{2D} + o(x^2) + o(y^2).$$

Par différence, on peut donc obtenir l'expression de la différence de chemin optique dans la région où les interférences sont visibles. Toujours au second ordre, on trouve

$$\delta = \frac{ax}{D} \quad \text{et} \quad p = \frac{ax}{\lambda D}.$$

En rassemblant toutes ces informations et en accord avec l'observation, on prévoit donc que les points de même intensité sont situés sur une portion de droite $x = \text{cte}$. La périodicité de l'intensité permet aussi d'expliquer l'observation sur l'écran d'une succession de bandes claires et sombres. Ces bandes sont appelées des franges. La distance entre deux points de même intensité est appelée *interfrange*, elle est habituellement notée i ; au voisinage de O' on a donc

$$i = \frac{\lambda D}{a}. \quad (2.17)$$

Synthèse

Expérience des fentes de Young

Dans l'expérience des fentes de Young en lumière monochromatique de longueur d'onde λ , on observe des franges sur l'écran situé à la distance D du plan contenant les fentes. Ces franges sont le résultat de l'interférence entre les rayons lumineux issus des fentes séparées de la distance a . L'interfrange i est donnée par la relation $i = \frac{\lambda D}{a}$.

VII. Exercices

1. La corde élastique ★

(solution page 655)

On étudie la propagation sans amortissement d'une perturbation le long d'une corde élastique. À la date $t = 0$, le front de l'onde quitte le point S de la corde.

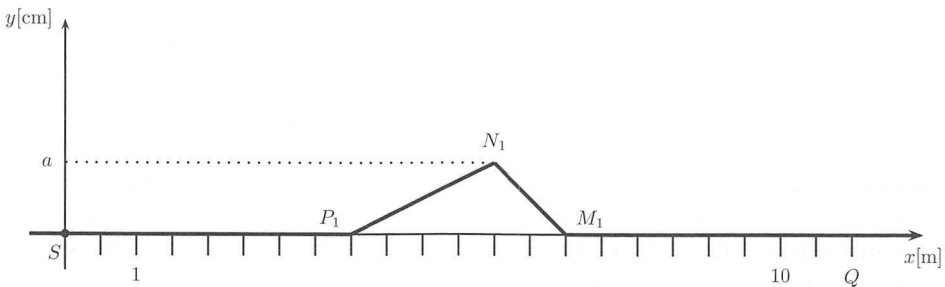


FIG. 2.15. Aspect de la corde à l'instant $t_1 = 2,3$ s.

À la date $t_1 = 2,30$ s, on prend un cliché de la corde; la figure 2.15 reproduit ce cliché avec deux échelles de longueurs différentes suivant l'axe des abscisses et celui des ordonnées. On note M_1 la position du front de l'onde à la date t_1 , N_1 celle de la crête, et P_1 celle de la queue de l'onde.

1. Calculer la célérité de l'onde le long de la corde.

2. Quelle est la durée τ du mouvement d'un point de la corde au passage de l'onde ?
3. À la date t_1 , quels sont les points de la corde qui s'élèvent ? ceux qui descendent ?
4. Dessiner sur un graphique semblable à celui de la figure 2.15 l'aspect de la corde à la date $t_2 = 3,60$ s.
5. Soit le point Q de la corde situé à 12,0 m du point S .
 - a/ À quelle date t_3 commence-t-il à bouger ?
 - b/ À quelle date t_4 passe-t-il par un maximum d'altitude ?
 - c/ À quelle date t_5 cesse-t-il de bouger ?
 - d/ À l'aide des résultats précédents, schématiser l'allure de la courbe $y_Q = f(t)$, où y_Q représente l'élongation du point Q à la date t .

2. Modélisation d'un didjeridoo ★★

(solution page 655)

Le didjeridoo est un instrument à vent utilisé par les aborigènes du nord de l'Australie. En le simplifiant, on peut le représenter comme un tuyau sonore cylindrique de longueur L , fermé à une extrémité et ouvert à l'autre. Lorsqu'une onde stationnaire s'établit dans un tuyau cylindrique, on observe un nœud (N) de vibration à une extrémité si celle-ci est fermée, et un ventre (V) de vibration si cette extrémité est ouverte.

On note c la célérité du son dans l'air.

1. Exprimer la fréquence f_1 du fondamental en fonction de c et de L .
2. Quelle devrait être la longueur minimale d'un tuyau ouvert aux deux extrémités (type flûte) pour donner le même fondamental (aussi appelé « note de même hauteur ») ?

On analyse maintenant un son envoyé dans un tuyau AB de longueur $L = 80$ cm par l'intermédiaire d'un haut-parleur placé à l'extrémité B du tuyau. Le son émis est sinusoïdal de fréquence $f = 850$ Hz. On déplace un micro à l'intérieur du tube et on mesure les amplitudes suivantes en fonction de la position d du micro par rapport à l'extrémité A du tuyau. On obtient le tableau suivant :

d [cm]	0	5	10	15	20	25	30	35	40
V_{\max} [mV]	0,2	11,3	16	11,4	0,2	11,2	16	11,5	0,15
d [cm]	45	50	55	60	65	70	75	80	
V_{\max} [mV]	11,1	16	11,6	0,3	11	16	11,7	0,3	

3. Qu'observe-t-on aux extrémités du tuyau ?
4. Déterminer la célérité du son dans l'air contenu dans le tuyau à la température de l'expérience.
5. Quel est l'harmonique correspondant à ce mode de vibration ? Quelle est la fréquence du mode fondamental ?

3. Réflexion d'une onde ★★★

(solution page 656)

Un corde vibrante très longue (considérée comme infinie) soumise à une tension T est formée d'une corde de masse linéique μ_1 pour $x \in]-\infty, 0[$ et d'une corde de masse linéique μ_2 pour $x \in]0, +\infty[$. Elles sont réunies en $x = 0$ par un nœud de masse M . Les vitesses de propagation des ondes à gauche et à droite du nœud sont notées respectivement $c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$. Un générateur d'ondes très

loin à gauche (en pratique en $x \rightarrow -\infty$) crée une onde « incidente » d'amplitude $y_i(x,t) = A \cos[\omega(t - \frac{x}{c_1})]$. En présence d'une discontinuité dans le milieu de propagation en $x = 0$, une onde réfléchie va prendre naissance en O ainsi qu'une onde transmise. On note RA l'amplitude de l'onde réfléchie $y_r(x,t)$, R étant le coefficient de réflexion en amplitude, et TA l'amplitude de l'onde transmise $y_t(x,t)$, T étant le coefficient de transmission en amplitude.

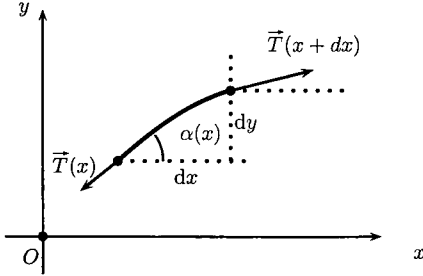


FIG. 2.16. Élément de corde.

1. Petit complément sur l'étude de la corde

On considère une portion de la corde infiniment petite, de longueur $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (voir figure 2.16). Les forces extérieures qui s'exercent sont les tensions extérieures qui résultent des actions de la partie de la corde située à gauche puis de celle située à droite de $d\ell$. On les note respectivement $\vec{T}(x)$ et $\vec{T}(x+dx)$ (voir schéma ci-contre). On suppose la tension suffisamment importante pour que l'on puisse négliger le poids de $d\ell$.

Dans le cadre de la propagation sans déformation, il faut supposer un mouvement de petite amplitude, ce qui signifie que l'angle $\alpha(x)$ entre la tangente en un point de la corde et l'axe des abscisses doit rester petit.

a/ Déterminer une relation entre α et $\frac{\partial y}{\partial x}$.

b/ Appliquer le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe Ox à la portion de corde de longueur $d\ell$ et montrer que dans le cadre des petits mouvements $T(x) \simeq T_0$ sur toute la corde.

c/ En déduire que la projection sur l'axe des Oy de la tension \vec{T} s'écrit $T_y(x) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$.

2. Détermination des coefficients de réflexion et de transmission

a/ Écrire l'expression de l'onde transmise et de l'onde réfléchie. On utilisera la notation complexe.

b/ Déterminer une première relation entre R et T . On écrira la continuité de l'amplitude de la corde en $x = 0$, soit $y(0^+, t) = y(0^-, t)$.

c/ Le nœud, situé en $x = 0$, est soumis à l'action de l'onde ; il est en mouvement vertical. Écrire l'équation de son mouvement.

d/ On suppose tout d'abord que $M = 0$. Déterminer les coefficients R et T en fonction des célérités c_1 et c_2 .

e/ On considère maintenant un nœud de masse non nulle. Déterminer les nouvelles expressions de R et T .

4. Interférences lumineuses ★★

(solution page 658)

On considère le dispositif expérimental de la figure 2.17 dans lequel deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 sont situées sur l'axe Ox et séparées d'une distance $a = 0,12$ mm. On note O le milieu du segment $[S_1, S_2]$. On observe l'éclairement sur un écran parallèle à Ox et dont le centre est situé à la distance $D = 1,5$ m de O .

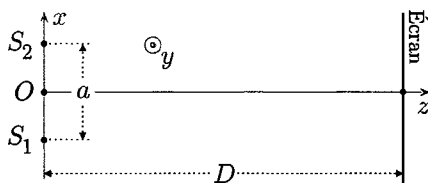


FIG. 2.17. Dispositif interférométrique expérimental.

1. Les deux sources sont même intensité lumineuse \mathcal{I}_0 , monochromatiques de longueur d'onde λ_1 pour S_1 et λ_2 pour S_2 . Montrer que l'on ne peut observer des interférences sur l'écran que si $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. On considère maintenant que chaque source est la superposition de deux signaux lumineux monochromatiques de longueur d'onde $\lambda_1 = 406$ nm et $\lambda_2 = 435$ nm chacun d'intensité \mathcal{I}_0 . On suppose que tous ces signaux ont la même phase à l'origine des temps.

a/ Indiquer qualitativement ce que l'on observe sur l'écran.

b/ Donner l'expression de l'intensité lumineuse observée en un point M de l'écran.

c/ On appelle *contraste* de la figure d'interférence, la grandeur $C = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}}$. Déterminer C . Préciser l'ordre d'interférence au centre de l'écran et donner la nature de la frange observée.

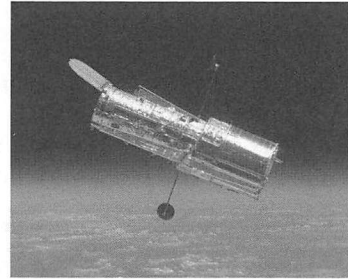
d/ Où se trouvent les franges brillantes de 3^e ordre pour les 2 longueurs d'onde? Préciser la distance entre ces deux franges.

e/ Déterminer la nature de la frange qui se trouve à la distance $d = 7,6$ mm de la frange centrale pour la longueur d'onde λ_1 .

Chapitre 3

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

L'OPTIQUE géométrique est l'étude de la propagation des rayons lumineux ; elle se limite donc aux situations où la notion de rayon lumineux a un sens (voir section I.2 page 45). L'aspect théorique de cette étude est volontairement limité par le programme de première année, ce dernier insistant sur la pratique expérimentale afin de se familiariser avec les phénomènes.



Télescope Hubble
(photo NASA)

I. Cadre de l'étude

La notion de rayon lumineux, donc d'optique géométrique, n'a rien d'une évidence théorique si l'on considère la nature même de la lumière : celle-ci est en effet à la fois une onde électromagnétique et un courant de particules élémentaires sans masse appelées photons. On parle de dualité onde-corpuscule (voir chapitre 4).

I.1. Onde lumineuse

I.1.1. Fréquence, longueur d'onde

L'onde lumineuse est la propagation d'une modification des champs électrique et magnétique. On parle d'onde monochromatique dans le cas où la dépendance temporelle du champ électrique enregistré en un point fixe est sinusoïdale. La fréquence de l'onde est notée ν , sa période temporelle est alors $T = 1/\nu$. Le terme monochromatique signifie « une seule couleur », c'est effectivement la perception que l'on a de ce type d'onde dans la gamme de fréquences correspondant au visible.

La période spatiale d'une onde monochromatique est appelée longueur d'onde, elle est notée λ . La longueur d'onde dépend de la vitesse de propagation de l'onde ; dans le vide, elle est reliée à la fréquence par la relation $\lambda = c/\nu = c \times T$, c étant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide¹.

I.1.2. Vitesse de propagation dans la matière, indice de réfraction

La vitesse de propagation de la lumière n'est plus égale à sa célérité dans le vide c lorsqu'elle traverse un milieu matériel² (comme le verre, mais aussi l'air). On introduit

1. La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide (moins rigoureusement appelée vitesse de la lumière) est une constante fondamentale ; elle sert en effet de définition du mètre. Elle vaut $299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; on retiendra comme ordre de grandeur $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Notons qu'un photon se déplace toujours à la vitesse c . La présence d'un milieu va donner naissance à des interactions entre les photons et les constituants élémentaires de ce milieu. Le temps caractéristique de chaque interaction, moyenné sur le trajet du photon, correspond à la notion macroscopique d'indice.

l'indice de réfraction n tel que $v = c/n$. La vitesse c étant une limite supérieure de la vitesse de propagation de l'énergie, nécessairement $n \geq 1$ d'après la définition de l'indice que nous venons de donner. Cependant, avec une définition plus générale de l'indice qui sera abordée en deuxième année, cela n'est pas toujours vérifié. Dans le cas de l'optique, c'est-à-dire lorsque l'on s'intéresse à la propagation dans des milieux transparents, cette inégalité est toujours vérifiée.

Définition 3.1. Milieu transparent

Pour une fréquence donnée, un milieu transparent est un milieu où l'absorption d'énergie lumineuse (énergie électromagnétique) est très faible.

En deuxième année, l'absorption sera caractérisée par un « indice d'extinction » ; l'indice qui nous concerne en optique géométrique est appelé indice de réfraction.

Définition 3.2. Indice de réfraction

L'indice de réfraction n d'un milieu transparent est tel que la vitesse de propagation v de la lumière dans ce milieu est $v = c/n$, où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

La longueur d'onde v/ν dépendra elle aussi de l'indice du milieu de propagation. En introduisant la longueur d'onde dans le vide λ_0 , la longueur d'onde dans un milieu d'indice n est alors

$$\lambda = \lambda_0/n. \quad (3.1)$$

Elle est donc toujours plus faible que dans le vide.

Son interprétation microscopique permet de comprendre que l'indice d'un milieu dépend des conditions de température et de pression, mais aussi de la longueur d'onde de la radiation. Cette propriété, connue sous le nom de dispersion, est très importante en optique ; elle est exploitée dans le prisme et elle permet d'expliquer la formation des arcs-en-ciel. L'indice décroît avec la longueur d'onde.

Quelques valeurs d'indices sont proposées à titre indicatif dans le tableau 3.1 ; il s'agit d'une valeur moyenne de l'indice sur le spectre visible (l'indice dépend de la fréquence ; pour un indice donné sur le spectre visible, on parle d'*indice optique*). L'indice proposé pour le verre est celui d'un verre ordinaire. Il existe en effet plusieurs types de verre, et l'inclusion d'oxydes d'éléments lourds (comme le plomb) permet d'augmenter la valeur de l'indice ; cet effet est notamment recherché dans la fabrication du cristal ou la joaillerie. Sauf mention contraire, l'indice de l'air sera supposé égal à 1 dans la suite du cours et dans les exercices.

Milieu	Air	Eau	Verre	Diamant
Indice	1,0003	1,33	1,5	2,4

TABLEAU 3.1. Ordre de grandeur de l'indice de réfraction de différents milieux matériels dans des conditions normales de température et de pression.

I.1.3. Spectre visible

Le spectre visible, c'est-à-dire la gamme de fréquences des ondes que l'œil peut voir, ne représente qu'une infime partie de la gamme de fréquences des ondes électromagnétiques utilisée en pratique (voir figure 3.1). Plutôt que la gamme de fréquences,

on retient la gamme de longueurs d'onde (dans le vide) du domaine visible : elle est comprise entre 400 nm et 800 nm, ce qui correspond à des fréquences supérieures à 10^{14} Hz. Ces fréquences étant très élevées, les appareils d'optique, et en premier lieu l'œil, ne sont sensibles qu'à la valeur moyenne de la puissance reçue.

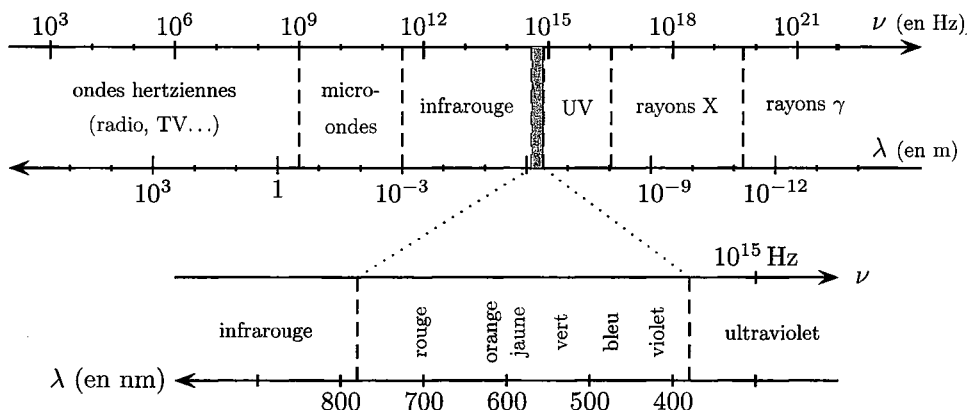


FIG. 3.1. Spectre visible replacé dans le spectre des ondes électromagnétiques. L'échelle est logarithmique pour le spectre des ondes électromagnétiques, linéaire en longueur d'onde pour le spectre du visible.

I.2. Approximation de l'optique géométrique, rayon lumineux

L'approximation de l'optique géométrique repose sur la notion de rayon lumineux. Est-il possible d'isoler un tel rayon ? Cela est infirmé par le phénomène de diffraction étudié au chapitre 2. Si l'on envoie un faisceau lumineux sur un diaphragme (ouverture circulaire de diamètre variable) et si l'on diminue fortement son diamètre d'ouverture d , le faisceau s'élargit, la propagation n'est plus rectiligne comme attendu. Cependant, pour observer ce phénomène de diffraction, il faut que la taille caractéristique de l'ouverture (ici le diamètre d) soit suffisamment « petite ». Ainsi, on pourra considérer que l'on reste dans le cadre de l'optique géométrique dès lors que $d \gg \lambda$.

Remarque Il n'est pas possible d'être quantitatif à ce niveau, mais notons cependant qu'une ouverture circulaire de diamètre d de l'ordre de 1 000 fois la longueur d'onde λ permet encore d'observer une figure de diffraction à l'aide d'un matériel classique. La condition $d \gg \lambda$ n'est donc pas à interpréter de manière quantitative, comme « d supérieur à dix fois la longueur d'onde », par exemple.

Dans l'exemple précédent, c'est la transparence du milieu qui varie : elle est nulle au niveau du diaphragme (il ne laisse pas passer la lumière) et est parfaite (égale à un) au niveau de l'ouverture. Si cette variation est notable à l'échelle de la longueur d'onde, on observera un phénomène de diffraction. Dans la suite du cours, la taille des instruments d'optique que nous utiliserons sera très supérieure à la longueur d'onde. Il sera alors possible de décomposer la lumière en rayons lumineux. Lorsque nous considérerons un rayon particulier traversant un instrument, nous supposons de plus que son trajet est indépendant de ceux des autres rayons lumineux : c'est l'*indépendance des rayons lumineux*.

Synthèse

Approximation de l'optique géométrique

L'optique géométrique suppose que la longueur caractéristique des variations des propriétés physiques du milieu (l'indice de réfraction, ou la transparence) est très supérieure à la longueur d'onde de la radiation.

I.3. Sources de lumière

I.3.1. Lampes spectrales

Une lampe spectrale est une lampe constituée notamment d'un tube (fragile) contenant une vapeur atomique. Cet élément est le plus souvent du sodium (« lampe à vapeur de sodium ») ou du mercure (« lampe à vapeur de mercure »), mais cela peut être aussi, par exemple, le cadmium (en salle de travaux pratiques) ou l'hydrogène. Ce dernier élément, le plus simple à traiter d'un point de vue théorique car constitué uniquement d'un proton et d'un électron, est évoqué dans le cours d'atomistique. L'électron peut occuper différents niveaux d'énergie discrets (ils sont dénombrables) entre l'état fondamental correspondant à une énergie de $-13,6 \text{ eV}$ (eV pour électron-volt, c'est l'énergie cinétique acquise par un électron, initialement au repos, accéléré sous une tension d'un volt, soit $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) et le niveau ionisé d'énergie nulle.

L'électron, dans son état fondamental à très basse température, peut passer dans un état excité d'énergie plus élevée ; il peut ensuite retomber, au bout d'un temps aléatoire, dans un état d'énergie plus basse, cette désexcitation s'accompagnant³ de l'émission d'un photon dont l'énergie $h\nu$ (voir chapitre 4) est égale à la différence d'énergie entre les deux niveaux. Les photons émis par ce mode de désexcitation entre ces deux niveaux ont tous la même longueur d'onde, l'onde lumineuse est donc monochromatique.

En tenant compte des multiples possibilités de désexcitation entre les différents niveaux, les lampes spectrales émettent en réalité différentes « raies » quasi monochromatiques (voir figure 3.2 dans le cas du sodium et figure 3.3 dans celui du mercure). Ces raies ne peuvent pas en effet être rigoureusement monochromatiques pour différentes raisons, la plus simple étant l'effet Doppler dû à la vitesse non nulle (de direction aléatoire) des atomes du fait de l'agitation thermique.

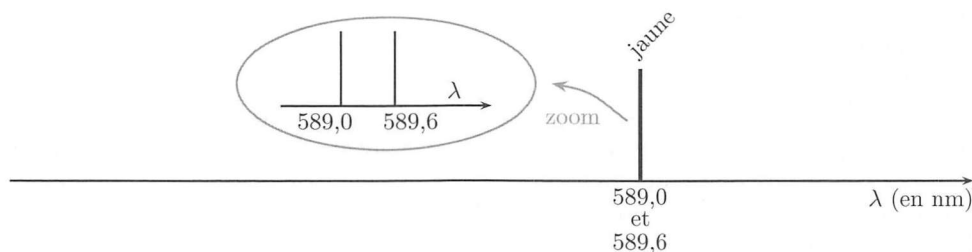


FIG. 3.2. Spectre d'émission simplifié du sodium.

3. Pour le mode de désexcitation qui nous intéresse, à savoir la désexcitation radiative.

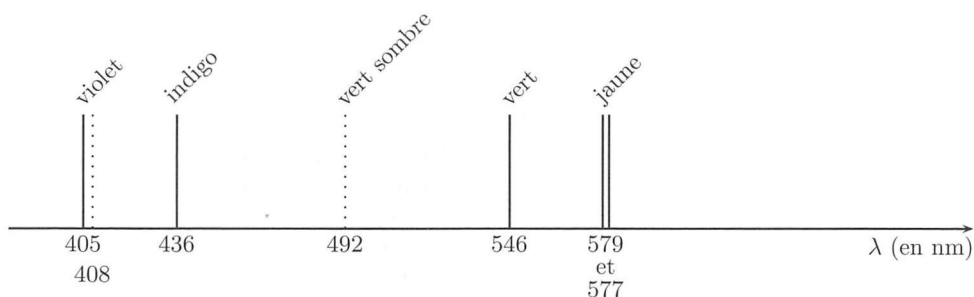


FIG. 3.3. Spectre d'émission simplifié du mercure; en pointillé, les raies peu intenses.

Attention Instrument fragile

Une lampe spectrale met un certain temps à chauffer avant de fonctionner normalement. Lorsqu'une lampe est éteinte, il faut attendre son refroidissement avant de pouvoir la rallumer, sous peine de détérioration.

1.3.2. Sources de lumière blanche

Les exemples de sources de lumière « blanche » qui viennent naturellement à l'esprit sont le Soleil ou le filament d'une lampe à incandescence chauffé par le passage d'un courant électrique. Le spectre de la lumière émise par ces sources obéit approximativement au modèle du « corps noir ». Contentons-nous de constater que le filament d'une ampoule semble rouge lorsque le courant qui la traverse est faible⁴, orange lorsque l'intensité est plus importante et blanc dans les conditions nominales d'utilisation (évitons une observation directe du filament dans ce cas!). Une lumière blanche ne peut être monochromatique; le spectre du corps noir est en réalité continu (toutes les longueurs d'onde sont représentées).

Le constat précédent montre que le profil du spectre d'émission dépend de la température. L'intensité⁵ émise par le corps noir en fonction de la longueur d'onde obéit à la loi de Planck, elle est proportionnelle à

$$\frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (3.2)$$

où h est la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann (cette formule est d'origine quantique), ce qui conduit aux profils proposés à la figure 3.4 pour différentes valeurs de la température T .

Pour être efficace, une source de lumière blanche doit émettre le maximum de son énergie dans le spectre visible. C'est le cas du Soleil, dont la température de surface est de l'ordre de 5 800 K. Le filament d'une lampe à incandescence, en revanche, n'atteint que des températures de l'ordre de 3 000 K. Le maximum du rayonnement se situe alors

4. Cette expérience peut être réalisée avec le gradateur d'une lampe halogène, par exemple.

5. Il s'agit en réalité d'une densité surfacique d'intensité par unité de longueur d'onde.

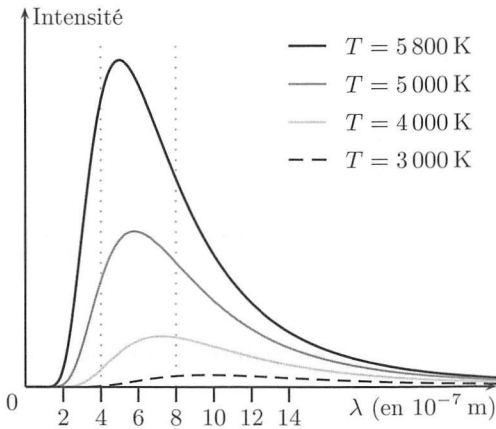


FIG. 3.4. Intensité rayonnée par un corps noir en fonction de la longueur d'onde pour différentes valeurs de la température. Le spectre visible se situe entre les pointillés verticaux, la température de 5 800 K correspond à la température à la surface du Soleil.

dans l'infrarouge ; ce type de lampe dépense la plus grande partie de la puissance qui lui est fournie à « chauffer » la pièce plus qu'à éclairer, et est amené à disparaître pour réaliser des économies d'énergie.

I.3.3. Laser

Le mot laser est l'acronyme anglais de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Il s'agit donc d'une émission stimulée des photons ; la désexcitation n'est plus aléatoire comme dans le cas d'une lampe spectrale, ce qui assure au laser des propriétés particulières. De plus, le milieu dans lequel l'émission stimulée est réalisée est enfermé dans une cavité optique qui assure notamment l'amplification.

La lumière émise par un laser présente l'avantage d'être :

- ▶ cohérente ; ce terme sera précisé en deuxième année, cette propriété est liée au fait que la lumière émise présente un caractère beaucoup plus monochromatique que celle d'une raie de lampe spectrale ;
- ▶ directionnelle ; un mince faisceau sort des lasers du laboratoire, toute la puissance est concentrée dans cette direction.

Les lasers utilisés dans les laboratoires de lycée sont des lasers hélium-néon dont la longueur d'onde est de 632,8 nm, ce qui correspond à un faisceau de couleur rouge ou des diodes laser, souvent vertes (532 nm).

Synthèse

Sources de lumière

Trois types de sources lumineuses sont utilisés en travaux pratiques :

- ▶ **lampe spectrale** : son spectre contient un certain nombre de raies étroites, le spectre est donc discret ;
- ▶ **laser** : son spectre contient une seule raie d'une grande pureté spectrale (elle est plus fine que dans le cas d'une lampe spectrale) ;
- ▶ **lumière blanche** : le spectre est continu, toutes les longueurs d'onde sont présentes.

I.3.4. Modèle de la source ponctuelle monochromatique

Dans la suite du cours, et sauf mention contraire, nous envisagerons les sources considérées comme ponctuelles (elles n'ont pas d'extension spatiale) et monochromatiques (l'onde est purement sinusoïdale). L'aspect monochromatique de ce modèle peut être vu comme une idéalisation du comportement d'un laser, mais il faut garder à l'esprit qu'une telle source ne peut pas exister dans la réalité.

II. Lois de Snell-Descartes

Les lois qui suivent ont été proposées (pour ce qui concerne l'Europe) à peu près conjointement par le Néerlandais Snell (1581-1626) et le Français Descartes (1596-1650). Le premier est surtout connu pour ses travaux mathématiques ; ses recherches en optique n'ont en effet pas été publiées (ils n'ont été mis en avant que plus tard, par Huygens notamment). Le second, connu en mathématique pour être à l'origine de la géométrie analytique, est aussi l'un des fondateurs de la philosophie moderne.



Willebrord Snell

La démonstration historique de ces lois repose sur le principe de Fermat⁶ (1657) qui n'est pas au programme ; mais il mérite d'être évoqué, notamment parce que l'on retrouve des principes équivalents dans la physique moderne.

Principe 3.3. *Principe de Fermat*

Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point à un autre est tel que la durée du parcours est stationnaire par rapport aux chemins fictifs voisins.

Remarque En pratique, le terme « stationnaire » signifie que, lorsque l'on considère tous les trajets hypothétiques que pourrait suivre la lumière pour aller d'un point à un autre et que l'on étudie la fonction qui, à ces trajets, associe les temps de parcours, le trajet effectivement emprunté par la lumière correspond à un minimum (le plus souvent) de cette fonction (plus rigoureusement, le gradient de cette fonction s'annule).

Du principe de Fermat découle le principe de retour inverse :

Principe 3.4. *Principe de retour inverse de la lumière*

La lumière emprunte le même chemin pour aller de A vers B que pour aller de B vers A.

II.1. Réflexion

Considérons un rayon arrivant sur une surface plane réfléchissante (miroir plan).

Définition 3.5. *Plan d'incidence*

On appelle plan d'incidence le plan formé par le rayon incident et la normale au miroir au point d'incidence.

6. Pierre de Fermat (1601-1665) est un mathématicien français. Sa méthode des tangentes est à l'origine du calcul différentiel. On lui doit notamment une conjecture, formulée en 1637 et depuis appelée « théorème de Fermat », dont la preuve n'a été donnée qu'en 1993 (1995 pour la publication complète) par le mathématicien anglais Andrew Wiles.

Sur la figure 3.5, le rayon se propage de A vers le point d'incidence I : le plan d'incidence est le plan passant par A et I et normal au plan du miroir. L'angle d'incidence (noté i sur la figure) est l'angle entre la normale au miroir et le rayon incident.

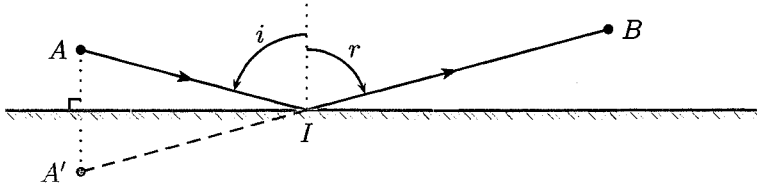


FIG. 3.5. Réflexion sur un miroir plan. Le trajet suivi par la lumière pour aller de A à B correspond au chemin le plus court entre A et B pour un rayon se réfléchissant sur le miroir, conformément au principe de Fermat.

Théorème 3.6. Lois de Snell-Descartes pour la réflexion

- ▶ Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence (voir définition 3.5).
- ▶ L'angle de réflexion r est l'opposé de l'angle d'incidence i , soit $r = -i$.

PREUVE. Soit deux points A et B , placés du même côté d'une surface plane réfléchissante (voir figure 3.5), et un point quelconque I du miroir. L'objectif est de trouver I tel que le chemin optique entre A et B , pour un trajet passant par I , soit minimal. Les trajets s'effectuant dans le même milieu d'indice n , cela correspondra, comme précédemment, au trajet le plus court (les trajets AI et IB sont rectilignes, d'après le principe de Fermat pour un rayon dans un milieu homogène).

Notons A' le symétrique de A par rapport au miroir. La longueur AI égale $A'I$ de telle sorte que l'on cherche maintenant I tel que $A'I + IB$ soit minimal. C'est le cas si A' , I et B sont alignés. De cet alignement découle sans difficulté que l'angle entre le rayon réfléchi et la normale au miroir (l'opposé de r sur la figure) est égal à l'angle d'incidence. ■

II.2. Réfraction

Définition 3.7. Dioptr

Un dioptr est une surface optique séparant deux milieux de réfringence inégale (c'est-à-dire d'indices de réfraction inégaux).

Considérons un rayon incident arrivant sur un dioptr plan. Le milieu dans lequel le rayon incident se propage sera appelé milieu 1, son indice de réfraction est n_1 , l'indice du milieu 2 sera noté n_2 (voir figure 3.6).

Théorème 3.8. Lois de Snell-Descartes pour la réfraction

- ▶ Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.
- ▶ L'angle d'incidence i_1 et l'angle de réfraction i_2 vérifient $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Remarque La première loi peut se retrouver simplement par la symétrie. Le plan incident est un plan de symétrie du problème (plan de symétrie pour le rayon incident

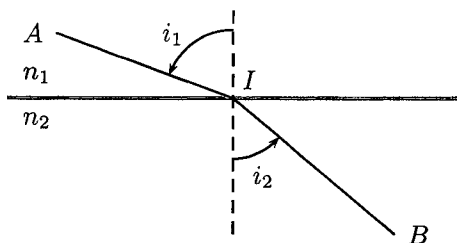


FIG. 3.6. Réfraction au passage d'un dioptré. Sur la figure, le rayon réfracté est plus proche de la normale que le rayon incident, l'indice n_2 est donc supérieur à l'indice n_1 conformément aux lois de Snell-Descartes.

et le milieu), ce qui implique que le rayon, réfléchi ou réfracté, doit appartenir à ce plan. Dans de nombreuses situations en physique, les considérations de symétrie sont très fructueuses ; c'est un réflexe qu'il faudra acquérir.

PC



Interprétation de la réfraction à l'aide d'un modèle ondulatoire Il faut tout d'abord définir la notion de *surface d'onde*. Il s'agit des surfaces équiphasés, autrement dit les surfaces qui sont en phase à chaque instant. Ces surfaces sont orthogonales aux rayons lumineux (théorème de Malus, hors programme de première année). Dans le cas d'une source ponctuelle, les surfaces d'ondes sont des sphères centrées sur la source, mais la figure 3.7 montre qu'observée à grande distance, l'onde émise par une source ponctuelle semble localement plane (les surfaces d'ondes sont des plans parallèles).

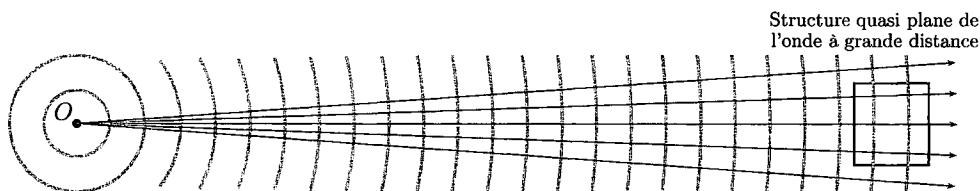


FIG. 3.7. Surfaces d'ondes pour une source sphérique à grande distance.

Rappelons que la lumière est une onde dont la longueur d'onde dépend de l'indice optique du milieu selon la relation $\lambda = \lambda_0/n$, où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide, voir équation (3.1) page 44. Considérons un faisceau parallèle (source à l'infini) arrivant avec un angle d'incidence i_1 non nul sur une interface séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 (voir figure 3.8). La source étant à l'infini, les surfaces d'ondes sont des plans. La distance entre deux plans déphasés de 2π est égale à la longueur d'onde par définition de cette dernière. Supposons $n_1 < n_2$, comme sur la figure. La longueur d'onde dans le milieu 2 est alors plus faible que dans le milieu 1, les surfaces d'ondes sont donc plus proches que dans le milieu 1. Les rayons, qui sont orthogonaux aux surfaces d'ondes, n'ont alors pas la même direction.

On peut retrouver la formule donnant l'angle de réfraction en écrivant la longueur AB (points définis figure 3.8) de deux manières. En projetant AB sur la longueur d'onde dans le milieu 1,

$$AB \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = \lambda_1 \quad \text{soit} \quad AB = \frac{\lambda_1}{\sin i_1}.$$

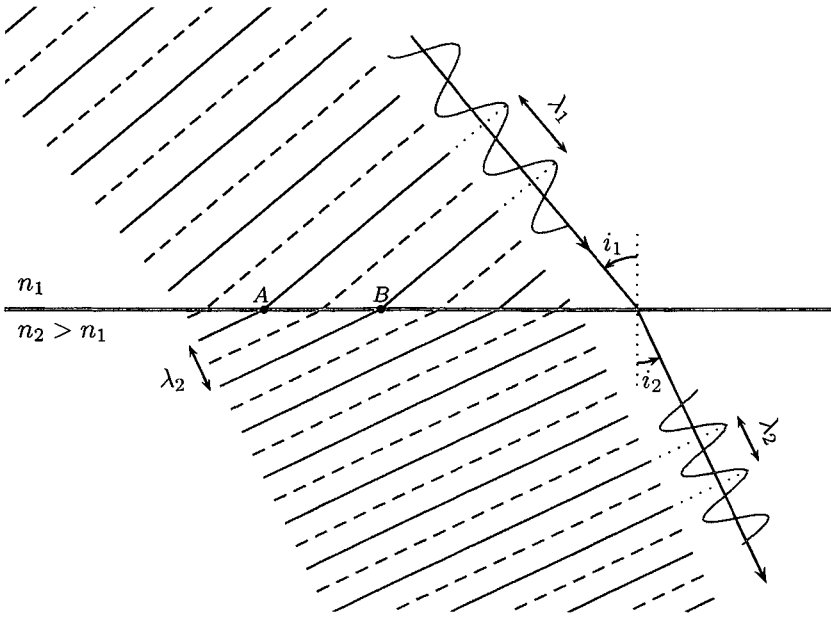


FIG. 3.8. Fronts d'ondes réfractés au passage d'un dioptre. Sur le côté droit, l'amplitude instantanée de l'onde et la définition de la longueur d'onde.

D'autre part, en projetant AB sur λ_2 , on obtient de même $AB = \lambda_2 / \sin i_2$. Ainsi, en éliminant AB et en utilisant la relation entre λ et λ_0 ,

$$\frac{\lambda_0}{n_1 \sin i_1} = \frac{\lambda_0}{n_2 \sin i_2} \quad \text{et ainsi} \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

▲
PC

II.3. Conséquences immédiates

II.3.1. Miroir plan

Les lois de Descartes sur la réflexion permettent de déduire les propriétés d'un miroir plan. En pratique, un miroir est obtenu par un dépôt métallique, de l'argent par exemple, sur une lame de verre. Un dépôt plus fin permet d'obtenir une lame semi-réfléchissante (utilisée dans les lunettes autocollimatrices, par exemple).

L'image d'un objet par un miroir est le symétrique de l'objet par une symétrie plane par rapport au plan du miroir (voir figure 3.9; les hachures indiquent la face opaque du miroir).

En conséquence, l'image a la même taille que l'objet (le grandissement est égal à un). Par ailleurs, l'image est virtuelle : elle ne peut pas être observée sur un écran. La section III.2 (voir page 55) précise cette notion.

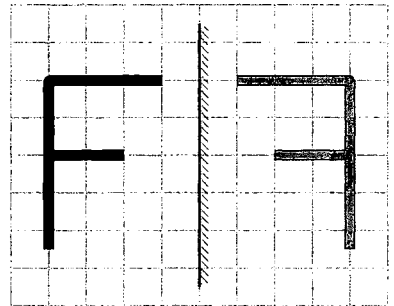


FIG. 3.9. Image d'un objet par un miroir.

II.3.2. Réflexion totale

Dans la relation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (voir théorème 3.8), l'angle i_2 n'existe pas toujours. En effet, $\sin i_2 = n_1 \sin i_1 / n_2$ doit rester inférieur ou égal à un, soit $\sin i_1 \leq n_2 / n_1$. Si $n_2 \geq n_1$, cette condition sera toujours observée; en revanche, si $n_2 < n_1$, le rayon réfracté n'existe que si l'angle d'incidence i est inférieur à un angle limite i_{lim} tel que $\sin i_{\text{lim}} = n_2 / n_1$. On retiendra que pour observer une réflexion totale, il faut que le rayon se propage dans le milieu le plus réfringent (le milieu d'indice le plus grand) et que l'angle d'incidence soit supérieur à l'angle limite.

La réflexion totale est recherchée dans les fibres optiques (voir exercice 4 page 74) et dans certains instruments utilisant des prismes à la place de miroirs. C'est le cas dans les jumelles, les appareils photographiques de type reflex ou les périscopes, les miroirs métalliques ayant l'inconvénient de se dégrader au fil du temps.

II.3.3. Angle de réfraction limite

Dans le cas où le rayon se propage dans le milieu le moins réfringent, soit $n_2 > n_1$, $\sin i_1 = n_2 \sin i_2 / n_1 > \sin i_2$. L'angle i_2 restera inférieur à i_1 . Lorsque i_1 sera égal à $\pi/2$, i_2 aura atteint sa valeur maximale $i_{2\text{max}}$ telle que $\sin i_{2\text{max}} = n_1 / n_2$. Pour un rayon arrivant sous une incidence quelconque en un point I de l'interface, le rayon réfracté sera contenu dans un cône de réfraction de sommet I et de demi-angle au sommet $i_{2\text{max}}$. Il n'est ainsi pas possible de transmettre un rayon plus incliné par rapport à la normale. Numériquement, pour un rayon incident se propageant dans l'air, l'angle limite est de l'ordre de 49° dans le cas de l'eau et d'environ 42° dans le cas du verre.

II.3.4. Observation d'un objet dans l'eau

Un exemple de dioptré plan auquel un observateur est confronté est l'interface entre l'air et une étendue d'eau (claire et calme), l'observateur devant être près du bord afin d'observer sous incidence quasi normale. L'objet, un poisson par exemple, apparaît à sa taille réelle mais plus proche de la surface qu'il ne l'est en réalité. Dans le cas de l'eau, $n_1 = 1,33$ et $n_2 = 1$, la distance apparente du poisson à la surface est égale aux trois quarts de la distance réelle (voir figure 3.10).

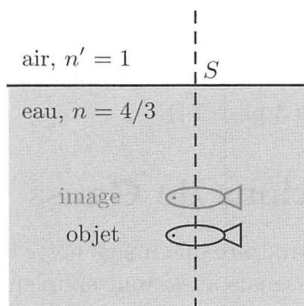


FIG. 3.10. Poisson observé depuis la rive. Si le poisson conserve sa taille réelle lorsqu'il est observé depuis la rive, son image (en gris) semble plus proche de la surface qu'il ne l'est réellement (objet en noir).

II.3.5. Milieu stratifié

Considérons un milieu stratifié constitué par une succession de couches parallèles repérées par l'entier m (voir figure 3.11), transparentes d'indice de réfraction n_m . L'indice est une fonction monotone de m .

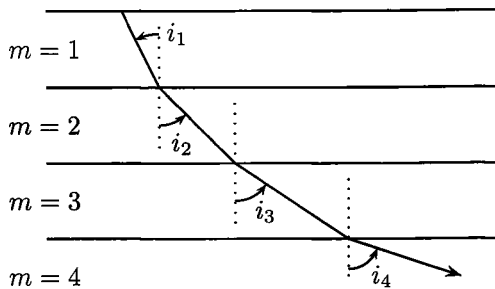


FIG. 3.11. Milieu réfringent stratifié. Ce milieu est constitué de différentes couches dont l'indice n_m varie de façon monotone en fonction de m . Il est en l'occurrence décroissant sur cette figure.

D'après les lois de Snell-Descartes, le rayon restera dans le plan d'incidence sur la première interface, et la relation mathématique à l'interface entre deux couches consécutives m et $m + 1$ s'écrit $n_m \sin i_m = n_{m+1} \sin i_{m+1}$. Par récurrence, la quantité $n_m \sin i_m$ reste constante le long d'un rayon lumineux traversant différentes couches. Lorsque l'indice diminue avec m , $\sin i_m$ donc i_m augmente ; le rayon s'éloigne de plus en plus de la normale aux couches. Comme l'incidence augmente et que, sur une interface, le rayon arrive sur un milieu d'indice plus faible, le rayon va finir par subir une réflexion totale, ce qui peut conduire à une trajectoire représentée sur la figure 3.12, pour un milieu dont l'indice varie continûment (les couches sont infiniment fines).

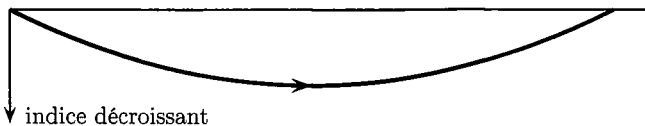


FIG. 3.12. Trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu stratifié.

Les milieux stratifiés s'observent fréquemment dans l'atmosphère. L'indice de l'air augmente en effet en fonction de sa densité, donc il augmente lorsque la température diminue ou lorsque la pression augmente. Ainsi, en été, le sol surchauffé occasionne une variation de température décroissante avec l'altitude où l'air est plus froid. On est dans la situation proposée à la figure 3.12, et les objets semblent se refléter à la surface du sol, laissant ainsi croire à la présence d'eau. Ce type de mirage est appelé mirage chaud ou mirage inférieur.

Il existe aussi des mirages supérieurs, obtenus lorsque l'indice décroît avec l'altitude, les objets semblant alors flotter dans le ciel, mais ces mirages sont plus rarement observables. Cependant, un effet de ce type est à prendre en compte lorsque l'on observe les étoiles. La pression diminuant dans l'atmosphère en fonction de l'altitude, l'indice diminue de même ; les étoiles apparaissent alors systématiquement plus hautes sur l'horizon qu'elles ne le sont réellement (voir exercice 3 page 74).

III. Formation des images ; conditions de Gauss

Le rôle de la majorité des instruments d'optique est de produire une image nette d'un objet (appareil photographique, télescope, microscope... mais aussi tout simplement le rôle du cristallin d'un œil). Cela se révèle assez délicat en pratique, comme nous allons le montrer.

III.1. Stigmatisme rigoureux

Un système optique est une succession de milieux transparents séparés par des dioptries ou des miroirs. C'est le cas par exemple de l'objectif d'un appareil photographique

dont le but est de faire l'image d'un sujet sur la pellicule photographique (ou sur les capteurs pour un appareil numérique). Le sujet peut être une source de lumière primaire (le Soleil couchant, par exemple) ou secondaire (la lumière issue du Soleil se réfléchissant sur un paysage, par exemple). Un objet, pour un système optique, est donc une source de lumière, l'objet est ponctuel si la source est ponctuelle. L'image d'un objet ponctuel est le lieu où les rayons lumineux issus de l'objet, et ayant traversé le système optique, convergent. Elle est ponctuelle lorsque le faisceau émergent du système optique converge en un point. L'image d'un objet ponctuel n'est ponctuelle que pour un système stigmatique.

Définition 3.9. *Stigmatisme rigoureux*

Un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points (A, A') si tout rayon incident sur le système optique, passant par A , passe par A' après avoir traversé le système optique (voir figure 3.13).

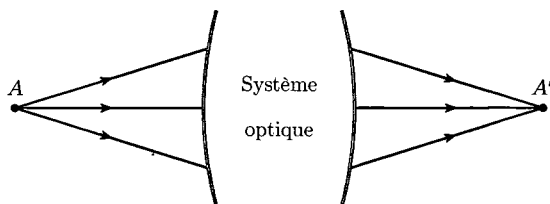


FIG. 3.13. Un couple de points conjugués par un système optique stigmatique.

III.2. Objet et image; nature réelle ou virtuelle

III.2.1. Définition

Définition 3.10. *Objet, image*

Le point de concours A des rayons incidents sur le système optique est appelé l'objet, le point de concours A' des rayons émergents est appelé l'image. Le point A' est l'image conjuguée de A ; A et A' forment un couple de points conjugués.

Lorsqu'un système optique est rigoureusement stigmatique, tout rayon incident sur le système optique passant par l'objet A donne un rayon émergent conjugué passant par l'image A' .

III.2.2. Rayons virtuels

La figure 3.13 présente le cas de rayons réels, c'est-à-dire des rayons que l'on peut effectivement visualiser en les interceptant par un écran, par exemple. Dans un cas plus général, s'intéresser au prolongement de rayons réels peut s'avérer nécessaire pour comprendre le cheminement géométrique de ces rayons.

Définition 3.11. *Rayon virtuel*

Le prolongement d'un rayon réel est appelé rayon virtuel.

Un rayon virtuel sera représenté par des tirets sur une figure.

Définition 3.12. Objet virtuel, image virtuelle

Le point de concours du prolongement virtuel de rayons lumineux, dans le sens de la propagation de la lumière, définit une image virtuelle.

Le point de concours du prolongement virtuel de rayons lumineux, dans le sens inverse de la propagation de la lumière, définit un objet virtuel.

Ces définitions sont illustrées aux figures 3.14 et 3.15 dans le cas d'un système optique, une lentille par exemple, dont on a représenté la face d'entrée (dans le cas de l'objet, voir figure 3.14) ou la face de sortie (dans le cas de l'image, voir figure 3.15).



FIG. 3.14. Nature réelle ou virtuelle d'un objet. La face d'entrée présentée est celle du système optique étudié.



FIG. 3.15. Nature réelle ou virtuelle d'une image. La face de sortie présentée est celle du système optique étudié.

III.2.3. Espace objet, espace image

Un objet réel se situe nécessairement à gauche de la face d'entrée sur la figure 3.14.

Définition 3.13. Espace objet

L'espace objet réel est la partie d'espace située avant la face d'entrée du système optique. La partie située après est appelée espace objet virtuel.

La notion « avant » ou « après » est liée dans cette définition au sens de propagation de la lumière.

La même distinction peut être faite pour l'image; une image virtuelle se situe nécessairement à droite de la face de sortie sur la figure 3.15.

Définition 3.14. Espace image

L'espace image réel est la partie d'espace située après la face de sortie du système optique. La partie située avant est appelée espace image virtuel.

III.3. Stigmatisme approché des systèmes centrés, aplanétisme

Le miroir plan est le seul système optique assurant un stigmatisme rigoureux pour une position quelconque de l'objet. En dehors de ce système optique, un faisceau issu d'un objet ponctuel quelconque ne reconverge pas exactement en un point, mais plutôt dans une petite zone de l'espace formant alors une tache lumineuse appelée caustique (voir section III.4). Cependant, expérimentalement, à un objet ponctuel semble souvent correspondre une image ponctuelle si le système optique est correctement employé (c'est ce qui est attendu d'un appareil photographique, par exemple); la caustique est suffisamment petite devant les détails perceptibles par l'œil ou le capteur utilisé, et l'image apparaît comme nette. Il s'agit là d'un stigmatisme approché qu'il convient de définir, et surtout dont il convient de préciser les conditions permettant de le réaliser.

III.3.1. Système centré et conditions de Gauss

Dans la pratique, la plupart des systèmes utilisés en optique sont des systèmes centrés (lunette astronomique, objectif d'un appareil photographique. . .).

Définition 3.15. *Système centré*

Un système centré est un système optique constitué de surfaces réfractantes (dioptries) ou réfléchissantes (miroirs) de révolution autour d'un axe commun, l'axe optique.

Afin d'assurer un stigmatisme approché, les systèmes centrés seront utilisés dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire dans l'hypothèse des *rayons paraxiaux* :

- ▶ les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique ;
- ▶ ils sont proches de l'axe optique lors de l'incidence sur les dioptries ou les miroirs (par rapport au rayon de courbure).

En pratique donc, seule une petite calotte qui se trouve au voisinage du sommet des dioptries sera utilisée : un diaphragme limitant l'ouverture du système permet de ne garder que les rayons paraxiaux. De plus, les objets ne seront pas trop éloignés de l'axe optique. On retiendra :

Définition 3.16. *Approximation de Gauss*

Dans l'approximation de Gauss, les rayons sont paraxiaux : les angles entre ces rayons et l'axe optique sont faibles, et les rayons coupent le dioptre au voisinage du sommet.

III.3.2. Aplanétisme

Définition 3.17. *Plan frontal*

Un plan frontal est un plan perpendiculaire à l'axe optique.

L'aplanétisme est la propriété qu'a un système optique de transformer un objet étendu plan en une image étendue plane. Il est possible de démontrer que les systèmes optiques travaillant dans les conditions de Gauss sont approximativement aplanétiques, à condition que le plan de l'objet soit un plan frontal, c'est-à-dire un plan perpendiculaire à l'axe optique. En pratique, cela signifie qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un écran sphérique (par exemple) pour projeter une diapositive (plane), un écran plan suffit (voir figure 3.16). Pour que la projection soit nette partout, il faut

que la diapositive et l'écran soient tous les deux perpendiculaires à l'axe optique. Il faut également que les conditions de Gauss soient respectées ; notamment, l'écran ne doit pas être trop grand par rapport à la distance au système de projection, sinon les rayons formant le bord de l'image seront très inclinés par rapport à l'axe optique et le bord de l'image sera flou.

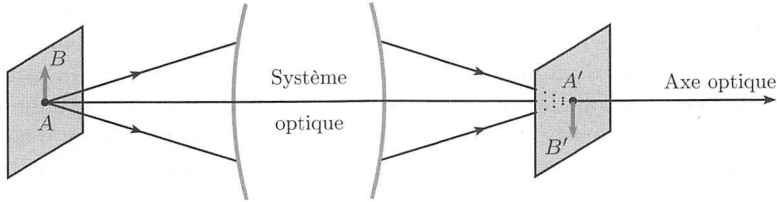


FIG. 3.16. Aplanétisme d'un système optique. À un objet rectiligne (AB sur la figure) ou plan (la diapositive) perpendiculaire à l'axe optique correspond une image rectiligne ($A'B'$) ou plane perpendiculaire à l'axe optique.

Propriété 3.18. Aplanétisme

Un système optique centré utilisé dans les conditions de Gauss est aplanétique : l'image d'un objet plan situé dans un plan frontal est plane et perpendiculaire à l'axe optique.

Définition 3.19. Plan méridien

Un plan méridien est un plan contenant l'axe optique.

À un petit objet AB perpendiculaire à l'axe (A est sur l'axe) correspond une image rectiligne conjuguée $A'B'$ perpendiculaire à l'axe (A' est sur l'axe) dans le même plan méridien par symétrie. Le *grandissement transversal* $\gamma = A'B'/AB$ n'est fonction que de la position de A sur l'axe.

Tous les systèmes étudiés par la suite, utilisés dans les conditions de Gauss, seront aplanétiques. Les relations de conjugaison, *a priori* valables uniquement sur l'axe optique, resteront approximativement valables légèrement en dehors de cet axe.

III.4. Aberrations

Le traitement théorique des aberrations est hors programme, mais leur existence ne peut être passée sous silence, car un montage optique confronte inévitablement l'expérimentateur à leur observation. Deux types d'aberration sont décrits dans cette section ; il en existe d'autres, aberration de coma ou distorsion par exemple, qui concernent des objets qui ne sont pas sur l'axe optique.

III.4.1. Aberration chromatique

L'indice du verre qui constitue la lentille dépend de la longueur d'onde du rayon lumineux (de sa couleur). En sortie de lentille, un faisceau de lumière blanche est dispersé par ce phénomène ; les rayons ne convergent pas au même endroit selon la longueur d'onde. Ce type d'aberration est étudié dans l'exercice 8 (voir page 76).

III.4.2. Aberration sphérique

Sur la figure 3.17 sont représentés différents rayons arrivant sur une lentille convergente. L'expérience montre que les rayons marginaux (ceux qui passent près des bords de la lentille) se focalisent plus près de la lentille que les rayons paraxiaux (ceux qui passent près du centre de la lentille). L'enveloppe des rayons lumineux émergents est appelée la caustique. Pour remédier à cela, il suffit de se placer dans les conditions de Gauss en ne conservant que les rayons paraxiaux (voir figure 3.18).

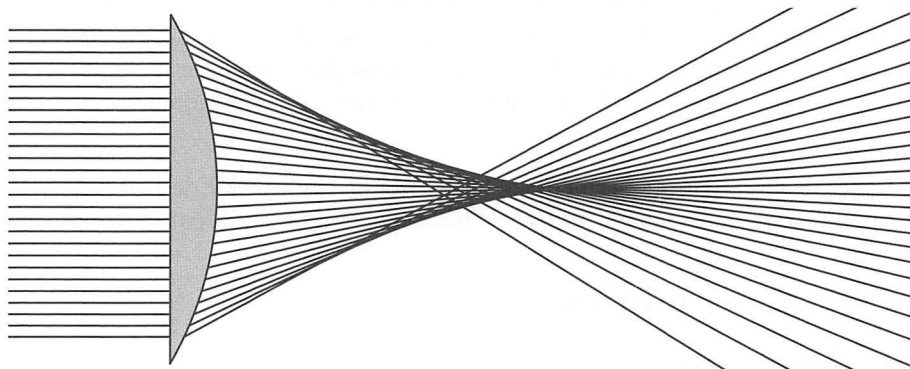


FIG. 3.17. Aberration sphérique. Les rayons marginaux se focalisent plus près de la lentille que les rayons paraxiaux.

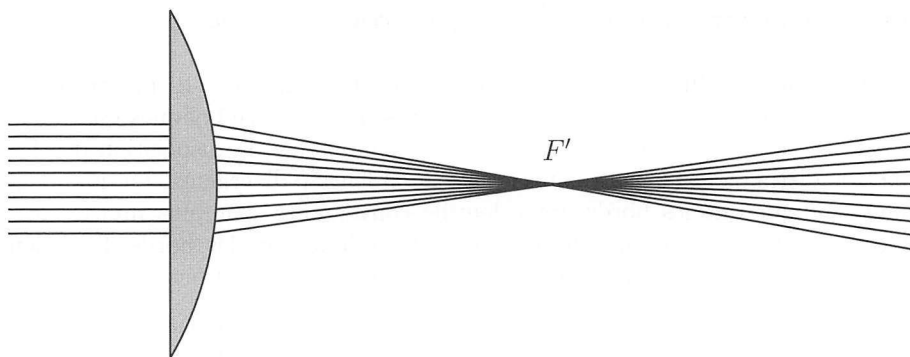


FIG. 3.18. Conditions de Gauss : stigmatisme approché. En ne conservant, à l'aide d'un diaphragme, que les rayons paraxiaux, vérifiant l'approximation de Gauss, les rayons se focalisent en un seul point de l'axe : le foyer image (voir *infra*).

III.4.3. Règles à respecter pour limiter les aberrations

La stratégie pour limiter les aberrations dépend du système optique considéré : s'agit-il d'un microscope, qui nécessite l'ouverture la plus grande possible, ou de l'objectif « grand angle » d'un appareil photographique ?

Méthode

Limitation des aberrations

Sans entrer dans les détails, afin de limiter les aberrations, on doit respecter les règles suivantes :

- ▶ se placer dans les conditions de Gauss ;
- ▶ utiliser des lentilles corrigées des aberrations chromatiques pour les projections (ces lentilles présentent des reflets bleus et non blancs) ;
- ▶ respecter la règle des 4 P ou règle du « plus plat plus près » : la face la plus plate de la lentille doit être placée du côté de l'objet si celui-ci est plus proche de la lentille que l'image, et du côté de l'image si celle-ci est plus proche de la lentille que l'objet (autrement dit, la face la plus plate de la lentille doit être du côté où les rayons sont le plus inclinés par rapport à l'axe optique).

Le respect de ces règles ne permet cependant pas de s'affranchir de la diffraction due à la taille finie de l'instrument utilisé (le diamètre de l'objectif, par exemple).

IV. Lentilles minces

IV.1. Définitions

IV.1.1. Approximation des lentilles minces

Définition 3.20. *Lentille mince*

Une lentille mince est l'association de deux dioptries dont la distance (distance entre les deux sommets) est très inférieure aux rayons de courbure, de sorte que l'on puisse les confondre en un même point appelé centre de la lentille.

Le centre d'une lentille mince est souvent noté O . La figure 3.19 montre quelques exemples de lentilles minces ainsi que les représentations symboliques que nous utiliserons par la suite. Sur cette représentation symbolique, la disposition des flèches permet de distinguer la lentille convergente de la lentille divergente. La double flèche saillante indique que les bords d'une lentille convergente sont plus minces que son centre. *A contrario*, la double flèche rentrante indique que les bords d'une lentille divergente sont plus épais que son centre (on parle de lentille mince à bord épais).

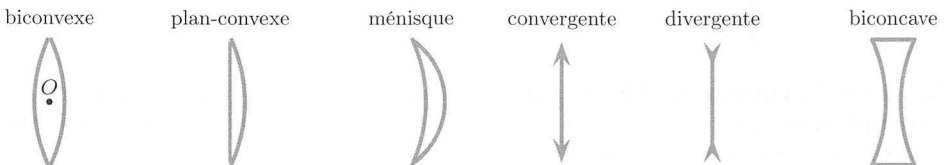


FIG. 3.19. Exemples de lentilles minces. Trois lentilles convergentes à bords minces à gauche ; la représentation symbolique d'une lentille convergente et divergente (au centre) et un exemple de lentille divergente à droite.

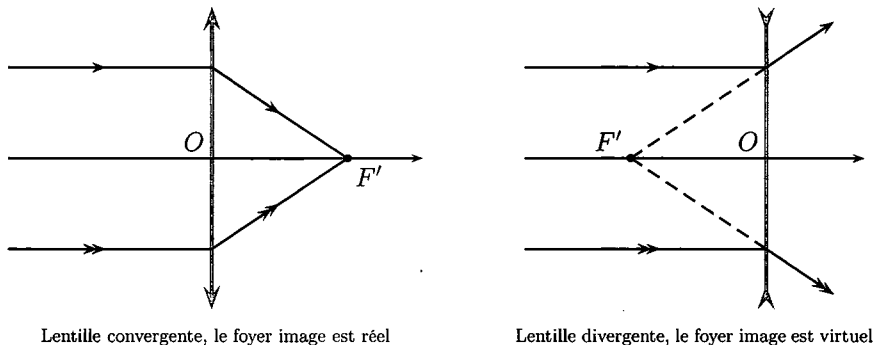
IV.1.2. Foyers, distance focale, vergence

Supposons que le point A soit à l'infini sur l'axe optique. Son image A' est sur l'axe optique et s'appelle le foyer principal image, noté F' .

Définition 3.21. Foyer principal image

Le foyer principal image est le conjugué d'un objet ponctuel situé à l'infini sur l'axe optique.

La distance focale image est la grandeur algébrique f' telle que $f' = \overline{OF'}$. Si $f' < 0$, le foyer image F' est virtuel et la lentille est dite *divergente* ; si $f' > 0$, le foyer image F' est réel et la lentille est dite *convergente* (voir figure 3.20).



Lentille convergente, le foyer image est réel

Lentille divergente, le foyer image est virtuel

FIG. 3.20. Nature réelle ou virtuelle du foyer image d'une lentille.

L'autre point remarquable dans un système optique est le point de l'axe optique qui donne une image à l'infini.

Définition 3.22. Foyer principal objet

Le foyer principal objet est le point de l'axe optique dont le conjugué est à l'infini.

Ce point est noté F ; la grandeur algébrique \overline{OF} est appelée *distance focale objet*, elle est notée f . D'après le principe de retour inverse de la lumière, $OF = OF'$ (en valeur absolue), ainsi $f = -f'$. Il est courant de parler sans précision de la « distance focale » de la lentille ; il s'agit alors de la distance focale image.

Si l'objet est situé à l'infini en dehors de l'axe, son conjugué est un *foyer secondaire image*. Par aplanétisme, les foyers secondaires sont dans un plan frontal passant par le foyer principal image, appelé plan focal image.

Définition 3.23. Plan focal objet, plan focal image

Le plan focal objet (respectivement image) est le plan frontal passant par le foyer principal objet (respectivement image).

Un point d'un plan focal objet en dehors de l'axe optique est appelé *foyer secondaire objet*. Il donne une image à l'infini en dehors de l'axe.

Définition 3.24. Vergence d'une lentille mince

La vergence d'une lentille mince est la quantité

$$V = \frac{n_{\text{ext}}}{f'} = -\frac{n_{\text{ext}}}{f} \quad (3.3)$$

avec le plus souvent $n_{\text{ext}} = 1$, l'indice de l'air. La vergence est exprimée en dioptrie (symbole δ , homogène à l'inverse d'une distance).

IV.2. Relations de conjugaison, grandissements

IV.2.1. Définitions

Soit un point A sur l'axe optique et A' le conjugué de A à travers le dioptre (A' est sur l'axe pour des raisons de symétrie). Une *relation de conjugaison* est une relation entre la position de A' et celle de A . Elle fait intervenir les caractéristiques du système : dans le cas d'une lentille, l'indice du verre et le rayon de courbure des deux dioptres, mais en pratique on utilise la distance focale ou la vergence.

Outre les formules de conjugaison liant la position d'un objet sur l'axe à celle de son image, il existe des relations permettant de calculer un grandissement. Nous nous intéresserons à deux types de grandissement, le grandissement linéaire et le grandissement angulaire.

Définition 3.25. Grandissement linéaire transversal

Pour un objet AB , perpendiculaire à l'axe optique, et une image $A'B'$, elle aussi perpendiculaire à cet axe d'après les propriétés d'aplanétisme, le grandissement linéaire γ ou grandissement transversal (par opposition au grandissement axial que nous n'aborderons pas) est, par définition, la grandeur algébrique

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Définition 3.26. Grandissement angulaire

Le grandissement angulaire est le rapport entre l'angle algébrique que fait un rayon émergent arrivant en A' avec l'axe optique, et l'angle algébrique entre le rayon incident dont il est le conjugué et l'axe optique. Avec les notations de la figure 3.21, le grandissement angulaire est $G = u'/u$; il est aussi appelé rapport de convergence.

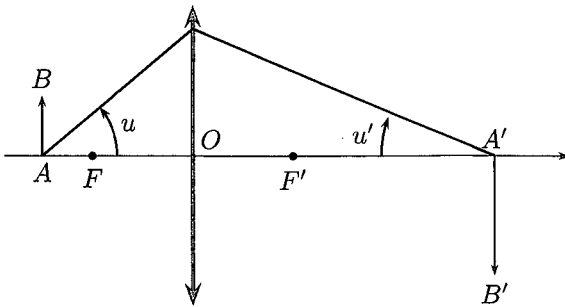


FIG. 3.21. Objet et son image par une lentille (convergente ici). Les angles sont exagérés pour la lisibilité de la figure ; les conditions de Gauss ne sont donc pas vérifiées sur celle-ci, mais doivent l'être dans toutes les applications.

Dans les exercices 7, 10 et 13 (voir page 76 et suivantes) est introduit de plus le *grossissement*, rapport algébrique de l'angle sous lequel est vu l'objet à travers le système optique par rapport à celui sous lequel il est vu à l'œil nu.

IV.2.2. Formules de Descartes

Les formules de Descartes sont des formules de conjugaison-grandissement avec origine au centre optique O de la lentille mince considérée. Elles ne sont pas à retenir, elles seront fournies par l'énoncé des problèmes.

Il est courant de poser $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$. Alors, avec les notations de la figure 3.21,

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} \quad (3.4)$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (3.5)$$

$$G \doteq \frac{u'}{u} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \quad (3.6)$$

IV.2.3. Formules de Newton

Avec les notations de la figure 3.21,

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = ff' = -f^2 \quad (3.7)$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{1}{G} \quad (3.8)$$

Selon le contexte, il faut choisir parmi les formules de Descartes ou de Newton celles qui sont les plus pratiques.

IV.3. Constructions géométriques pour les lentilles

IV.3.1. Construction géométrique pour une lentille convergente

Considérons l'objet AB et déterminons graphiquement son image $A'B'$ (voir figure 3.22). Pour cela, utilisons trois rayons particuliers (en pratique deux suffisent).

1. Le rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié par la lentille.
2. Le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique passe par F' .
3. Le rayon issu de B et passant par F ressort parallèlement à l'axe optique.

Ces trois rayons convergent en un même point, qui est nécessairement l'image B' de B . Par aplanétisme, A' est dans le même plan que B' .

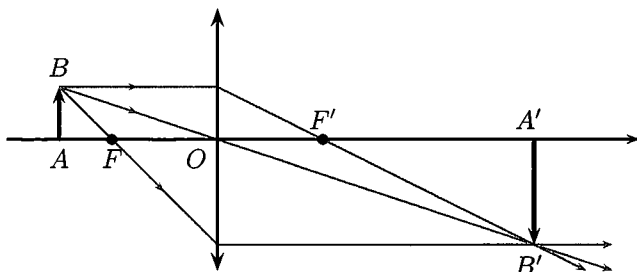


FIG. 3.22. Exemple de construction dans le cas d'une lentille mince convergente.

Dans le cas précédent, l'image est réelle, renversée et plus grande que l'objet. L'étude exhaustive est proposée en section IV.4.1. Le cas particulier où $A = F$ fait l'objet de l'exercice corrigé 3.29.

EXERCICE CORRIGÉ 3.27.

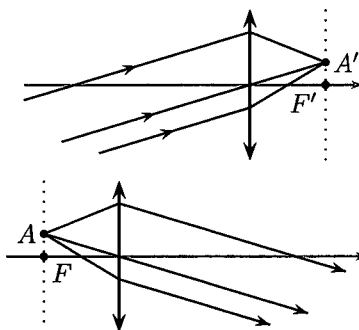
Construire l'image d'un objet ponctuel situé à l'infini, en dehors de l'axe.

Un objet ponctuel se trouve dans le plan focal objet d'une lentille convergente, en dehors de l'axe (A n'est donc pas confondu avec F). Construire quelques rayons émergents de la lentille.

Corrigé

La source étant à l'infini, tous les rayons incidents ont la même direction. Dans ce cas particulier, un seul rayon suffit pour obtenir l'image : celui qui passe par le centre de la lentille et qui n'est pas dévié ; on sait en effet que l'image est dans le plan focal image (en pointillé sur la figure).

L'objet étant dans le plan focal (représenté en pointillé sur la figure), les rayons ressortent de la lentille tous parallèles. Le rayon qui passe par le centre de la lentille et qui n'est pas dévié donne directement la direction des rayons émergents.

**IV.3.2. Construction géométrique pour une lentille divergente**

Considérons l'objet AB et déterminons graphiquement son image $A'B'$. Pour cela, trois rayons particuliers (en pratique deux suffisent) seront utilisés, mais, sur l'exemple proposé, certaines difficultés nouvelles apparaissent (la différence avec la situation précédente est que pour la lentille divergente, F' est à gauche de la lentille et F est à droite, voir figure 3.23).

1. Le rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié par la lentille.
2. Le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique passe par F' . Cela signifie qu'un observateur placé à droite de la lentille a l'impression que le rayon vient de F' . Le prolongement virtuel, à gauche de la lentille, du rayon émergent est représenté en tirets. En pratique, le rayon virtuel reliant F' au point d'interception du rayon incident avec la lentille est tracé en premier, puis prolongé à droite de la lentille.
3. Le rayon issu de B et passant par F ressort parallèlement à l'axe optique. Une nouvelle fois, ce rayon ne passe pas réellement par F car il est défléchi par la lentille avant d'y arriver. La partie virtuelle de ce rayon, située à droite de la lentille, est tracée en pointillé.

Ces trois rayons convergent en un même point, qui est nécessairement l'image B' de B . Par aplanétisme, A' est dans le même plan que B' .

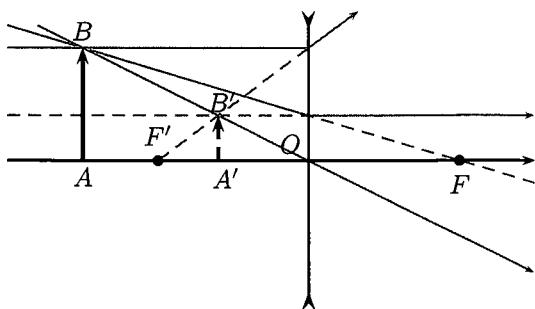


FIG. 3.23. Exemple de construction dans le cas d'une lentille mince divergente. L'image (en tirets) est virtuelle car définie par l'intersection de rayons virtuels.

Le schéma montre que le faisceau de sortie est plus divergent que le faisceau entrant, ce qui justifie le nom donné à ce type de lentille.

Dans le cas précédent, l'image est virtuelle car elle ne peut être vue sur un écran. Elle est en revanche visible par un observateur placé à droite de la lentille et regardant vers la gauche. Cette image virtuelle est non renversée et plus petite que l'objet (grandissement transversal $\gamma \in [0,1]$). L'étude exhaustive des différents cas est proposée à la section IV.4.2.

Méthode

Construction géométrique de rayons ; image

Pour déterminer l'image d'un point B en dehors de l'axe, il convient d'utiliser deux des trois rayons particuliers suivants :

- ▶ le rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié par la lentille ;
- ▶ le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique ressort en passant par le foyer image F' ;
- ▶ le rayon issu de B et passant par le foyer objet F ressort parallèlement à l'axe optique.

Ces trois rayons convergent en un même point, l'image B' de B .

Dans le cas où l'objet est un point A de l'axe, il faut considérer un objet transverse imaginaire AB , déterminer l'image B' de B et, enfin, utiliser la propriété d'aplanétisme pour affirmer que le point A' est l'intersection de l'axe optique avec le plan frontal passant par B' .

IV.3.3. Construction d'un rayon émergent connaissant le rayon incident

Il s'agit de construire le rayon émergent pour un rayon incident donné (bien évidemment quelconque). Un rayon étant déterminé par deux points, le rayon émergent est défini à partir des images de deux points particuliers appartenant au rayon incident. L'un de ces points sera le point où le rayon incident frappe la lentille et qui est son propre conjugué ; l'autre point sera soit le point à l'infini dont l'image est dans le plan focal image, soit le point appartenant au plan focal objet dont l'image est à l'infini.

Ce principe de construction est illustré sur la figure 3.24. Le rayon incident proposé est en noir, le rayon émergent correspondant est en noir aussi sur la figure, les traits de construction nécessaires pour déterminer les images des points particuliers sont en gris clair et gris foncé. En gris clair sont représentés deux rayons particuliers issus d'une source fictive à l'intersection du rayon incident avec le plan focal objet ; en gris foncé sont représentés deux rayons particuliers issus d'une source fictive à l'infini dans la direction du rayon incident et dont l'image est dans le plan focal objet. Le rayon cherché passe par le point d'incidence sur la lentille (ce point n'est pas mis en valeur, cela signifie juste que le rayon est continu) ainsi que par l'image de la source à l'infini. Il est de plus parallèle aux rayons émergents issus de la source fictive dans le plan focal objet.

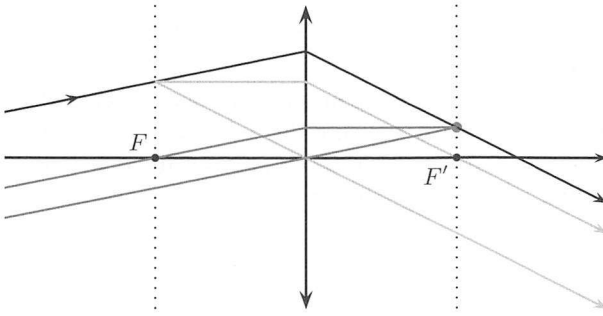


FIG. 3.24. Construction d'un émergent à partir d'un incident quelconque. Le rayon émergent associé au rayon incident (en noir) passe par le point du plan focal image (en gris foncé) et est parallèle aux rayons émergents en gris clair.

Méthode

Construction d'un rayon émergent

Le rayon émergent d'un rayon incident quelconque passe par deux points particuliers :

- ▶ le point d'incidence sur le miroir ;
- ▶ au choix :
 - ◇ l'image, dans le plan focal image, de l'objet à l'infini dans le prolongement du rayon incident ;
 - ◇ l'image, à l'infini, du point d'intersection du rayon incident avec le plan focal objet.

IV.4. Correspondance objet-image

IV.4.1. Correspondance objet-image pour une lentille convergente

La figure 3.22 présente le cas d'un objet réel, situé avant le foyer objet F qui donne une image réelle. Deux autres cas peuvent se présenter : le cas d'un objet réel, situé entre F et O , qui donne une image virtuelle (voir figure 3.25) et le cas d'un objet virtuel, situé après O , qui donne une image réelle (voir figure 3.26). Les cas particuliers d'un objet ou d'une image à l'infini sont développés dans l'exercice corrigé 3.27.

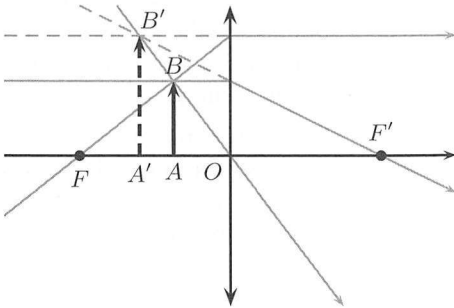


FIG. 3.25. Construction de l'image virtuelle d'un objet réel. L'objet est alors situé entre le foyer objet et le centre de la lentille convergente.

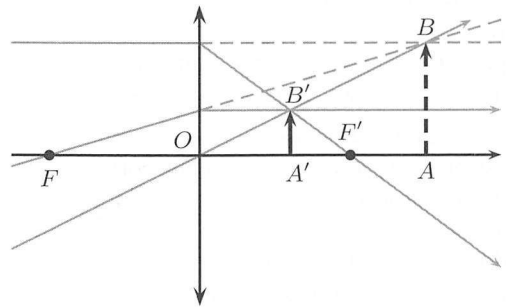


FIG. 3.26. Construction de l'image réelle d'un objet virtuel. L'image est alors nécessairement entre le centre de la lentille et son foyer image.

EXERCICE CORRIGÉ 3.28.

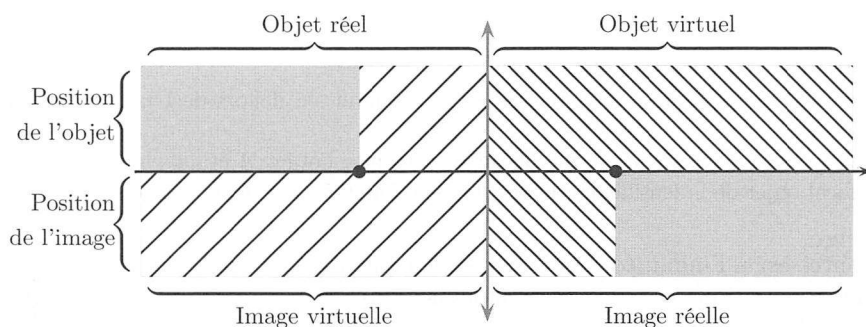
En utilisant le principe de retour inverse de la lumière, expliquer pourquoi la figure 3.26 montre qu'un objet réel situé entre F et O peut donner une image virtuelle placée avant F .

Corrigé

Il faut imaginer la figure symétrique par rapport au plan de la lentille, échanger F et F' , et retourner le sens des rayons. Le segment $A'B'$ devient l'objet et AB l'image. Cette image est effectivement située avant F .

Synthèse**Correspondance pour une lentille convergente**

Les correspondances entre position de l'image et position de l'objet sont résumées sur la figure suivante. Les foyers objet et image sont représentés par un point, respectivement à gauche et à droite de la lentille. La partie supérieure correspond à la position de l'objet par rapport à la lentille (distance à la lentille uniquement, cette figure ne comporte pas d'information sur la distance de l'objet à l'axe optique), l'objet est réel s'il est à gauche de la lentille, virtuel sinon ; la partie inférieure correspond à la position de l'image correspondante. Pour un objet se situant dans une certaine zone définie par un remplissage particulier (hachures, par exemple), l'image se trouvera dans la zone correspondant au même type de remplissage. Cette représentation « au-dessus » pour l'objet ou « en dessous » pour l'image ne présume en rien de la disposition transverse de l'image (droite ou renversée), ni bien sûr de son grandissement. Afin d'éviter toute confusion, le plus simple est de considérer que l'objet et l'image sont sur l'axe optique.



En retenant cette figure synthétique et en se souvenant que le rayon passant par le centre de la lentille n'est pas dévié, il est possible de retrouver immédiatement si l'image est droite ou renversée. Si l'image est du même côté de la lentille que l'objet, elle est droite ; elle est renversée sinon.

Remarque La formule de Newton, $\overline{FA} \times \overline{F'A'} = ff' = -f'^2$, montre que \overline{FA} et $\overline{F'A'}$ sont de signes contraires. De plus, $|\overline{F'A'}| = f'^2/|\overline{FA}|$; ainsi, $|\overline{F'A'}| > |f'|$ si $|\overline{FA}| < |f'|$ et $|\overline{F'A'}| < |f'|$ si $|\overline{FA}| > |f'|$.

IV.4.2. Correspondance objet-image pour une lentille divergente

La figure 3.23 présente le cas d'un objet réel, donnant systématiquement une image virtuelle. Deux autres cas peuvent se présenter : le cas d'un objet virtuel, situé entre O et F , qui donne une image réelle (voir figure 3.27) et le cas d'un objet virtuel, situé après F , donnant une image virtuelle (voir figure 3.28). Les cas particuliers d'un objet ou d'une image à l'infini sont développés dans l'exercice corrigé 3.29.

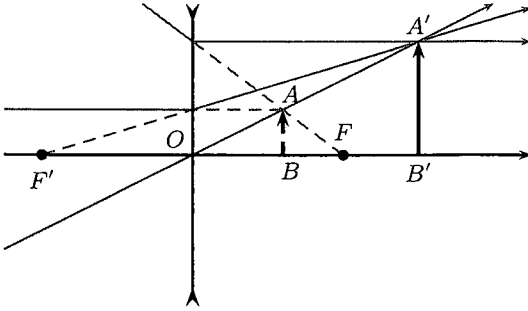


FIG. 3.27. Construction de l'image réelle d'un objet virtuel. Celui-ci est placé entre le centre de la lentille et son foyer objet.

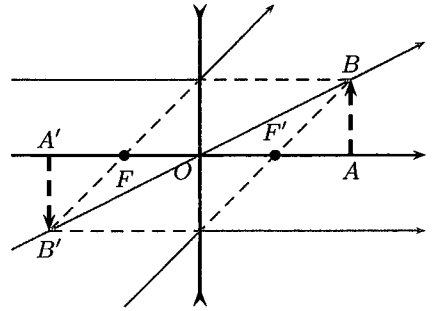


FIG. 3.28. Construction de l'image virtuelle d'un objet virtuel. Celui-ci est placé après le foyer objet.

EXERCICE CORRIGÉ 3.29.

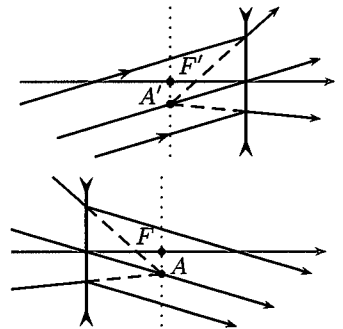
Construire l'image d'un objet ponctuel situé à l'infini, en dehors de l'axe, par une lentille divergente.

Tracer les rayons émergents d'une lentille divergente, l'objet A étant virtuel, situé dans le plan focal objet de la lentille, en dehors de l'axe (A et F sont donc distincts).

Corrigé

La source est à l'infini, tous les rayons incidents ont la même direction. Dans ce cas particulier, un seul rayon suffit pour obtenir l'image : celui qui passe par le centre de la lentille et qui n'est pas dévié ; on sait en effet que l'image est dans le plan focal image (en pointillé sur la figure) ; l'image est virtuelle.

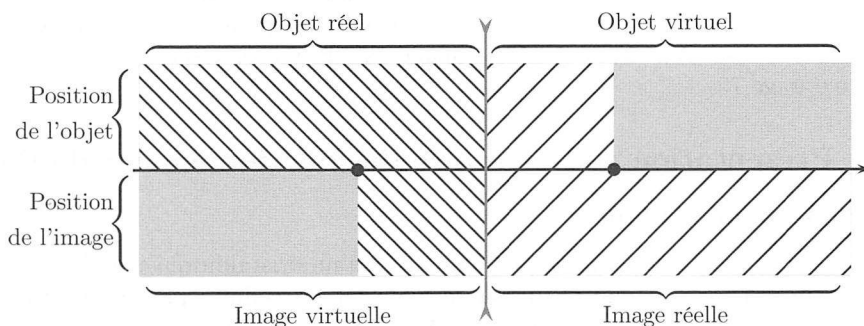
L'objet, virtuel, étant dans le plan focal objet (en pointillé sur la figure), tous les rayons émergents ont la même direction. Le rayon passant par le centre de la lentille n'est pas dévié et donne donc aisément la direction de ces rayons.



Synthèse

Correspondance pour une lentille divergente

Les correspondances sont résumées par la figure suivante. Les foyers objet et image sont représentés par un point, respectivement à droite et à gauche de la lentille. La partie supérieure correspond à la position de l'objet par rapport à la lentille : l'objet est réel s'il est à gauche, virtuel sinon ; la partie inférieure correspond à la position de l'image correspondante. Pour un objet se situant dans une certaine zone définie par un remplissage particulier (hachures, par exemple), l'image se trouvera dans la zone correspondant au même type de remplissage. Cette représentation « au-dessus » pour l'objet ou « en dessous » pour l'image ne présume en rien de la disposition transverse de l'image (droite ou renversée).



L'image est droite si elle est du même côté de la lentille que l'objet ; elle est renversée sinon.

IV.4.3. Projection d'un objet réel sur un écran

En travaux pratiques, il est souvent nécessaire de projeter un objet réel sur un écran. Il faut pour cela être capable de choisir la vergence de la lentille de projection. Inversement, si l'on dispose d'une lentille de distance focale f' , où placer l'écran (grossièrement) pour pouvoir observer l'image ? Pour cela il faut connaître le théorème suivant :

Théorème 3.30.

La distance D entre un objet réel et son image réelle par une lentille convergente de distance focale f' est telle que $D \geq 4f'$.

PREUVE. Une démonstration rapide (mais incomplète) consiste à remarquer que si une valeur extrême « unique » D_{ext} de la distance entre l'objet et l'image existe, alors elle correspond à une situation symétrique par rapport à la lentille, par principe de retour inverse. Cette situation correspond à $\overline{OA'} = -\overline{OA} = D_{\text{ext}}/2$. Injecté dans la formule de Descartes, on montre $D_{\text{ext}} = 4f'$. Cet extremum est un minimum, car la distance peut tendre vers l'infini (lorsque l'objet est au foyer, par exemple).

Rigoureusement, en notant $x' = \overline{OA'}$ et $x = \overline{OA}$, $x' = \frac{xf'}{x+f'}$. Notons que l'image est réelle si $x' > 0$, soit $x + f' < 0$ car $x < 0$; ainsi $x < -f'$, l'objet est avant le foyer

objet de la lentille. La distance entre l'objet et l'image est $d = x' - x$, ce qui s'écrit

$$d(x) = \frac{xf'}{x+f'} - x = -\frac{x^2}{x+f'}$$

où l'on a considéré que la distance d est une fonction de x puisque c'est la position de l'objet que l'on contrôle. La distance d est minimale lorsque la dérivée de d s'annule, soit $x = 0$ ou $x = -2f'$. Le premier cas est purement théorique et ne présente donc pas d'intérêt (il est impossible à réaliser en pratique); reste donc $x = -2f'$, ce qui correspond à une distance minimale objet-image égale à $4f'$. ■

La situation correspondant à la distance minimale entre l'objet et l'image est appelée montage de Silbermann (ce montage est utilisé pour déterminer la distance focale de la lentille) ou montage « $4f'$ ». L'objet est alors au point antiprincipal objet; le grandissement linéaire est $\gamma = -1$, l'image est de même taille et renversée (voir exercice 6 page 75).

IV.5. Présentation rudimentaire du fonctionnement de l'œil

IV.5.1. Accommodation

L'œil est, pour ce qui nous intéresse⁷, constitué d'un cristallin qui joue le rôle d'une lentille convergente et d'une rétine où se trouvent les cellules photoréceptrices. Un objet ne paraît net que lorsque son image à travers le cristallin se forme sur la rétine. Ce cristallin a la faculté de se déformer, ce qui permet à la distance focale de varier; l'œil peut ainsi voir nettement des objets placés à différentes distances de lui.

Un œil « normal », qualifié d'*emmétrope*, observe nettement sans accommoder (c'est-à-dire sans que les muscles n'aient à agir sur le cristallin pour le déformer, l'observation se fait alors sans fatigue) à l'infini. Cette distance d'observation sans fatigue est appelée *punctum remotum*. En accommodant progressivement, l'œil est capable de voir nettement des objets de plus en plus proches, jusqu'à une distance minimale appelée *punctum proximum*; cette distance est de l'ordre de 25 cm pour un œil emmétrope (voir figure 3.29).

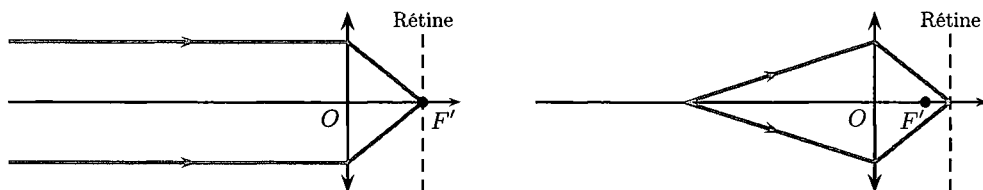


FIG. 3.29. *Punctum remotum* et *punctum proximum* d'un œil emmétrope. À gauche, l'œil n'accommode pas, la rétine est dans le plan focal image de la lentille, le *punctum remotum* est à l'infini. À droite, les muscles courbent le cristallin le plus possible, l'accommodation est maximale, l'œil ne pourra pas voir net un objet plus proche; ce *punctum proximum* est de l'ordre de 25 cm pour un œil emmétrope (le dessin n'est pas à l'échelle).

Un œil myope est trop convergent, il n'est pas capable de voir net à l'infini; un œil hypermétrope n'est au contraire pas assez convergent, il lui faut accommoder pour

7. Le corps vitré, milieu d'indice différent de celui de l'air, qui se trouve entre le cristallin et la rétine rend difficile l'étude théorique du fonctionnement de l'œil dans les limites du programme; seules des connaissances très sommaires sont donc exigibles.

observer nettement à l'infini et son *punctum proximum* est supérieur à celui d'un œil emmétrope (voir figure 3.30). Les lunettes de vue permettent de corriger ces défauts, en rendant l'œil myope moins convergent (à l'aide d'une lentille divergente) et l'œil hypermétrope plus convergent.

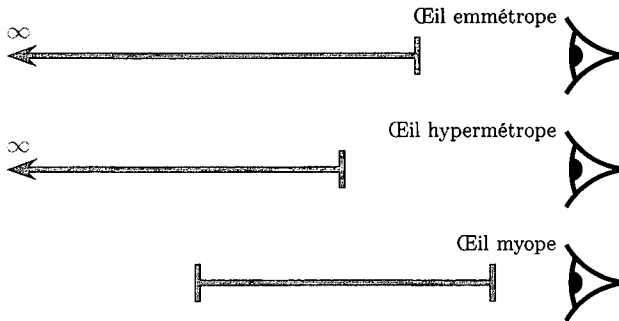


FIG. 3.30. Comparaison des plages d'accommodation. Pour un œil emmétrope, le *punctum proximum* est d'environ 25 cm.

Beaucoup d'instruments d'optique ne permettent pas à l'expérimentateur de conserver ses lunettes. L'oculaire, partie de l'instrument sur laquelle il pose son œil, permet notamment d'adapter l'appareil à la vision de chacun.

IV.5.2. Résolution angulaire

La résolution de l'œil (capacité à distinguer des détails) est limitée par deux phénomènes. Pour caractériser cette résolution, nous allons étudier la résolution angulaire (angle apparent minimum qui doit séparer deux objets pour que l'œil puisse les distinguer). L'ordre de grandeur de la résolution angulaire est d'une minute d'arc. Cela correspond à une distance de 1,5 mm entre deux objets observés à 5 m. Nous allons retrouver cet ordre de grandeur à partir des deux phénomènes limitant cette résolution.

La résolution est limitée notamment du fait de l'aspect granulaire de la rétine : chaque photorécepteur a une taille finie a (un peu plus de $5\ \mu\text{m}$) ; la profondeur de l'œil (distance entre la pupille et la rétine) étant d'environ $d = 17\ \text{mm}$, la résolution angulaire est $\alpha \simeq \tan \alpha = a/d = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{rad} = 1'$.

Par ailleurs, le diamètre fini de la pupille provoque un phénomène de diffraction qui limite lui aussi la résolution (voir chapitre 2) : pour un diamètre de la pupille d'environ $D = 5\ \text{mm}$, la formule $1,22\lambda/D$ qui donne l'angle du cône de diffraction conduit à un angle au sommet (double de l'angle du cône) une nouvelle fois d'environ une minute d'arc.

IV.6. Quelques notions sur l'appareil photographique

Un appareil photographique numérique est très schématiquement constitué d'une lentille convergente (l'objectif) qui fait l'image du sujet sur un capteur CCD (*Charge-Coupled Device*, traduit en français par dispositif à transfert de charge). Un diaphragme permet de limiter la durée d'exposition tout en limitant l'ouverture.

La focale de l'objectif est réglable, ce qui permet d'effectuer la mise au point sur le sujet (selon qu'il est proche ou éloigné, la distance focale doit être plus ou moins grande).

Afin de ne pas saturer les capteurs (et obtenir alors une photographie surexposée), il faut limiter l'exposition. Il est possible de le faire soit en réduisant l'ouverture (diaphragme plus petit), soit en limitant la durée d'exposition. Il faut cependant assurer une exposition suffisante, sinon la photographie est sombre (sous-exposée).

Pour une exposition donnée, il est possible d'augmenter ou de diminuer la durée d'exposition, à condition respectivement de diminuer ou d'augmenter le diamètre d'ouverture du diaphragme. Une durée d'exposition trop grande risque de rendre flou un sujet en mouvement, c'est pourquoi la priorité est souvent donnée à un temps de pose court (vitesse rapide de l'obturateur). Cependant, pour assurer l'exposition souhaitée, il faut alors augmenter le diamètre d'ouverture. Or, une ouverture trop grande limite la *profondeur de champ*, c'est-à-dire la zone (autour de la distance à laquelle la mise au point a été effectuée) où doit se situer un sujet pour apparaître net sur la photographie.

Si la profondeur de champ est faible (donc si l'ouverture est grande), le sujet apparaîtra net et l'arrière-plan flou ; cette situation peut être souhaitable si l'on cherche à ne mettre en évidence que le sujet. Le plus souvent cependant, on souhaite que le sujet et l'arrière-plan soient nets, il faut pour cela une faible ouverture.

Ouverture et vitesse d'obturation sont liées afin d'obtenir une exposition optimale ; ainsi une photographie réussie est un compromis trouvé entre ces deux paramètres.

V. Exercices

1. Angle de Brewster

(solution page 659)

Il existe un angle d'incidence particulier, appelé angle de Brewster, pour lequel le rayon réfracté sur un dioptre est à angle droit avec le rayon réfléchi (voir figure 3.31). Cette situation particulière trouve tout son intérêt lorsque l'on s'intéresse à la polarisation de la lumière (au programme de deuxième année).

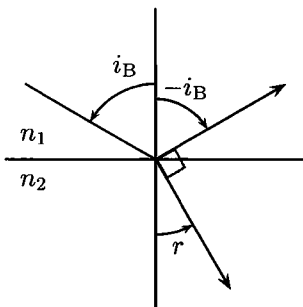


FIG. 3.31. Incidence de Brewster. Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont alors à angle droit.

Déterminer l'angle d'incidence i_B correspondant à l'incidence de Brewster en fonction des indices n_1 et n_2 .

2. Reconnaissance de gemmes ★

(solution page 660)

1. Un solide transparent, d'indice de réfraction n_1 , est plongé dans un liquide transparent, d'indice de réfraction n_2 (voir figure 3.32). Un faisceau lumineux, en incidence normale, vient éclairer le solide et, après la traversée de celui-ci, illumine un écran situé sous le solide.

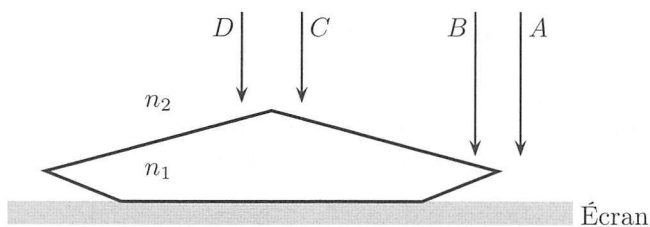


FIG. 3.32. Quatre rayons lumineux arrivant sur un solide transparent.

En reproduisant fidèlement la figure 3.32, tracer l'allure du prolongement des rayons réfractés issus de A, B, C et D, jusqu'à l'écran, dans le cas où l'indice de réfraction n_1 est supérieur à n_2 , puis dans le cas où l'indice de réfraction n_1 est inférieur à n_2 . On ne tiendra pas compte des rayons réfléchis.

En déduire les zones de plus forte et de plus faible intensité lumineuse sur l'écran.

2. Un collectionneur de gemmes possède trois petites pierres transparentes et incolores : une moissanite, un zircon et un morceau de verre à fort indice (flint), ainsi qu'un flacon d'iodure de méthylène liquide. Les propriétés physiques de ces quatre substances sont résumées dans le tableau 3.2.

Substance	Masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	Indice de réfraction
Zircon	4 690	1,95
Moissanite	3 210	2,70
Verre flint	3 740	1,64
Iodure de méthylène	3 330	1,75

TABLEAU 3.2. Propriétés physiques des gemmes et du liquide dans lequel elles sont immergées.

Les trois pierres ont été interverties, si bien que leur propriétaire doit conduire une série d'expériences pour les reconnaître.

L'immersion des trois pierres dans l'iodure de méthylène permet de reconnaître immédiatement l'une des trois pierres. Laquelle ?

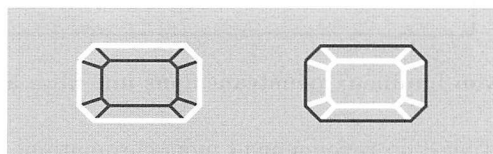


FIG. 3.33. Observation des pierres. Pierre n° 1 à gauche, contour clair, arêtes sombres. Pierre n° 2 à droite, contour sombre, arêtes claires.

3. Les deux pierres restantes sont posées sur un morceau de verre dépoli, recouvertes d'iodure de méthylène, puis éclairées depuis le haut (un miroir incliné situé sous le verre dépoli permet d'observer le verre dépoli par en dessous). La pierre n° 1 est entourée d'un contour brillant, et ses arêtes vives sont sombres. La pierre n° 2 est entourée d'un contour sombre, et les arêtes paraissent brillantes (voir figure 3.33). Identifier les pierres n° 1 et n° 2.

3. Déviation des rayons par l'atmosphère ★

(solution page 660)

On suppose que l'atmosphère terrestre est assimilable à un milieu transparent stratifié plan (la correction due à la rotondité de la Terre est faible dans le cas qui nous concerne), l'indice variant continûment d'une valeur $n_0 = 1$ dans le vide à une valeur $n = 1,0003$ à la surface du sol.

1. Expliquer pourquoi les étoiles semblent plus hautes sur l'horizon qu'elles ne le sont réellement.

2. Déterminer une relation entre la déviation D subie par un rayon traversant l'atmosphère, n , n_0 et i_0 , angle d'incidence du rayon sur l'atmosphère. Les deux indices étant très proches, la déviation est faible. En ne conservant que l'ordre un en i_0 , exprimer D en fonction de n , n_0 et i_0 . Faire l'application numérique pour $i_0 = 60^\circ$.

3. En admettant que les courtes longueurs d'onde sont plus déviées que les grandes longueurs d'onde (voir figure 3.1 page 45 pour les couleurs du spectre visible), et en s'appuyant sur les conclusions précédentes, quelle doit être la couleur du dernier rayon lumineux direct qui nous parvient lors d'un coucher de soleil ?

4. Propagation dans une fibre optique ★★

(solution page 661)

Une fibre à saut d'indice (voir figure 3.34) est formée d'un cœur cylindrique d'axe Ox et de diamètre a , homogène et isotrope, d'indice de réfraction n_C , entouré d'une gaine homogène et isotrope, d'indice de réfraction n_G , légèrement inférieur à n_C . La fibre est limitée à ses extrémités par deux plans perpendiculaires à Ox . L'indice de l'air est noté n_A ($n_A < n_C$ et n_G).

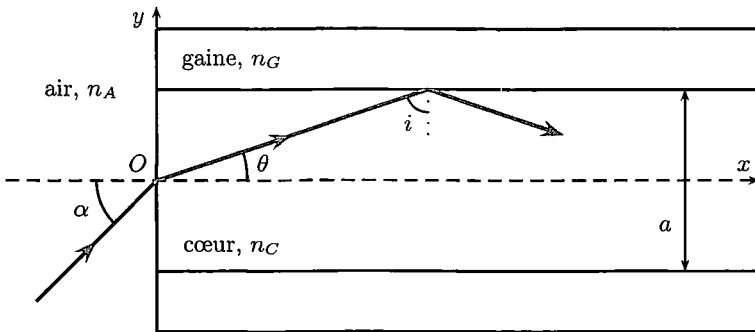


FIG. 3.34. Rayon lumineux pénétrant dans une fibre à saut d'indice.

On étudie la propagation d'un rayonnement monochromatique dans le plan xOy .

1. Énoncer les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction à la surface de séparation de deux milieux transparents, homogènes et isotropes. À quelles conditions y a-t-il réflexion totale ?

2. Quelle condition doit vérifier l'angle d'incidence i à la surface de séparation cœur/gaine pour qu'un rayon lumineux, situé dans le plan xOy , se propage en restant confiné dans le cœur ? On note i_ℓ l'angle d'incidence limite et $\theta_\ell = \pi/2 - i_\ell$. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence α sur la face d'entrée de la fibre est inférieur à une valeur limite α_ℓ . Montrer que l'ouverture numérique ($ON = n_A \sin \alpha_\ell$) est égale à $ON = \sqrt{n_C^2 - n_G^2}$.

3. Dessiner dans le plan xOy le trajet de rayons lumineux passant par O et correspondant :

- à un rayon qui se propage en restant confiné dans le cœur ;
- à un rayon qui se propage mais ne reste pas confiné dans le cœur (dans ce cas, pourquoi n'y a-t-il pas propagation à grande distance dans la fibre ?) ;
- au faisceau de rayons lumineux qui se propage sans perte d'énergie dans la fibre.

4. Calculer i_ℓ , ON et α_ℓ pour $n_C = 1,50$; $\Delta = (n_C - n_G)/n_C = 2\%$ et $n_A = 1,00$.

5. Dispersion dans une fibre optique ★ (solution page 662)

Il existe deux types de fibre optique (voir exercice 4) : les monomodes et les multimodes dans lesquels les trajets et les vitesses de transmission du signal sont respectivement uniques ou multiples. Dans cet exercice, on ne considère que les cas où l'incidence conduit à une propagation sans pertes.

1. Exprimer la vitesse de propagation de la lumière dans la fibre (voir figure 3.34) en fonction de c , la vitesse de la lumière dans le vide, et de n_C , indice de réfraction. Pourquoi utilise-t-on des sources monochromatiques ?

2. a/ Pour une fibre multimode, montrer que la durée de parcours τ de la lumière dans la fibre de longueur L dépend de l'angle d'incidence α sur la face d'entrée. Exprimer τ en fonction de n_C , n_A , L , c et α .

b/ Montrer que l'intervalle de temps $\Delta\tau$ entre les durées de parcours du mode le plus rapide (correspondant au trajet le plus court) et du mode le plus lent (correspondant au trajet le plus long) est tel que $\Delta\tau \simeq n_C L \Delta / c$, avec $\Delta = (n_C - n_G)/n_C$. Calculer $\Delta\tau$ pour $L = 1,0 \text{ km}$; $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $n_C = 1,50$ et $\Delta = 2,0\%$.

3. a/ Montrer qu'un signal lumineux, de durée T_0 , formé par un faisceau de rayons tel que $0 \leq |\alpha| \leq \alpha_\ell$ s'élargit en se propageant. Exprimer son accroissement ΔT_0 . En supposant que l'on peut tolérer un élargissement égal à la moitié de la durée T_0 d'une impulsion élémentaire, 1 bit, exprimer la longueur maximale L_{\max} d'une fibre dont le débit d'information est B , en fonction de c , n_C , Δ et B .

b/ On appelle bande passante de la fibre le produit $L_{\max} \times B$: expliquer son intérêt. Calculer la bande passante, en MHz.km, pour $n_C = 1,50$ et $\Delta = 2,0\%$.

6. Points antiprincipaux ★ (solution page 662)

Dans un montage optique utilisant une lentille, il existe deux points particuliers, que l'on notera P et P' , appelés points antiprincipaux, qui sont définis par $\overline{OP} = 2\overline{OF}$ et $\overline{OP'} = 2\overline{OF'}$. Ces points ne sont pas utilisés lors de la construction géométrique des rayons, mais la position de l'objet par rapport à ces points conditionne (dans les cas que nous allons étudier) la valeur du grandissement transversal.

1. Dans le cas d'une lentille convergente, placer F , F' , P et P' sur un schéma et vérifier graphiquement, d'une part, que si un objet AB est placé entre P et le foyer objet F , alors le grandissement transversal est tel que $\gamma < -1$ et, d'autre part, que si l'objet AB est placé avant P , alors $-1 < \gamma < 0$.

2. Dans le cas d'une lentille divergente, placer P' , F' , F et P sur un schéma et vérifier, d'une part, que si l'objet est virtuel, placé entre F et P , alors l'image est virtuelle telle que $\gamma < -1$ et, d'autre part, que si l'objet est virtuel, placé après P , alors $-1 < \gamma < 0$.

7. Loupe ★★

(solution page 663)

Dans cet exercice, on s'intéresse à un système centré, l'axe optique étant orienté positivement dans le sens de propagation de la lumière.

Un observateur emmétrope (c'est-à-dire ayant une vision normale) peut voir distinctement des objets situés à une distance comprise entre d_m et l'infini (à l'infini, l'observation se fait sans accommodation, donc sans fatigue).

1. Un observateur emmétrope regarde à l'œil nu un tout petit objet plan, que l'on assimile à un segment AB , de longueur ℓ , orthogonal à l'axe optique Ox . Déterminer l'angle maximal α_m sous lequel est vu l'objet.

2. L'observateur regarde AB à travers une lentille mince convergente, de distance focale f' et de centre O (loupe). Son œil est situé à une distance a de la loupe ($a < d_m$).

a/ Déterminer les positions de l'objet rendant possible l'observation d'une image nette. Faire une construction géométrique de l'image. L'image est-elle droite ou renversée?

b/ Pour quelle position l'observation se fait-elle sans fatigue d'accommodation? Exprimer l'angle α sous lequel est vu l'objet dans ce cas.

Application numérique : que vaut le grossissement commercial de la loupe $G = \alpha/\alpha_m$? On donne $d_m = 0,25$ m, $f' = 50$ mm.

8. Aberrations chromatiques ★★★

(solution page 663)

La vergence V d'une lentille mince est donnée par la relation algébrique

$$V = (n - 1) \left(\frac{1}{\overline{S_1C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2C_2}} \right),$$

où n est l'indice de réfraction du verre constituant la lentille; S_1 et S_2 sont respectivement les sommets de la face avant et arrière de la lentille, C_1 et C_2 les centres des dioptries la constituant. On notera R_1 et R_2 les rayons de courbure de ces dioptries (R_1 et R_2 positifs, ainsi $\overline{S_1C_1} = R_1 > 0$ et $\overline{S_2C_2} = -R_2 < 0$).

L'indice n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad A \text{ et } B \text{ étant deux constantes positives.}$$

Pour un verre de type crown, $A = 1,515$ et $B = 3,5 \cdot 10^3 \text{ nm}^2$.

On définit la constringence ν et le pouvoir dispersif K d'un verre par la relation

$$\nu = \frac{1}{K} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C},$$

où n_F , n_D et n_C sont les indices du verre pour les radiations F (bleu : $\lambda_F = 486$ nm), D (jaune : $\lambda_D = 589$ nm) et C (rouge : $\lambda_C = 656$ nm).

On notera f'_F , f'_D et f'_C les distances focales et F'_F , F'_D et F'_C les foyers images de la lentille pour les radiations F , D et C respectivement.

On considère une lentille \mathcal{L} , en verre crown, biconvexe avec les rayons de courbure $R_1 = 90$ cm et $R_2 = 150$ cm. Le diamètre de \mathcal{L} est $d = 8$ cm.

1. Calculer avec le nombre correct de chiffres significatifs les indices n_F , n_D et n_C . En déduire la constringence ν et le pouvoir dispersif K du verre crown.

2. Déterminer la distance focale moyenne f'_D de \mathcal{L} et indiquer (sans calcul) la position relative des foyers F'_F et F'_C sur l'axe optique.

3. L'aberration chromatique longitudinale d'une lentille est définie par la distance algébrique $A_L = \overline{F'_F F'_C}$ qui sépare les foyers bleu F'_F et rouge F'_C .

Exprimer A_L en fonction de la constringence ν et de la distance focale moyenne f'_D , en supposant que $f'_F f'_C \simeq f'^2_D$. Commentaire. Calculer numériquement A_L .

4. On définit l'aberration chromatique transversale A_T d'une lentille comme le rayon de la plus petite tache lumineuse produite par les faisceaux bleu et rouge, interceptée par un écran disposé normalement à l'axe optique.

Exprimer A_T pour \mathcal{L} en fonction de la constringence ν et de d , en supposant de plus que f'_D est quasiment la moyenne arithmétique de f'_F et f'_C . Commentaire. Calculer la valeur de A_T .

9. Objectif achromatique ★

(solution page 665)

Cet exercice consiste à rechercher les conditions pour limiter l'aberration chromatique, c'est-à-dire les défauts de formation des images dus à la dispersion dans un verre. Les lentilles minces sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss. La vergence V d'une lentille mince est donnée par la relation algébrique

$$V = (n - 1) \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right),$$

où n est l'indice de réfraction du verre constituant la lentille ; S_1 et S_2 sont respectivement les sommets de la face avant et arrière de la lentille, C_1 et C_2 les centres des dioptries la constituant. On notera R_1 et R_2 les rayons de courbure de ces dioptries.

On réalise un objectif achromatique mince en accolant une lentille biconvexe en verre crown, de rayons de courbure R_1 et R_2 , avec une lentille plan-concave en verre de type flint, de sorte que les faces en contact aient le même rayon de courbure R_2 .

Les indices de réfraction des deux verres sont donnés par la loi de Cauchy :

► lentille en verre crown, $n_1 = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2}$ avec $A_1 = 1,515$ et $B_1 = 3,5 \cdot 10^3 \text{ nm}^2$;

► lentille en verre flint, $n_2 = A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2}$ où A_2 et B_2 sont à déterminer.

1. Exprimer les vergences V_1 et V_2 respectivement des lentilles en verre crown et en verre flint en fonction des indices $n_1(\lambda)$, $n_2(\lambda)$ et des rayons R_1 , R_2 . En déduire la vergence $V = V_1 + V_2$ des deux lentilles accolées.

2. Déterminer l'expression de $\partial V / \partial \lambda$. Que doit valoir cette expression pour supprimer l'aberration chromatique ? En déduire une relation entre B_1 , B_2 , R_1 et R_2 , puis exprimer la vergence V en fonction de A_1 , A_2 , R_1 et R_2 .

10. Lunette de Galilée ★

(solution page 665)

Une lunette de Galilée est constituée de :

- une lentille mince convergente \mathcal{L}_1 , de distance focale $f'_1 = 60 \text{ cm}$ (l'objectif) ;
- une lentille mince divergente \mathcal{L}_2 , de distance focale $f_2 = 6,0 \text{ cm}$ (l'oculaire).

1. Comment sont placées les lentilles afin que la lunette soit réglée à l'infini ? Calculer leur distance.

2. Calculer le grossissement (rapport de l'angle émergent à l'angle incident) de la lunette. Que deviendrait ce grossissement si l'utilisateur tenait la lunette à l'envers ?
3. Le principal défaut de la lunette de Galilée est la faiblesse de son champ apparent (largeur angulaire du champ de vision tel qu'il est perçu à travers la lunette) : 5° seulement pour un champ apparent de l'ordre de 50° pour des appareils « modernes ». Est-il possible d'avoir, à travers la lunette, la tour Eiffel dans son champ de vision depuis Montmartre (hauteur visible de la tour Eiffel : 300 m, distance à Montmartre : environ 5 km). Serait-ce possible avec un instrument « moderne » de même grossissement ? Peut-on voir la Lune (largeur angulaire de $32'$ d'arc à l'œil nu) en entier à travers la lunette de Galilée ?
4. Tracer sur une figure le chemin suivi par un faisceau lumineux parallèle, arrivant sur l'objectif en faisant un angle α avec l'axe optique. Expliquer pourquoi, quand l'angle α augmente, les rayons finiront par ne plus pouvoir rentrer dans la pupille d'un utilisateur regardant dans l'axe de la lunette (cela explique le champ de vision limité pour un appareil de ce type).
5. Afin d'augmenter le champ de vision, Kepler a remplacé la lentille divergente par une lentille convergente de même distance focale en valeur absolue ; elle permet en effet de faire converger les rayons dans la pupille de l'utilisateur. Quelle est la nouvelle distance entre les lentilles ? Tracer de nouveau le chemin suivi par le faisceau lumineux. Où placer l'œil pour avoir un champ de vision maximal ? Quel est l'inconvénient rédhibitoire d'un tel système pour une observation terrestre ?

11. Observation de deux étoiles ★

(solution page 666)

Cet exercice traite de l'observation de deux étoiles E_a et E_b à l'aide d'une lunette astronomique munie d'un détecteur. Les deux étoiles E_a et E_b sont considérées ponctuelles et à l'infini, séparées par une distance angulaire θ , l'étoile E_a étant située dans la direction de l'axe optique de la lunette.

On considère une lunette astronomique d'axe optique $z'z$ (voir figure 3.35), constituée d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente \mathcal{L}_1 de diamètre $D_1 = 50$ cm et de distance focale image $f'_1 = 7,5$ m, associé à une lentille divergente \mathcal{L}_2 de distance focale image $f'_2 = -0,025$ m. On désigne respectivement par O_1 et O_2 , F_1 et F'_1 , F_2 et F'_2 , les centres optiques, les foyers objet et image des lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 .

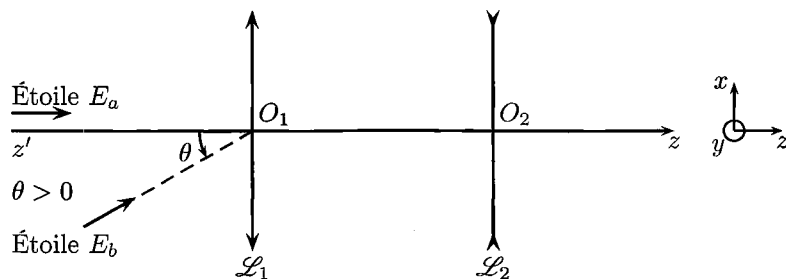


FIG. 3.35. Observation de deux étoiles à l'aide d'une lunette astronomique.

1. Quelles sont la forme et la direction des faisceaux lumineux des ondes 1 et 2, respectivement émises par les étoiles E_a et E_b , lorsqu'elles parviennent sur la lunette ?
2. On appelle A_1 l'image de l'étoile E_a à travers la lentille \mathcal{L}_1 . De même, B_1 désigne l'image de E_b à travers \mathcal{L}_1 .

a/ Dans quel plan se situent A_1 et B_1 ? Donner la distance algébrique $\overline{A_1B_1}$.

b/ La lentille \mathcal{L}_2 est placée peu avant le plan où se forment les images A_1 et B_1 . On appelle respectivement A_2 et B_2 les images de E_a et E_b à travers la lunette. Sachant que $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = 2$, exprimer et calculer la distance $\overline{O_2A_1}$.

3. On définit la distance focale f' de la lunette par la relation $\overline{A_2B_2} = f' \times \theta$.

a/ Calculer la distance focale f' de la lunette.

b/ Exprimer $\overline{A_1A_2}$. Comment évolue l'encombrement de la lunette par rapport au cas où seule la lentille \mathcal{L}_1 existe? Quel est l'intérêt de la lentille \mathcal{L}_2 ?

4. On place dans le plan où se forment les images A_2 et B_2 une caméra à DTC (dispositif à transfert de charge). Ce récepteur d'images est composé d'une matrice rectangulaire de 768×512 détecteurs élémentaires, appelés pixels, de forme carrée, de côtés $a_i = 9 \mu\text{m}$. On suppose que la lunette est librement orientable.

Une image parfaite à travers la lunette d'un point situé à l'infini produit sur le détecteur un signal donnant une image dont la dimension ne peut être inférieure à la taille d'un pixel. Exprimer et calculer en seconde d'arc la limite de perception angulaire θ_{\min} due au récepteur d'image. Quelle est la plus grande valeur décelable θ_{\max} en minute d'arc?

12. Principe d'un viseur ★★

(solution page 667)

Dans cet exercice, où l'on s'intéresse à un système centré, l'axe optique est orienté positivement dans le sens de propagation de la lumière.

Un observateur emmétrope (c'est-à-dire ayant une vision normale) peut voir de l'infini (distance où l'observation se fait sans accommodation, donc sans fatigue) jusqu'à une distance minimale d_m .

Un viseur est constitué d'un objectif et d'un oculaire de même axe optique (Ox). On assimilera l'objectif à une lentille mince convergente \mathcal{L}_1 , de centre O_1 et de distance focale f'_1 , et l'oculaire à une lentille mince convergente \mathcal{L}_2 , de centre O_2 et de distance focale f'_2 . On pose $\overline{O_1O_2} = D$ et $\overline{OO_2} = d$ (les distances D et d sont positives et réglables).

Dans un plan orthogonal à l'axe Ox est disposé en O un réticule constitué de deux traits fins perpendiculaires, gravés dans une lame de verre à faces parallèles et servant à repérer la position de O .

L'observateur place son œil à une distance a derrière l'oculaire ($a < d_m$).

1. Quel est l'intervalle des valeurs de d permettant à l'observateur de voir net le réticule? En déduire une méthode de réglage de la position de l'oculaire pour une observation sans fatigue.

2. Le réglage précédent est supposé réalisé. On souhaite observer un objet A situé sur l'axe optique à l'abscisse $x = \overline{OA}$; l'observation de l'objet et du réticule doit se faire dans un même plan.

Préciser l'intervalle dans lequel x peut varier.

En déduire la plage de réglage de la distance D que le constructeur doit prévoir. Déterminer l'expression de D en fonction de x .

3. a/ Un observateur myope souhaite utiliser le viseur sans ses verres correcteurs pour observer un objet A situé à l'infini, dans les conditions définies précédemment. Sachant que sa distance maximale de vision distincte est δ , calculer les valeurs des réglages qu'il doit effectuer.

b/ En supposant que tous les utilisateurs du viseur, qu'ils soient myopes ou hypermétropes, ont des verres correcteurs de vergence comprise entre -8 et $+8$ dioptries, déterminer la plage de réglage de l'oculaire à prévoir pour que le viseur soit utilisable par tous sans verres correcteurs. On prendra $a \simeq 0$ et $f'_2 = 2$ cm.

13. Modélisation d'un microscope ★

(solution page 668)

Un microscope est schématisé par deux lentilles minces convergentes de même axe optique :

- ▶ \mathcal{L}_1 (objectif) de centre O_1 et de distance focale image $f'_1 = 5$ mm ;
- ▶ \mathcal{L}_2 (oculaire) de centre O_2 et de distance focale image $f'_2 = 25$ mm.

On note F'_1 et F_2 respectivement les foyers image de \mathcal{L}_1 et objet de \mathcal{L}_2 . On donne l'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = 25$ cm (axe optique orienté de O_1 vers O_2). L'œil placé au foyer image de l'oculaire étudie un petit objet AB disposé dans un plan de front (AB perpendiculaire à l'axe optique, A situé sur l'axe optique).

1. Où doit être situé A pour que l'œil n'ait pas à accommoder ? Répondre en donnant l'expression littérale et la valeur numérique de $\overline{F'_1 A}$. On précise que sans accommoder (c'est-à-dire sans fatigue), l'œil « normal » vise à l'infini.
2. On se place dans les conditions de la question précédente. Sur une figure où on tiendra seulement compte de la relation d'ordre $f'_1 < f'_2 < \Delta$, représenter la marche d'un faisceau lumineux issu de B .
3. Soit α' , l'angle algébrique sous lequel l'œil voit l'image définitive de AB à travers le microscope, et α , l'angle algébrique sous lequel il apercevrait l'objet sans se déplacer en l'absence de microscope. Calculer le grossissement $G = \alpha'/\alpha$ (littéralement puis numériquement). Interpréter le signe de ce rapport.
4. En accommodant, l'œil peut observer nettement un objet situé entre 25 cm et l'infini. De combien peut-on modifier la distance entre l'objectif et l'objet si l'on veut toujours pouvoir observer nettement l'objet AB à travers le microscope (latitude de mise au point) ? Commenter.

14. Focométrie d'une lentille convergente ★

(solution page 669)

Cet exercice concerne la mesure, par différentes méthodes, de la distance focale f'_1 d'une lentille mince convergente \mathcal{L}_1 , de centre O_1 , utilisée dans le cadre de l'approximation de Gauss. L'axe ($x'x$) d'un banc d'optique est orienté dans le sens de parcours de la lumière. On notera A et A' les points sur l'axe optique d'un objet lumineux transverse AB et de son image $A'B'$ par l'instrument. On exprimera f'_1 et $\Delta f'_1$ à 0,1 cm près.

1. Méthode d'autocollimation

a/ Décrire la méthode expérimentale dite « d'autocollimation » qui permet de mesurer la distance focale d'une lentille convergente.

b/ Quand l'image $A'B'$ de l'objet AB est obtenue par cette méthode, la distance mesurée objet-lentille est de 20,2 cm. Les incertitudes absolues de lecture sur l'axe et de mise au point de l'image étant au total évaluées à 0,5 cm, exprimer la distance focale f'_1 de \mathcal{L}_1 et son incertitude absolue $\Delta f'_1$.

2. Formule de conjugaison de Descartes

L'objet réel AB , placé à 35 cm de la lentille \mathcal{L}_1 , donne une image nette $A'B'$ de cet objet sur un écran (E) situé à 46,5 cm de la lentille.

a/ Déterminer la distance focale f'_1 de cette lentille.

b/ Sachant que les incertitudes absolues sur les distances objet-lentille (incertitude de lecture) et lentille-écran (incertitudes de lecture et de netteté de l'image) sont respectivement évaluées à 0,4 cm et 0,8 cm, calculer l'incertitude absolue $\Delta f'_1$.

3. Méthode de Bessel

Un objet AB et un écran (E) sont fixes et distants de D . Entre l'objet et l'écran, on déplace la lentille \mathcal{L}_1 pour obtenir sur (E) une image nette $A'B'$.

a/ On pose $p = \overline{O_1A}$. Montrer que si $D > D_{\min}$, valeur minimale que l'on exprimera en fonction de f'_1 , alors il existe deux positions distinctes p_1 et p_2 (avec $|p_1| < |p_2|$) de \mathcal{L}_1 pour lesquelles une image nette se forme sur l'écran. Donner les expressions de p_1 et p_2 en fonction de D et f'_1 .

b/ Si d représente la distance entre les deux positions de la lentille \mathcal{L}_1 quand $D > D_{\min}$, montrer que la distance focale f'_1 de \mathcal{L}_1 s'exprime en fonction de D et d .

c/ Déterminer l'incertitude absolue $\Delta f'_1$ de l'expression f'_1 sachant que les incertitudes absolues de D et d sont respectivement notées ΔD et Δd .

d/ Calculer la distance focale f'_1 de \mathcal{L}_1 et son incertitude absolue $\Delta f'_1$ sachant que $D = (90 \pm 1)$ cm et $d = (30 \pm 1)$ cm.

4. Méthode de Silbermann

L'objet AB étant fixe, sa position sera prise comme origine de l'axe optique. On cherche les positions de la lentille \mathcal{L}_1 et de l'écran (E) telles que le grandissement transversal $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB} = -1$. La distance objet-écran est alors $D_0 \pm \Delta D_0$.

a/ Utiliser la relation de conjugaison de Descartes et l'expression du grandissement pour obtenir f'_1 en fonction de D_0 .

b/ On mesure $D_0 = 80,4$ cm avec une incertitude absolue de 0,5 cm comprenant la lecture et la mise au point de l'image pour ce grandissement. En déduire la distance focale f'_1 de \mathcal{L}_1 et son incertitude absolue $\Delta f'_1$.

c/ La méthode de Silbermann peut-elle se déduire de la méthode de Bessel? Justifier la réponse.

5. Comparaison des méthodes

Parmi ces quatre méthodes, quelles sont celle qui semble la plus rapide à mettre en œuvre pour obtenir l'ordre de grandeur de f'_1 et celle qui permet la meilleure précision?

15. Focométrie d'une lentille divergente ★

(solution page 670)

Cet exercice concerne la mesure, par différentes méthodes, de la distance focale f'_2 d'une lentille mince divergente \mathcal{L}_2 de centre O_2 . Les notations sont celles de l'exercice 14; les lentilles minces sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss. On exprimera f'_2 à 0,1 cm près.

1. Théorème des vergences (formule des opticiens)

Pour déterminer la distance focale d'une lentille mince divergente \mathcal{L}_2 , on accole celle-ci à une lentille mince convergente \mathcal{L}_0 , de vergence $V_0 = 8 \text{ m}^{-1}$, et on utilise ce système mince $[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2]$ pour obtenir, d'un objet réel AB , une image réelle $A'B'$, renversée, de même dimension que l'objet. La distance objet-image mesurée est égale à 1 m.

a/ Déterminer la vergence V du système de lentilles accolées.

b/ En déduire la vergence V_2 et la distance focale f'_2 de la lentille \mathcal{L}_2 sachant que, pour l'association $[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2]$, nous avons $V = V_0 + V_2$.

c/ Les centres optiques des lentilles dites « accolées » sont en fait distants de $e = 0,5$ cm. Évaluer à nouveau V_2 et f'_2 à partir de la formule de Gullstrand qui prend en compte la distance entre les centres optiques, $V = V_0 + V_2 - eV_0V_2$.

2. Viseur à frontale fixe

Un viseur à frontale fixe est utilisé pour déterminer la distance focale f'_2 de la lentille \mathcal{L}_2 . On vise d'abord l'objet AB , on insère \mathcal{L}_2 entre l'objet et le viseur à une distance x de AB et, enfin, on doit reculer d'une distance D pour viser l'image $A'B'$.

a/ À partir de la relation de conjugaison de Descartes, montrer que la distance focale f'_2 s'exprime en fonction des distances x et D .

b/ Sachant que $x = 30$ cm et $D = 16,5$ cm, calculer f'_2 .

3. Méthode de Badal

La méthode de Badal se déroule en deux étapes :

► 1^{re} étape : une lentille convergente \mathcal{L} donne d'un objet ponctuel A , situé au foyer objet F de cette lentille, une image rejetée à l'infini. Une seconde lentille convergente \mathcal{L}_0 , de distance focale connue f'_0 , est disposée à la suite de \mathcal{L} à une distance supérieure à f'_0 . L'image finale ponctuelle A' se trouve sur un écran (E) situé au foyer image F'_0 de \mathcal{L}_0 ;

► 2^e étape : la lentille divergente \mathcal{L}_2 , de distance focale f'_2 inconnue, est positionnée dans le plan focal objet de \mathcal{L}_0 . Pour obtenir la nouvelle image nette A' , il faut éloigner (E) de \mathcal{L}_0 , d'une distance D .

a/ En appliquant la relation de conjugaison de Newton à la lentille \mathcal{L}_0 , déterminer la relation donnant l'expression de la distance focale f'_2 en fonction des distances f'_0 et D .

b/ Pour les distances $f'_0 = 12,5$ cm et $D = 6,5$ cm, calculer f'_2 .

Chapitre 4

INTRODUCTION AU MONDE QUANTIQUE

CE CHAPITRE est une courte initiation à la physique quantique dont la « pré-histoire » remonte à un peu plus d'un siècle. Les articles de Planck, publiés en 1900, ont inauguré l'ère quantique par sa théorie du rayonnement du corps noir. Dès 1905, ils sont suivis par l'explication quantique, donnée par Einstein, de l'effet photoélectrique et par le modèle atomique de Bohr en 1913. Après cette gestation, ce sont dans les années 1920 et 1930 qu'apparaîtra une théorie quantique cohérente et féconde.

Durant cette époque glorieuse, les conseils Solvay furent des conférences scientifiques de physique et de chimie qui alimentèrent le débat. Au début du XX^e siècle, ces conférences, réunissant les plus grands scientifiques de l'époque, permirent des avancées importantes en mécanique quantique. Elles furent organisées grâce au mécénat d'Ernest Solvay, un chimiste et industriel belge¹.

D'objets d'étude, les phénomènes quantiques se sont transformés en moyen d'investigation de la matière : microscopes à effet tunnel, électroaimants à supraconducteurs des grands accélérateurs de particules, etc. Enfin, la physique quantique est désormais sortie des laboratoires de recherche pour pénétrer dans les industries technologiques de pointe et par là même dans notre vie quotidienne ; elle est à la base de la lecture des CD par les faisceaux laser, des composants miniaturisés tel le transistor, elle permettra le développement des nanomachines et de la cryptographie quantique qui sécurisera nos télécommunications. On trouve beaucoup d'autres exemples en chimie, biologie et médecine. De manière générale, la physique quantique intervient chaque fois que l'on désire formaliser les phénomènes à l'échelle atomique ou subatomique.

Une photo des participants au conseil Solvay de 1927, consacré à la mécanique quantique, fait l'objet de la figure 4.1. Quiconque possédant un minimum de culture générale en physique reconnaîtra les noms de ces participants dans divers effets, phénomènes ou théories éponymes. Cette période peut être considérée comme un âge d'or de la physique.

I. Physique classique et physique quantique

Avant d'introduire la *physique quantique*, donnons un bref aperçu des fondements de la physique classique que l'on peut considérer comme comportant trois branches principales avec de nombreuses ramifications.

► La *mécanique classique* constitue la première branche avec son principe fondamental, ou loi de Newton : la force exercée sur une particule est la dérivée par rapport au temps de son impulsion.

1. Depuis la Seconde Guerre mondiale, les « conseils Solvay » sont organisés selon un cycle de trois ans : un conseil de physique la première année, aucune conférence la deuxième et un conseil de chimie la troisième. Ce cycle a cependant été parfois perturbé. En 2011, le titre de la conférence était encore « The Theory of the Quantum World ».

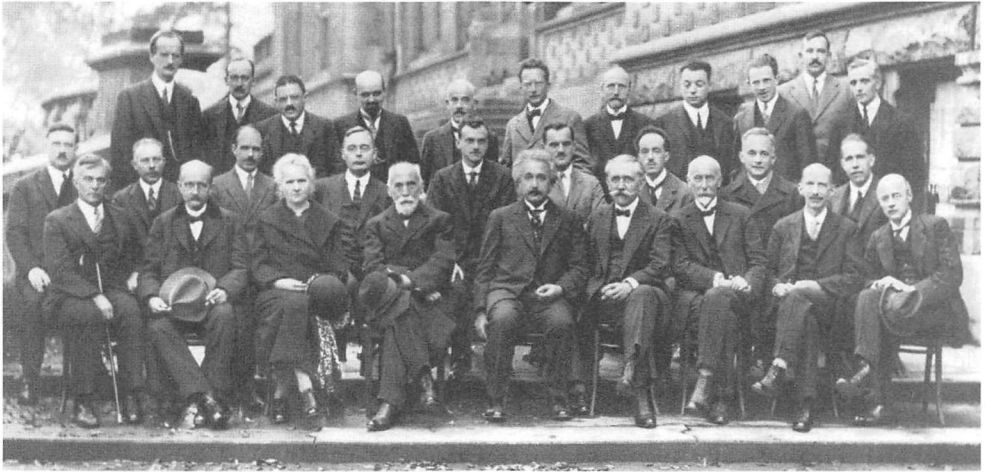
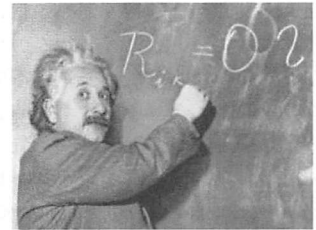


FIG. 4.1. Participants au conseil Solvay de 1927 sur la mécanique quantique. De l'arrière vers l'avant et de gauche à droite : A. Piccard, E. Henriot, P. Ehrenfest, E. Herzen, T. de Donder, E. Schrödinger, J.-E. Verschaffelt, W. Pauli, W. Heisenberg, R. H. Fowler, L. Brillouin, P. Debye, M. Knudsen, W. L. Bragg, H. A. Kramers, P. Dirac, A. Compton, L. de Broglie, M. Born, N. Bohr, I. Langmuir, M. Planck, M. Curie, H. A. Lorentz, A. Einstein, P. Langevin, C. E. Guye, C. Thomson Rees Wilson, O. W. Richardson.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La plupart des théorèmes de la mécanique se déduisent de ce principe définissant la force : en considérant son produit scalaire avec le vecteur position, on obtient les théorèmes mettant en jeu le travail, l'énergie ou la puissance ; en considérant son produit vectoriel avec ce même vecteur position, on retrouve les lois du moment cinétique. Notons que le principe fondamental de la dynamique demeure sous la même forme dans la théorie qui viendra étendre la mécanique classique au domaine des vitesses proches de celles de la lumière : la relativité restreinte, introduite par Albert Einstein en 1905. Seules les définitions du temps, de la force et de l'impulsion seront modifiées !



Albert Einstein

► La deuxième branche est l'*électromagnétisme* qui donne le moyen de déterminer le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} en fonction des sources de ce champ qui sont des charges et des courants électriques. Un lien entre ces deux branches est fourni par la *force de Lorentz* donnant l'expression de la force qui résulte de l'action de ces champs sur une particule chargée.

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

► La troisième branche se trouve dans la continuité du second principe de la *thermodynamique*².

2. Le premier principe invoque la conservation de l'énergie, il est donc lié à la première branche.

Il est impossible de réaliser un cycle monotherme, c'est-à-dire soumis à une seule source de chaleur, capable de fournir du travail.

La notion d'*entropie* est issue de ce principe dont découle toute la thermodynamique classique, qu'il conviendrait mieux d'appeler « thermodynamique macroscopique ».

En toute rigueur il faudrait faire intervenir une quatrième branche, car la théorie relativiste de la gravitation³ n'est pas incluse dans les descriptions précédentes. Cette théorie est la *relativité générale*, qui donne une description géométrique des interactions gravitationnelles.

Vers la fin du XIX^e siècle, les scientifiques étaient persuadés qu'une approche combinant théorie et expérience permettrait d'expliquer les phénomènes naturels, de l'échelle macroscopique de l'Univers jusqu'à celle microscopique des atomes. Cette apparente harmonie fut rompue au début du XX^e siècle par de nouvelles expériences dont les résultats ne pouvaient s'expliquer, même de façon qualitative, par les concepts classiques.

Deux expériences clés furent à la base de cette rupture : la radiation du corps noir et l'effet photoélectrique. Elles furent suivies de nombreuses autres et dénoncèrent l'insuffisance du raisonnement newtonien. Alors que la physique se veut une théorie de la matière, on constate que la physique classique ne permet pas d'expliquer le comportement de cette matière à partir de ses éléments constitutifs et des forces qui les lient. L'exemple des atomes est à ce titre éloquent : on ne peut, d'une part, construire l'échelle de longueur d'un atome à l'aide des constantes de la physique classique⁴ ; et d'autre part, cette physique prévoit que ces constituants élémentaires sont instables.

La physique classique ne permet pas non plus d'expliquer pourquoi le Soleil brille, ne peut donner aucune explication sur les propriétés chimiques des éléments, sur la différence entre un conducteur comme le cuivre et un isolant comme le soufre... La physique classique ne peut caractériser ces propriétés que par voie expérimentale et il a fallu attendre la mécanique quantique pour qu'une compréhension fine (au niveau microscopique) des phénomènes puisse émerger d'une approche théorique cohérente. Nous allons montrer comment la communauté scientifique a été surprise face à plusieurs résultats expérimentaux. Une grande partie des concepts fondamentaux que l'on croyait acquis comme une valeur sûre en physique se dissout face à l'évidente impossibilité de son utilisation pour la description du monde à l'échelle atomique. Le bouleversement intellectuel généré par ces constats expérimentaux a forcé les scientifiques à « penser autrement ». Le résultat fut la conception de l'une des plus belles avancées de l'esprit humain : la physique quantique. Sa prise en compte se révéla être une véritable révolution ; elle eut des conséquences philosophiques sans précédent au niveau du regard des hommes sur la nature, l'art et de nombreuses disciplines.

3. Théorie développée par Albert Einstein (1879-1955), physicien théoricien qui fut successivement allemand, puis apatride (1896), suisse (1901), et enfin de double nationalité helvético-américaine (1940). Il publie sa théorie de la relativité restreinte en 1905, et une théorie de la gravitation dite relativité générale en 1915. Il contribue largement au développement de la mécanique quantique et de la cosmologie, et reçoit le prix Nobel de physique 1921 pour son explication de l'effet photoélectrique.

4. En ajoutant la vitesse de la lumière, on peut construire cette échelle, appelée rayon classique de l'électron, $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e c^2} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

II. L'effet photoélectrique

En 1886, le physicien allemand Heinrich Rudolf Hertz⁵ montra expérimentalement qu'un matériau métallique exposé à la lumière peut émettre des électrons : c'est l'*effet photoélectrique*. Malheureusement, Hertz ne fut pas en mesure d'expliquer théoriquement le phénomène, car certaines caractéristiques de cet effet restent incompatibles avec la théorie classique de l'électromagnétisme. C'est Einstein qui, le premier, en donna une explication en 1905. On trouve des applications de cet effet dans de très nombreux systèmes : dispositifs de sécurité, caméras vidéo, appareils pour la vision dans l'obscurité, etc.



Heinrich Hertz

II.1. Description de l'expérience

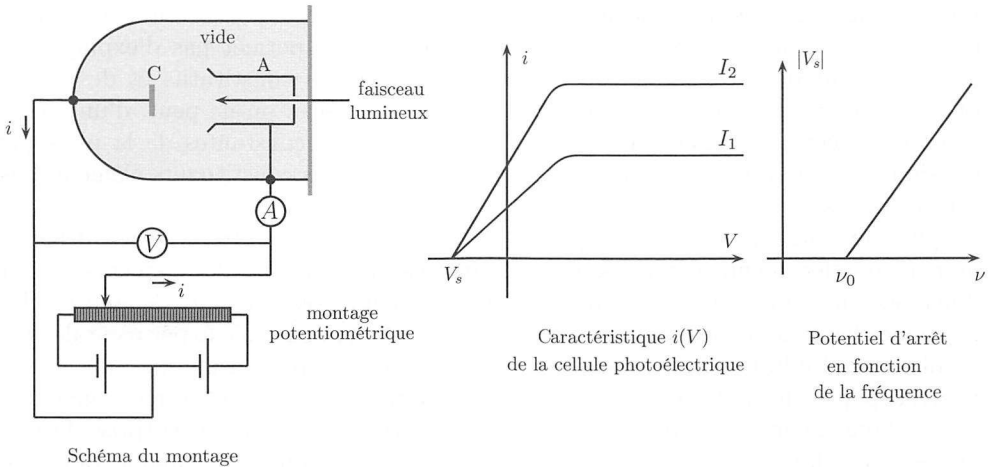


FIG. 4.2. Mise en évidence de l'effet photoélectrique.

L'expérience de base pour l'étude de cet effet est schématisée à gauche de la figure 4.2. Un vide poussé est réalisé dans une enceinte renfermant une cathode C, constituée d'un matériau que l'on veut étudier, et d'une anode A. Un rayon lumineux monochromatique⁶ est introduit dans le dispositif en incidence normale sur la cathode (aussi appelée *photocathode*). Une différence de potentiel $V_C - V_A = V$ est appliquée entre la cathode et l'anode, et le dispositif est construit de telle sorte que V puisse varier et prendre des valeurs positives ou négatives. On constate alors, dans certaines configurations, l'apparition d'un courant i dans le circuit : la lumière peut, dans certains cas, extraire des électrons (aussi appelés *photoélectrons*) de la cathode qui sont « captés »

5. Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) est un ingénieur et physicien allemand renommé pour avoir découvert les ondes hertziennes auxquelles il a donné son nom. Lors d'une présentation devant une assemblée d'étudiants, à la question de l'un d'entre eux qui lui demandait s'il y aurait des applications de ces ondes, Hertz répondit qu'il n'y en aurait aucune!

6. Dans l'expérience historique ce filtrage était effectué par un monochromateur, les expériences modernes utilisent des lasers.

par l'anode dont la forme a été optimisée pour cette opération. En faisant varier la différence de potentiel, on peut tracer la caractéristique $i(V)$ du dispositif.

II.2. Face à l'expérience

II.2.1. Les faits expérimentaux

► En variant la différence de potentiel V , on fait les constatations suivantes.

◊ Si $V > 0$, le potentiel de l'anode est supérieur au potentiel de la cathode. Un champ électrique \vec{E} est créé, dirigé de l'anode vers la cathode. Les électrons sont donc soumis à une force $\vec{F} = -e\vec{E}$ dirigée vers l'anode. À partir d'une certaine tension V , tous les électrons émis atteignent l'anode et on est alors dans une situation de saturation : une augmentation de la tension ne modifiera pas le courant créé. Le nombre d'électrons arrachés au métal dépend de l'intensité lumineuse I . Les deux caractéristiques représentées sur la figure 4.2 correspondent à deux intensités lumineuses distinctes $I_2 > I_1$.

◊ Si $V = 0$, malgré l'absence de forces s'exerçant sur les électrons émis, certains d'entre eux ont une énergie cinétique suffisante à l'extraction pour atteindre l'anode. Un courant s'installe dont l'intensité ne dépend que de l'intensité du rayon lumineux.

◊ Si $V < V_s < 0$, plus aucun courant ne circule. Le potentiel d'arrêt V_s ne dépend pas de l'intensité lumineuse incidente.

► Il existe un seuil en fréquence. En 1914, Robert Millikan (prix Nobel en 1923) montra expérimentalement qu'en dessous d'une fréquence limite ν_0 pour le rayon lumineux incident, il n'y a pas d'effet photoélectrique et qu'au delà de ν_0 le potentiel d'arrêt est une fonction affine de la fréquence, $V_s = \alpha(\nu - \nu_0)$, comme cela est représenté sur la courbe de droite de la figure 4.2.

► L'effet est « immédiat ». On constate qu'il n'y a pas de décalage temporel entre l'arrivée de la lumière et l'éjection des photoélectrons. En fait, on constate expérimentalement que, s'il existe, ce « retard » est inférieur à 10^{-9} s.

II.2.2. L'interprétation du potentiel d'arrêt

Le potentiel $V = V_s$ est négatif, la force électrostatique qu'il exerce sur les électrons (de charge $q = -e$ négative) fournit un travail résistant qui tend à freiner ces électrons : leur vitesse décroît depuis l'instant de leur départ de la cathode, tout comme leur énergie cinétique \mathcal{E}_c . En négligeant leur poids devant la force électrostatique qu'ils subissent, l'énergie potentielle \mathcal{E}_p de chaque électron est purement électrostatique, leur énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ est conservée car il n'y a pas de forces dissipatives.

Au départ de la cathode, l'énergie cinétique est maximale, et l'énergie potentielle minimale, nulle si l'on prend l'origine en ce point. Au niveau de la cathode, nous avons donc $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c$. Le fait que le courant s'annule dès que $V < V_s$ indique que dans cette limite les électrons sont suffisamment ralentis sur leur trajet pour qu'ils rebrousse chemin avant de pouvoir atteindre l'anode. Le potentiel V_s correspond donc à la situation dans laquelle les électrons les plus rapides atteignent l'anode avec une vitesse nulle. Ces électrons sont donc ceux qui ont été émis avec la plus grande vitesse que l'on notera v_{\max} , leur énergie cinétique initiale est donc $\mathcal{E}_{c, \max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$; cette valeur est donc aussi celle de leur énergie mécanique tout au long de leur trajet, $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$. Parvenus à l'anode, ces électrons n'ont plus d'énergie cinétique et leur énergie potentielle est exactement $\mathcal{E}_p = -eV_s > 0$. La conservation de l'énergie

mécanique implique donc $eV_s = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$, on a ainsi

$$V_s = -\frac{mv_{\max}^2}{2e} = -\frac{\mathcal{E}_{c, \max}}{e}.$$

Le potentiel V_s est donc directement relié à l'énergie cinétique maximale que peut avoir un électron émis par la cathode lorsque celle-ci est soumise au flux lumineux.

II.3. Les incohérences de l'interprétation classique

De nombreuses incompatibilités se firent rapidement jour après les expériences de Hertz lorsque les physiciens voulurent les interpréter en utilisant les concepts de la physique classique. Citons les plus simples.

- ▶ Si l'intensité lumineuse augmente, l'énergie communiquée à la cathode augmente. Dans un raisonnement classique de transfert d'énergie, nous sommes donc amenés à penser qu'une partie de cette énergie va être utilisée pour chauffer la cathode, donc extraire des électrons, et qu'une autre sera communiquée à ces électrons arrachés, augmentant par le coup leur énergie cinétique. L'interprétation du potentiel d'arrêt indique donc, dans le raisonnement classique, que celui-ci doit augmenter avec l'intensité lumineuse, en contradiction avec l'observation.
- ▶ La fréquence de la lumière ne joue aucun rôle dans la description classique de l'effet photoélectrique : il suffit que l'intensité soit suffisante pour communiquer l'énergie nécessaire à l'électron afin qu'il soit arraché.
- ▶ Dans un raisonnement classique conférant une « surface » à l'électron, supposons qu'il absorbe de l'énergie à travers la petite surface qu'il présente à la lumière incidente. Si l'intensité de la lumière devient faible, il suffira d'attendre suffisamment longtemps afin qu'il puisse absorber l'énergie nécessaire pour pouvoir être arraché.

II.4. L'hypothèse d'Einstein sur la quantification du rayonnement

II.4.1. Formulation de l'hypothèse de l'existence du photon

C'est en 1905 qu'Einstein proposa son hypothèse sur la quantification du rayonnement, c'est-à-dire 9 ans avant les expériences de Millikan.

L'émission et l'absorption d'un rayonnement de fréquence ν se font par l'intermédiaire de « quanta » d'énergie appelés photons. L'énergie \mathcal{E} d'un photon est donnée par la relation $\mathcal{E} = h\nu$ dite de *Planck-Einstein*.

Le nom moderne « photon » a été choisi en 1926 par le chimiste Gilbert N. Lewis.

Le photon possède une masse nulle, $m = 0$. Une fois émis, il s'éloigne de sa source à la vitesse c . La constante h a été introduite par Planck en 1900 pour expliquer certaines propriétés du rayonnement du corps noir,

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Autrement dit, la lumière est constituée par des paquets d'énergie, des quanta de rayonnement. Elle peut être vue comme un flux de particules de masse nulle.

II.4.2. Le photon pour expliquer l'effet photoélectrique

Le photon est entièrement absorbé par un électron lors de l'effet photoélectrique. L'électron gagne alors son énergie, soit $\mathcal{E} = h\nu$. Si celle-ci est suffisante, l'électron pourra l'utiliser afin de s'extraire de la cathode avec une énergie cinétique \mathcal{E}_c . Pour pouvoir se libérer du matériau qui le confine naturellement, l'électron devra fournir une énergie d'extraction W_0 qui dépend de ce matériau⁷. En appliquant un principe de conservation de l'énergie auquel nous tenons toujours, on obtient donc

$$\mathcal{E}_c = h\nu - W_0 . \quad (4.1)$$

Cette énergie cinétique est la même pour tous les électrons qui se libèrent de la cathode. Pour un même matériau, elle ne dépend que de la fréquence du rayonnement incident, on a donc $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c, \max}$. Avec la prise en compte de ce photon avec ces propriétés, les contradictions notées lors des prédictions classiques peuvent être levées !

► L'énergie cinétique des électrons émis n'augmente pas avec l'intensité lumineuse. En effet, augmenter l'intensité, c'est augmenter le nombre de photons, c'est-à-dire augmenter le courant photoélectrique. Ce n'est pas changer l'énergie $h\nu$ de chaque photon et, par conséquent, ce n'est pas changer l'énergie cinétique des électrons émis.

► En dessous d'une fréquence limite ν_0 , il n'y a plus d'effet photoélectrique pour une cathode d'un matériau donné. En effet, en posant $h\nu_0 = W_0$, si $\nu < \nu_0$, quel que soit le nombre de photons incidents, il ne peut y avoir d'effet photoélectrique, les électrons ne pouvant être arrachés à la matière.

► Il n'y a pas de retard observable entre l'arrivée de la lumière et l'éjection du photoélectron. L'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ est amenée d'un coup ; elle ne s'accumule pas dans le temps comme le prévoit la théorie classique. Dès que le photon est absorbé par l'électron, ce dernier est éjecté si l'énergie est suffisante ($h\nu > W_0$).

La dépendance affine de V_s en la fréquence se retrouve tout aussi simplement, $eV_s = \mathcal{E}_{c, \max} = h\nu - W_0$ et donc $V_s = \frac{h\nu - W_0}{e} = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$. Cette quantité est bien négative si $\nu \geq \nu_0$, car $e < 0$. Si on détermine V_s pour différentes fréquences lumineuses, on obtient une droite de coefficient directeur $\frac{h}{e}$, résultat conforme aux mesures. Le seuil de déclenchement de l'effet photoélectrique correspond au potentiel d'arrêt nul.

Ces explications simples ainsi que la notion de photon, introduite à dessein, impressionnèrent le milieu scientifique qui restait jusqu'alors circonspect devant l'effet photoélectrique. Elles valurent à Albert Einstein le prix Nobel seulement 16 ans plus tard.

II.5. La nature singulière du photon

La nouveauté introduite par Einstein pour rendre compte de l'effet photoélectrique est d'associer une particule à la lumière jusque-là représentée par une onde électromagnétique. Pour la première fois, les physiciens doivent faire avec un objet physique, la lumière, qui semble doté d'un double aspect : tantôt onde, tantôt corpuscule.

Dans la conception particulière du photon, on peut définir son impulsion⁸ p par la relation $p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h\nu}{c}$. On peut également écrire $h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega$, la quantité ω est

7. On parle parfois de travail d'extraction, ce qui explique la notation W_0 . Souvenons-nous que l'unité de travail est celle de l'énergie, le joule.

8. Pour le photon, et dans le cadre général de la mécanique quantique, on parle d'impulsion plutôt que de quantité de mouvement, ces deux notions ne sont que souvent égales. Dans le cas particulier du photon, bien que $m = 0$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ car la relation $\vec{p} = m\vec{v}$ n'est plus valable pour cette particule relativiste.

alors la pulsation du photon et

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \text{ est la constante de Planck réduite.}$$

En notant λ la longueur d'onde d'un rayonnement lumineux monochromatique vue comme une onde de fréquence ν , l'impulsion du photon s'écrit donc sous la forme

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{longueur d'onde de de Broglie.} \quad (4.2)$$

Dans sa thèse de doctorat soutenue en 1924, *Louis de Broglie* postula que la relation (4.2), réservée depuis 1905 au photon, est en fait applicable à tous les types de particules. Sous cette hypothèse, une particule d'impulsion \vec{p} acquiert des propriétés ondulatoires caractérisées par une longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$.

Alors que le postulat d'Einstein confère à la lumière, qui est classiquement une onde, un caractère corpusculaire à travers le photon, celui de de Broglie associe aux particules élémentaires, qui sont classiquement corpusculaires, un aspect ondulatoire. L'hypothèse de de Broglie ne mit pas longtemps à trouver une contrepartie expérimentale. Trois ans après l'énoncé du postulat, en 1927, Clinton Davisson et Lester Germer bombardent une cible de nickel cristallin par des électrons dont ils maîtrisent la vitesse grâce à un canon à électrons utilisant une différence de potentiel ajustable⁹. Un détecteur mobile permet ensuite d'étudier la dépendance angulaire de la diffraction des électrons sur la cible. Le schéma de l'expérience est décrit sur la partie gauche de la figure 4.3. On observe alors que les électrons sont diffractés par la cible principalement dans une direction privilégiée. Le résultat expérimental est présenté sur la partie droite de la figure 4.3. Cette figure de diffraction est identique à celle prévue par la loi de Bragg¹⁰ avec un rayonnement de longueur d'onde $\lambda \simeq 10^{-10}$ m.

Synthèse

L'expérience de Davisson et Germer montre que les électrons sont diffractés comme les rayons X : les ondes électromagnétiques et les particules ont des comportements similaires.

Que ce soit William Bragg en 1915 (à 25 ans), Einstein en 1921 (à 42 ans), de Broglie en 1929 (à 37 ans) ou Davisson en 1937 (à 56 ans), pour ne citer que ceux-là, tous reçurent le prix Nobel de physique dont le comité ne savait plus où donner de la tête à cette époque.

Les expériences de diffraction ont été effectuées depuis avec d'autres particules, comme des protons, des atomes et même des molécules. La formule de de Broglie est donc extrêmement générale et montre que, lorsque les dimensions des masses en mouvement deviennent extrêmement petites, la mécanique classique n'est plus applicable. Pour donner des ordres de grandeur, on peut calculer la longueur d'onde de de Broglie

9. Le principe du canon à électrons est présenté au chapitre 12 (voir figure 12.9, page 326).

10. Cette loi, découverte vers 1912 par William Lawrence Bragg et son père, permit de mettre en évidence la structure cristalline de certains matériaux. Ils bombardèrent un cristal avec des rayons X (lumière dont la longueur d'onde est de l'ordre de 10^{-10} m) et montrèrent que ces rayons étaient diffractés principalement dans une direction dépendant notamment de leur longueur d'onde.

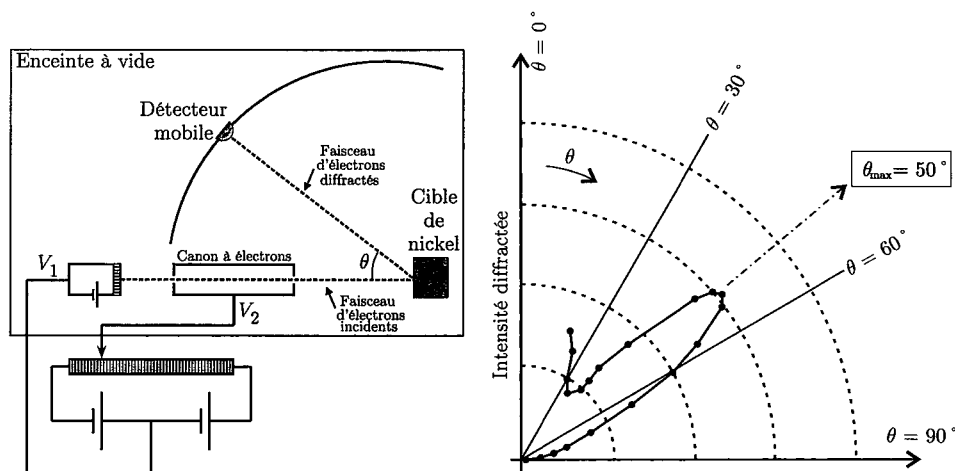


FIG. 4.3. L'expérience de Davisson et Germer (1927).

associée à un grain de poussière de masse 10^{-15} kg, de diamètre $1 \mu\text{m}$ et de vitesse $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. On trouve $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ m}$, ce qui est négligeable à l'échelle du grain de poussière. Cela suggère qu'un comportement ondulatoire sera très difficile à mettre en évidence pour un objet de taille macroscopique.

Dans la plupart des expériences modernes, les objets quantiques ne se présentent ni sous leur aspect purement ondulatoire, ni sous leur aspect purement particulaire : un objet quantique n'est ni une onde ni une particule, il est les deux à la fois ! Pour noter cette particularité, il semble convenable d'attribuer à ces objets un nom spécifique, nous les appellerons « *quantons* ».

Définition 4.1. *Quantons*

On appelle quanton un système physique élémentaire à qui l'on attribue des propriétés quantiques. Les quantons sont donc les objets élémentaires d'étude de la mécanique quantique.

Suivant les expériences mises en œuvre, ce sont soit les aspects ondulatoires, soit les aspects corpusculaires, soit les deux qui permettront de se faire une représentation du quanton incriminé. Une illustration amusante de Jean-Marc Lévy-Leblond¹¹ est la suivante : contrairement à ce que pourraient laisser penser certaines photographies où on le voit de face ou de dos, un ornithorynque n'est ni un canard, ni un castor, ni une taupe, c'est un ornithorynque ! Les Anglo-Saxons, qui sont toujours très pragmatiques, appellent d'ailleurs cet animal un canard-taupe (*duck-mole*).

Ce comportement à la fois corpusculaire et ondulatoire qui caractérise les quantons est appelé *dualité onde-corpuscule*.

Remarque Le terme « quanton » ne fait pas partie du programme, et n'est malheureusement pas universellement utilisé. Nous l'utiliserons néanmoins car il est parfaitement adapté au contexte du programme, dans lequel les expériences décrites mettent en jeu de nombreuses particules ou molécules différentes ayant pour propriété importante et commune d'être simplement des quantons.

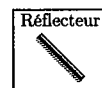
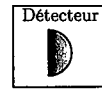
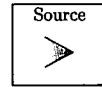
11. Jean-Marc Lévy-Leblond est un physicien français qui est notamment l'un des instigateurs de l'appellation « quanton ».

III. Expériences à une particule

III.1. Les outils d'observation

Nous allons nous intéresser à présent à des expériences très particulières qui ont eu divers statuts au fil du développement de la mécanique quantique : elles furent pratiquement des expériences de pensée dans un premier temps, puis ont été progressivement réalisées ; elles sont maintenant très classiquement pratiquées dans les laboratoires modernes. Si l'on restreint l'étude à l'optique, ces expériences peuvent paraître assez habituelles. Il faut bien comprendre cependant que l'on envisage ici n'importe quel type de quanton, pas uniquement des photons. On suppose pouvoir disposer des appareils suivants.

- ▶ Une source capable d'émettre des quantons soit sous la forme d'un faisceau « continu », soit un par un.
- ▶ Un détecteur capable de mettre en évidence la présence du quanton ou du faisceau. Cette détection est temporelle et spatiale.
- ▶ Un séparateur capable de transmettre ou de réfléchir les quantons sans perte, ou de séparer un faisceau en deux parties égales.
- ▶ Un réflecteur qui dévie le quanton ou le faisceau sans aucune perte. Dans le cas des photons, il s'agit simplement d'un miroir.



Suivant le type de quanton utilisé, ces appareils sont bien sûr différents. Si chacun peut se faire une idée de ce que représente une lame séparatrice en optique (quanton = photon), il faut savoir que l'on peut réaliser la même fonction pour des électrons en usant de champs électriques et magnétiques disposés astucieusement. Nous supposons donc l'existence de ces différents appareils.

III.2. Expériences préliminaires

On considère le montage de la figure 4.4. On envoie des quantons, *un à un*, sur une séparatrice, et on dénombre ceux qui sont transmis (T) et ceux qui sont réfléchis (R).

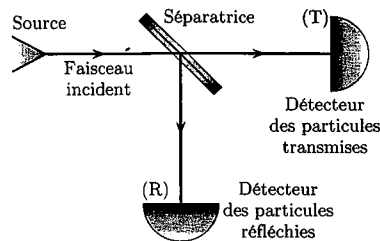


FIG. 4.4. Expérience 1 : la séparation simple.

On observe les résultats suivants :

- ▶ Les deux détecteurs ne s'activent jamais en même temps. Par conséquent, un quanton arrivant sur la séparatrice est soit transmis, soit réfléchi : il est *indivisible*.

► On remarque qu'une moitié des quantons a été réfléchi et l'autre moitié transmise.

Cette dernière affirmation doit être comprise dans un sens statistique, comme s'il s'agissait de jouer à pile ou face : si on jette une pièce de monnaie équilibrée un grand nombre de fois, la moyenne des piles tend vers la moyenne des faces qui tend vers $\frac{1}{2}$. L'utilisation du langage probabiliste ne résulte pas de la notion de hasard. Pour l'instant, on effectue une observation et non une explication du phénomène. À ce stade, deux possibilités sont envisageables.

► Le quanton possède une propriété cachée qui fait qu'il sera transmis ou réfléchi par le séparateur. Cette propriété est affectée par la source aux quantons qui sont alors différents, mais également répartis.

► Les quantons sont tous strictement identiques. C'est le résultat de l'interaction avec le séparateur qui fournit à parts égales soit un quanton transmis, soit un quanton réfléchi.

L'hypothèse des variables cachées est très profonde et fut mise en avant par Einstein lui-même. Ce dernier, bien qu'instigateur de la révolution quantique, ne pouvait se résoudre à accepter son caractère probabiliste qui émergea par la suite.

Afin d'avancer dans notre questionnement, considérons maintenant la double séparation du dispositif présenté sur la figure 4.5.

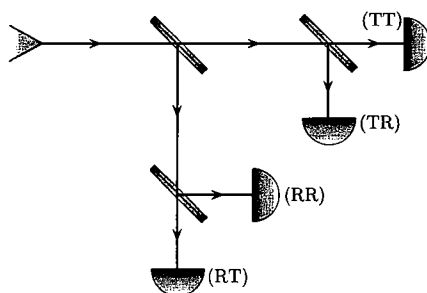


FIG. 4.5. Expérience 2 : la séparation double.

Les quantons sont toujours émis par la source un par un. Une détection en (TT) indique que le quanton a été transmis deux fois ; en (RR) le quanton a été réfléchi deux fois ; en (RT) le quanton a été d'abord réfléchi puis transmis ; en (TR) le quanton a été d'abord transmis et ensuite réfléchi.

Le résultat de la mesure donne à présent statistiquement $\frac{1}{4}$ des quantons sur chaque détecteur. L'hypothèse de la propriété cachée n'est alors plus acceptable¹².

Nous devons envisager que c'est l'interaction avec le dispositif expérimental qui « crée » l'état observé lors de la mesure.

Ce résultat est érigé en postulat de la mécanique quantique dans sa formulation dite de l'école de Copenhague.

12. Les expériences dites « d'Aspect », réalisées par le physicien français Alain Aspect à l'Institut d'optique à Orsay entre 1980 et 1982, ont apparemment prouvé ce fait.

III.3. Expériences interférométriques

III.3.1. Description des expériences et des résultats

Nous allons à présent étudier des expériences à un quanton en utilisant un interféromètre de *Mach-Zehnder*. Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 4.6 : à gauche, l'interféromètre est équilibré, c'est-à-dire que les trajets suivis par les quantons entre les deux séparatrices sont de longueurs égales ; ce qui n'est pas le cas à droite où l'interféromètre est déséquilibré.

Rappelons que les quantons sont injectés les uns après les autres dans le montage, on ne peut donc pas penser que deux quantons puissent se rencontrer au niveau de la deuxième séparatrice et que la détection résulte d'une collision. Intuitivement, nous dirions *a priori* que l'un des récepteurs ne peut recevoir que les particules qui subissent une réflexion et une transmission et que l'autre ne peut recevoir que les particules qui sont soit transmises deux fois, soit réfléchies deux fois.

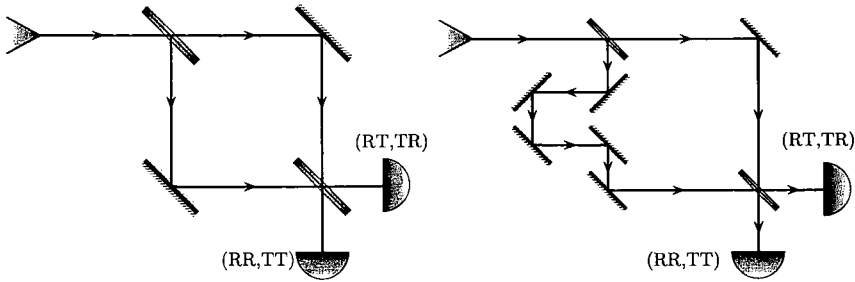


FIG. 4.6. Expérience 3 : interférométrie de Mach-Zehnder. L'interféromètre de gauche est équilibré, celui de droite est déséquilibré.

Étudions tout d'abord l'expérience utilisant l'interféromètre équilibré. On pourrait imaginer, *a priori*, que nous sommes dans les mêmes conditions que lors de la simple ou de la double séparation : la moitié des particules seront transmises par le premier séparateur, puis la moitié d'entre elles atteignent alors (TR) et l'autre moitié (TT). Un raisonnement symétrique pour les quantons initialement réfléchis pourrait donc laisser penser que les quantons se répartissent statistiquement à parts égales sur les deux détecteurs. Le résultat de l'expérience est cependant bien différent :

- ▶ tous les quantons sont détectés en (RT,TR) ;
- ▶ aucun quanton n'atteint le détecteur (RR,TT).

Utilisons à présent des réflecteurs intermédiaires pour allonger l'un des bras de l'interféromètre et ainsi le déséquilibrer, comme sur la partie droite de la figure 4.6. On observe que dès que les deux longueurs sont différentes, quelques quantons atteignent le détecteur (RR,TT). Si l'on accentue le déséquilibre, le nombre de quantons sur chaque détecteur s'équilibre. Puis la situation s'inverse et lorsque le déséquilibre de l'interféromètre passe par une longueur particulière (voir figure 4.9), notée $L = \ell_2 - \ell_1$, tous les quantons atteignent le détecteur (RR,TT). Pour une différence égale à $2L$, on retrouve la situation initiale et tous les quantons atteignent (RT,TR)¹³.

13. Les expériences décrites ici concernent l'interférométrie à un quanton, c'est-à-dire qu'une condition fondamentale à respecter est qu'il ne se trouve qu'un seul quanton à la fois dans l'interféromètre. Cette condition a été remplie pour la première fois en 1974 lors de l'expérience de Helmut Rauch qui utilisait des neutrons.

III.3.2. Interprétation

Deux questions troublent notre esprit encore classique.

- Comment se fait-il que la modification d'un seul chemin entraîne une modification du comportement de tous les quantons ?
- Comment les quantons qui sont passés par le chemin non modifié peuvent-ils subir la modification ?

Prenant acte du résultat des expériences de séparation sur l'effet de la mesure, les expériences utilisant le dispositif de Mach-Zehnder doivent s'interpréter en invoquant une interférence du quanton avec *lui-même*. Avant d'être détecté, le quanton est potentiellement sur les *deux* branches de l'interféromètre *en même temps*.

On peut même *vérifier* cette interprétation. On peut en effet tenter, par une mesure dite non destructive, de savoir par quel chemin le quanton est passé. Les résultats de l'expérience précédente changent alors complètement : la moitié des quantons sont sur (RT,TR) et l'autre moitié sur (TT,RR), et cela quelle que soit la différence de longueur des deux chemins, conformément à notre prévision intuitive mais fautive. Le fait de savoir par quel chemin le quanton est passé empêche les interférences de se produire !

La plupart des physiciens ont renoncé à expliquer les interférences quantiques. En revanche, ils s'accordent sur un principe qui, sans les expliquer, décrit les conditions dans lesquelles un quanton interfère avec lui-même. Ce *principe d'indiscernabilité* peut s'énoncer comme suit.

Les interférences apparaissent lorsqu'un quanton peut emprunter plusieurs chemins pour arriver au même détecteur, et que ces chemins sont indiscernables après la détection.

Dans les expériences de simple et/ou double séparation (voir figures 4.4 et 4.5), il n'y a qu'un seul chemin qui amène à chaque détecteur. Par conséquent, dès qu'un quanton parvient sur l'un d'entre eux, nous pouvons en déduire le chemin qu'il a emprunté : c'est une situation de discernabilité et aucun effet d'interférence ne se manifeste.

Dans les montages de Mach-Zehnder de la figure 4.6, lorsqu'un quanton est détecté après le deuxième séparateur, nous ne pouvons savoir par quel chemin il y est parvenu, puisque deux chemins sont possibles. Ces deux chemins sont indiscernables et les effets d'interférence sont présents.

Si l'on détecte la présence du quanton sur l'un des chemins, les interférences disparaissent. Plus généralement, les interférences disparaissent dès que le quanton laisse une empreinte de son passage sur l'un des chemins, car celui-ci devient discernable par rapport aux autres.

III.3.3. Comparaison avec les phénomènes ondulatoires

Dans le cas de l'optique, la question que l'on s'est posée pendant très longtemps était de savoir si la lumière était une onde ou un faisceau de particules. Newton et toute l'école anglaise étaient partisans d'une description corpusculaire de type mécanique. Le Hollandais Huygens, lui, prônait une description ondulatoire. C'est provisoirement l'expérience qui permit de trancher nettement au début du XIX^e siècle, grâce à Thomas Young qui mit au point en 1801 sa célèbre expérience dite des trous de Young (voir chapitre 2). Un plan opaque est percé de deux trous de petites dimensions. Il est éclairé par un faisceau lumineux et on observe l'image obtenue sur un écran placé

derrière le plan des deux trous. On constate expérimentalement une figure d'interférence sur l'écran : une succession de franges sombres et claires.

Le principe est le même que celui de l'interféromètre de Mach-Zehnder : chaque point de l'écran joue le rôle d'un détecteur. Tout point de l'écran peut être atteint par deux chemins indiscernables, et la différence de longueur de ces chemins détermine l'intensité de la lumière en ce point. La correspondance entre le comportement de ces deux montages en fonction de la longueur des chemins est donnée par la règle suivante :

- ▶ les différences de longueur correspondant au centre des franges claires dans le montage de Young correspondent également aux différences de longueur pour lesquelles tous les quantons sont détectés dans (RT,TR) dans le montage de Mach-Zehnder. Il s'agit d'interférences constructives ;
- ▶ les différences de longueur correspondant au centre des franges sombres dans le montage de Young correspondent également aux différences de longueur pour lesquelles tous les quantons sont détectés dans (RR,TT) dans le montage de Mach-Zehnder. Il s'agit d'interférences destructives.

C'est parce que la lumière présente des effets d'interférences que son caractère ondulatoire a été accepté. Cependant nous avons vu, à travers l'effet photoélectrique, qu'elle présentait aussi un caractère corpusculaire. La dualité onde-corpuscule ayant été étendue à tous les quantons *via* le postulat de de Broglie, il n'est finalement pas si étonnant que cela de voir apparaître, du même coup, des effets d'interférences dans des expériences mettant en jeu des quantons autres que les photons.

III.3.4. L'exemple des molécules de fullerène

Une expérience d'interférences quantiques utilisant des molécules de fullerène en C_{60} a été conduite avec succès dans les années 2000 par une équipe de l'université de Vienne en Autriche. Ces grosses molécules contiennent 60 atomes de carbone disposés en forme de ballon de football, comme on le voit sur la figure 4.7.

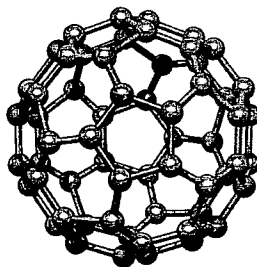


FIG. 4.7. Fullerène C_{60} .

Les chercheurs ont montré que ces grosses molécules, dont la taille est de l'ordre du nanomètre, peuvent avoir un comportement quantique analogue aux neutrons ou électrons dont les dimensions sont 10^6 fois plus petites.

Le dispositif expérimental est constitué d'une source qui contient un gaz de molécules de fullerène C_{60} à une température de l'ordre de 900 K. La masse d'une molécule est $m = 1,20 \cdot 10^{-24}$ kg, ce qui correspond à une vitesse moyenne $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$, où k_B est la constante de Boltzmann, soit numériquement $\langle v \rangle = 176 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La longueur d'onde de de Broglie λ_m moyenne correspondante est donnée par la relation

$\langle \lambda \rangle = \frac{h}{m\langle v \rangle} = 3,00 \text{ pm}$. Elle est donc très petite devant la taille de la molécule. L'élément diffractant est constitué par un plan silicaté contenant des trous de $55,0 \text{ nm}$ de large, séparés d'une distance $d = 100 \text{ nm}$. L'observation est réalisée sur un « écran » situé à une distance $L = 1,25 \text{ m}$ du plan diffractant. Le processus de détection utilise un laser à argon qui ionise les molécules. La résolution spatiale du détecteur est de l'ordre de $8,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, ce qui est suffisant pour observer la figure d'interférence.

La comparaison de la longueur d'onde de de Broglie avec la distance des fentes indique un rapport de 10^5 et pourtant le dispositif expérimental permet parfaitement de visualiser une figure d'interférence.

Dans cette expérience, comme dans toutes celles de cette section, les molécules sont introduites une par une dans le dispositif expérimental, elles sont détectées au niveau de « l'écran » par des impacts individuels. La figure d'interférence se construit, pas à pas, au fur et à mesure de l'accumulation des données. Cette figure est constituée à la fin de l'expérience par une succession alternée de régions où l'on détecte les molécules, séparées par des régions où on ne les détecte pas (voir figure 4.10 page 101 dans le cas des électrons).

III.4. Un début de modèle mathématique

III.4.1. Notion d'amplitude de probabilité

On peut déduire des expériences précédentes que l'on ne peut pas savoir *a priori* en quel point d'un écran ou bien sur quel détecteur va arriver un quanton donné. On peut seulement déterminer la probabilité qu'il aura d'atteindre tel ou tel point de l'espace.

Par analogie avec l'étude des ondes en optique, on définit une *amplitude de probabilité* que l'on va noter \underline{a} . De façon générale, cette amplitude de probabilité est une fonction des points de l'espace et du temps qui prend sa valeur dans l'ensemble des nombres complexes, $\underline{a} = \underline{a}(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$.

La probabilité \mathcal{P} qu'un quanton arrive en un point est alors proportionnelle au module de l'amplitude de probabilité au carré,

$$\mathcal{P} \propto |\underline{a}|^2. \quad (4.3)$$

Cette probabilité peut être interprétée comme étant le nombre de quantons arrivant sur le détecteur par unité de temps.

► Si le système est tel que les chemins sont indiscernables, alors on observe des interférences, et les amplitudes de probabilité s'additionnent ; la probabilité qu'un quanton atteigne un point est proportionnelle au module carré de la somme des amplitudes de probabilité.

$$\text{Chemins indiscernables} \Leftrightarrow \mathcal{P} \propto |\underline{a}_1 + \underline{a}_2|^2 \quad (4.4)$$

► Si le système est tel que les chemins sont discernables, alors le phénomène d'interférence ne s'observe pas et ce sont les probabilités qui s'additionnent.

$$\text{Chemins discernables} \Leftrightarrow \mathcal{P} \propto |\underline{a}_1|^2 + |\underline{a}_2|^2 \quad (4.5)$$

III.4.2. Modèle pour un séparateur sans perte

En généralisant la lame séparatrice bien connue en optique, on peut concevoir un séparateur de quantons possédant un coefficient de transmission en amplitude \underline{t} et un coefficient de réflexion en amplitude \underline{r} . Le séparateur est supposé sans perte, de telle sorte que $|\underline{t}|^2 + |\underline{r}|^2 = 1$. Le cas présenté dans toutes les expériences précédentes correspondait à des séparateurs symétriques pour lesquels $|\underline{t}|^2 = |\underline{r}|^2 = \frac{1}{2}$.

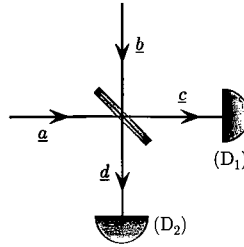


FIG. 4.8. Séparateur sans perte.

Considérons le séparateur de la figure 4.8 sur lequel arrivent deux flux symétriques de quantons avec des amplitudes de probabilité respectives \underline{a} et \underline{b} .

Lors des expériences de simple et double séparation des figures 4.4 et 4.5, il n'y avait à chaque fois qu'un seul flux de quanton incident sur chaque séparateur. En considérant un séparateur quelconque, on écrit donc pour ces expériences $\underline{b} = 0$, $\underline{c} = \underline{t}\underline{a}$ et $\underline{d} = \underline{r}\underline{a}$. Dans le cas des expériences mettant en jeu l'interféromètre de Mach-Zehnder, le dernier séparateur reçoit en revanche deux flux symétriques. L'action du séparateur peut alors se résumer par les relations

$$\begin{cases} \underline{c} = \underline{t}\underline{a} + \underline{r}\underline{b} \\ \underline{d} = \underline{r}\underline{a} + \underline{t}\underline{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{c} \\ \underline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{t} & \underline{r} \\ \underline{r} & \underline{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}.$$

Si l'on utilise un séparateur sans perte (séparatrice ou lame *semi-transparente*), le nombre de quantons incidents par unité de temps, qui est proportionnel à $|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2$, est égal au nombre de quantons qui se dirigent vers D_1 ou D_2 toujours par unité de temps, qui n'est autre que $|\underline{c}|^2 + |\underline{d}|^2$. On peut donc écrire

$$|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 = |\underline{c}|^2 + |\underline{d}|^2 = |\underline{t}\underline{a} + \underline{r}\underline{b}|^2 + |\underline{r}\underline{a} + \underline{t}\underline{b}|^2.$$

Cette égalité implique d'une part que $|\underline{r}|^2 + |\underline{t}|^2 = 1$, ce qui paraît légitime au vu de nos hypothèses, et d'autre part que $\Re(\underline{r}\underline{t}^*) = 0$, où \underline{t}^* est le complexe conjugué de \underline{t} . Ces deux relations considérées simultanément impliquent que $\underline{t} = t$ est réel et $\underline{r} = ir$ est imaginaire pur. L'effet de la séparatrice idéale sur le flux de quantons est donc modélisé par les relations

$$\begin{cases} \underline{c} = \underline{t}\underline{a} + ir\underline{b} \\ \underline{d} = ir\underline{a} + \underline{t}\underline{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{c} \\ \underline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & ir \\ ir & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad r, t \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Appliquons ces relations dans le cas de l'interféromètre à un quanton de Mach-Zehnder. Considérons le cas général dans lequel le premier bras fait emprunter aux quantons un chemin de longueur ℓ_1 et le second un chemin de longueur $\ell_2 = \ell_1 + \delta$. On note \underline{a} l'amplitude complexe de probabilité que possède le quanton juste avant de passer à travers la première séparatrice, \underline{a}_1 et \underline{a}_2 celles au niveau des détecteurs (D_1) et (D_2), comme représenté sur la figure 4.9.

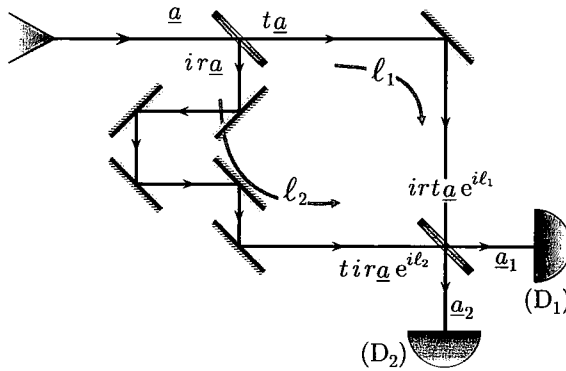


FIG. 4.9. Modèle pour les interférences.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, une propagation sans perte, sur un trajet de longueur ℓ , d'un signal de longueur d'onde λ introduit un facteur de phase $e^{\frac{2i\pi\ell}{\lambda}}$. Les relations (4.6) permettent ainsi d'obtenir

$$\underline{a}_1 = \underline{ta}e^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}}(ir) + (ir)\underline{ate}^{\frac{2i\pi\ell_2}{\lambda}} = ir\underline{ta}e^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}} \left(1 + e^{\frac{2i\pi\delta}{\lambda}}\right)$$

et

$$\underline{a}_2 = \underline{ta}e^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}}t + (ir)\underline{ae}^{\frac{2i\pi\ell_2}{\lambda}}(ir) = \underline{ae}^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}} \left(t^2 - r^2e^{\frac{2i\pi\delta}{\lambda}}\right).$$

On obtient finalement les probabilités \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de détection respective sur (D₁) et (D₂) en écrivant

$$\mathcal{P}_1 \propto |\underline{a}_1|^2 = \left| ir\underline{ta}e^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}} \right|^2 \left| 1 + e^{\frac{2i\pi\delta}{\lambda}} \right|^2 = 2r^2t^2 |\underline{a}|^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right],$$

$$\mathcal{P}_2 \propto |\underline{a}_2|^2 = \left| \underline{ae}^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}} \right|^2 \left| t^2 - r^2e^{\frac{2i\pi\delta}{\lambda}} \right|^2 = r^2t^2 |\underline{a}|^2 \left[t^4 + r^4 - 2r^2t^2 \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right].$$

Le taux de comptage sur les détecteurs varie donc sinusoidalement en fonction de δ . Remarquons la relation de conservation

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \propto |\underline{a}|^2 (t^4 + r^4 + 2r^2t^2) = |\underline{a}|^2 (t^2 + r^2)^2 = |\underline{a}|^2.$$

On retrouve bien une lame idéale, c'est-à-dire que le nombre de quantons incidents est égal au nombre total de quantons issus de la lame et qui atteignent soit le détecteur (D₁), soit le détecteur (D₂).

Dans le cas où le quanton a autant de chances de traverser la lame que d'y être réfléchi, alors $r = t$ et donc $r^2 + t^2 = 1 \Rightarrow 2r^2 = 2t^2 = 1$, soit $r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve alors

$$\mathcal{P}_1 \propto \frac{1}{2} |\underline{a}|^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right] \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \propto \frac{1}{2} |\underline{a}|^2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right].$$

Si $\delta = n\lambda$, attendu que n est entier, tous les quantons sont détectés sur le détecteur (RT-TR), *i.e.* (D₁); si $\delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$, alors ils le sont tous en (RR-TT), *i.e.* (D₂). Le modèle est parfaitement conforme aux résultats expérimentaux obtenus avec l'interféromètre de Mach-Zehnder.

Remarques

► On retrouve un calcul identique dans le cas des ondes classiques (la lumière, par exemple), en remplaçant \underline{a} par Ee^{ikx} qui modélise une onde plane se propageant dans la direction x . Cependant la physique décrite est très différente, en particulier, la détection ne révèle ici que des quanta individuels. C'est pourquoi le paramètre continu qui serait l'intensité de l'onde dans une théorie ondulatoire (le carré du module de l'amplitude) s'interprète ici comme une probabilité de comptage.

► L'écriture de l'amplitude de probabilité au détecteur (D_1) est

$$\underline{a}_1 = t\underline{a}e^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}}(ir) + (ir)\underline{a}te^{\frac{2i\pi\ell_2}{\lambda}}.$$

On interprète cet objet mathématique comme décrivant la délocalisation du quanton dans les deux chemins due à la lame séparatrice. Le postulat fondamental sur lequel reposent ces combinaisons linéaires est appelé *principe de superposition des états*.

IV. Inégalités de Heisenberg spatiales

IV.1. Dispositif des trous de Young

Considérons des électrons parvenant un par un dans un dispositif interférentiel semblable à celui des trous de Young. Plaçons un écran à la distance D des fentes et supposons l'existence d'un détecteur que l'on peut déplacer sur l'écran et permettant de détecter les impacts en chaque point. Le dispositif expérimental est représenté sur la partie gauche de la figure 4.10.

Si on fait l'expérience avec quelques particules seulement, leur distribution sur l'écran semblera aléatoire. Par contre, au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de particules, on constate la formation de franges d'interférence. La distribution des électrons sur l'écran, au cours de l'expérience et de leur détection, est représentée sur la partie droite de la figure 4.10. Signalons à nouveau que si l'on ferme une fente, les interférences disparaissent. On constate donc une fois de plus l'aspect ondulatoire de ce comportement des électrons.

De même, comme dans le cas de l'interféromètre de Mach-Zehnder, si l'on cherche à savoir¹⁴ par quelle fente l'électron est passé, les chemins deviennent du coup discernables ; les interférences disparaissent aussitôt.

Soit $M(x,y)$ un point de l'écran situé en $z = D$. Si seule la fente F_1 est ouverte, la probabilité de détecter un électron en M est $\mathcal{P}_1 = |\underline{a}_1(x,y,D)|^2$. De même, lorsque seule la fente F_2 est ouverte, la probabilité d'observer un impact au point $M(x,y)$ sera donnée par $\mathcal{P}_2 = |\underline{a}_2(x,y,D)|^2$. Si par contre les deux fentes sont ouvertes et que les chemins sont indiscernables, la probabilité d'observer un impact en M est alors

$$\mathcal{P}(M) = |\underline{a}_1 + \underline{a}_2|^2 \neq \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2.$$

Notons \underline{a}_0 l'amplitude de probabilité juste après les fentes. La symétrie du système permet de supposer \underline{a}_0 uniforme : l'amplitude de probabilité est la même après les deux fentes. En étendant le modèle de la section III.4.2 (voir page 98) à notre situation, si nous notons ℓ_1 et ℓ_2 les distances respectives entre les trous F_1 et F_2 et le point $M(x,y,D)$ de l'écran, nous pouvons écrire $\underline{a}_1 = \underline{a}_0 e^{\frac{2i\pi\ell_1}{\lambda}}$ et $\underline{a}_2 = \underline{a}_0 e^{\frac{2i\pi\ell_2}{\lambda}}$, où λ est

14. Par un moyen astucieux non décrit ici...

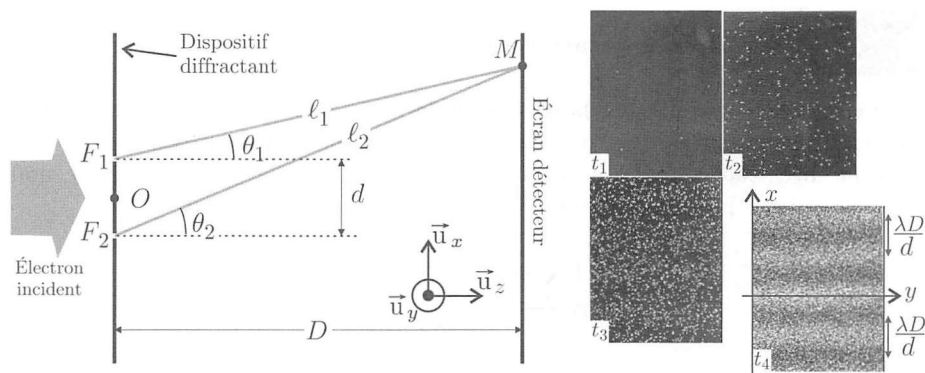


FIG. 4.10. Partie gauche : dispositif expérimental des trous de Young - Partie droite : figures d'interférences obtenues sur l'écran avec des électrons. Les instants t_1 , t_2 , t_3 et t_4 correspondent à des durées croissantes de l'expérience.

la longueur d'onde de de Broglie des électrons considérés; en reprenant les mêmes calculs que dans la section III.4.2 (voir page 98), on trouve

$$\mathcal{P}(M) \propto 2 |\underline{a}_0|^2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right] \text{ avec } \delta = \ell_2 - \ell_1.$$

Si les deux fentes sont séparées de la distance d , symétriques par rapport à l'origine O et suffisamment étroites, on a

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \left\| \overline{F_1 M} \right\| = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}}, \\ \ell_2 &= \left\| \overline{F_2 M} \right\| = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}}. \end{aligned}$$

On suppose que l'interféromètre est tel que $d \ll D$. En limitant notre étude au voisinage de l'axe de symétrie du système interférentiel, on peut considérer que $\frac{x}{D} \ll 1$ et $\frac{y}{D} \ll 1$. Un développement limité donne alors

$$\begin{aligned} \ell_1 &\simeq D \left(1 + \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right), \\ \ell_2 &\simeq D \left(1 + \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, au premier ordre, il vient $\delta = \ell_2 - \ell_1 = \frac{xd}{D}$. La probabilité d'observer un point au voisinage du centre de l'écran s'écrit donc $\mathcal{P} \propto |\underline{a}_0|^2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi xd}{\lambda D} \right) \right]$. Dans cette région, les points atteints par le plus grand nombre d'électrons ont pour abscisse $x_n = \frac{n\lambda D}{d}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, les points d'abscisse $(n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{d}$ ne sont statistiquement jamais atteints. Les électrons se répartissent donc sur des bandes d'épaisseur $\Delta x \simeq \frac{\lambda D}{d}$. C'est exactement ce qui est observé sur la partie droite de la figure 4.10.

Rappel Moyenne, écart type

Supposons que le résultat de la mesure de la position x d'un quanton unidimensionnel soit une variable aléatoire possédant des moments d'ordre 1 et 2. Lors de N mesures successives, on obtient les valeurs $x_{i=1, \dots, N}$. Pour N grand, nous pouvons estimer la valeur moyenne de la position et de son carré,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2.$$

L'écart type de la variable x est défini par $\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$. Lorsqu'il existe et que N est grand, il représente la dispersion des positions par rapport à la moyenne :

- si $\Delta x = 0$, cela signifie que tous les x_i sont égaux, la position est alors parfaitement définie;
- si Δx est grand, la variable x est indéterminée. À la limite, toutes les réalisations de x sont équiprobables.

Un petit calcul montre finalement que

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\langle x \rangle \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}_{\langle x \rangle} + \langle x \rangle^2 \\ &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \end{aligned}$$

Une autre expression de Δx est donc

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (4.7)$$

IV.2. Principe d'indétermination de Heisenberg

Dans l'expérience des trous de Young, l'incertitude spatiale maximale sur la position de l'impact de l'électron le long de l'axe des x sur l'écran est égale à l'épaisseur des bandes claires

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d}. \quad (4.8)$$

Supposons qu'une mesure permette de savoir par quelle fente passe l'électron, entraînant la disparition des interférences. Ce peut être, par exemple, la mesure de la composante verticale $p_x = \vec{p} \cdot \vec{u}_x$ de l'impulsion de la particule. En appliquant la relation de de Broglie, cette quantité s'écrit $p_{x,1} = \frac{h}{\lambda} \sin(\theta_1)$ si la particule est passée par F_1 ou $p_{x,2} = \frac{h}{\lambda} \sin(\theta_2)$ si la particule est passée par F_2 .

Pour que les interférences disparaissent réellement, il est nécessaire que la différence $|p_{x,2} - p_{x,1}|$ soit détectable et donc plus grande que l'incertitude Δp_x sur la mesure de p_x . Réciproquement, une condition pour que l'observation des interférences soit possible est donc

$$|p_{x,2} - p_{x,1}| < \Delta p_x. \quad (4.9)$$

Supposons, comme nous l'avons fait pour obtenir l'expression de Δx , que nous sommes au voisinage du centre de l'écran et donc que les angles θ_1 et θ_2 sont faibles (voir partie gauche de la figure 4.10) ; ainsi $\sin \theta \simeq \theta$ et la relation (4.9) s'écrit

$$\frac{\hbar}{\lambda} |\theta_2 - \theta_1| < \Delta p_x . \quad (4.10)$$

Or, toujours sur cette figure, on peut voir que

$$\sin(\theta_1) \simeq \frac{1}{D} \left(x - \frac{d}{2} \right) \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) \simeq \frac{1}{D} \left(x + \frac{d}{2} \right) .$$

Ainsi, en utilisant l'égalité (4.8), la relation (4.10) s'écrit finalement

$$\frac{\hbar d}{\lambda D} < \Delta p_x \implies \frac{\hbar}{\Delta x} < \Delta p_x .$$

Nous ne pouvons donc pas réduire Δp_x sans augmenter Δx . Par contre, si nous augmentons l'incertitude en x , nous ne pouvons plus détecter les franges. Ainsi, pour améliorer la résolution en impulsion, il faut détériorer la résolution spatiale. En conclusion, si l'on souhaite savoir par quelle fente la particule est passée, on ne pourra plus détecter les franges. Réciproquement, si l'on détecte les franges, on ne peut pas savoir par où est passée la particule !

Le raisonnement effectué ci-dessus se généralise à tout couple de quantités dites *conjuguées*, c'est-à-dire non mesurables simultanément avec une précision arbitraire. Il se démontre dans un contexte très général dans lequel il s'avère être une propriété fondamentale des quantités permettant la représentation des quantons.

Principe 4.2. *Principe d'indétermination de Heisenberg (1927)*

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{et} \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.11)$$

Ce *principe d'indétermination de Heisenberg* est aussi appelé *relation d'incertitude*. Il fut énoncé par Werner Heisenberg au printemps 1927, aux balbutiements de la mécanique quantique. Le terme « principe » est essentiellement historique : les inégalités de Heisenberg ne découlent pas d'un principe spécifique de la mécanique quantique mais découlent de sa structure profonde.

Attention

Indétermination \neq Incertitude

Le terme *incertitude*, qui est souvent utilisé, n'est pas adéquat. En physique, ce terme désigne en effet l'imprécision d'une mesure, imprécision qui peut provenir de l'expérimentateur ou bien de l'appareil de mesure incapable de donner une précision infinie. Or, en mécanique quantique, il n'y a pas de nouvelle imprécision, les grandeurs physiques sont simplement plus ou moins bien *déterminées*.

Cette indétermination est intrinsèque aux phénomènes quantiques, elle n'est pas liée à une mesure.

Ce principe dit qu'il est impossible de mesurer simultanément, avec une précision arbitraire, la position et l'impulsion de la particule. Il recèle également deux conséquences majeures.

- ▶ Aucune particule ne peut être à l'arrêt, même à température nulle (0 K). En effet, on pourrait alors déterminer avec une précision arbitraire son impulsion et sa position, ce qui est impossible.
- ▶ La notion de trajectoire déterministe n'a aucun sens en mécanique quantique ! En effet, s'il existait une trajectoire déterminée pour un quanton, l'expérience d'interférométrie de Mach-Zehnder permettrait de localiser ce quanton avec une précision arbitraire, voire infinie. Ce qui est à nouveau impossible désormais.

IV.3. Application à l'oscillateur harmonique quantique

IV.3.1. Systèmes physiques dans l'approximation des petits mouvements

L'oscillateur harmonique est d'une grande importance en mécanique classique, car il décrit les petites oscillations de systèmes physiques autour d'une position d'équilibre stable. Son importance est du même ordre en mécanique quantique. Plaçons-nous dans le cas d'un mouvement monodimensionnel et examinons le cas des vibrations d'une molécule diatomique dont les deux noyaux sont séparés d'une distance ℓ et dont les masses respectives sont m_1 et m_2 . On prend pour axe des x la droite joignant les deux noyaux et on pose $x = \ell - \ell_0$, où ℓ_0 est la distance entre les deux noyaux lorsque la molécule est dans sa position d'équilibre. On note $\mathcal{E}_p(x)$ l'énergie potentielle d'interaction entre les deux noyaux. L'énergie mécanique de la molécule s'écrit alors $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{v}^2 + \mathcal{E}_p(x)$, où $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse réduite du système et $v = \dot{x}$. Développons $\mathcal{E}_p(x)$ au second ordre au voisinage de la position d'équilibre $x = 0$,

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x=0} x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x=0} x^2 + o(x^2).$$

La valeur de la constante $\mathcal{E}_p(0)$ dépend de l'origine des énergies potentielles que l'on peut donc prendre nulle. D'autre part, $\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x=0} = 0$ car $x = 0$ est position d'équilibre. Si cette position est stable (voir chapitre 11 page 304), alors $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x=0} > 0$ et l'on peut poser $m\omega^2 = \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x=0}$, où ω est la pulsation propre des oscillations autour de la position d'équilibre. On a donc $\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. De son côté, l'énergie cinétique du système est donnée par la relation $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{v}^2$. En faisant apparaître l'impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$ du système, on peut donc l'écrire $\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m}$. Dans les conditions des petites oscillations, l'énergie mécanique de la molécule se met donc sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (4.12)$$

IV.3.2. Énergie du point zéro de l'oscillateur harmonique

La mécanique quantique prévoit l'existence de ce que l'on nomme communément les énergies du « point zéro » qui, dans le cas de cette étude, correspond à la plus basse énergie possible du système quantique considéré.

Énergie du point zéro dans un cadre classique

L'expression (4.12) de l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique montre que \mathcal{E}_m est une grandeur positive ou nulle. Toutes les valeurs de x sont admissibles dans le domaine de validité de l'expression de $\mathcal{E}_p(x)$. En particulier, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p(x = 0) = 0$ est l'énergie mécanique du système lorsqu'il est sans vitesse dans sa position d'équilibre

stable. Cette énergie nulle est donc la valeur minimale que peut avoir un oscillateur harmonique classique.

Énergie du point zéro dans un cadre quantique

En mécanique quantique, il est impossible d'avoir en même temps $x = 0$ et $p_x = 0$. Les valeurs de la position et de la vitesse seraient alors certaines en même temps. C'est-à-dire que l'on aurait $\Delta x \Delta p_x = 0$, en contradiction avec le principe d'indétermination de Heisenberg.

Un oscillateur harmonique quantique ne peut jamais avoir une énergie mécanique nulle, quelles que soient les contraintes qui lui sont imposées.

Contrairement au cas classique, l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique ne peut pas prendre n'importe quelle valeur de \mathbb{R}^+ . Nous allons rechercher la plus petite valeur possible pour l'énergie mécanique, c'est-à-dire l'énergie du point zéro.

On peut considérer ici que la distance ℓ entre les deux noyaux oscille symétriquement autour de la distance ℓ_0 à l'équilibre; la valeur moyenne $\langle x \rangle$ peut donc être choisie nulle, de même que l'impulsion $\langle p_x \rangle$ associée.

Attention

Le fait de considérer que $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p \rangle = 0$ ne signifie absolument pas que $x = 0$ et $p = 0$. Cela est d'ailleurs impossible simultanément en mécanique quantique. Cela signifie que les moyennes des résultats de la mesure de la position et de l'impulsion sont simultanément nulles. C'est bien le cas pour un oscillateur harmonique.

On en déduit que $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ et $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$. Le principe d'indétermination de Heisenberg s'écrit donc ici $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

En calculant la valeur moyenne de l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique, on peut donc obtenir l'estimation

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m \langle x^2 \rangle} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle.$$

Le minimum de la valeur moyenne de l'énergie correspond donc au minimum positif de la fonction $f(u) = \frac{\hbar^2}{8mu} + \frac{1}{2} m \omega^2 u$, où la variable u est la moyenne du carré de la position, $u = \langle x^2 \rangle$. On détermine celui-ci en déterminant la valeur $\tilde{u} > 0$ telle que $f'(\tilde{u}) = 0$ avec $f''(\tilde{u}) > 0$. Un rapide calcul donne $\tilde{u}^2 = \frac{\hbar^2}{4m^2 \omega^2}$, soit $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$. On peut alors calculer la valeur minimale $\mathcal{E}_{m,0} = \langle \mathcal{E}_m \rangle(\tilde{u})$ correspondante pour la moyenne de l'énergie mécanique.

L'énergie moyenne $\langle \mathcal{E}_m \rangle$ d'un oscillateur harmonique quantique vérifie toujours la relation

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle \geq \mathcal{E}_{m,0} = \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (4.13)$$

L'énergie du point zéro $\mathcal{E}_{m,0}$ correspond à celle de son état fondamental.

Lors d'une mesure de la distance $x = \ell - \ell_0$, la dispersion des valeurs mesurées reste limitée à la valeur de $\Delta x = \frac{\hbar}{2m\omega}$: la longueur de la molécule reste confinée au voisinage de sa longueur à vide ℓ_0 . C'est ce confinement dans le potentiel harmonique

qui implique que l'ensemble des énergies possibles forme un ensemble discret et non plus continu comme dans le cas classique.

V. Confinement d'une particule libre

Dans un grand nombre de problèmes physiques, les objets étudiés sont localisés dans un volume donné : chambre d'expérience, bouteille (liquides et gaz), échantillon (électrons dans un conducteur), etc. On peut donc considérer que les particules étudiées sont *confinées* dans une boîte. À l'heure actuelle, on sait faire des boîtes (dites boîtes quantiques) de dimensions nanométriques dans les semi-conducteurs. On sait aussi confiner les électrons dans un plan (puits quantique) de grandes dimensions selon x et y et de dimension nanométrique selon z .

Dans une approche élémentaire, nous allons étudier le comportement d'une particule libre se déplaçant uniquement selon l'axe Ox , c'est-à-dire le cas monodimensionnel, ainsi que l'effet d'un confinement sur l'énergie d'une telle particule.

V.1. Étude d'une particule libre

Une particule est dite *libre* si elle peut se déplacer sans contrainte dans tout l'espace. Elle n'est donc soumise à aucune force. Le principe d'inertie indique qu'une telle particule possède une vitesse \vec{v} qui ne peut pas varier. Dans le cas monodimensionnel, la particule se déplace le long d'un axe, que nous appellerons « l'axe des x », son impulsion s'écrit $\vec{p} = p\vec{u}_x = m\vec{v}$. Son énergie mécanique est uniquement sous forme cinétique et s'écrit donc $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m}$.

La dualité onde-corpuscule permet d'obtenir de nombreuses autres expressions pour cette énergie. En utilisant la longueur d'onde de de Broglie, il vient, par exemple, $\mathcal{E}_m = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$. La particule libre est dans une configuration où son impulsion est parfaitement déterminée. Il en va donc de même pour sa longueur d'onde λ , sa fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ou sa pulsation $\omega = 2\pi\nu$. L'énergie de la particule libre est donc elle aussi parfaitement déterminée, elle s'écrit $\mathcal{E}_m = \frac{h^2\nu^2}{2mc^2} = \frac{\hbar^2\omega^2}{2mc^2}$. On peut utiliser également le vecteur d'onde $\vec{k} = \pm \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_x$, le signe étant relié au sens de déplacement le long de l'axe Ox . Ainsi nous avons finalement $\mathcal{E}_m = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$.

L'énergie d'une particule libre en mouvement unidimensionnel s'écrit sous les formes suivantes

$$\mathcal{E}_m = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2\nu^2}{2mc^2} = \frac{\hbar^2\omega^2}{2mc^2} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}. \quad (4.14)$$

L'énergie d'une particule libre peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive ou nulle.

Sachant que l'impulsion est parfaitement connue, $\Delta p = 0$. La relation d'indétermination de Heisenberg indique alors que $\Delta x \rightarrow \infty$, par conséquent la particule peut être n'importe où sur l'axe des x . La particule libre peut donc être représentée par l'amplitude de probabilité d'une onde sinusoïdale de pulsation ω se propageant à la vitesse v . On montre alors que la probabilité de trouver la particule à l'abscisse x est constante et indépendante de x .

V.2. Confinement de la particule

Étudions à présent le cas dans lequel la particule est confinée entre les deux abscisses $x = 0$ et $x = L$. Conformément à la figure 4.11, on peut modéliser cette situation en imposant à la particule de se déplacer dans un potentiel $V(x) = 0$ si $x \in [0, L]$ et $V(x) = V_0 \rightarrow +\infty$ pour $x < 0$ et pour $x > L$. La force subie par cette particule est l'opposé du gradient de ce potentiel. Classiquement, une particule d'énergie mécanique \mathcal{E}_m capable de pénétrer dans une zone de potentiel V_0 y posséderait une énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_m - V_0 \geq 0$. Il est donc clair que $V_0 \rightarrow +\infty$, alors, quel que soit \mathcal{E}_m , la zone $x < 0$ et $x > L$ est inaccessible. On parle de puits de potentiel.

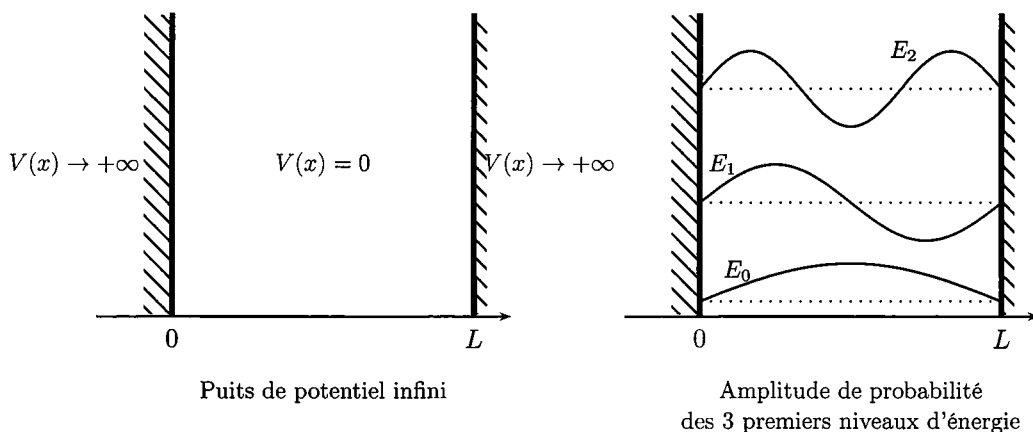


FIG. 4.11. Confinement d'une particule.

En mécanique quantique, et dans ces mêmes conditions, l'amplitude de probabilité de la particule est nulle partout dans la zone $x \in]-\infty, 0] \cup [L, +\infty[$: on a bien potentiellement réalisé un confinement de la particule dans la région $x \in [0, L]$. Bien évidemment, on ne peut pas réaliser physiquement une telle condition et, dans la réalité, le confinement ne peut être réalisé que pour une durée limitée.

► D'un point de vue corpusculaire, on est donc en présence d'une particule libre sur $x \in [0, L]$ et dont l'énergie est purement cinétique, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m}$.

► D'un point de vue ondulatoire, on est en présence d'une onde de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$ caractérisée par une amplitude de probabilité $\underline{a}(x)$ dont le carré du module $|\underline{a}(x)|^2$ représente la probabilité de présence de la particule dans l'intervalle $[0, L]$.

On peut physiquement se convaincre de la continuité de la fonction $\underline{a}(x)$ dans notre cas d'étude. On peut aussi prouver cette continuité en utilisant l'équation vérifiée par la fonction $\underline{a}(x)$. Mais celle-ci n'est pas au programme des CPGE.

Dans le cas du confinement d'une particule dans le puits de potentiel infini de la figure 4.11, l'amplitude de probabilité de la particule est telle que

► $\underline{a}(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0] \cup [L, +\infty[$;

► $\underline{a}(0) = \underline{a}(L) = 0$ par continuité de la fonction $\underline{a}(x)$.

Le fait que $\underline{a}(0) = \underline{a}(L) = 0$ confère la propriété de stationnarité à l'onde associée à la particule confinée.

Nous allons utiliser la forte analogie que présente cette situation avec l'expérience de la corde vibrante de longueur L et dont les extrémités sont fixées. Les amplitudes de déplacement de la corde sont donc strictement nulles en $x = 0$ et $x = L$ (voir chapitre 2 page 29).

Nous savons que dans ce cas, les seules ondes stationnaires que l'on puisse entretenir dans la corde sont celles dont la longueur d'onde est telle que les points $x = 0$ et $x = L$ soient des nœuds de vibrations. Si l'analogie est complète, ce que nous admettrons ici, nous pouvons donc supposer que l'onde associée à la particule confinée ne peut exister que si sa longueur d'onde est telle que les points $x = 0$ et $x = L$ soient des nœuds de sa vibration. Conformément aux résultats obtenus pour la corde de Melde, cette condition se trouve formalisée en imposant que $\lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

L'onde ne peut exister dans le puits de potentiel que si sa longueur d'onde λ_n est liée à la largeur L du puits par la relation

$$(n + 1) \frac{\lambda_n}{2} = L \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \quad (4.15)$$

En incorporant cette restriction $\lambda = \lambda_n$ dans la relation (4.14), on obtient les valeurs possibles de l'énergie de la particule confinée.

Le confinement spatial du mouvement d'une particule est à l'origine de la *quantification* de son énergie : celle-ci ne peut prendre que des valeurs discrètes

$$\mathcal{E}_n = (n + 1)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \quad (4.16)$$

On appelle *fondamental*, l'énergie \mathcal{E}_0 la plus basse que peut posséder la particule,

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2.$$

La dualité onde-corpuscule et l'analogie avec le problème de la corde de Melde permettent donc de dégager certains aspects du comportement quantique d'un quanton libre dans une boîte. Nous en retiendrons trois.

► **L'énergie d'un quanton confiné est quantifiée.**

Cette énergie ne peut prendre que certaines valeurs définies à partir d'un nombre entier. Ce résultat est différent de celui fourni par la mécanique classique qui autorise toutes les valeurs positives de l'énergie (on parle de continuum) pour la même particule.

► **Un quanton confiné possède un état fondamental.**

L'énergie la plus basse est strictement supérieure à zéro. En mécanique classique, une particule immobile dans un tel puits aurait une énergie nulle. Encore une fois, on peut en déduire que leur aspect ondulatoire interdit l'immobilité aux quantons. Le constat est identique avec l'oscillateur harmonique : ce n'est pas la forme du puits qui induit cette propriété, c'est bel et bien le principe d'indétermination de Heisenberg.

► Dans certaines configurations, on peut mettre en évidence l'**existence potentielle de nœuds pour la probabilité de présence**. On peut en déduire l'existence, dans ces configurations, de certaines positions où le quanton ne peut pas être trouvé. Cette possibilité est inenvisageable en mécanique classique.

VI. Exercices

1. Constante de Planck ★

(solution page 671)

En physique, les unités de Planck constituent un système uniquement défini à l'aide de constantes physiques fondamentales. À l'échelle de ces unités (en durée, longueur, densité ou température), il faut considérer à la fois les effets de la mécanique quantique et ceux de la relativité générale. Mais cela nécessite une théorie de la gravité quantique, qui n'existe pas encore. L'absence d'une théorie quantique de la gravitation oblige à limiter toute théorie à des énergies plus petites que l'énergie de Planck que l'on note \mathcal{E}_{pl} .

1. En utilisant des arguments dimensionnels, construire \mathcal{E}_{pl} en fonction de la constante de gravitation \mathcal{G} , de la constante de Planck réduite \hbar , ainsi que de la vitesse de la lumière dans le vide c . Calculer sa valeur numérique.
2. La longueur de Planck serait, dans l'état actuel de la physique, la longueur minimale qu'il soit possible de mesurer de façon significative. Exprimer la longueur de Planck \mathcal{L}_{pl} à l'aide des trois constantes fondamentales utilisées dans la question précédente. Faire l'application numérique.
3. Le temps de Planck \mathcal{T}_{pl} est la plus petite mesure temporelle ayant une signification physique dans le cadre de nos théories présentes. Exprimer le temps de Planck \mathcal{T}_{pl} toujours à l'aide des trois mêmes constantes fondamentales et donner sa valeur numérique.

2. Différents photons ★

(solution page 672)

Un tube à rayons X émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_X = 0,50 \text{ nm}$ avec une puissance $\mathcal{P}_X = 0,20 \text{ W}$; un émetteur de radio irradie avec une puissance $\mathcal{P}_r = 1,2 \text{ kW}$ sous une fréquence $\nu_r = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$; une lampe au sodium émet une lumière jaune de longueur d'onde $\lambda_s = 590 \text{ nm}$ avec une puissance $\mathcal{P}_s = 40 \text{ W}$.

Pour chacune de ces sources de photons, calculer l'énergie de chaque photon émis ainsi que le nombre de photons émis par seconde. On exprimera l'énergie en électronvolts.

3. Étude d'une cellule photoélectrique au potassium ★ (solution page 672)

La cathode d'une cellule photoélectrique au potassium est éclairée par deux radiations lumineuses monochromatiques différentes de longueurs d'ondes respectives $\lambda = 490 \text{ nm}$ et $\lambda = 660 \text{ nm}$. La puissance $\mathcal{P} = 9,00 \cdot 10^{-7} \text{ W}$ de ces deux sources de rayonnement est la même. Le travail d'extraction d'un électron du potassium est $W_0 = 2,25 \text{ eV}$.

1. Les deux radiations permettent-elles l'émission d'électrons ?
2. Déterminer l'expression de la vitesse des électrons émis par la cathode et calculer sa valeur numérique.
3. On observe que l'intensité du courant de saturation est $I_s = 4,00 \cdot 10^{-8} \text{ A}$. Déterminer le rendement quantique de la cellule, c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus. On supposera que tous les électrons émis participent au courant de saturation.

4. Expériences de Young avec des électrons ★ (solution page 673)

On considère des expériences de fentes de Young réalisées avec des quantons, telles que celle décrite sur la partie gauche de la figure 4.10 (voir page 101).

1. Dans une première expérience réalisée avec des électrons, la source est constituée par une cathode chauffée qui émet des électrons supposés sans vitesse initiale. Ces électrons sont accélérés par une différence de potentiel $U = 5,00 \cdot 10^3 \text{ V}$ et sont alors introduits dans l'interféromètre. On donne $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. La distance entre les fentes sera prise égale à $d = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ et la distance entre le plan des fentes et l'écran sera $D = 1,00 \text{ m}$. En utilisant les relations de de Broglie, déterminer l'expression et la valeur de l'interfrange.

2. Dans l'expérience de Shimizu, les quantons considérés sont des atomes de néon ultrafroids. Le néon possède une masse atomique de 20,0 u.m.a. (l'unité de masse atomique est définie par 1 u.m.a. = $1,60 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$). Dans le dispositif expérimental, la distance des fentes à la platine où sont détectés les atomes est $D = 113 \text{ mm}$ et la distance entre les fentes est $d = 6,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Les atomes ont une vitesse moyenne $\langle v \rangle = 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ au niveau des fentes.

a/ Déterminer l'expression et la valeur de l'interfrange.

b/ Sachant que les atomes d'un gaz à l'équilibre ont une vitesse d'agitation thermique $v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$, où m est la masse d'un atome, quelle est la longueur d'onde associée à des atomes de néon à la température ambiante $T = 300 \text{ K}$? On rappelle la valeur de la constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

c/ À quelle température Shimizu a-t-il été contraint de refroidir les atomes pour que leur vitesse thermique v_{th} soit inférieure à la vitesse moyenne $\langle v \rangle = 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, intentionnellement donnée aux atomes au niveau des fentes?

5. Effet photoélectrique en mécanique classique ★★ (solution page 673)

Une feuille d'aluminium est placée à une distance $d = 1,00 \text{ m}$ d'une source lumineuse qui émet dans tout l'espace de manière isotrope et dont la puissance est $\mathcal{P} = 1,00 \text{ W}$. L'objectif de cet exercice est de montrer, par le calcul, l'incohérence de la mécanique classique. On se place donc dans l'hypothèse d'un comportement ondulatoire classique pour la lumière et on suppose que l'électron éjecté par effet photoélectrique recueille son énergie dans un disque de rayon $r = 0,10 \text{ nm}$. On rappelle que le travail nécessaire à l'extraction d'un électron de l'aluminium est $W_0 = 2,15 \text{ eV}$.

Calculer le temps nécessaire à l'électron pour absorber suffisamment d'énergie afin de pouvoir s'extraire de la feuille d'aluminium. Conclure!

Chapitre 5

CIRCUITS ÉLECTRIQUES DANS L'ARQS

CE CHAPITRE permet d'introduire les lois fondamentales sur le courant et la tension électriques dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS). Cette approximation n'est valable que pour des évolutions suffisamment lentes (basses fréquences), mais cette hypothèse est habituellement vérifiée dans les circuits électriques étudiés en travaux pratiques.

Après les nombreux travaux au XVII^e siècle sur la conception de machines électrostatiques pour produire des charges électriques, les études suivantes ont surtout concerné le stockage de l'électricité à l'aide de condensateurs, dont le premier, appelé bouteille de Leyde, a été fabriqué en 1745 par Petrus van Musschenbroek (1692-1761) dans la ville de Leyde.

C'est en 1800, avec Alessandro Volta (1745-1827), que naît la première pile électrique, obtenue en empilant des disques de cuivre et de zinc séparés par des disques de feutre imbibés d'acide. Sa découverte, fondamentale pour l'utilisation de l'électricité de manière continue¹, a permis de nombreux et rapides développements. Les premières lois sur le courant et la tension électriques, termes introduits par André-Marie Ampère (1775-1836), voient le jour en 1827 avec la loi d'Ohm, et en 1845 les deux principales lois sur les circuits (loi des mailles et loi des nœuds) ont été établies par Kirchhoff.



Alessandro Volta

I. Courant électrique

I.1. Courant électrique et porteurs de charges

Définition 5.1. *Courant électrique*

Le courant électrique représente le déplacement d'ensemble de particules chargées.

Un exemple de particule chargée est l'électron (charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Plus généralement, un édifice atomique est constitué notamment de protons (charge $+e$) et d'électrons en nombres inégaux. Ainsi la charge électrique d'un ion est nécessairement multiple de e , on dit que la charge est *quantifiée*.

Les charges qui participent à la conduction du courant peuvent être de nature différente suivant le système considéré :

► **conducteur métallique** : ce sont les électrons libres du métal qui permettent la conduction du courant (dans un conducteur comme le cuivre, il y a environ 10^{29} électrons libres par m^3 : chaque atome en libère un en moyenne, et la distance interatomique dans un métal est de l'ordre de 10^{-10} m) ;

1. Les machines électrostatiques ou la bouteille de Leyde n'étaient utilisées que lors de décharges électriques, donc sur de courtes durées.

► **solution électrolytique** : les ions présents dans la solution servent à conduire le courant électrique ;

► **semi-conducteur** : il existe deux types de semi-conducteurs, selon le type de porteur de charge mis en jeu. Dans les semi-conducteurs de type N (N comme négatif), ce sont les électrons libres, tout comme dans les métaux, alors que dans ceux de type P (P comme positif), ce sont des « trous » qui permettent la conduction électrique (un « trou » correspond à un électron manquant au voisinage d'un atome, ce déficit pouvant se déplacer dans la structure du semi-conducteur comme le font les électrons libres). Un semi-conducteur, comme le silicium ou le germanium, conduit moins bien le courant qu'un conducteur métallique (le nombre de porteurs par unité de volume est de l'ordre de 10^{20} par m^3) ; néanmoins ses propriétés le rendent très intéressant, et toute l'électronique moderne en utilise (diodes, transistors, etc.).

Remarque Par convention, le sens réel du courant est le sens de déplacement des charges positives. Dans un conducteur métallique, le courant électrique correspond à un déplacement d'électrons : le déplacement des charges est donc de sens opposé à celui du courant électrique.

I.2. Intensité du courant électrique

Définition 5.2. Intensité du courant électrique

L'intensité i du courant électrique est définie comme le débit de charges à travers une surface orientée (S) du conducteur : c'est la charge algébrique δq qui traverse la surface (S) pendant l'intervalle de temps dt .

$$i = \frac{\delta q}{dt}$$

Elle s'exprime en ampère (A) ; $1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le signe de i dépend d'une convention d'orientation de la portion de conducteur considérée (voir figure 5.1). Il est nécessaire de choisir un sens positif ; néanmoins, si l'intensité du courant électrique est négative, cela signifie simplement que le sens du courant est opposé au sens positif choisi, et non que le courant est négatif.

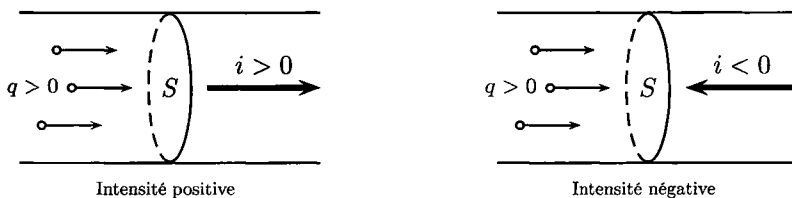


FIG. 5.1. L'intensité est une grandeur algébrique. Pour une surface (S) d'un conducteur et un déplacement des charges donnés, l'intensité i est positive ou négative selon l'orientation choisie (flèche en gras).

Ordres de grandeur 5.3. Intensités

La valeur absolue de l'intensité du courant électrique donne son importance, et ses valeurs sont assez étendues : en électronique, l'intensité du courant électrique est de l'ordre de quelques mA ; dans les appareils ménagers, elle est de l'ordre de l'ampère (par exemple, les fusibles pour des plaques de cuisson électriques sont de 16 A), de la dizaine d'ampères dans la soudure à l'arc, monte à 500 A dans les lignes à haute tension, 10^3 A pour l'alimentation des trains et atteint environ $5 \cdot 10^4$ A avec la foudre.

II. Tension et potentiel

La seconde grandeur fondamentale dans l'étude des circuits électriques est la tension.

Définition 5.4. Tension

La tension est la grandeur algébrique, additive, mesurée par un voltmètre entre deux points A et B. Elle s'exprime en volt (V) dans le système international (SI). Une tension est toujours mesurée entre deux points d'un circuit et correspond à la différence de potentiel entre eux,

$$U_{AB} = V_A - V_B,$$

où U_{AB} est la tension aux bornes de AB, V_A et V_B les potentiels des points A et B.

Sur un schéma électrique, la tension U_{AB} s'indique par une flèche orientée de B vers A. Cette orientation est arbitraire, mais doit être précisée, comme pour toute grandeur algébrique. Si la tension est négative, cela signifie que le point B est le point de potentiel le plus élevé. Aucun appareil ne peut mesurer un potentiel, car c'est une grandeur définie à une constante près. On fixe souvent le potentiel d'un point du circuit à une valeur nulle.

Définition 5.5. Masse d'un circuit

Dans un circuit, l'origine des potentiels est choisie arbitrairement et s'appelle la masse. Les potentiels des autres points du circuit sont alors repérés par rapport à elle. Le symbole de la masse est représenté sur la figure 10.2.



FIG. 5.2. Masse

Il ne faut pas confondre la masse et la terre : la terre est le conducteur formé par la planète Terre qui est de potentiel constant. La terre peut être choisie comme masse puisqu'elle est de potentiel constant, mais ce n'est pas systématique. La plupart des appareils sont reliés à la terre par mesure de sécurité : si un courant accidentel passait dans la carcasse de l'appareil au moment où un utilisateur la touche, cela pourrait

lui être fatal, mais si l'appareil est relié à la terre, le courant ira directement à la terre, sans passer par l'utilisateur puisque la résistance du corps humain est bien plus grande que celle des fils qui vont à la terre². Dans ce cas, on choisit la terre comme masse, et il faut relier toutes les masses entre elles dans le circuit afin de ne pas avoir

2. Notons qu'un tel défaut d'isolement provoquerait le déclenchement du disjoncteur différentiel dans une installation électrique conforme aux normes.

de court-circuit. Les appareils non reliés à la terre sont dits à masse flottante, ce qui permet de choisir la masse où l'on veut dans le circuit, sans risque de court-circuit.

Ordres de grandeur 5.6. Tensions

La tension d'alimentation d'un appareil nomade (téléphone portable, lecteur audio, etc.) est de quelques volts ; la tension d'alimentation du métro parisien est de 750 V ; la tension entre les nuages et la terre lors d'orages dépasse le milliard de volts. Dans le domaine des tensions alternatives (voir section II du chapitre 7), la tension de secteur est de 220 V en valeur efficace, 25 kV pour une ligne TGV et de 150 à 500 kV pour les lignes à haute tension.

III. Lois de Kirchhoff, ARQS

Gustav Kirchhoff (1824-1887), physicien allemand, est le père de la spectroscopie moderne avec Robert Bunsen (ils ont remarqué que chaque élément chimique est caractérisé par un ensemble de raies caractéristiques, qui constitue sa « signature »), mais il est essentiellement connu pour ses travaux sur les réseaux électriques qu'il a effectués en 1845, alors qu'il était étudiant. Il participait à un projet de recherche des séminaires *mathematisch-physikalisches* créés par Franz Neumann, un des pères de l'induction, et par Carl Jacobi, mathématicien réputé, à l'université de Königsberg. L'ensemble prend actuellement la forme de la loi des mailles pour la tension, et de la loi des nœuds pour le courant électrique (respectivement pages 117 et 116).



Gustav Kirchhoff

III.1. Réseau

III.1.1. Dipôle électrocinétique

On appelle dipôle électrocinétique, ou plus simplement dipôle, un composant électrique qui possède deux bornes, une d'entrée et une de sortie du courant. La tension à ses bornes est la différence de potentiel entre ses deux bornes. Dans la suite, les dipôles seront reliés entre eux pour former un réseau électrique.

III.1.2. Association en série ou en parallèle

Des dipôles consécutifs sont dits *en série* s'ils sont parcourus par le même courant. Des dipôles qui ont leurs bornes communes sont dits *en parallèle*. Sur la figure 5.3, les dipôles D_7 et D_8 sont en série alors que les dipôles D_2 et D_5 sont en parallèle.

Attention

Des dipôles ne sont pas forcément en série ou en parallèle. Par exemple, sur la figure 5.3, les dipôles D_2 et D_4 ne sont ni en série ni en parallèle, de même que D_3 et D_7 , ou D_3 et D_4 .

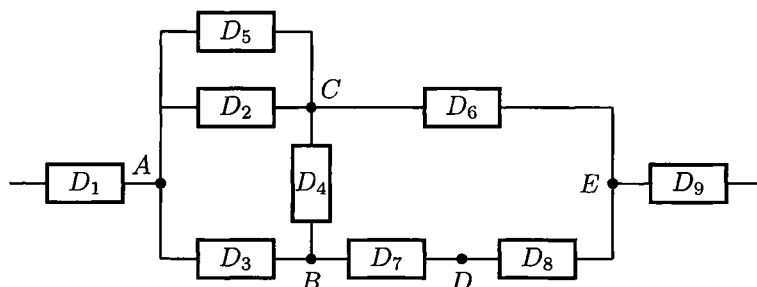


FIG. 5.3. Exemple de réseau.

III.1.3. Description d'un réseau

On appelle *nœud* une borne commune à au moins trois dipôles, et branche une portion de circuit qui comporte un ou des dipôles en série. Une *maille* est un circuit fermé dans le réseau, et qui ne passe qu'une seule fois par les nœuds rencontrés. Considérons le réseau fictif de la figure 5.3, où les composants sont des dipôles quelconques. Les points \$A, B, C\$ et \$E\$ sont des nœuds, mais pas le point \$D\$. Les portions \$AB, BDE\$ et \$CE\$ sont des exemples de branches. Le chemin fermé \$ACEDBA\$ est une maille, tout comme \$ACBA\$ et \$BCEDB\$.

III.2. Loi des nœuds, ARQS

III.2.1. Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

Le courant électrique³ et le potentiel se propagent dans un conducteur à la vitesse de la lumière dans le vide, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. *A priori*, ces grandeurs dépendent donc du point \$M\$ du circuit et de l'instant \$t\$ considéré. Ainsi, pour deux points \$M\$ et \$P\$, nous pouvons écrire pour l'intensité du courant électrique

$$i(P,t) = i\left(M, t - \frac{PM}{c}\right).$$

Le terme PM/c représente le retard dû à la propagation entre \$M\$ et \$P\$: le courant en \$P\$ à l'instant \$t\$ est celui qu'il y avait en \$M\$ à l'instant $t - PM/c$. Cela complique *a priori* l'étude des circuits électriques : cela signifie par exemple que le courant n'est pas le même en tout point d'un fil électrique à un instant donné. Néanmoins, nous allons voir que nous pourrions négliger le terme de retard dans la suite du cours.

Définition 5.7. Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

Lorsque $T \gg \frac{d}{c}$, avec \$d\$ la dimension caractéristique du circuit et \$T\$ le temps caractéristique d'évolution de l'intensité (par exemple, la période du signal), le terme de retard est négligeable : à un instant donné, le courant est le même en tout point du conducteur. Le circuit fonctionne alors dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, ou quasi permanents (dans ce cas, on parle d'ARQP).

3. Et non les charges, qui se déplacent très lentement, à des vitesses de l'ordre du millimètre par seconde, voire moins ! C'est leur déplacement de proche en proche qui compte, et non leur vitesse individuelle : exactement comme lorsqu'on ouvre le robinet, l'eau coule immédiatement, sans avoir besoin d'attendre qu'elle arrive du château d'eau.

EXEMPLE 5.8.

À 50 Hz, on trouve $cT \simeq 60 \cdot 10^2$ km, donc il faut $d \ll 60 \cdot 10^2$ km. À la fréquence du réseau électrique, l'ARQS est donc largement valable pour tout circuit !

La taille typique des circuits étudiés est de l'ordre du mètre (voire moins). Dans ce cas, il faut que la fréquence f du signal vérifie $f \ll \frac{c}{d} \simeq 100$ MHz. Pour des fréquences supérieures, l'approximation n'est plus valide, mais en travaux pratiques, il n'y aura pas à s'en préoccuper.

Dans toute la suite du cours, les lois applicables, et démontrées, en régime permanent le seront aussi dans le cadre de l'ARQS.

III.2.2. Loi des nœuds**Loi 5.9. Conservation de la charge**

La charge électrique est une grandeur conservative : la variation de la charge électrique d'un système physique ne peut être due qu'à des transferts de charges avec l'extérieur du système. Il ne peut pas y avoir création ou destruction de la charge électrique.

La charge étant une propriété intrinsèque des particules fondamentales, sa conservation est un aspect important (un principe) de la physique moderne.

Remarque Néanmoins, des particules chargées peuvent apparaître ou disparaître, en respectant la conservation de la charge totale, par exemple lors de collisions dans les accélérateurs de particules.

En régime permanent (ou dans le cadre de l'ARQS), il n'y a pas d'accumulation de charge en un point d'un conducteur ; ainsi l'intensité du courant électrique se conserve à travers toute section d'un conducteur.

Théorème 5.10. Intensité en régime permanent

En régime permanent, l'intensité du courant électrique se conserve à travers toute section d'un conducteur.

La loi des nœuds est une conséquence directe du théorème précédent : la charge qui arrive à un nœud N doit nécessairement se retrouver après ce nœud. L'intensité qui arrive en N est donc égale à celle qui en repart.

Loi 5.11. Loi des nœuds

En un nœud N d'un réseau électrique sur lequel arrivent p branches parcourues par des courants I_k (voir figure 5.4),

$$\sum_{k=1}^p \varepsilon_k I_k = 0$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant est orienté vers N , et $\varepsilon_k = -1$ s'il s'éloigne de N .

Cette loi est valable en régimes continu et variable, à condition de se placer dans le cadre de l'ARQS.

Sur l'exemple de la figure 5.4, la loi des nœuds en N s'écrit

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

ce qui peut aussi s'écrire $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$, c'est-à-dire que le courant qui arrive sur un nœud est égal à celui qui en part.

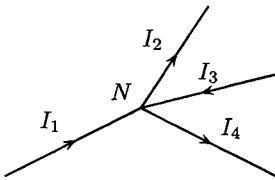


FIG. 5.4. Loi des nœuds.

La formulation algébrique de la loi des nœuds souligne bien l'importance de l'orientation du courant électrique sur un circuit. En revanche, le choix de l'orientation est arbitraire.

III.3. Loi des mailles

Constatons tout d'abord qu'entre des nœuds, les tensions se calculent selon des propriétés similaires à la relation de Chasles en mathématique : puisque $V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C)$, alors $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$. Le long d'une maille, la somme des différences de potentiels est nulle puisque l'on revient au point de départ ; cela permet d'écrire la loi des mailles.

Loi 5.12. Loi des mailles

Le long d'une maille orientée (le choix de l'orientation est arbitraire) comportant p dipôles

$$\sum_{k=1}^p \varepsilon_k U_k = 0$$

où U_k est la tension aux bornes du dipôle k , avec $\varepsilon_k = +1$ si elle est dans le sens positif choisi pour la maille, et $\varepsilon_k = -1$ sinon.

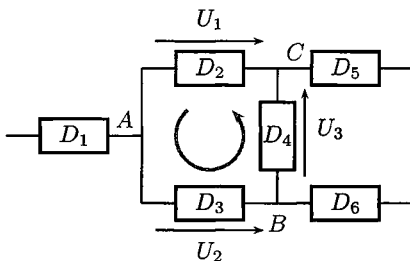


FIG. 5.5. Loi des mailles.

Cette loi est valable en régimes continu et variable, à condition de se placer dans le cadre de l'ARQS. Considérons l'exemple de la figure 5.5, où les tensions des dipôles sont orientées arbitrairement. La loi des mailles sur la maille $ABCA$ (orientée dans ce sens) s'écrit

$$-U_2 - U_3 + U_1 = 0.$$

Si l'orientation inverse avait été choisie ($ACBA$), tous les signes auraient été changés, mais il est clair que cela ne modifie en rien la relation entre les tensions.

IV. Puissance et conventions pour les dipôles

IV.1. Puissance reçue - Convention récepteur

Considérons le dipôle AB de la figure 5.6 orienté selon la convention récepteur, c'est-à-dire avec tension et courant de sens opposés.

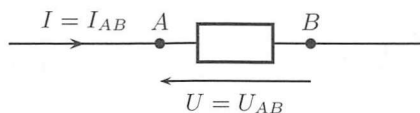


FIG. 5.6. Dipôle en convention récepteur.

Définition 5.13. Puissance reçue en convention récepteur

On appelle puissance \mathcal{P}_r , reçue algébriquement par le dipôle AB , la grandeur définie par

$$\mathcal{P}_r = U_{AB}I_{AB} = UI.$$

Le dipôle est en convention récepteur (voir figure 5.6). La puissance s'exprime en watt (W).

La tension et le courant peuvent dépendre du temps, la puissance est donc une grandeur instantanée.

Ordres de grandeur 5.14. Puissances électriques

Un téléphone portable consomme une puissance d'environ 1 W, une ampoule électrique classique 50 W, un ordinateur ou un téléviseur quelque 100 W et un four électrique (ou un appareil avec une résistance chauffante) environ 1 kW. Une centrale nucléaire produit approximativement 1 GW, et le parc électrique français représente 100 GW (en moyenne, seuls 80 GW sont utilisés).

Remarque On appelle kWh (kilowattheure) l'énergie reçue pendant une heure pour une puissance d'un kilowatt. Un kWh représente donc 3,6 MJ. C'est l'unité d'énergie employée dans les factures électriques. La consommation journalière et par habitant en France est d'environ 6 kWh.

La puissance reçue est une grandeur algébrique qui est :

- ▶ positive si le dipôle est récepteur (tension et intensité de même signe) : il reçoit de l'énergie électrique de l'extérieur et la convertit en un autre type d'énergie (effet Joule pour une résistance chauffante, énergie mécanique pour un moteur, etc.) ;
- ▶ négative si le dipôle est générateur : il cède de l'énergie électrique au circuit (pile électrochimique, alternateur, etc.).

Remarque Dans la convention récepteur, la puissance cédée algébriquement par le dipôle est $-UI = -U_{AB}I_{AB}$.

IV.2. Convention générateur

Il existe une autre convention usuelle, dans laquelle tension et courant sont orientés dans le même sens : la convention générateur (voir figure 5.7).

Définition 5.15. Puissance cédée en convention générateur

On appelle puissance \mathcal{P}_c , cédée algébriquement par le dipôle AB , la grandeur définie par

$$\mathcal{P}_c = U_{AB} I_{BA} = UI.$$

Le dipôle est en convention générateur (voir figure 5.7). La puissance s'exprime en watt (W).

La puissance reçue est donc l'opposé de la puissance cédée. Cette convention est plus adaptée pour les générateurs, mais le choix de la convention reste arbitraire et n'a pas d'importance fondamentale.

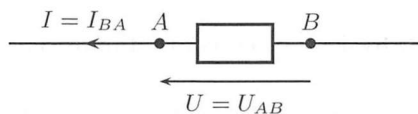


FIG. 5.7. Dipôle en convention générateur.

La puissance cédée est une grandeur algébrique qui est :

- ▶ positive si le dipôle cède effectivement de l'énergie (pile électrochimique en utilisation usuelle, alternateur, etc.) ;
- ▶ négative si le dipôle reçoit de l'énergie (résistance, ampoule électrique, etc.).

Synthèse

Convention récepteur ou générateur

Le choix de la convention est arbitraire et n'a pas d'importance fondamentale. Néanmoins, il est nécessaire de préciser pour chaque dipôle étudié quelle est la convention utilisée, en représentant la tension à ses bornes et le courant qui le traverse sur le schéma du circuit.

Quant à la puissance, il importe de préciser si la puissance calculée est la puissance reçue ou cédée (algébriquement) par le dipôle.

V. Dipôles linéaires classiques

Définition 5.16. Dipôle linéaire

Un dipôle est dit linéaire lorsqu'il existe :

- ▶ soit une relation affine entre i et u ;
- ▶ soit une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant i et u .

Il existe de nombreux dipôles linéaires, dont nous allons étudier les principaux représentants : la résistance, la bobine et le condensateur.

V.1. Résistance

Loi 5.17. Loi d'Ohm (1827)

Une résistance est un conducteur qui satisfait à la loi d'Ohm

$$u = \pm Ri$$

avec un signe positif en convention récepteur (voir figure 5.8) et négatif en convention générateur. Le facteur $R \geq 0$ est la valeur de la résistance et s'exprime en ohm (Ω).

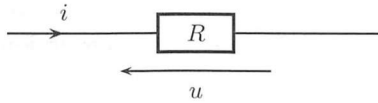


FIG. 5.8. Résistance en convention récepteur : $u = Ri$.

La loi d'Ohm est un modèle. Une étude plus fine du transport des électrons dans le réseau cristallin du conducteur métallique permet de justifier le caractère linéaire de la loi d'Ohm, et de relier la résistance aux caractéristiques microscopiques du conducteur. La caractéristique d'une résistance (voir figure 5.22 page 133) est une droite passant par l'origine de pente $1/R$. C'est un dipôle symétrique et passif. On utilise souvent la conductance $G = 1/R$, exprimée en siemens (S), telle que $i = \pm Gu$ suivant la convention choisie. Les valeurs typiques de résistance utilisées en travaux pratiques vont d'une centaine d'ohms à une centaine de kilohms. En convention récepteur, la puissance électrique reçue par une résistance est



Georg Ohm

$$\mathcal{P}(t) = u(t) i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} > 0.$$

Elle est positive, la résistance se comporte toujours comme un récepteur.

Nous pouvons aussi exprimer l'énergie électrique reçue par la résistance sur un intervalle de temps $[0; t]$ par l'intégrale

$$\int_0^t \mathcal{P}(t) dt > 0.$$

Il faudrait connaître l'expression de la puissance instantanée pour pouvoir expliciter l'intégrale. Cette énergie reçue provoque l'échauffement de la résistance. En effet, l'énergie est cédée par les électrons aux atomes du réseau cristallin lors de chocs désordonnés, ce qui provoque l'augmentation de l'énergie cinétique microscopique (agitation thermique) du milieu. Ce phénomène thermique s'appelle l'*effet Joule* et est toujours présent, sauf dans les supraconducteurs⁴. Les applications sont nombreuses : chauffage électrique, fer à repasser, four électrique, lampe à incandescence, etc.

4. Matériaux dont la résistance devient rigoureusement nulle en dessous d'une certaine température.

V.2. Condensateur

V.2.1. Modèle du condensateur idéal

Définition 5.18. Condensateur

Un condensateur est composé de deux surfaces conductrices, appelées armatures, qui s'entourent ou se font face, et qui sont séparées par un isolant (également appelé diélectrique). Les armatures portent des charges opposées $+q$ et $-q$.

La justification du fait que les charges portées par les armatures sont opposées sera donnée dans le cours de seconde année. Dans la suite, nous allons travailler avec le modèle du condensateur parfait.

Définition 5.19. Modèle du condensateur parfait

Le modèle du condensateur parfait consiste à supposer qu'aucune charge ne traverse l'isolant. La charge q est alors proportionnelle à la tension u entre les armatures (voir figure 5.9)

$$q = Cu.$$

Le coefficient de proportionnalité C est la capacité du condensateur, grandeur positive qui s'exprime en farad (F).

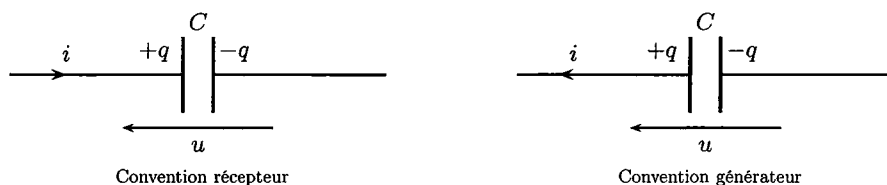


FIG. 5.9. Relation charge-courant d'un condensateur.

Remarque Le choix de l'orientation de u et celui de l'armature sur laquelle la charge est notée q sont arbitraires. Avec le choix de la figure 5.9, $q = +Cu$; tension u et charge q , qui sont des grandeurs algébriques, sont alors de même signe puisque $C > 0$.

Les valeurs de capacité rencontrées en travaux pratiques sont situées entre le picofarad et le microfarad.

La charge d'un condensateur peut varier du fait de l'existence d'un courant électrique. Les charges électriques ne traversent pas l'isolant, mais peuvent arriver sur ou quitter une armature. La conservation de la charge implique que ce courant soit égal en valeur absolue à la variation de la charge q des armatures en fonction du temps, le signe dépendant des orientations choisies (voir figure 5.9).

Dans le cadre de la convention récepteur, si q augmente, alors i est positif⁵, donc $i = \frac{dq}{dt}$. Alors qu'en convention générateur, si q augmente, cela signifie que i est négatif, d'où $i = -\frac{dq}{dt}$. Les deux relations précédentes et la définition 5.19 de la capacité, toujours valable, permettent d'obtenir la relation entre le courant et la tension pour un condensateur de capacité C .

5. Le courant électrique correspond au déplacement des charges positives.

Synthèse**Condensateur parfait**

Pour un condensateur en convention récepteur (voir figure 5.9), $i = C \frac{du}{dt}$;
 en convention générateur, $i = -C \frac{du}{dt}$.

On peut alors en déduire la propriété importante suivante.

En régime continu (grandeurs indépendantes du temps), la tension u est constante, donc $i = 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

V.2.2. Aspects énergétiques

Considérons un condensateur en convention récepteur. La puissance électrique qu'il reçoit est donnée par

$$\mathcal{P} = ui = Cu \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Elle peut être positive ou négative, ce qui signifie que le condensateur peut avoir un comportement récepteur (en charge) ou générateur (en décharge).

De la relation précédente, on déduit l'énergie \mathcal{E} emmagasinée par le condensateur.

Définition 5.20. Énergie emmagasinée par un condensateur

On appelle énergie emmagasinée par un condensateur de capacité C la quantité

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Cu^2.$$

Cette énergie provient du reste du circuit et ne peut pas être discontinuée dans le temps (autrement la puissance serait infinie), donc la tension aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps.

Attention**Tension aux bornes d'un condensateur**

La tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue.

V.2.3. Condensateur réel

Dans le modèle du condensateur parfait, les charges électriques ne traversent pas l'isolant, mais dans la réalité l'isolant n'est pas parfait (sa résistance n'est pas infinie) et il y a toujours quelques fuites⁶ ; il est alors nécessaire de modéliser le condensateur de manière plus précise. On adopte le modèle RC parallèle, où la résistance R_f , appelée résistance de fuite, modélise la grande résistance (dans la pratique, quelques $M\Omega$) de l'isolant non idéal (voir figure 5.10). Dans la suite, sauf mention contraire, nous n'utiliserons que le modèle du condensateur parfait.

6. Remarquons que si la tension dépasse une valeur maximale, appelée tension de claquage, le courant traverse l'isolant qui est détruit.

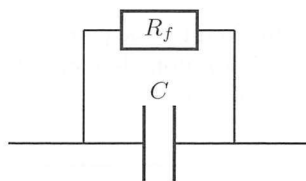


FIG. 5.10. Condensateur réel.

V.3. Bobine

V.3.1. Modèle de la bobine idéale

Définition 5.21. *Bobine parfaite*

Une bobine idéale (voir figure 5.11) est un enroulement de fils, siège de phénomènes d'induction conduisant à la relation

$$u = L \frac{di}{dt}$$

en convention récepteur (signe opposé en convention générateur). Le facteur L est le coefficient d'induction (souvent appelé inductance) de la bobine, grandeur positive exprimée en henry (H).

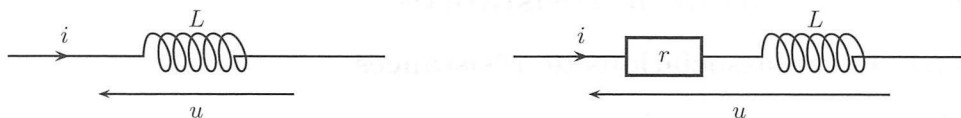


FIG. 5.11. Bobines idéale (à gauche) et réelle (à droite).

Les valeurs typiques, en travaux pratiques, d'une inductance sont comprises entre quelques mH et 1 H.

En régime permanent, i est constant, donc $u = 0$: la bobine se comporte comme un fil (court-circuit).

V.3.2. Aspects énergétiques

La puissance électrique reçue par la bobine est donnée par

$$\mathcal{P} = ui = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Elle peut être positive ou négative, ce qui signifie que la bobine peut avoir un comportement récepteur ou générateur.

La relation précédente permet de définir l'énergie \mathcal{E} emmagasinée par la bobine (sous forme magnétique).

Définition 5.22. *Énergie magnétique emmagasinée par une bobine*

On appelle énergie emmagasinée par une bobine d'inductance L la quantité

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2.$$

Cette énergie provient du reste du circuit et ne peut pas être discontinuée dans le temps (autrement la puissance serait infinie), donc le courant qui circule dans la bobine est toujours une fonction continue du temps.

Attention Courant dans une bobine

Le courant qui circule dans une bobine est une grandeur continue dans le temps.

V.3.3. Bobine réelle

En pratique, il est souvent nécessaire de tenir compte de la résistance des fils constituant l'enroulement⁷ (voir figure 5.11) et d'écrire (toujours en convention récepteur)

$$u = ri + L \frac{di}{dt}.$$

Par exemple, une bobine d'inductance de l'ordre de 0,1 H a une résistance de quelques ohms.

VI. Association de résistances

VI.1. Lois d'associations de résistances

VI.1.1. Résistances en série

Considérons N résistances en série (voir figure 5.12). La tension totale u s'écrit par additivité

$$u = \sum_{k=1}^N u_k.$$

Or, chaque résistance R_k vérifie la loi d'Ohm et est parcourue par le même courant i , donc $u_k = R_k i$ pour k entier entre 1 et N . D'où

$$u = \sum_{k=1}^N R_k i = \left(\sum_{k=1}^N R_k \right) i = R_{\text{eq}} i.$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 5.23. Association de résistances en série

La résistance équivalente à des résistances en série (voir figure 5.12) est la somme des résistances,

$$R_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N R_k.$$

7. Tout dépend de la valeur de cette résistance par rapport aux autres résistances du circuit.

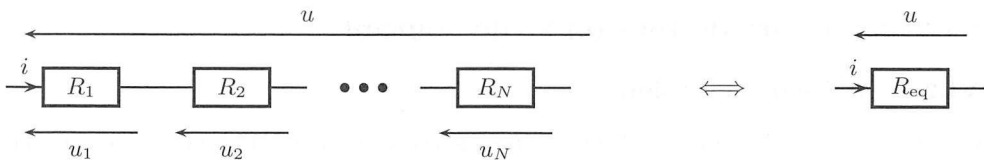


FIG. 5.12. Résistances en série et schéma électrique équivalent.

VI.1.2. Résistances en parallèle

Considérons N résistances en parallèle (voir figure 5.13).

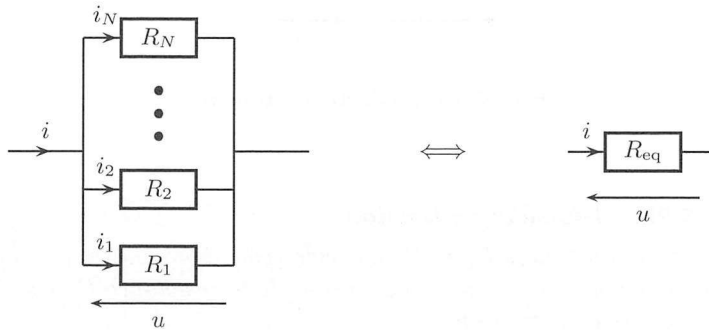


FIG. 5.13. Résistances en parallèle et schéma électrique équivalent.

D'après la loi des nœuds, le courant total i s'écrit

$$i = \sum_{k=1}^N i_k.$$

Or, chaque résistance R_k vérifie la loi d'Ohm et est soumise à la même tension u , donc $i_k = G_k u$ pour k entier entre 1 et N , avec $G_k = 1/R_k$ la conductance. D'où

$$i = \sum_{k=1}^N G_k u = \left(\sum_{k=1}^N G_k \right) u = G_{\text{eq}} u.$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 5.24. Association de résistances en parallèle

La conductance équivalente à des résistances en parallèle est la somme des conductances,

$$G_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N G_k \quad \text{soit} \quad \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}.$$

Méthode

Résistances en parallèle

Dès que des résistances sont en parallèle, il est plus commode de travailler avec la conductance qu'avec la résistance.

VI.2. Diviseurs de tension et de courant

VI.2.1. Diviseur de tension

Considérons deux résistances R_1 et R_2 en série (voir figure 5.14), donc parcourues par le même courant i , soumises à une tension u . Le diviseur de tension permet de calculer simplement la tension aux bornes d'une des deux résistances sans faire intervenir i dans l'expression.

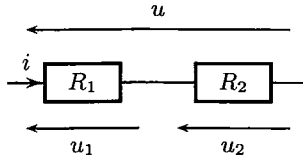


FIG. 5.14. Diviseur de tension.

Théorème 5.25. Diviseur de tension

Considérons deux résistances R_1 et R_2 en série (voir figure 5.14), l'ensemble étant soumis à une tension u . La tension aux bornes de la résistance R_1 est donnée par la formule du diviseur de tension

$$u_1 = u \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

La tension u_2 aux bornes de R_2 s'obtient en permutant les indices 1 et 2.

PREUVE. La loi d'Ohm appliquée à R_1 s'écrit $u_1 = R_1 i$. La même loi appliquée à l'ensemble des deux résistances s'écrit $u = R_{\text{eq}} i = (R_1 + R_2) i$. En éliminant le courant, on obtient

$$u_1 = u \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

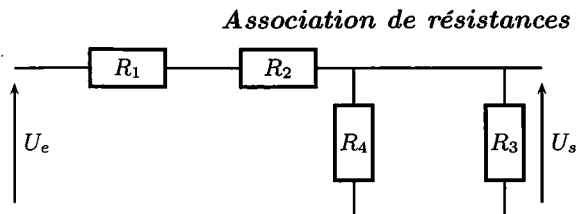
Le calcul de u_2 se fait à l'identique. ■

Ce dispositif, comme son nom l'indique, permet d'abaisser une tension très simplement. De plus, c'est un outil très pratique pour effectuer des calculs sur des circuits.

Remarque Il est parfois utile d'appliquer les lois d'associations de résistances avant d'utiliser le diviseur de tension.

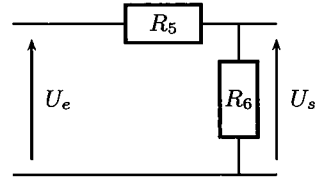
EXERCICE CORRIGÉ 5.26.

Calculer U_s en fonction de U_e et des résistances du circuit représenté ci-contre.



Corrigé

Le plus simple est d'utiliser un diviseur de tension. Appelons $R_5 = R_1 + R_2$ la résistance équivalente à R_1 et R_2 en série, et $1/R_6 = G_6 = G_3 + G_4$ la conductance équivalente au groupement parallèle R_3 et R_4 . Le schéma équivalent est représenté sur la figure ci-contre.



La tension U_e est prise aux bornes de l'ensemble R_5 et R_6 en série. La formule du diviseur de tension donne donc immédiatement la réponse

$$U_s = U_e \frac{R_6}{R_5 + R_6} = U_e \frac{1}{G_6 R_5 + 1}.$$

Il est ici plus commode de travailler avec la conductance G_6 qu'avec R_6 , que ce soit pour associer les résistances ou dans la formule du diviseur de tension. Après remplacements, on obtient

$$U_s = U_e \frac{1}{1 + \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_3 R_4}}.$$

VI.2.2. Diviseur de courant

On considère deux résistances R_1 et R_2 en parallèle (voir figure 5.15), donc soumises à la même tension u . Le diviseur de courant permet de calculer simplement le courant dans une résistance sans faire intervenir u .

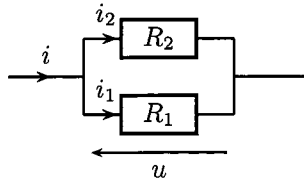


FIG. 5.15. Diviseur de courant.

Théorème 5.27. Diviseur de courant

Considérons deux résistances R_1 et R_2 en parallèle (voir figure 5.15), l'ensemble étant alimenté par un courant i . Le courant qui traverse la résistance R_1 est donné par la formule du diviseur de courant

$$i_1 = i \frac{G_1}{G_1 + G_2} = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Le courant qui traverse R_2 s'obtient en permutant les indices 1 et 2.

PREUVE. La loi d'Ohm appliquée à R_1 s'écrit $i_1 = G_1 u$. La même loi appliquée à l'ensemble des deux résistances s'écrit $i = G_{\text{eq}} u = (G_1 + G_2) u$. En éliminant la

tension, on obtient

$$i_1 = i \frac{G_1}{G_1 + G_2}.$$

Il suffit ensuite de remplacer G_1 par $1/R_1$ et G_2 par $1/R_2$ pour obtenir la formule avec les résistances. ■

Attention Indices

Il faut faire attention aux indices. Avec les conductances, l'indice au numérateur est bien celui de la résistance pour laquelle on cherche le courant, tandis qu'avec les résistances, c'est l'autre indice qui intervient. Une fois encore, il est plus simple de travailler avec les conductances pour des groupements parallèles.

EXEMPLE 5.28.

Reprenons la figure 5.15 et supposons que R_1 soit une résistance de faible valeur (quelques ohms), montée en parallèle avec une résistance $R_2 \gg R_1$ qui peut représenter celle d'un appareil électrique. En appliquant la formule du diviseur de courant,

$$i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2} \ll i.$$

Le courant i_2 qui circule dans R_2 est bien plus faible que i , ce qui permet de protéger l'appareil électrique de surintensités éventuelles. Monter une petite résistance en parallèle d'un appareil s'appelle faire un shunt : il protège un appareil électrique (ici R_2) en limitant le courant qui y passe.

VII. Modélisation linéaire d'une source

Pour ces dipôles, la convention adoptée est la convention générateur : une fois encore, cela n'a rien de fondamental ; le choix de la convention récepteur est possible, mais maladroit dans le cas d'une pile, par exemple. Il suffit juste de modifier les signes en conséquence.

VII.1. Sources idéales de tension et de courant

Définition 5.29. *Source idéale de tension*

Une source idéale de tension (voir figure 5.16) est un dipôle capable d'imposer une tension à ses bornes indépendante de l'intensité débitée, $u = E$ pour tout i . La quantité E est appelée force électromotrice (fem) de la source.

Remarque Pour une telle source, la tension est parfaitement connue, égale à la fem, mais le courant ne l'est pas *a priori* car il dépend du circuit dans lequel la source est branchée.

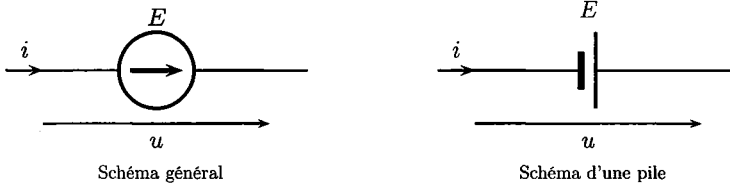


FIG. 5.16. Représentation d'une source idéale de tension.

Définition 5.30. Source idéale de courant

Une source idéale de courant (voir figure 5.17) est un dipôle délivrant un courant indépendant de la tension à ses bornes, $i = I_0$ pour tout u . La quantité I_0 est appelée courant électromoteur (cem) de la source.



FIG. 5.17. Représentation d'une source idéale de courant.

Remarque Pour une telle source, le courant débité est parfaitement connu, égal au cem, mais la tension ne l'est pas *a priori* car elle dépend du circuit dans lequel la source est branchée.

VII.2. Sources réelles de tension et de courant

Dans la réalité, la tension aux bornes d'une source (ou générateur) de tension dépend du circuit sur lequel elle est branchée. Sa caractéristique est représentée sur la figure 5.18.

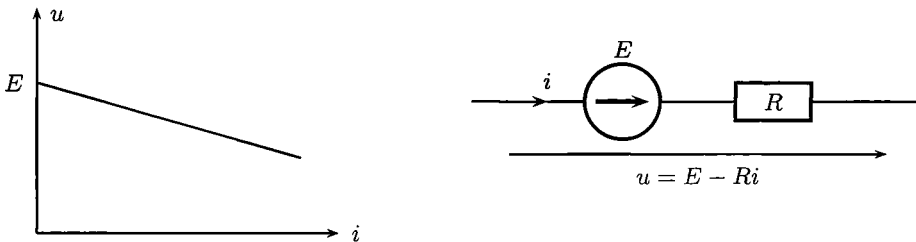


FIG. 5.18. Caractéristique d'une source réelle de tension (à gauche) et représentation schématique (à droite).

Lorsque le courant débité est non nul, on observe une chute de tension par rapport à la fem : il est possible de la modéliser en introduisant une résistance interne à la source montée en série avec celle-ci.

Définition 5.31. Source réelle de tension

On modélise une source (ou générateur) de tension réelle par l'association en série d'une source idéale de tension et d'une résistance (voir figure 5.18). L'équation de la caractéristique en convention générateur est alors

$$u = E - Ri$$

où E est la force électromotrice (fem) et R est la résistance interne du générateur. Si $R = 0$, alors la source est idéale.

Remarque La force électromotrice E apparaît comme étant la *tension à vide* de la source réelle, c'est-à-dire la tension à ses bornes lorsque le courant débité est nul.

De la même manière, une source (ou générateur) réelle de courant débite une intensité qui dépend de la tension à ses bornes (voir figure 5.19).

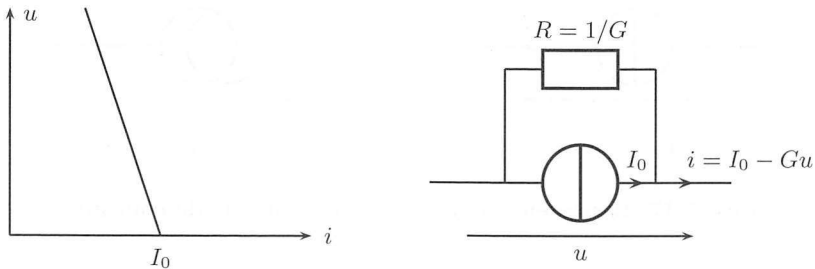


FIG. 5.19. Caractéristique d'une source réelle de courant (à gauche) et représentation schématique (à droite).

Définition 5.32. Source réelle de courant

On modélise une source (ou générateur) réelle de courant par l'association en parallèle d'une source idéale de courant et d'une conductance G (voir figure 5.19). L'équation de la caractéristique en convention générateur est alors

$$i = I_0 - Gu$$

où I_0 est le courant électromoteur (cem) et G est la conductance interne du générateur. Si $G = 0$, alors la source est idéale.

Remarque Le courant électromoteur I_0 apparaît comme étant le *courant de court-circuit* de la source réelle, c'est-à-dire le courant qui la traverse lorsque la tension à ses bornes est nulle.

VII.3. Représentation équivalente de Thévenin

Une source réelle est linéaire s'il existe une relation affine entre la tension à ses bornes et le courant qui la traverse (c'est le cas d'une source réelle de tension ou d'une source réelle de courant).

Définition 5.33. Représentation de Thévenin d'un générateur

On appelle représentation de Thévenin (voir figure 5.20) la modélisation d'une source linéaire par une source idéale de tension de fem E , en série avec une résistance R_T .

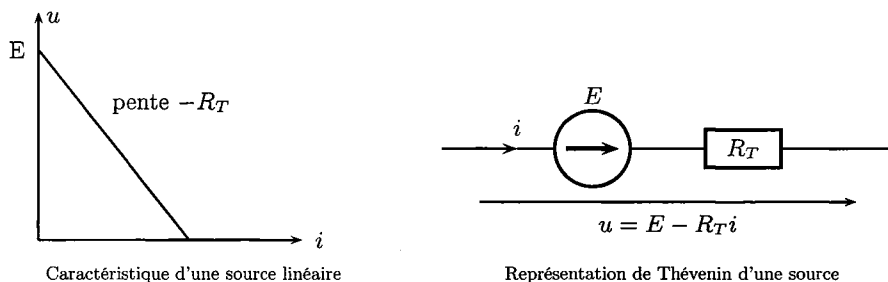


FIG. 5.20. Représentation de Thévenin d'une source linéaire non idéale.

Si l'on forme une association de sources réelles linéaires, la relation entre la tension aux bornes de l'association et le courant entrant (ou sortant selon la convention) dans l'association sera affine. On peut alors modéliser l'association par une simple représentation de Thévenin (voir exercice corrigé 5.34).

On constate sur la figure 5.20 que la tension lorsque le courant débité est nul (tension en circuit ouvert ou tension à vide) est la fem E de la source. Le courant de court-circuit I_{cc} permet quant à lui de déterminer la valeur de R_T au travers de la relation $E - R_T I_{cc} = 0$.

EXERCICE CORRIGÉ 5.34.

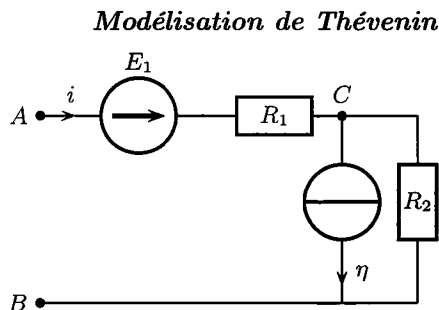
On souhaite déterminer le générateur de tension équivalent au dipôle AB ci-contre.

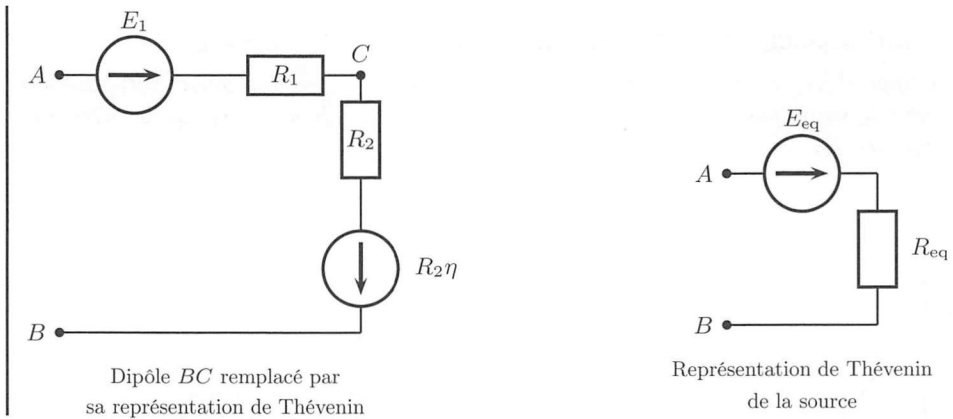
- Déterminer tout d'abord la représentation de Thévenin du dipôle linéaire actif compris entre B et C .
- En déduire la représentation de Thévenin du dipôle linéaire actif compris entre A et B .

Corrigé

1. Par la loi des nœuds en C , $i = \eta + u_{CB}/R_2 = \eta - u_{BC}/R_2$. Ainsi $u_{BC} = R_2\eta - R_2i$. Le dipôle compris entre B et C est équivalent à un générateur de tension réel, de fem $R_2\eta$ et de résistance interne R_2 .

2. D'après la question précédente, on peut remplacer le dipôle BC par sa représentation de Thévenin (voir schéma ci-après, partie gauche). Ensuite, entre B et A , on constate que R_1 et R_2 sont en série. Les fem s'ajoutent aussi et finalement, $E_{eq} = E_1 + R_2\eta$ et $R_{eq} = R_1 + R_2$ (voir schéma ci-après, partie droite).





VIII. Point de fonctionnement

Pour certains dipôles (non linéaires notamment), la relation entre la tension et le courant ne peut pas toujours être exprimée simplement. On peut alors avoir recours à une représentation graphique (relevé expérimental) permettant ensuite de déterminer le point de fonctionnement du montage.

VIII.1. Caractéristique courant-tension d'un dipôle

Définition 5.35. *Caractéristique courant-tension*

On appelle caractéristique courant-tension d'un dipôle D la courbe représentant les variations du courant i le traversant en fonction de la tension u à ses bornes. Lors du fonctionnement du dipôle, le point M donnant u et i , appelé point de fonctionnement, se trouve sur sa caractéristique (voir figure 5.21).

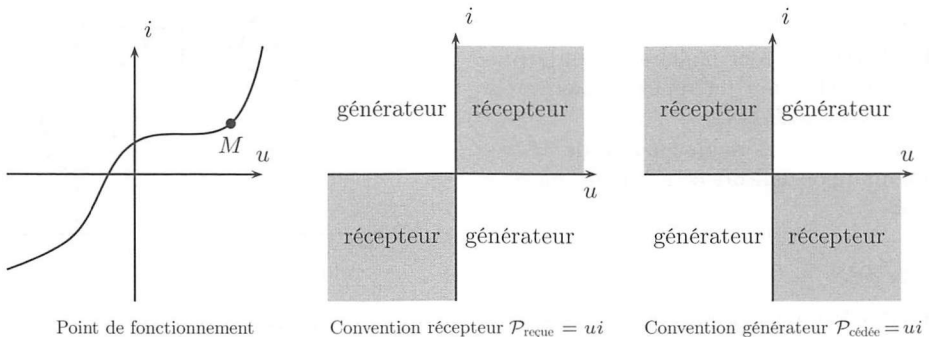


FIG. 5.21. Caractéristique et point de fonctionnement ; récepteur ou générateur.

Remarque Il est important de noter qu'une caractéristique est associée à une convention (récepteur ou générateur) et que l'on doit donc préciser laquelle a été choisie (en changer revient à inverser l'axe des abscisses).

Selon la convention choisie, et le quadrant où le point de fonctionnement se situe, il est facile de savoir si le fonctionnement du dipôle est récepteur ou générateur (voir figure 5.21).

VIII.2. Dipôles symétriques et polarisés

Définition 5.36. Dipôle symétrique

Un dipôle est symétrique lorsque ses bornes jouent le même rôle : sa caractéristique est alors symétrique par rapport à l'origine. Si la courbe est dissymétrique par rapport à l'origine, le dipôle est polarisé : le sens de branchement est important car les deux bornes ne jouent pas le même rôle.

Une résistance est un exemple de dipôle symétrique (voir figure 5.22), le sens de branchement n'ayant aucune importance. En revanche, lors du branchement d'une diode (voir figure 5.22) ou d'un condensateur polarisé, il est nécessaire de faire attention au sens de branchement, car le dipôle ne fonctionnera pas de la même manière suivant le sens. Par exemple, une diode peut laisser passer le courant, ou le bloquer, suivant son sens de branchement dans un circuit.

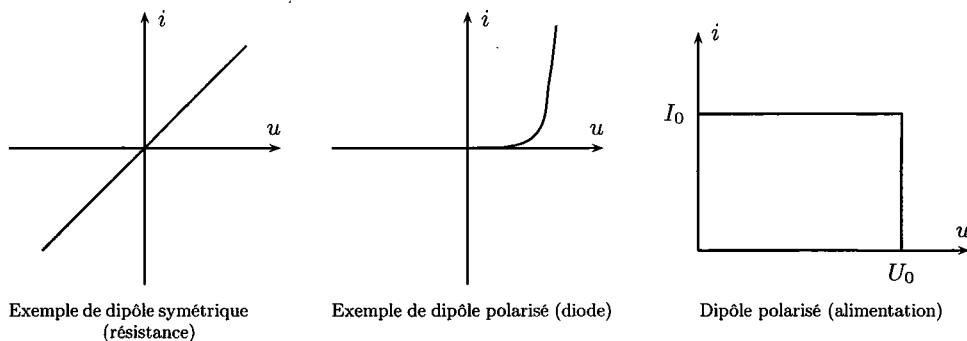


FIG. 5.22. Exemples de dipôle symétrique ou polarisé. À gauche, un exemple de dipôle symétrique (une résistance); au centre et à droite, des dipôles polarisés (respectivement une diode et une alimentation stabilisée en convention générateur).

Remarque Une résistance R est un dipôle linéaire, car $u = \pm Ri$ (le signe dépend de la convention), de même qu'un condensateur de capacité C pour lequel $i = \pm C \frac{du}{dt}$ (suivant la convention choisie). En revanche, une diode n'est pas linéaire, tout comme l'alimentation stabilisée dont la caractéristique est linéaire par morceaux.

VIII.3. Point de fonctionnement d'un dipôle non linéaire

La modélisation de Thévenin d'une source linéaire est un outil précieux pour déterminer le point de fonctionnement d'un dipôle (non nécessairement linéaire). Considérons un tel dipôle entre deux points A et B d'un réseau et notons $u = f(i)$ sa caractéristique en convention récepteur (en gris sur la figure 5.23). En supposant que le reste du réseau est linéaire, il est possible de le remplacer par une source de tension réelle linéaire (représentation de Thévenin); u et i vérifient alors la relation $u = E - R_T i$ (c'est une droite de pente négative sur la figure 5.23). Le point de fonctionnement M

est le point d'intersection de cette droite avec la caractéristique $u = f(i)$ du dipôle. L'exercice 4 développe l'étude d'une telle caractéristique.

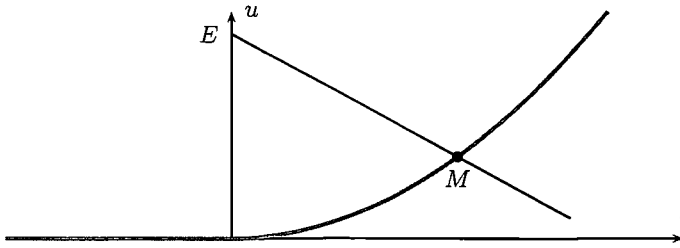


FIG. 5.23. Point de fonctionnement d'un dipôle.

IX. Exercices

1. Résistance équivalente ★

(solution page 674)

Par quel argument peut-on justifier que $I'_1 = I_1$ et $I'_2 = I_2$ pour le dipôle de la figure 5.24 ? Calculer ensuite la résistance équivalente du dipôle AB .

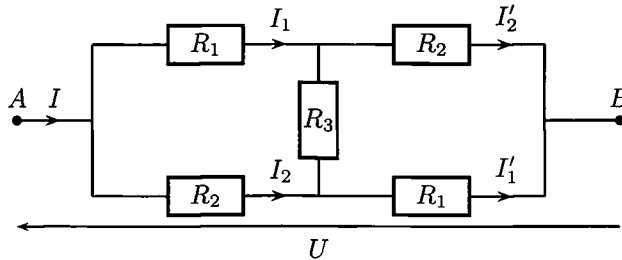


FIG. 5.24. Dipôle AB .

2. Montage courte ou longue dérivation ★

(solution page 674)

Afin de connaître la valeur R d'une résistance, il faut mesurer simultanément la tension à ses bornes et le courant qui la traverse⁸. Il est possible d'utiliser deux types de montage (voir figure 5.25), appelés courte ou longue dérivation selon la manière dont le voltmètre est branché.

Dans cet exercice, les appareils de mesure ne sont pas idéaux. L'ampèremètre a donc une résistance interne R_A non nulle en série, et le voltmètre possède une conductance interne $G_V = 1/R_V$ non nulle en parallèle. On prendra $R_A = 10 \Omega$ et $R_V = 1 \text{ M}\Omega$.

1. Lequel des deux montages est-il le plus adapté pour la mesure du courant qui circule dans R , et pour la tension à ses bornes ?

2. a/ Déterminer la valeur de la résistance R_{LD} , mesurée avec le montage longue dérivation, en fonction de R et R_A . En déduire l'erreur systématique $\varepsilon_{LD} = \frac{|R_{LD} - R|}{R}$

8. C'est le principe d'un ohmmètre, qui injecte un courant connu dans la résistance à mesurer et qui mesure la tension qui apparaît à ses bornes.

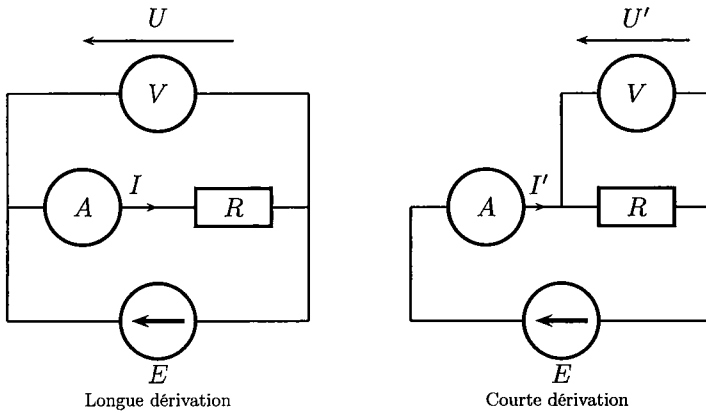


FIG. 5.25. Mesure de la valeur d'une résistance.

commise lors de la mesure. Application numérique : calculer l'erreur systématique pour $R = 100 \Omega$, puis $R = 100 \text{ k}\Omega$.

b/ Déterminer la valeur de la résistance R_{CD} , mesurée avec le montage courte dérivation, en fonction de R et R_V . En déduire l'erreur systématique $\varepsilon_{CD} = \frac{|R_{CD} - R|}{R}$ commise lors de la mesure. Application numérique : $R = 100 \Omega$ ou $R = 100 \text{ k}\Omega$.

c/ En pratique, $R_V \gg R_A$; pour quelles valeurs de R la méthode longue dérivation conduit-elle, en valeur absolue, à une erreur systématique moindre que celle de la méthode courte dérivation ? Application numérique avec les valeurs précédentes.

3. Adaptation d'impédance ★

(solution page 675)

Une résistance R est alimentée par un générateur de force électromotrice (fem) E et de résistance interne r .

1. Calculer R pour que la puissance \mathcal{P} consommée par R soit maximale.
2. Que vaut alors cette puissance, notée \mathcal{P}_{\max} ? Comparer à celle dissipée dans r .
3. Exprimer et tracer la courbe représentative de la puissance réduite $\mathcal{P}/\mathcal{P}_{\max}$ en fonction de $x = R/r$.

4. Point de fonctionnement ★★

(solution page 676)

On considère le montage de la figure 5.26. Le dipôle entre les points A et B n'est pas linéaire, sa caractéristique $u = f(i)$ est donnée à la figure 5.27.

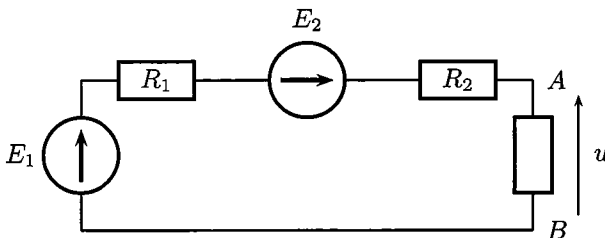


FIG. 5.26. Réseau étudié contenant un dipôle non linéaire entre A et B .

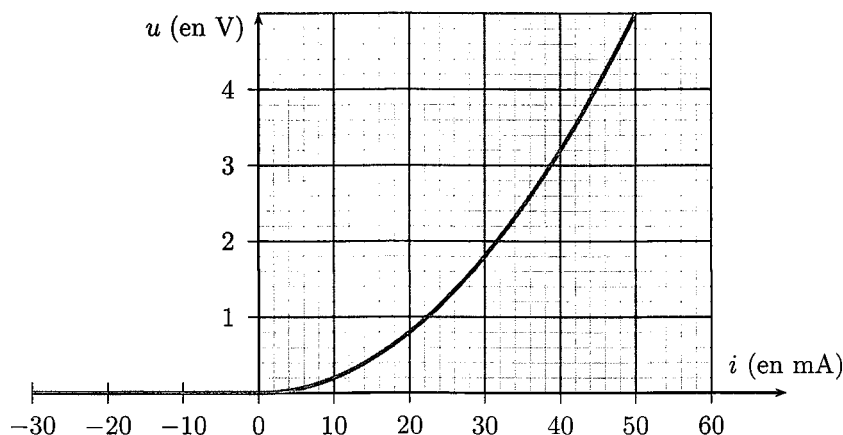


FIG. 5.27. Caractéristique du dipôle non linéaire (en convention récepteur).

- Déterminer la représentation de Thévenin équivalente de la source alimentant le dipôle non linéaire. En déduire graphiquement le point de fonctionnement (tension et intensité) pour $E_1 = 3,1 \text{ V}$, $E_2 = 1,3 \text{ V}$ et $R_1 = R_2 = 25 \Omega$.
- La source de fem E_2 est en fait une source variable oscillant entre $\pm 1,3 \text{ V}$. En déduire graphiquement l'amplitude crête à crête des variations d'intensité, ainsi que celle des variations de la tension aux bornes du dipôle non linéaire.

5. Pont de Wheatstone : mesure de température ★★★ (solution page 676)

Le pont de Wheatstone est représenté sur la figure 5.28. Le générateur E est supposé idéal. La résistance R est celle d'un appareil de mesure qui pourra être un ampèremètre ou un voltmètre, on parle de résistance interne.

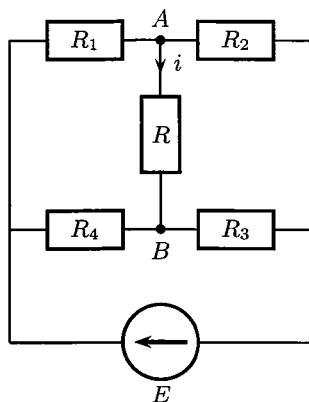


FIG. 5.28. Pont de Wheatstone.

- On suppose que l'appareil de mesure est un ampèremètre sensible aux faibles courants. Le pont est dit équilibré lorsque le courant i mesuré par l'ampèremètre est nul. Établir une relation entre les quatre résistances R_i lorsque le pont est équilibré.
- On suppose que la résistance R_1 est une thermistance, c'est-à-dire qu'elle varie en fonction de la température T (en degré Celsius) selon la loi $R_1 = R_{10}(1 + \alpha T)$.

Lorsque $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$, le pont est équilibré selon la méthode précédente (étalonnage). Les résistances R_2 , R_3 et R_4 sont de valeur fixe, et on remplace l'ampèremètre par un voltmètre pour lequel R sera supposée infinie (voltmètre idéal).

a/ Exprimer la différence de potentiel $U = V_A - V_B$ lorsque le pont est déséquilibré, en fonction de E , α , R_{10} et $x = R_3/R_4$.

b/ Il est souhaitable lors de ce type de mesure d'avoir $|U|$ maximum, afin d'avoir une sensibilité maximale. Établir, pour une température T donnée, l'expression de x en fonction de T et α qui permet de maximiser $|U|$. Comment la simplifier pour des températures usuelles (autour de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$) ? En déduire une condition sur les résistances, indépendante de la température, qui permet de maximiser la sensibilité. On donne $\alpha = 10^{-3}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

c/ Dans le cadre de la simplification précédente, déduire une expression simplifiée de T en fonction de α , U et E . Calculer la température mesurée si $E = 10\text{ V}$ et une tension mesurée $U = -45\text{ mV}$.

Chapitre 6

CIRCUIT LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

DANS ce chapitre, nous allons étudier le comportement de systèmes linéaires du premier ordre, c'est-à-dire régis par une équation différentielle linéaire du premier ordre. En électricité, cela concerne les circuits du type RC ou RL série. L'étude se limite ici à la réponse à un échelon; l'objectif est de mettre en évidence un régime transitoire, c'est-à-dire une période de transition entre deux régimes continus.

I. Échelon de tension, notion de régime transitoire

I.1. Définition d'un échelon

Définition 6.1. *Échelon de tension*

On définit un échelon de tension $e(t)$ par

$$u(t) = \begin{cases} k_1 & \text{si } t < t_0 \\ k_2 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

avec t_0 un instant quelconque, k_1 et k_2 deux constantes différentes. Pour simplifier, on choisit généralement t_0 comme origine des temps.

Par la suite, nous utiliserons l'échelon de tension représenté sur la figure 6.1 en prenant l'instant de la discontinuité comme origine des temps. Notons qu'il serait également possible de définir un échelon de courant. La réponse d'un système à un échelon est aussi appelée réponse indicielle. Toute l'étude de ce chapitre se place dans le cadre de l'ARQS, ce qui permet d'appliquer les lois de Kirchoff.

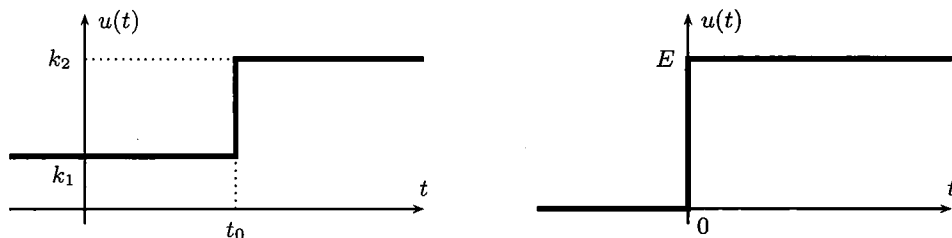


FIG. 6.1. Échelons de tension.

I.2. Étude qualitative de deux circuits

I.2.1. Circuit RC

On soumet un circuit RC série à un échelon de tension en le branchant à un générateur de tension continue E et à un interrupteur (voir figure 6.2). Initialement, l'interrupteur

est ouvert et le condensateur supposé déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. La tension e passe de 0 à E , ce qui impose un échelon de tension aux bornes du dipôle RC .

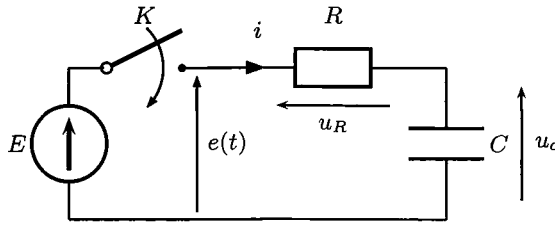


FIG. 6.2. Circuit RC soumis à un échelon de tension.

On s'intéresse ici à $u_c(t)$. La tension étant continue aux bornes d'un condensateur (voir page 122) et le condensateur étant initialement déchargé, alors $u_c(0) = 0$. D'après la loi d'Ohm, un courant $i(t)$ traverse la résistance, de valeur

$$i(t) = \frac{1}{R}(E - u_c(t)). \quad (6.1)$$

Initialement, ce courant est non nul, il vaut $i(0) = E/R$. Ce courant a pour effet de charger le condensateur, donc la tension $u_c(t)$ va croître (tant que i ne s'annule pas). D'après l'équation (6.1), la charge s'arrête lorsque $i = 0$, soit $u_c = E$. L'expérience (voir figure 6.3) confirme nos deux cas limites, c'est-à-dire $u_c(0) = 0$, avec une pente à l'origine $\frac{i(0)}{C} = \frac{du_c}{dt}(0) = \frac{E}{RC}$ d'une part, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_c = E$ d'autre part.

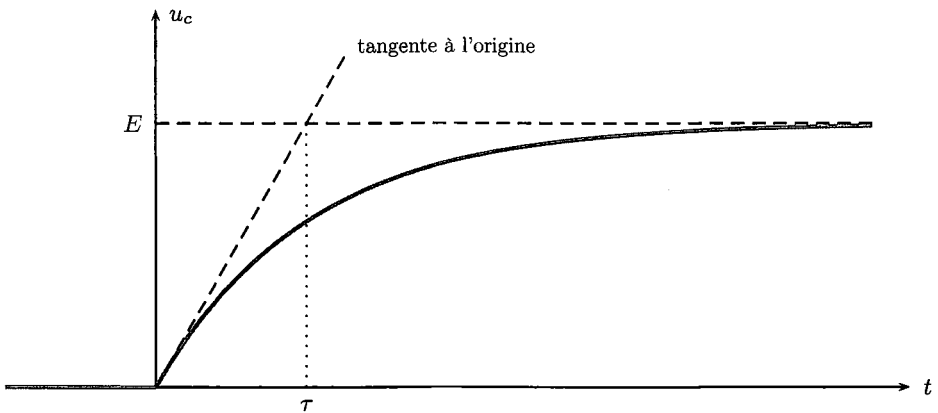


FIG. 6.3. Charge du condensateur.

On constate sur la figure que pour $t \gg \tau$ (avec $\tau = RC$ d'après la pente à l'origine), la tension aux bornes de C tend vers E , et le courant dans le circuit vers zéro. Le système est alors dit en *régime établi*, ou *permanent*, c'est-à-dire que les grandeurs physiques ne dépendent plus du temps. Le système est en *régime transitoire* durant l'intervalle de temps pendant lequel le circuit s'adapte à la modification extérieure (à partir de l'instant $t = 0$ et pendant quelques τ).

Synthèse

Régime transitoire d'un circuit RC

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. Ainsi lorsque l'on soumet un circuit RC à un échelon de tension, le condensateur s'oppose à une variation rapide de la tension à ses bornes ; il faut donc un certain temps pour qu'elle atteigne la valeur imposée par le générateur. L'intervalle de temps pendant lequel le circuit s'adapte à la modification extérieure, d'une durée de l'ordre de $\tau = RC$, s'appelle le régime transitoire.

I.2.2. Circuit RL

On soumet un circuit RL série à un échelon de tension en le branchant à un générateur de tension continue E et à un interrupteur (voir figure 6.4). Initialement, l'interrupteur est ouvert et, à l'instant $t = 0$, on le ferme.

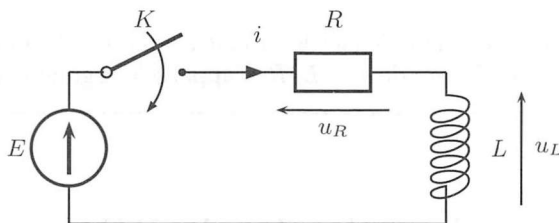


FIG. 6.4. Circuit RL soumis à un échelon de tension.

Dans le cas de la bobine, c'est le courant qui la traverse qui est continu (voir page 123). Le courant étant initialement nul (régime permanent avant que l'on ne ferme l'interrupteur), alors $i(0) = 0$ et ainsi la différence de potentiel aux bornes de la résistance est nulle. Or, d'après la loi des mailles ,

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}(t) = E - Ri(t). \quad (6.2)$$

La dérivée du courant est donc initialement positive (en supposant $E > 0$), le courant augmente dans le circuit. D'après l'équation (6.2), le courant cesse de croître lorsque $E = Ri$, soit $i = E/R$. L'expérience (voir figure 6.5) confirme les deux cas limites, c'est-à-dire $i(0) = 0$, avec une pente à l'origine égale à E/L d'une part, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} i = E/R$ d'autre part.

On constate sur cette figure que le circuit s'adapte à la modification extérieure sur une durée de quelques τ (c'est le régime transitoire). Le régime permanent est atteint lorsque le courant dans la bobine reste proche¹ de sa valeur limite, la tension aux bornes de la bobine étant pratiquement nulle.

1. Selon un critère qui reste à définir.

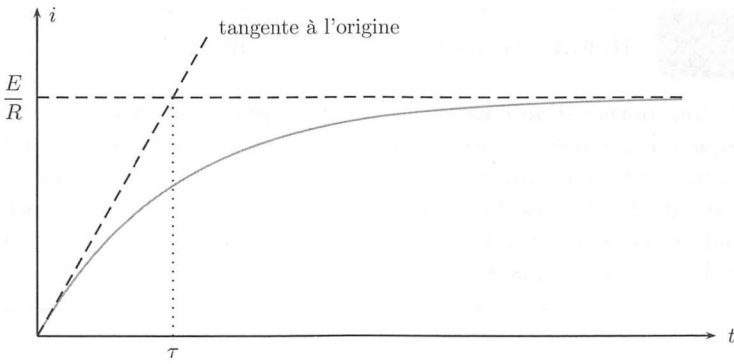


FIG. 6.5. Établissement du courant dans la bobine.

Synthèse**Régime transitoire d'un circuit RL**

Le courant dans une bobine est toujours continu. Ainsi, lorsque l'on soumet un circuit RL à un échelon de tension, la bobine s'oppose à une variation rapide du courant.

L'intervalle de temps pendant lequel le circuit s'adapte à la modification extérieure, d'une durée de l'ordre de $\tau = L/R$, s'appelle le régime transitoire.

II. Étude analytique du circuit RC **II.1. Tension aux bornes du condensateur**

On reprend le circuit de la figure 6.2 page 140. D'après la loi des mailles ,

$$E = u_c + u_R. \quad (6.3)$$

Or, $u_R = Ri$, car la résistance est en convention récepteur. Le condensateur étant lui aussi en convention récepteur, on peut écrire $i = C \frac{du_c}{dt}$. L'équation différentielle vérifiée par u_c est donc

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC}.$$

Définition 6.2. Constante de temps du circuit RC

La grandeur RC est homogène à un temps, on pose $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

L'équation différentielle vérifiée par u_c s'écrit alors, sous une forme canonique,

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}.$$

Les solutions sont de la forme² $u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}$, où :

- ▶ la fonction $u_{c,h}$ est la solution générale de l'équation homogène $\frac{du_{c,h}}{dt} + \frac{1}{\tau}u_{c,h} = 0$. Elle est donc de la forme $u_{c,h}(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, avec A réel ;
- ▶ la fonction $u_{c,p}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre : puisque celui-ci est constant, une solution particulière évidente est $u_{c,p} = E$.

Finalement, la solution cherchée est de la forme

$$u_c(t) = E + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La constante A peut être déterminée par les conditions initiales. Aux instants $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur ouvert, donc $u_c(t < 0) = 0$. Juste avant de fermer l'interrupteur, on a donc $u_c(0^-) = 0$; le 0^- signifie que l'on se place en $t = 0 - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ et aussi petit que l'on veut. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, donc, avec une notation similaire pour 0^+ , $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur. En imposant cette condition dans la forme de la solution, il vient $E + A = 0$. On en déduit la solution du problème,

$$u_c(t) = E \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \text{ si } t \geq 0. \quad (6.4)$$

On retrouve l'équation de la courbe de la figure 6.3. La tension u_c augmente jusqu'à atteindre E : le condensateur se charge pour atteindre la tension du générateur. La tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_c = E$ en $t = \tau$, et à cet instant la tension aux bornes du condensateur a atteint 63 % de sa valeur en régime permanent : on parle de temps de montée à 63 %. C'est un moyen expérimental simple de mesure de la constante de temps. Par ailleurs, la tension atteint 95 % de sa valeur en régime permanent au bout d'un temps $t = 3\tau$; on parle de temps de réponse à 95 %.

II.2. Courant électrique dans le circuit

À partir de l'expression de $u_c(t)$ (voir équation 6.4), on obtient l'expression de l'intensité pour $t > 0$,

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

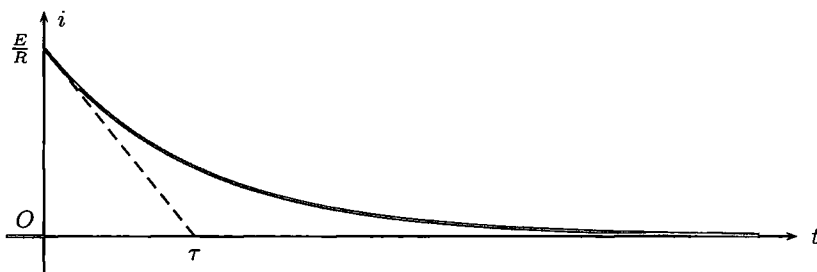


FIG. 6.6. Courant lors de la charge du condensateur.

2. Voir annexe B page 645.

On constate (voir figure 6.6) que $i(t)$ est discontinu en $t = 0$, contrairement à $u_c(t)$, puisque le courant passe d'une valeur nulle à E/R . La tangente à l'origine coupe également l'asymptote de $i(t)$ (ici, l'axe des abscisses) en $t = \tau$.

Synthèse

Régime permanent et régime transitoire

Considérons un système physique modélisé par une équation différentielle linéaire à coefficients et second membre constants, dont la solution sans second membre tend vers zéro (système stable, voir annexe II.3 page 648). Le second membre est appelé forçage. Si l'on modifie le forçage :

- ▶ le système réagit à cette modification en s'adaptant au nouveau forçage pendant une durée de l'ordre de la constante de temps du système. Le régime correspondant est dit transitoire, au cours duquel le circuit s'adapte à la modification extérieure ;
- ▶ la solution particulière traduit le régime permanent, qui est atteint après une durée grande devant celle du régime transitoire (du moins en pratique, car mathématiquement il faut un temps infini).

II.3. Bilan énergétique

Multiplions la loi des mailles (voir équation 6.3) par i ,

$$Ei = Ri^2 + u_c i.$$

D'après la relation entre i et u_c ,

$$Ei = Ri^2 + Cu_c \frac{du_c}{dt}.$$

Le dernier terme peut s'écrire comme une dérivée, donc

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_c^2 \right).$$

- ▶ Le premier terme est la puissance fournie par le générateur au circuit.
- ▶ Le deuxième est la puissance électrique reçue par la résistance (et dissipée ensuite par effet Joule, voir page 120).
- ▶ Le troisième est la dérivée de l'énergie stockée dans le condensateur (voir page 122).

L'énergie fournie par le générateur se retrouve en partie stockée dans le condensateur sous forme d'énergie électrique, et en partie dissipée dans la résistance par effet Joule. Il est aussi intéressant de faire un bilan sur toute la durée de charge du condensateur. Pour cela, il suffit d'intégrer la relation précédente de 0 à l'infini (en réalité, quelques τ suffisent). Le premier terme donne

$$\int_0^\infty Ei dt = CE \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \frac{du_c}{dt} dt = CE \int_{u_c(0)}^{u_c(\infty)} du_c = CE^2$$

d'après le lien entre i et u_c et l'expression de u_c .

Le deuxième terme s'intègre en utilisant l'expression de $i(t)$,

$$\int_0^{\infty} R \frac{E^2}{R^2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} CE^2.$$

Le troisième terme s'intègre immédiatement puisque l'on a déjà la primitive,

$$\int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right) dt = \frac{1}{2} CE^2.$$

On obtient finalement

$$CE^2 = \frac{1}{2} CE^2 + \frac{1}{2} CE^2.$$

Pour des durées grandes devant la constante de temps, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance, et l'autre moitié est stockée dans le condensateur.

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert (voir page 121), donc le circuit équivalent pour $t \gg \tau$ est un générateur en circuit ouvert (la tension à ses bornes est bien égale à E).

Jusqu'à présent, le condensateur se comportait comme un récepteur. Nous allons voir dans l'exercice corrigé 6.4 qu'il peut aussi avoir un comportement générateur lors de sa décharge dans une résistance.

Définition 6.3. Régime libre

Un circuit est dit en régime libre s'il n'est branché sur aucune source, c'est-à-dire s'il n'y a aucun apport extérieur d'énergie.

EXERCICE CORRIGÉ 6.4.

Circuit RC en régime libre

On suppose le condensateur chargé avec une tension E , selon le dispositif précédent. On le déconnecte alors du circuit, puis on le branche sur une nouvelle résistance R à un instant t pris comme origine des temps : le condensateur est alors en régime libre car il n'y a plus de source. Établir les expressions de $u_c(t)$, $i(t)$, puis effectuer un bilan de puissance. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule dans R et conclure.

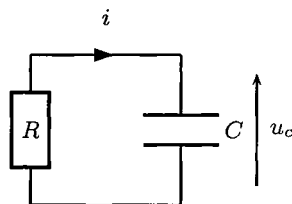
Corrigé

Le schéma du circuit est représenté sur la figure ci-contre. Les orientations de i et de u_c , non imposées par l'énoncé, sont choisies arbitrairement. La loi des mailles s'écrit $u_c + Ri = 0$. Or, $i = C \frac{du_c}{dt}$ puisque le condensateur est en convention récepteur ; l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ est alors

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = 0,$$

où $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit. Les solutions sont de la forme $u_c(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, la constante A est déterminée par les conditions initiales. Comme la tension aux bornes de C est continue, $u_c(0) = E$ et donc $A = E$; ainsi

$$u_c(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$



Le condensateur se décharge dans la résistance avec une constante de temps τ qui caractérise la durée du régime libre.

Le bilan de puissance s'obtient en multipliant la loi des mailles par i ,

$$Ri^2 + Cu_c \frac{du_c}{dt} = 0.$$

Le second terme peut s'écrire sous la forme d'une dérivée, donc

$$Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_c^2 \right) = 0.$$

Comme Ri^2 est positif, l'énergie stockée dans le condensateur diminue au cours du temps : le condensateur se décharge dans R , et l'énergie qu'il stockait est intégralement dissipée par effet Joule dans la résistance.

$$\mathcal{E}_{\text{Joule}} = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_{u_c(0)}^{u_c(\infty)} -d \left(\frac{1}{2} Cu_c^2 \right) = - \left[\frac{1}{2} Cu_c^2 \right]_{u_c(t=0)}^{u_c(t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{2} CE^2$$

Le condensateur a un comportement de générateur, tandis que lors de la charge il se comportait comme un récepteur.

III. Étude analytique du circuit RL

III.1. Tension aux bornes de la bobine et courant

On reprend le circuit de la figure 6.4 page 141. D'après la loi des mailles,

$$E = u_L + u_R. \quad (6.5)$$

Or, $u_R = Ri$, car la résistance est en convention récepteur. Comme la bobine est en convention récepteur, on peut écrire $u_L = L \frac{di}{dt}$. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$$

Définition 6.5. Constante de temps du circuit RL

La grandeur L/R est homogène à un temps, on pose $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de temps du circuit.

L'équation différentielle vérifiée par i est alors

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{R\tau}.$$

Nous savons que les solutions sont de la forme $i(t) = i_h(t) + i_p$, où :

- le courant i_h est la solution de l'équation homogène $\frac{di_h}{dt} + \frac{1}{\tau}i_h = 0$; il est de la forme $A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, avec A réel;
- le terme i_p est une solution particulière de l'équation complète. Puisque le second membre est constant, une solution particulière évidente est $i_p = \frac{E}{R}$.

Finalement, pour $t \geq 0$, la solution cherchée est de la forme

$$i(t) = \frac{E}{R} + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La constante A est déterminée par les conditions initiales. Aux instants $t < 0$, le courant est nul (circuit ouvert), donc $i(t < 0) = 0$, soit encore $i(0^-) = 0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, mais $i(0^+) = i(0^-) = 0$ par continuité du courant dans la bobine. Ainsi, en utilisant la forme de la solution, $A = -\frac{E}{R}$. On en déduit la solution du problème pour $t \geq 0$,

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (6.6)$$

La tension aux bornes de la bobine, pour $t > 0$, s'obtient alors facilement,

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (6.7)$$

On constate (voir figure 6.5 page 142) que le courant s'établit dans le circuit avec une constante de temps égale à τ : la bobine s'oppose à l'augmentation brutale du courant³. Comme pour le circuit RC , la tangente à l'origine coupe l'asymptote $i = E/R$ en $t = \tau$, et à cet instant le courant a atteint 63 % de sa valeur en régime permanent.

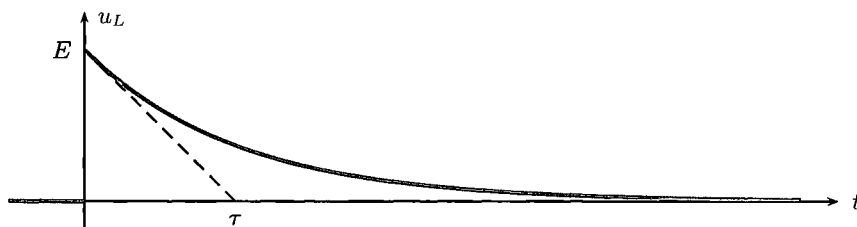


FIG. 6.7. Tension aux bornes de la bobine.

On constate sur la figure 6.7 que $u_L(t)$ est discontinue en $t = 0$, contrairement à $i(t)$.

III.2. Aspects énergétiques

D'après la loi des mailles (voir équation 6.5), $Ei = iu_L + Ri^2$. Or, $u_L = L \frac{di}{dt}$, donc

$$Ei = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2.$$

Le terme Ei correspond à la puissance fournie par le générateur, dont une partie est dissipée par effet Joule (terme Ri^2), et l'autre stockée sous forme magnétique dans la bobine. En intégrant la puissance stockée par la bobine entre $t = 0$ et l'infini, on obtient l'énergie magnétique totale stockée par la bobine,

$$\mathcal{E}_{\text{bobine}} = \int_{i(t=0)}^{i(t \rightarrow \infty)} d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \left[\frac{1}{2} Li^2 \right]_{i(t=0)}^{i(t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R} \right)^2.$$

3. Cela est lié au phénomène d'induction, voir partie IV de cet ouvrage.

Quant à l'énergie dissipée par effet Joule, elle augmente constamment au cours du temps. En effet, en régime permanent, la bobine est équivalente à un fil (voir page 123), donc le circuit équivalent pour $t \gg \tau$ est la résistance R en série avec le générateur.

IV. Exercices

1. Lampe témoin ★

(solution page 678)

On considère le montage de la figure 6.8, où l'on suppose la lampe équivalente électriquement à une résistance de valeur $4R$; elle ne s'allume que si le courant i qui la traverse vérifie $i > \frac{E}{8R}$. Calculer le courant $i(t)$ dans la lampe :

1. en $t = 0^+$, juste après la fermeture de K ;
2. lorsque le régime permanent est atteint;
3. juste après l'ouverture de K (l'ouverture a lieu une fois le régime permanent précédent atteint). Quel peut être le rôle de cette lampe ?

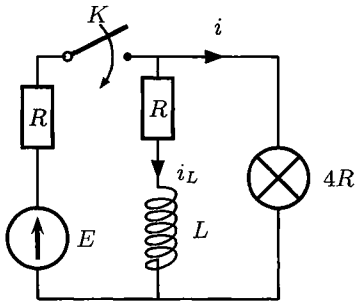


FIG. 6.8. Montage à lampe témoin.

2. Bobine et source de courant ★

(solution page 679)

On considère le circuit de la figure 6.9. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Établir l'équation différentielle relative au courant $i(t)$ circulant dans la bobine. Donner l'expression de $i(t)$.

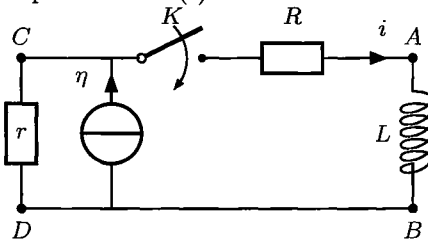


FIG. 6.9. Circuit avec bobine.

3. Étude d'un circuit en régime transitoire ★

(solution page 679)

Considérons le circuit de la figure 6.10. Nous noterons i l'intensité dans le résistor R , i_1 celle dans le condensateur C , i_2 dans le résistor $R/2$ et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps. À l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps, on ferme l'interrupteur K .

1. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^-$, juste avant la fermeture de l'interrupteur.
2. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^+$, juste après la fermeture.

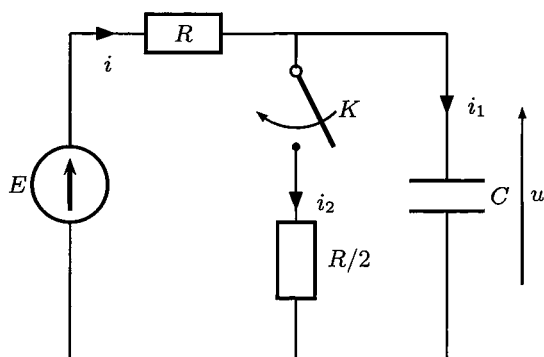


FIG. 6.10. Circuit étudié en régime transitoire.

3. Même question quand t tend vers l'infini.
4. Montrer, en transformant le réseau, que le circuit est équivalent à un simple circuit RC en charge dont on précisera les caractéristiques.
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ ainsi que la solution $u(t)$, et tracer l'allure de $u(t)$.
6. Donner l'expression de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$. Tracer l'allure des courbes associées.

4. Conditions initiales et régime permanent ★★ (solution page 680)

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur du circuit de la figure 6.11, dans lequel la force électromotrice E est constante.

1. Calculer $i_1(0)$, $i_2(0)$, $i(0)$.
2. Calculer directement (sans résoudre d'équation différentielle) $i_{1\infty}$, $i_{2\infty}$, i_{∞} , c'est-à-dire en pratique au bout d'un temps très long.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ et calculer $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$ à tout instant t .

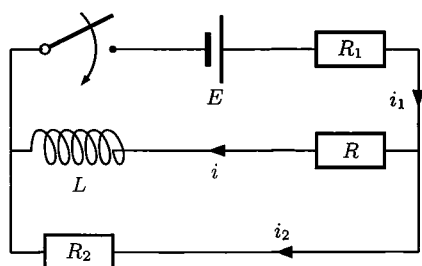


FIG. 6.11. Étude des conditions initiales d'un circuit.

5. Étude d'un tube à décharge ★★★ (solution page 682)

Un tube à décharge (appelé improprement tube au néon, alors qu'il ne contient pas de néon...) est un dipôle dont la résistance varie selon qu'il est allumé ou éteint. Il est équivalent à :

- ▶ une résistance infinie s'il est éteint ;
- ▶ une résistance $r = 500 \text{ k}\Omega$ s'il est allumé.

De plus, le passage du tube vers un nouvel état dépend de son état antérieur (phénomène d'hystérésis) :

- ▶ s'il est éteint, il faut que la tension à ses bornes devienne supérieure à la tension d'allumage $U_a = 80 \text{ V}$ pour qu'il s'allume ;
- ▶ s'il est allumé, il faut que la tension à ses bornes devienne inférieure à la tension d'extinction $U_e = 70 \text{ V}$ pour qu'il puisse s'éteindre.

Le dispositif est représenté sur la figure 6.12.

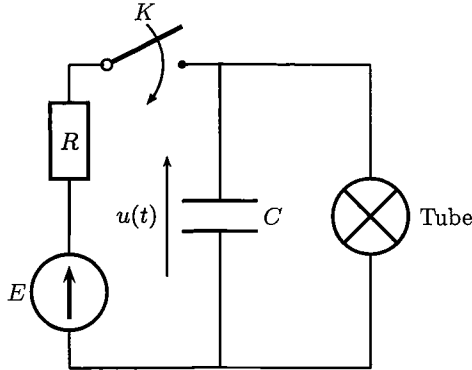


FIG. 6.12. Dispositif d'étude du tube à décharge.

1. Tracer la caractéristique $i = f(u)$ du tube. Représenter par deux types de flèches le parcours suivi sur la caractéristique lorsque l'on augmente la tension aux bornes du tube de 0 jusqu'à une valeur supérieure à U_a , puis qu'on la rediminue jusqu'à 0. Ce dipôle est-il linéaire ou non linéaire, actif ou passif ?
2. Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et le tube est éteint. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ et la résoudre.
3. Donner une condition sur E nécessaire à l'allumage.
4. On suppose que la condition précédente est vérifiée. Déterminer l'instant t_0 pour lequel le tube s'allume.
5. Établir l'équation différentielle de $u(t)$ après allumage du tube et la résoudre pour $t > t_0$.
6. Déterminer deux conditions, sur E , r , R , U_a et U_e , nécessaires pour que la lampe puisse s'éteindre.
7. On suppose la condition précédente satisfaite. Déterminer l'instant t_1 où le tube s'éteint.
8. Montrer que la tension $u(t)$ devient périodique et donner l'expression de la période T en fonction de E , U_a , U_e , r , R et C .
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de $u(t)$.
10. Application numérique : calculer T pour $E = 150 \text{ V}$, $U_a = 90 \text{ V}$, $U_e = 70 \text{ V}$, $R = 1,0 \text{ M}\Omega$, $r = 0,50 \text{ M}\Omega$ et $C = 1,0 \mu\text{F}$.

Chapitre 7

OSCILLATEURS AMORTIS

DANS le chapitre 6, l'étude s'est limitée aux systèmes linéaires d'ordre un. Nous allons maintenant entreprendre l'étude de systèmes linéaires d'ordre deux (section I). De plus, nous n'avons envisagé que des excitations continues par morceaux (réponse à un échelon); or, la plupart des signaux électriques sont alternatifs : courant domestique à 50 Hz, signal électrique dans un haut-parleur, signaux de télécommunication, etc. L'objet de la section II est d'adapter les lois de l'électrocinétique à l'étude des signaux sinusoïdaux; nous introduirons pour cela la notation complexe (utilisation des nombres complexes pour les calculs intermédiaires). Enfin nous utiliserons ce nouvel outil pour étudier le phénomène de résonance que l'on peut observer lorsque l'on soumet un oscillateur électrique ou mécanique à une excitation sinusoïdale (section III).

Tout au long de ce chapitre nous aurons l'occasion de montrer les similitudes de comportements (et donc faire des analogies) entre des oscillateurs électriques et mécaniques.

I. Régime transitoire d'un oscillateur amorti

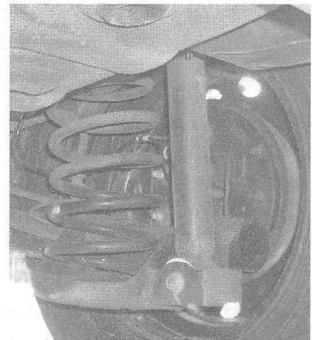
I.1. Analogies entre oscillateurs électrique et mécanique

I.1.1. Oscillateur mécanique amorti

Présentation L'oscillateur harmonique a été étudié au chapitre 1. Cependant, en pratique, un tel oscillateur finit par s'arrêter : d'inévitables frottements finissent par dissiper toute l'énergie initialement présente (l'énergie mécanique se transforme en énergie thermique).

Parfois, ces frottements sont souhaités. La photographie ci-contre représente un système amortisseur d'automobile; on y voit clairement le ressort spiralé, qui est associé à un amortisseur à gaz. Celui-ci a pour but de provoquer l'amortissement rapide des oscillations de la partie suspendue du véhicule en dissipant, par frottements, l'énergie mécanique liée à l'oscillation.

Dans un modèle simplifié, on peut considérer qu'un tel amortisseur exerce, sur chacune des extrémités, une force proportionnelle à la vitesse de déplacement relatif de ces extrémités, et dirigée de façon à exercer une force constamment résistante sur l'ensemble de ces deux extrémités. Plus simplement, on parlera d'*amortissement fluide* pour un oscillateur harmonique lorsque l'on ajoute aux forces conservatives un terme de frottement du type $-h\vec{v}$, où h est une constante positive.



Amortisseur
d'automobile

Mise en équation Reprenons l'oscillateur harmonique étudié au chapitre 1 et ajoutons un amortisseur fluide (voir figure 7.1, les points A et B sont fixes).



FIG. 7.1. Oscillateur amorti.

Le mobile M de masse m est en mouvement le long de l'axe horizontal (Ox) sous l'action de la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ et de la force de rappel du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$ (le poids et la réaction normale du support, orthogonaux à l'axe (Ox), ne nous intéressent pas ici).

En prenant comme origine O la position d'équilibre de la masse, alors $\ell(t) = \ell_0 + x(t)$ et ainsi $\vec{T} = -kx(t)\vec{u}_x$. De plus, la vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ et l'accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$. La projection sur l'axe (Ox) du principe fondamental de la dynamique s'écrit alors $m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$, soit

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0. \quad (7.1)$$

Choisissons de définir, comme dans le chapitre 1, la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et en introduisons de plus le *taux d'amortissement* $\xi = h/(2m\omega_0)$. Cela permet d'écrire l'équation différentielle sous *forme canonique* (ou réduite), c'est-à-dire sous une forme qui ne fait pas apparaître explicitement les grandeurs physiques (masse, raideur, etc.) mais plutôt des caractéristiques de l'équation différentielle, ce qui permettra par la suite de faire des analogies avec l'électricité,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.2)$$

Le taux d'amortissement, sans dimension, mesure l'importance relative de la force de frottement fluide qui assure l'amortissement. On retrouve le cas de l'oscillateur harmonique non amorti en faisant $\xi \rightarrow 0$.

Définition 7.1. Oscillateur harmonique amorti

On appelle *oscillateur harmonique amorti* toute grandeur physique $x(t)$, fonction du temps et solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

avec pour pulsation propre ω_0 et pour taux d'amortissement ξ .

Remarque Nous constaterons que le régime libre d'un tel oscillateur n'est pas harmonique ; le qualificatif « harmonique » est là pour préciser que l'oscillateur considéré serait harmonique s'il n'était pas amorti (tous les oscillateurs non amortis ne sont pas harmoniques) et qu'il est ainsi régi par une équation de la forme (7.2).

Lors de l'analyse des résultats, le facteur de qualité Q tel que $Q = 1/(2\xi)$ sera préféré au taux d'amortissement.

Définition 7.2. Facteur de qualité

À partir de l'équation canonique (7.2), on définit une grandeur adimensionnée appelée facteur de qualité Q par

$$Q = \frac{1}{2\xi}.$$

Ce facteur permet de caractériser l'importance de l'amortissement et l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Le facteur de qualité sera fréquemment utilisé dans la suite; nous verrons qu'il est possible de l'interpréter de plusieurs manières.

Bilan d'énergie Il est possible d'interpréter l'équation du mouvement (7.1) en termes d'énergie: il suffit de multiplier par \dot{x} pour accéder aux puissances; on reconnaît alors facilement les termes $m\ddot{x}\dot{x} = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$ et $kx\dot{x} = \frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$, où les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle sont inchangées par rapport au chapitre 1. Il vient alors

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -h\dot{x}^2 \leq 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (7.3)$$

Cette équation établit la décroissance de l'énergie mécanique de l'oscillateur du fait des frottements.

Remarque On prendra soin de ne jamais confondre les termes énergétiques $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ et $\frac{1}{2}kx^2$ (mesurés en joule) et la puissance des forces de frottement $\mathcal{P} = -h\dot{x}^2$ (mesurée en watt).

1.1.2. Circuit RLC série

Présentation Considérons le circuit RLC série de la figure 7.2. Initialement, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est supposé chargé; à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

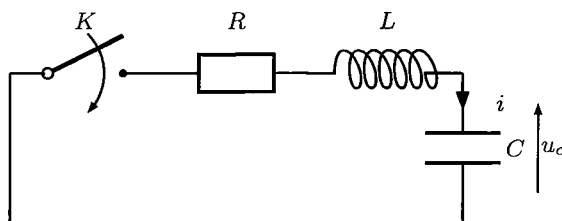


FIG. 7.2. Régime libre d'un circuit RLC série.

Mise en équation La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = 0. \quad (7.4)$$

Le condensateur est en convention récepteur, donc $i = C \frac{du_c}{dt}$. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$,

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0.$$

Afin de mettre cette équation sous la forme canonique (7.2), procédons par identification et introduisons, comme nous l'avons fait pour l'oscillateur mécanique :

- la pulsation propre du circuit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, homogène à l'inverse d'un temps ;
- le taux d'amortissement ξ , sans dimension, tel que $2\xi\omega_0 = \frac{R}{L}$, soit $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ (plus la résistance est grande, plus l'amortissement est important, ce qui correspond bien aux valeurs importantes de ξ).

L'équation différentielle qui régit le régime libre¹ d'oscillations amorties est ainsi

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \tag{7.5}$$

L'équation différentielle canonique (7.5) vérifiée par $u_c(t)$ est la même que l'équation canonique (7.2) vérifiée par $x(t)$ dans le cas de l'oscillateur mécanique amorti. Soumis à des conditions initiales identiques, les deux oscillateurs auront le même comportement.

Bilan d'énergie On peut, comme dans le cas de l'oscillateur mécanique, donner une interprétation en termes d'énergie à l'équation (7.4). Il suffit de la multiplier par l'intensité $i = \dot{q} = cu_c$ pour faire apparaître des puissances ; on reconnaît alors les termes $Li \frac{di}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_{ma}}{dt}$, où $\mathcal{E}_{ma} = \frac{1}{2} Li^2$ est l'énergie magnétique stockée par la bobine (voir page 122), $u_c i = Cu_c \dot{u}_c = \frac{d\mathcal{E}_a}{dt}$, et $\mathcal{E}_a = \frac{1}{2} Cu_c^2 = q^2 / (2C)$ est l'énergie électrique stockée par le condensateur (voir section V.2.2 du chapitre 5). Ainsi ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -Ri^2 \leq 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2. \tag{7.6}$$

Cette équation établit la décroissance de l'énergie électromagnétique de l'oscillateur du fait de l'effet Joule.

I.1.3. Analogies

D'après les deux études précédentes, il est possible de faire un certain nombre d'analogies entre les grandeurs liées à l'oscillateur mécanique et celles liées à l'oscillateur électrique. Elles sont résumées dans le tableau 7.1.

Mécanique	vitesse v	m	h	k	\mathcal{E}_c	\mathcal{E}_p
Électrique	courant i	L	R	$1/C$	\mathcal{E}_{magn}	\mathcal{E}_{elec}

TABLEAU 7.1. Analogies entre grandeurs mécaniques et électriques.

Il est aussi possible de faire l'analogie entre le déplacement x et la charge q , sous réserve que ces deux grandeurs soient définies de telle manière qu'elles soient bien nulles à l'équilibre.

1. On parle de régime libre lorsque l'équation différentielle n'a pas de second membre.

I.2. Régime libre d'un oscillateur amorti

I.2.1. Analyse qualitative

Conditions initiales Nous étudions le régime libre d'un oscillateur amorti. La section I.1 a montré que l'évolution d'un oscillateur mécanique ou électrique doit être la même si les conditions initiales sont identiques. Dans le cas de l'oscillateur électrique de la figure 7.2, le courant est initialement nul (par continuité du courant dans la bobine au moment où l'on ferme l'interrupteur) et nous noterons u_0 la tension initiale aux bornes du condensateur (la tension u_c est continue). Les conditions analogues pour l'oscillateur mécanique sont alors :

- ▶ la masse m est lâchée sans vitesse initiale, soit $v(0) = 0$ (analogue de $i(0) = 0$) ;
- ▶ la masse est initialement en $x(0) = x_0$ (analogue de $u_c(0) = u_0$).

Régime permanent Initialement, l'énergie E de l'oscillateur n'est pas nulle. Elle vaut respectivement $E = \frac{1}{2}Cu_0^2$ et $E = \frac{1}{2}x_0^2$ dans le cas des oscillateurs électrique et mécanique. Ces deux oscillateurs sont amortis, l'un par frottements, l'autre par effet Joule. Dans les deux cas, l'énergie initiale sera dissipée sous forme thermique : l'énergie de l'oscillateur va donc diminuer. Dans l'état final, l'énergie sera nulle, soit respectivement $\lim_{+\infty} u_c = 0$, $\lim_{+\infty} i = 0$ (oscillateur électrique) et $\lim_{+\infty} x = 0$, $\lim_{+\infty} v = 0$ (oscillateur mécanique).

Évolutions selon l'amortissement Le cas d'un oscillateur non amorti (soit $\xi \rightarrow 0$ dans l'équation différentielle canonique, c'est-à-dire respectivement $R \rightarrow 0$ et $h \rightarrow 0$) a été étudié au chapitre 1. En l'absence de dissipation, on observe donc indéfiniment des oscillations. Dans le cas d'un amortissement faible (à préciser par la suite, voir section I.3), on s'attend donc à observer des oscillations, d'amplitude de plus en plus faible, toutes les grandeurs finissant par s'annuler au bout d'un temps très long. Dans le cas d'un amortissement fort, en revanche, les grandeurs doivent tendre lentement (de manière monotone et d'autant plus lentement que ξ est grand) vers leur valeur en régime permanent. La lenteur de l'évolution, due à un amortissement important, permet *a priori* d'exclure dans ce cas la possibilité d'observer des oscillations. Ces deux comportements asymptotiques sont en effet ceux que l'on observe dans la pratique.

I.2.2. Différentes formes des régimes libres

Cas d'un amortissement faible On constate expérimentalement² que pour $\xi < 1$, soit $Q > 1/2$, le régime est *pseudo-périodique* (voir figure 7.3) ; les oscillations partent de la valeur x_0 (respectivement u_0 dans le cas de l'oscillateur électrique) avec une pente nulle, car $v(0) = 0$ (respectivement $i(0) = 0$) puis oscille avec une amplitude de plus en plus faible. Pour un temps suffisamment long, les grandeurs sont nulles.

On constate sur la figure 7.3 que la décroissance de l'amplitude est d'autant plus rapide que l'amortissement est grand. De plus, la pseudo-période T (illustrée par la courbe gris foncé correspondant à un facteur de qualité $Q = 5$; voir section I.3 pour une justification) est d'autant plus faible que l'amortissement est faible. Pour $\xi \rightarrow 0$ on retrouve $T \rightarrow 2\pi/\omega_0$, période de l'oscillateur harmonique non amorti (voir chapitre 1).

2. Seule la théorie permet en toute rigueur d'être aussi péremptoire quant à la valeur limite 1 proposée ici, voir section I.3 page 158.

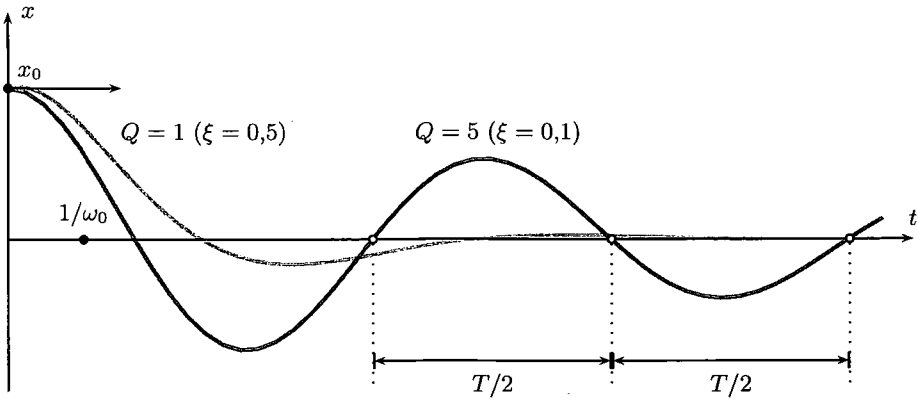


FIG. 7.3. Oscillations libres pseudo-périodiques.

Cas d'un amortissement fort Dans le cas d'un amortissement fort, c'est-à-dire $\xi > 1$, soit $Q < 1/2$, le régime est *apériodique* ; on constate bien (voir figure 7.4) l'absence d'oscillations. De plus, l'évolution est d'autant plus lente que l'amortissement est grand (donc ξ grand).

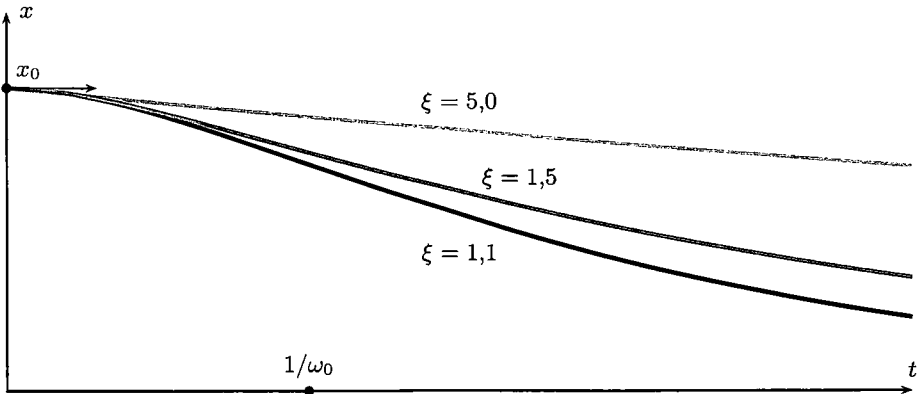


FIG. 7.4. Régimes libres apériodiques.

I.2.3. Portrait de phase

Définition 7.3. Portrait de phase

On appelle *portrait de phase* d'un système à un seul paramètre physique $q(t)$ le tracé des courbes donnant \dot{q} en fonction de q , pour des conditions initiales données.

Dans le cas de l'oscillateur mécanique (respectivement électrique), on trace donc la vitesse $v = \dot{x}$ (respectivement $\frac{du_c}{dt}$, ou plutôt l'intensité i qui lui est proportionnelle) en fonction de x (respectivement u_c).

Cas d'un amortissement fort Ce cas est plus simple à interpréter pour commencer. Trois portraits de phase, correspondant aux trois valeurs de ξ choisies pour la figure 7.4, sont représentés sur la figure 7.5.

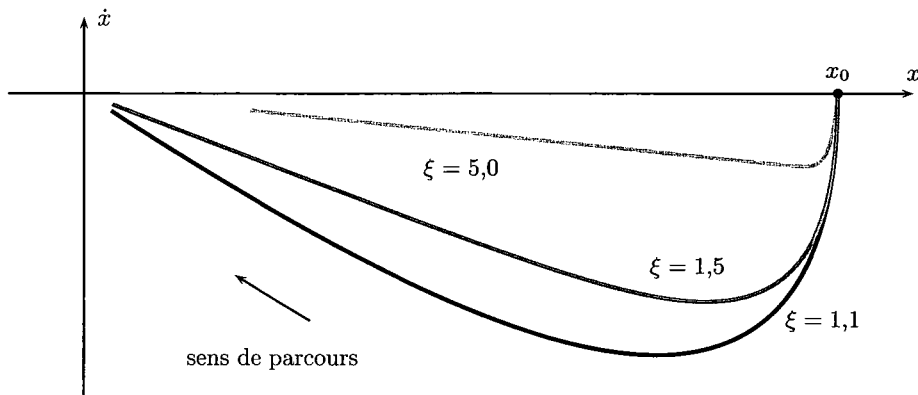


FIG. 7.5. Portraits de phase de régimes libres apériodiques.

Sur la figure, la courbe part de $x = x_0$ avec une pente verticale (car $\dot{x}(0) = 0$) et tend, lorsque $t \rightarrow \infty$, vers le point d'équilibre $x = 0$ (et vitesse nulle $\dot{x} = 0$). Plus l'amortissement est grand, plus la vitesse maximale est faible (en valeur absolue), donc moins la courbe s'éloigne de l'axe horizontal. La grandeur x ne fait ici que décroître, il n'y a pas d'oscillations.

Cas d'un amortissement faible En reprenant les deux valeurs d'amortissement utilisées pour tracer la figure 7.3, on obtient les portraits de phase de la figure 7.6.

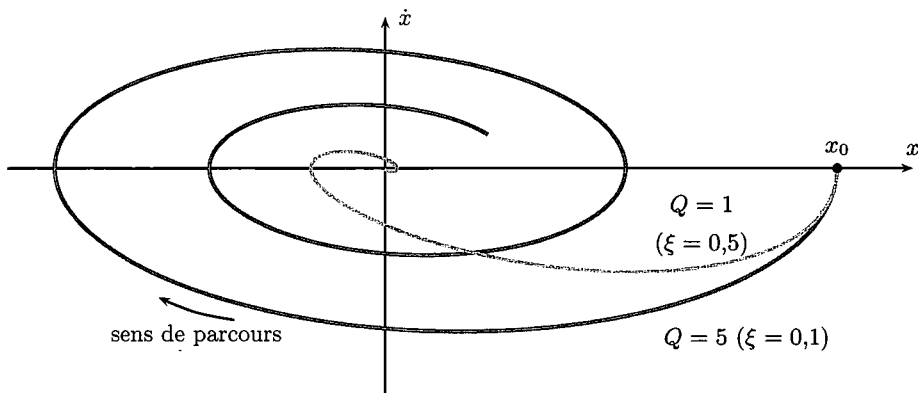


FIG. 7.6. Portraits de phase d'oscillations libres pseudo-périodiques.

Le mouvement part une nouvelle fois de $x = x_0$ avec une tangente verticale, mais on observe cette fois des oscillations autour du point d'équilibre³ (la courbe gris foncé s'enroule nettement autour de l'origine $x = 0, \dot{x} = 0$). Le sens de parcours est nécessairement le sens des aiguilles d'une montre, car lorsque \dot{x} est négatif, cela signifie que x diminue.

Remarque On voit sur la figure 7.6 que le retour à l'équilibre est d'autant plus rapide en régime pseudo-périodique que l'amortissement est plus fort. Cette conclusion est l'inverse de celle que l'on peut tirer du cas apériodique (voir figures 7.4 et 7.5), où le retour à l'équilibre est d'autant plus rapide que l'amortissement est faible. On verra

3. Le point d'« équilibre » est ici le point d'abscisse (0,0) qui correspond au régime permanent.

à la section I.3 que le cas limite du retour le plus rapide à l'équilibre correspond à $\xi = 1$, appelé *régime critique*.

I.3. Étude analytique d'un oscillateur soumis à un échelon

I.3.1. Mise en équation

Nous allons retrouver les résultats déduits de considérations qualitatives (comportement initial, régime permanent et considérations énergétiques) ou de l'observation de courbes (tracé expérimental, par exemple) en résolvant les équations canoniques des oscillateurs électrique et mécanique. Du reste, puisque les équations canoniques sont identiques, une seule résolution sera nécessaire.

Pour plus de généralité, nous allons en fait envisager la réponse des oscillateurs à un échelon afin d'introduire un second membre dans l'équation différentielle. La résolution du régime libre se fait de manière assez analogue (voir exercice 1). Dans le cas de l'oscillateur électrique par exemple, il s'agit d'étudier la réponse à un échelon de tension (voir figure 7.7).

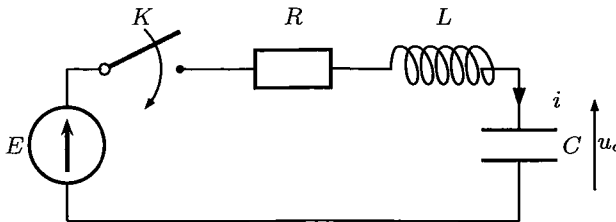


FIG. 7.7. Circuit RLC série soumis à un échelon de tension.

Le circuit ne diffère de celui étudié lors du régime libre (voir page 153) que par la présence d'un générateur de tension. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$; la nouvelle loi des mailles appliquée au circuit s'écrit

$$\forall t \geq 0, \quad L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = E, \quad (7.7)$$

soit, en introduisant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et ξ tel que $2\xi\omega_0 = R/L$,

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E. \quad (7.8)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants. La solution générale est la somme de la solution $u_{c,h}$ de l'équation différentielle homogène (voir annexe B page 645) et d'une solution particulière $u_{c,p}$ que l'on obtient facilement en observant que le second membre est constant, $u_{c,p} = E$. La forme de la solution de l'équation homogène d'une telle équation différentielle dépend du taux d'amortissement ξ , ou de son facteur de qualité $Q = 1/(2\xi)$ (voir en annexe). Le signe du discriminant réduit $\Delta' = \omega_0^2(\xi^2 - 1)$ dépend en effet de la valeur ξ , négatif si $\xi < 1$ ou positif si $\xi > 1$.

I.3.2. Amortissement faible, régime pseudo-périodique

Dans le cas d'un amortissement faible, c'est-à-dire $\xi < 1$ ou encore $Q > 1/2$, les solutions de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

$$r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm j\sqrt{|\Delta'|} = -\xi\omega_0 \pm j\omega,$$

où $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ et $j^2 = -1$, ce qui conduit à une solution oscillante amortie pour la solution de l'équation homogène

$$u_{c,h}(t) = \exp(-\xi\omega_0 t) [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)].$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p} = E + \exp(-\xi\omega_0 t) [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)].$$

Les conditions initiales imposent d'une part $u_c(0) = 0$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur), soit $E + \alpha = 0$ et ainsi $\alpha = -E$, et d'autre part $i(0) = C \frac{du_c}{dt}(0) = 0$ (continuité du courant dans la bobine), soit $-\xi\omega_0 \alpha + \omega \beta = 0$ ou encore $\beta = -\xi\omega_0 E / \omega = -\xi E / \sqrt{1 - \xi^2}$. Finalement

$$u_c(t) = E \left(1 - \exp(-\xi\omega_0 t) \left[\cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega t) \right] \right). \quad (7.9)$$

La courbe représentative de $u_c(t)$ (voir figure 7.8) est une oscillation exponentiellement amortie, on parle de régime pseudo-périodique⁴. Les courbes $E + A \exp(-\xi\omega_0 t)$ et $E - A \exp(-\xi\omega_0 t)$, avec A tel que $A^2 = 1 + (\xi/\sqrt{1 - \xi^2})^2$ soit $A = 1/\sqrt{1 - \xi^2}$, sont des courbes enveloppes de la tension.

La courbe de $i(t)$ s'obtient par dérivation, $i(t) = C \frac{du_c}{dt}(t)$. La fonction $u_c(t)$ est nulle à l'origine et la tangente à l'origine est horizontale puisque $i(0) = 0$, et plus généralement l'intensité s'annule à chaque extremum de la tension (courbe en pointillé verticale sur la figure). Notons à ce sujet que les points de contact entre la tension et ses enveloppes n'ont pas tout à fait lieu aux extrema de la tension, mais ces points sont d'autant plus proches que ξ est faible (il en est de même pour l'intensité).

Définition 7.4. Pseudo-période

La partie oscillante de $u_c(t)$ est de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Néanmoins, puisque les oscillations sont amorties exponentiellement, la courbe n'est pas périodique : le temps T s'appelle la pseudo-période (et ω la pseudo-pulsation). Sur la courbe de la figure 7.8, elle se lit entre deux extrema, ou entre deux passages successifs montant (ou descendant) par la valeur $u_c = E$.

D'après l'expression de $\omega = \sqrt{\omega_0^2(1 - \xi^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, on trouve, en posant $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > T_0.$$

Le temps T_0 est appelé la période propre. On constate que plus le facteur de qualité Q est grand, plus la pseudo-période se rapproche de la période propre, et moins les oscillations sont amorties.

La durée τ du régime transitoire, c'est-à-dire la durée caractéristique d'amortissement des oscillations, est donnée par le terme exponentiel $\exp(-\xi\omega_0 t) = \exp(-t/\tau)$, donc

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0}. \quad (7.10)$$

4. On utilise le qualificatif « pseudo » car la partie sinusoïdale est amortie exponentiellement, la tension aux bornes du condensateur n'est donc pas périodique.

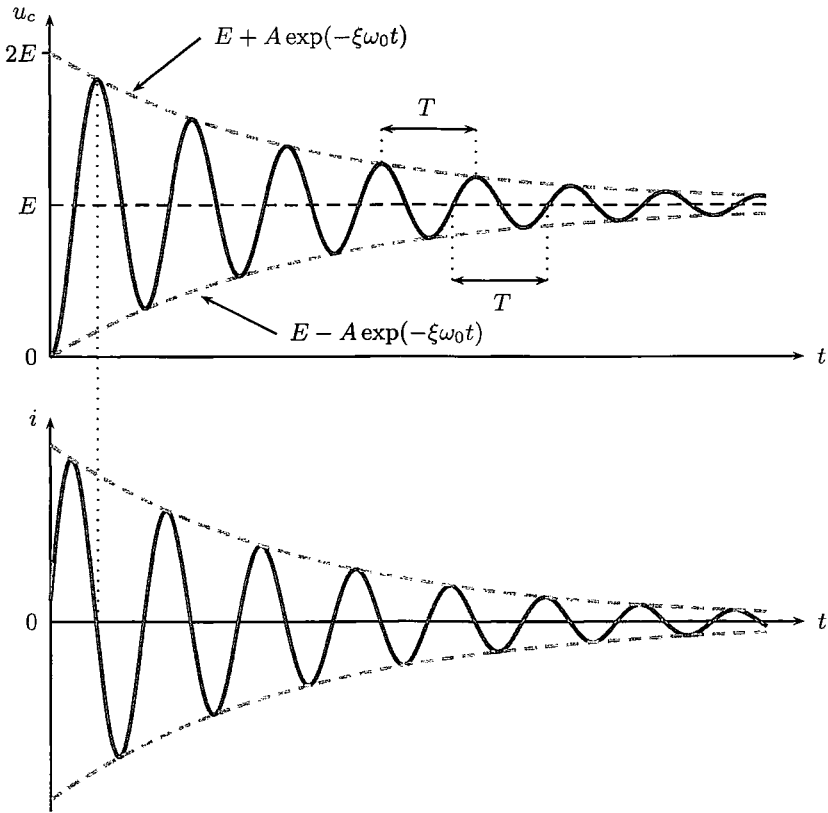


FIG. 7.8. Régime pseudo-périodique. Taux d'amortissement $\xi \simeq 6 \cdot 10^{-2}$.

Cette durée augmente lorsque Q augmente. Le facteur de qualité caractérise la qualité des oscillations; lorsque Q tend vers l'infini, les oscillations deviennent harmoniques (le régime est purement oscillant). Plus le facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\xi}$ est grand, moins l'amortissement est important (ξ faible) et plus les oscillations (et donc le régime transitoire) dureront longtemps.

1.3.3. Amortissement fort, régime aperiodique

Dans le cas d'un amortissement fort, c'est-à-dire $\xi > 1$ ou encore $Q < 1/2$, le discriminant réduit est positif, les solutions de l'équation caractéristique sont donc réelles et de plus négatives⁵, $r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\Delta'} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$. On prend toujours comme solution particulière la valeur en régime permanent $u_{c,p} = E$; la solution de l'équation différentielle homogène est quant à elle de la forme

$$u_{c,h}(t) = \alpha_+ \exp(r_+ t) + \alpha_- \exp(r_- t),$$

la solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p} = E + \alpha_+ \exp(r_+ t) + \alpha_- \exp(r_- t).$$

Les deux exponentielles sont décroissantes, on introduit logiquement $\tau' = -1/r_+$ et $\tau'' = -1/r_-$, définissant les constantes de temps du régime aperiodique. Après

5. Elles sont de même signe, car leur produit (ω_0^2) est positif, et leur somme ($-2\xi\omega_0$) est négative, ce qui permet de conclure.

quelques simplifications, on obtient les expressions

$$\tau' = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \tau'' = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\omega_0}. \quad (7.11)$$

Le temps caractéristique le plus grand est τ'' . Si $\xi \gg 1$ donc $2Q \ll 1$, alors le temps caractéristique le plus grand apparaissant dans les expressions est $2\xi/\omega_0$, soit $1/(\omega_0 Q)$. Dans le cas $\xi \gtrsim 1$, soit $Q \lesssim 1/2$, on retrouve un temps caractéristique de l'ordre de $\xi/\omega_0 \simeq 1/\omega_0$ comme dans le cas du régime pseudo-périodique lorsque $\xi \rightarrow 1$, voir équation (7.10).

Les évolutions de la tension et de l'intensité sont représentées à la figure 7.9. La tangente à l'origine de la courbe de $u_c(t)$ est horizontale, car $i(0) = 0$. De plus, la fonction $u_c(t)$ possède un point d'inflexion au point A (voir figure) qui correspond au maximum du courant $i(t)$. On retrouve bien le régime permanent lorsque t tend vers l'infini : u_c tend vers E et i vers zéro.

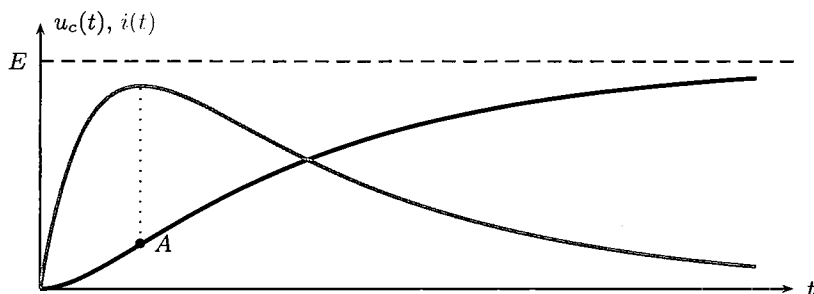


FIG. 7.9. Régime apériodique. Tension en noir, intensité en gris.

I.3.4. Régime critique

Définition Il est illusoire sur un système physique d'espérer régler exactement le taux d'amortissement à $\xi = 1$ correspondant au régime critique. Un amortissement réel sera toujours légèrement *sous-critique* (donc pseudo-périodique très amorti) ou *surcritique* (apériodique). Pour cette raison, nous ne développerons pas les solutions dans ce cas précis (voir annexe B page 645). Cependant l'évocation de ce régime est intéressante, car il correspond au retour le plus rapide vers l'état d'équilibre. C'est souhaitable par exemple dans le cas des amortisseurs d'automobile.

Pour un système donné, mécanique ou électrique, l'amortissement est contrôlé *via* un paramètre que l'on peut appeler coefficient d'amortissement (c'est le nom du facteur de proportionnalité h dans l'expression de la force de frottement $-h\vec{v}$, voir section I.1 page 151). Ce coefficient a une dimension. Pour une certaine valeur de ce coefficient, appelée amortissement critique, le régime est critique. Le terme « taux » d'amortissement prend ici tout son sens, il s'agit du rapport de l'amortissement réel à l'amortissement critique ; ce nombre est sans dimension. Dans le cas de l'oscillateur électrique étudié (voir figure 7.7), la résistance critique est $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ et le taux d'amortissement est alors $\xi = R/R_c$.

Les courbes donnant l'évolution de la tension et de l'intensité sont représentées sur la figure 7.10. Comme dans le cas du régime apériodique, la tangente à l'origine est horizontale et il existe un point d'inflexion pour la tension lorsque l'intensité passe par un maximum.

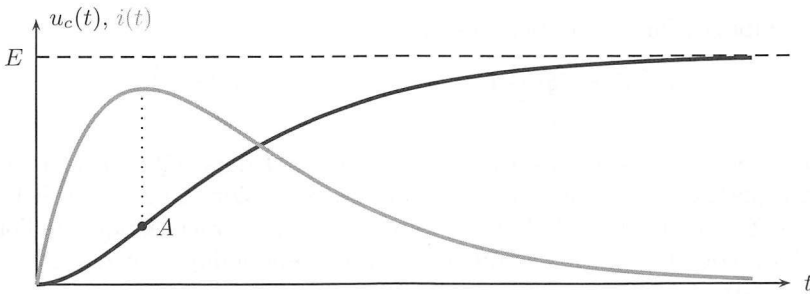


FIG. 7.10. Régime critique. Tension en noir, intensité en gris.

Synthèse

Régimes d'un oscillateur amorti

Selon la valeur de son amortissement, un oscillateur amorti présente différents régimes en réponse à un échelon :

- ▶ régime aperiodique (exponentielles convergentes) si $\xi > 1$, soit $Q < 1/2$;
- ▶ régime critique si $\xi = 1$, soit $Q = 1/2$;
- ▶ régime pseudo-périodique (oscillations exponentiellement amorties) si $\xi < 1$, soit $Q > 1/2$.

Durée du régime transitoire Le temps caractéristique du régime transitoire dans le cas critique⁶ est $\tau = 1/\omega_0$; c'est en effet la limite des temps caractéristiques obtenus dans les cas sous-critique⁷ et surcritique⁸ lorsque ξ tend vers 1. Cette situation correspond à la durée la plus faible pour le régime transitoire.

Synthèse

Durée du régime transitoire

La durée du régime transitoire dépend du facteur de qualité. On retiendra comme ordres de grandeur

$$\frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{si } Q \gtrsim \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{Q\omega_0} \quad \text{si } Q \ll \frac{1}{2}.$$

De plus, la durée la plus faible correspond au régime critique ($Q = 1/2$).

I.3.5. Aspects énergétiques

Reprenons le bilan énergétique commencé à la section I.1.2 (voir page 153) dans le cas du régime libre, en l'adaptant au cas de la réponse indicielle. Le bilan de puissance

6. Voir aussi la section I.2.2 page 646 de l'annexe sur les équations différentielles.

7. Voir l'équation (7.10) lorsque $\xi \rightarrow 1$.

8. Voir la valeur de τ'' dans l'équation (7.11) lorsque $\xi \rightarrow 1$.

du circuit RLC s'obtient en multipliant la loi des mailles (7.4) par i ,

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + u_c i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} C u_c^2 \right),$$

où l'on a utilisé $i = C \frac{du_c}{dt}$. Le terme Ei est la puissance fournie par le générateur et Ri^2 représente la puissance dissipée par effet Joule (voir page 120). Le dernier terme correspond à la puissance fournie au condensateur et à la bobine, qui stockent l'énergie

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} C u_c^2.$$

L'intégration du bilan de puissance entre $t = 0$ et t tendant vers l'infini donne

$$\int_0^\infty Ei dt = \int_0^E EC du_c = CE^2,$$

$$\int_{t=0}^\infty d \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} C u_c^2 \right) = \left[\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} C u_c^2 \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} CE^2.$$

On en déduit alors par différence $\int_{t=0}^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2} CE^2$.

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule, et l'autre moitié est stockée dans le condensateur sous forme d'énergie électrostatique. La bobine ne stocke pas d'énergie sur la durée totale de fonctionnement : l'énergie stockée temporairement est ensuite restituée au reste du circuit.

EXERCICE CORRIGÉ 7.5. Facteur de qualité : interprétation énergétique

Considérons un circuit RLC série libre (c'est-à-dire non soumis à une source de tension, voir section I.2 page 155). Le condensateur est supposé initialement chargé à q_0 . On suppose le circuit en régime pseudo-périodique très faiblement amorti : $Q \gg 1$.

1. Montrer que l'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2$ peut s'écrire, de manière approchée, sous la forme $\mathcal{E}_0 \exp(-t/\tau)$, avec \mathcal{E}_0 et τ à déterminer.
2. Estimer, toujours dans l'hypothèse $Q \gg 1$, le rapport $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{\mathcal{E}(t)}$ (variation relative de l'énergie totale sur une pseudo-période) en fonction du facteur de qualité Q (T est la pseudo-période).

Corrigé

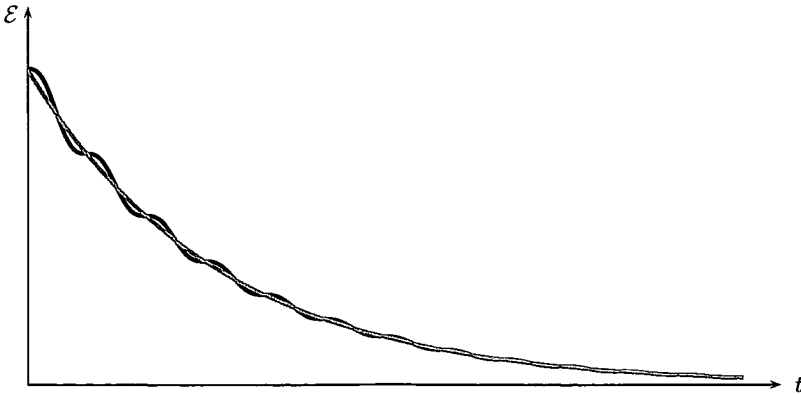
1. La tension aux bornes du condensateur est $u_c(t) = A \exp(-\xi \omega_0 t) \cos(\omega t + \varphi)$, avec A et φ des constantes déterminées par les conditions initiales ; on a introduit les grandeurs $\xi \omega_0 = \frac{R}{2L}$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ (voir annexe B page 647). Comme $Q \gg 1$, la pseudo-pulsation est très proche de la pulsation propre ω_0 . Ainsi, $u_c(t) \simeq A \exp(-\xi \omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$. L'intensité s'obtient par (on suppose le condensateur en convention récepteur)

$$i = C \frac{du_c}{dt} \simeq CA \exp(-\xi \omega_0 t) [-\xi \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)].$$

Or, $\xi \ll 1$, puisque $Q \gg 1$, donc l'expression de $i(t)$ peut se simplifier par

$$i \simeq -CA \exp(-\xi \omega_0 t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

2. On en déduit alors l'énergie en appliquant la relation de l'énoncé (énergie totale stockée dans la bobine et le condensateur) $\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2}CA^2 \exp(-2\xi\omega_0 t)$. Le terme $\frac{1}{2}CA^2$ est l'énergie initialement stockée dans le condensateur, égale à $\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$. L'énergie totale décroît exponentiellement, avec une constante de temps τ telle que $1/\tau = 2\xi\omega_0$. La figure ci-dessous représente l'énergie totale (en noir) et l'expression approchée précédente (en gris), dans le cas $Q = 10$. On observe que les deux courbes sont très proches (et ce d'autant plus que Q est grand) et que l'approximation exponentielle est bien vérifiée.



On en déduit le rapport $\frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{\mathcal{E}(t)} \simeq 1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)$. Or, $T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}$, donc $T/\tau \simeq \frac{2\pi}{Q} \ll 1$. Le développement limité de l'exponentielle à l'ordre un au voisinage de zéro est $\exp(x) = 1 + x + o(x)$; cela conduit finalement à $\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \simeq \frac{2\pi}{Q}$.

II. Régime sinusoïdal forcé, impédances complexes

Nous avons noté en introduction de ce chapitre l'importance des signaux sinusoïdaux (50 Hz du secteur, par exemple). Cette section a pour objectif d'introduire les outils simplifiant leur étude. La section III permettra de les mettre en œuvre.

II.1. Signaux sinusoïdaux

II.1.1. Définitions et caractéristiques

Définition 7.6. Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est de la forme $x(t) = X_m \cos[\Phi(t)] = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, avec :

- ▶ X_m l'amplitude du signal, $X_m \geq 0$;
- ▶ ω la pulsation du signal, telle que $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$, où T est la période et f la fréquence ;
- ▶ $\Phi(t) = \omega t + \varphi$ la phase du signal (grandeur angulaire), et φ la phase à l'origine.

Les signaux périodiques sont aussi caractérisés par leurs valeurs moyennes et efficaces. Un signal alternatif est un signal périodique de valeur moyenne nulle, mais dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'aux signaux sinusoïdaux.

Définition 7.7. *Valeurs moyenne et efficace*

On définit la valeur moyenne d'un signal T -périodique $f(t)$ par

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

et sa valeur efficace, aussi appelée valeur quadratique moyenne, par

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt}.$$

On trouve également la notation \bar{f} pour la valeur moyenne temporelle, mais dans la suite nous adopterons $\langle f \rangle$.

Remarque Le temps t_0 dans les bornes d'intégration peut être choisi selon sa convenance, car la fonction est T -périodique.

Les signaux sinusoïdaux jouant un rôle fondamental dans la suite, il est intéressant de calculer leurs valeurs moyenne et efficace.

Pour un signal sinusoïdal de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$,

$$\langle x \rangle = X_{\text{moy}} = 0 \quad \text{et} \quad X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}.$$

EXERCICE CORRIGÉ 7.8.*Valeur efficace d'un signal sinusoïdal*

Retrouver l'expression de la valeur efficace d'un signal sinusoïdal en fonction de son amplitude.

Corrigé

Constatons tout d'abord que la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est effectivement nulle. D'après la définition de la valeur moyenne, il faut calculer $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X_m \cos(\omega t + \varphi) dt$, ce qui après calcul conduit bien à $X_{\text{moy}} = 0$: l'intégrale d'une fonction sinusoïdale sur une période est nulle.

Pour déterminer la valeur efficace, il faut savoir calculer l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_0+T} X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt.$$

Or, le cosinus peut se décomposer selon $\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)]$. La fonction $\cos(2\omega t + 2\varphi)$ est une fonction sinusoïdale $\frac{T}{2}$ -périodique, donc son intégrale sur un intervalle de longueur T est nulle. Il reste l'intégrale de $1/2$ sur un intervalle de longueur T , soit finalement

$$X_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{X_m^2}{2} \Rightarrow X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \text{ car } X_m > 0.$$

II.1.2. Différence de phase entre deux signaux synchrones

On considère deux signaux synchrones, c'est-à-dire de même pulsation ω ,

$$u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Notons Δt le décalage temporel entre leurs annulations (voir figure 7.11).

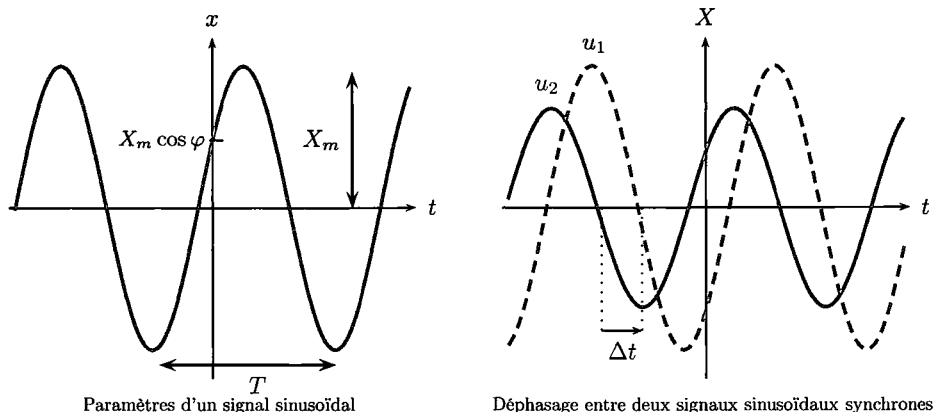


FIG. 7.11. Signaux sinusoïdaux.

Définition 7.9. Déphasage entre deux signaux synchrones

Le déphasage $\Delta\varphi \in [-\pi; \pi]$ du signal u_2 par rapport au signal u_1 est donné par

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \Delta t = \frac{2\pi \Delta t}{T}.$$

- ▶ Si $\Delta\varphi > 0$, alors le signal u_2 est en avance de phase sur le signal u_1 .
- ▶ Si $\Delta\varphi < 0$, alors le signal u_2 est en retard de phase sur le signal u_1 .
- ▶ Si $\Delta\varphi = 0$, les deux signaux sont en phase.

Dans le cas de signaux synchrones, en notant $\Phi_1(t)$ et $\Phi_2(t)$ leurs phases respectives (selon la notation de la définition 7.6 page 164), on constate que

$$\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Ainsi les expressions déphasage, différence de phase ou différence de phase à l'origine des temps sont identiques.

Remarque Lorsqu'il y a plusieurs signaux synchrones, en général l'un d'eux est choisi comme origine des phases, c'est-à-dire que tous les déphasages sont évalués par rapport à ce signal particulier.

II.1.3. Cas particuliers de déphasages

Le cas des signaux en phase a été évoqué dans la définition 7.9. Deux autres cas particuliers, illustrés sur la figure 7.12, sont à noter :

- ▶ si $\Delta\varphi = \pm\pi$, les signaux sont en opposition de phase : l'un est maximum quand l'autre est minimum ;
- ▶ si $\Delta\varphi = \pm\pi/2$, les signaux sont en quadrature de phase (avance ou retard suivant le signe) : quand l'un est extrémal, l'autre est nul, et vice versa.

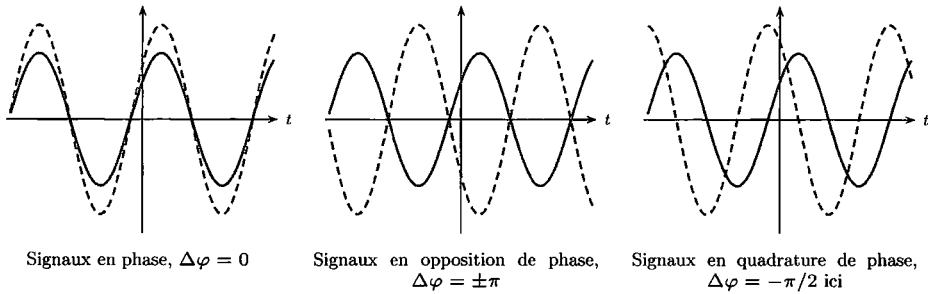


FIG. 7.12. Cas particuliers de déphasages.

II.1.4. Mesure d'un déphasage

À l'oscilloscope, un déphasage peut se mesurer directement en évaluant la période T et le décalage temporel Δt entre les courbes selon l'équation (voir définition 7.9 et figure 7.11)

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \Delta t = \frac{2\pi\Delta t}{T}.$$

Une autre méthode, appelée méthode de Lissajous⁹, consiste à se placer en mode XY (la voie 1 de l'oscilloscope est en abscisse et la voie 2 est en ordonnée). La courbe

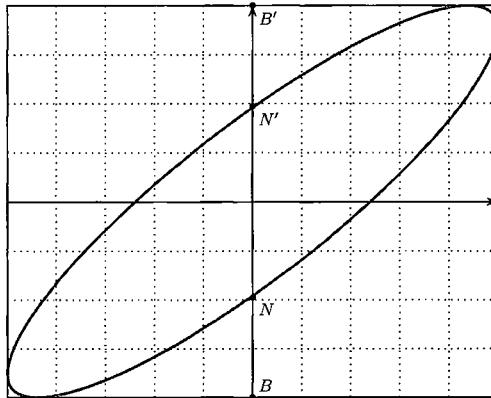


FIG. 7.13. Méthode de Lissajous.

obtenue est une ellipse¹⁰. L'oscilloscope est réglé de manière à ce que l'ellipse soit tangente aux bords de l'écran, selon la figure 7.13. Le déphasage s'obtient alors par $|\sin \varphi| = \frac{NN'}{BB'}$ (il existe une relation similaire sur l'autre axe).

9. Jules Antoine Lissajous, physicien français (1822-1880).

10. L'équation paramétrique d'une ellipse est de la forme $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$ et $y(t) = b \sin(\omega t + \psi)$.

II.2. Représentation de Fresnel

Augustin Fresnel (1788-1827) est un physicien français, fondateur de l'optique moderne. Il a en particulier développé la théorie ondulatoire de la lumière par l'étude, théorique et expérimentale, des phénomènes d'interférence et de diffraction. Il est l'inventeur des lentilles, dites de Fresnel, utilisées dans les phares maritimes pour obtenir un meilleur éclairage (ou plus récemment dans les flashes de téléphone portable)¹¹.

Définition 7.10. Vecteur de Fresnel

Dans le plan orienté xOy (voir figure 7.14), on associe au signal sinusoïdal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ le vecteur \overline{OP} de norme égale à X_m et faisant un angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe Ox , choisi comme référence de phase. C'est un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω , appelé vecteur de Fresnel associé à $x(t)$. L'intérêt est que la projection du vecteur sur l'axe des abscisses $\overline{OH} = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ donne le signal sinusoïdal associé à la représentation de Fresnel.

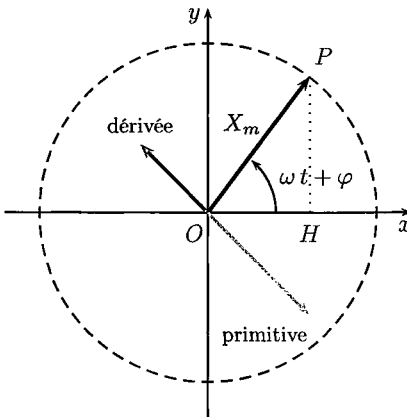


FIG. 7.14. Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal.

II.2.1. Addition de deux signaux synchrones

En représentation de Fresnel, la somme de deux grandeurs sinusoïdales synchrones s'obtient en additionnant géométriquement les vecteurs de Fresnel associés. Le vecteur obtenu est un vecteur synchrone avec les deux autres, dont la phase et l'amplitude peuvent se calculer géométriquement.

EXERCICE CORRIGÉ 7.11.

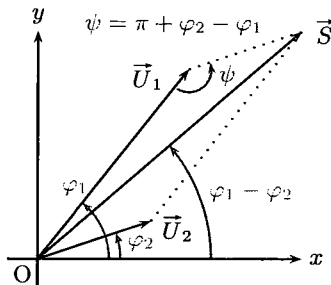
Représentation de Fresnel

En utilisant la représentation de Fresnel, calculer l'amplitude du signal somme des deux signaux $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$.

11. Ces lentilles sont de très courte distance focale tout en ayant l'avantage d'être peu épaisses.

Corrigé

Notons \vec{U}_1 le vecteur de Fresnel associé au signal 1, \vec{U}_2 celui associé au signal 2 et $\vec{S} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ le vecteur représentant la somme (voir figure ci-contre). L'amplitude peut alors être déduite directement graphiquement. Littéralement, il est possible de déterminer la norme de S (l'amplitude du signal) géométriquement en remarquant que l'angle au sommet ψ du triangle formé par \vec{S} , \vec{U}_1 et la translation du vecteur \vec{U}_2 est $\psi = \pi + \varphi_2 - \varphi_1$ puis en appliquant le théorème d'Al-Kashi



$$\begin{aligned} S_m^2 &= S_m^2 = U_{1m}^2 + U_{2m}^2 - 2U_{1m}U_{2m} \cos(\psi) \\ &= U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{1m}U_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Analytiquement, le calcul est plus direct,

$$\begin{aligned} S_m^2 &= \vec{S} \cdot \vec{S} = (\vec{U}_1 + \vec{U}_2) \cdot (\vec{U}_1 + \vec{U}_2) \\ &= U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{1m}U_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

L'amplitude du signal résultant est finalement

$$S_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{1m}U_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

qui est généralement différente de $U_{1m} + U_{2m}$ (sauf si les signaux sont en phase). L'amplitude du signal somme n'est pas en général la somme des amplitudes.

II.2.2. Dérivation et intégration

Il arrive fréquemment que l'on doive dériver ou intégrer une expression ; il est donc nécessaire de savoir l'effectuer en représentation de Fresnel.

Théorème 7.12. Dérivation et intégration en représentation de Fresnel

Le vecteur de Fresnel de la dérivée d'une grandeur sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est tourné de $\pi/2$ et de norme ωX_m , tandis que celui associé à la primitive (de valeur moyenne nulle) est tourné de $-\pi/2$ et de norme $\frac{X_m}{\omega}$ (voir figure 7.14).

PREUVE. Il suffit de dériver et d'intégrer le signal pour s'en rendre compte. En effet, $\frac{dx(t)}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = X_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$, et $\int x(t) dt = \frac{X_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{X_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$. ■

Les exercices 3 et 4 (voir pages 186 et 187) permettent de se familiariser avec l'utilisation de la représentation de Fresnel.

II.3. Représentation complexe

II.3.1. Rappels et notations

Un nombre complexe \underline{z} peut s'écrire sous deux formes :

- ▶ la première, appelée forme cartésienne, met en évidence les parties réelle et imaginaire $\underline{z} = a + jb$, avec $j^2 = -1$. Les réels a et b sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{z} ;
- ▶ la seconde, appelée forme polaire, permet de faire apparaître le module ρ , réel positif, et l'argument θ : $\underline{z} = \rho \exp(j\theta)$.

La figure 7.15 montre que ces grandeurs sont reliées par $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos \theta = a/\rho$; $\sin \theta = b/\rho$ (ainsi $\tan \theta = b/a$). Le complexe conjugué sera noté $\underline{z}^* = a - jb$.

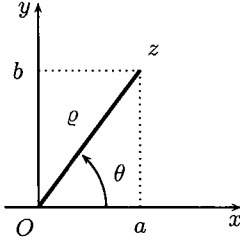


FIG. 7.15. Représentations cartésienne et polaire d'un nombre complexe.

II.3.2. Représentation complexe

Un signal sinusoïdal peut se représenter en notation complexe, ce qui constitue un outil très efficace comme nous le verrons dans la suite.

Définition 7.13. Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

On fait correspondre à un signal sinusoïdal, $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, la grandeur complexe

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t},$$

où $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe. On constate que :

- ▶ $|\underline{X}_m| = X_m$ est l'amplitude du signal ;
- ▶ $\arg(\underline{X}_m) = \varphi$ est la phase à l'origine ;
- ▶ $x(t) = \Re(\underline{x}(t))$.

Remarques

- ▶ Ici, seule la partie réelle $\Re(\underline{x})$ de $\underline{x}(t)$ a un sens physique. Le passage à la notation complexe est juste un artifice de calcul.
- ▶ Le vecteur de Fresnel est la représentation dans le plan complexe du signal sinusoïdal. Ces deux méthodes sont donc deux représentations équivalentes, l'une algébrique, l'autre géométrique. Le point P sur la figure 7.14 est en effet le point d'affixe \underline{x} .
- ▶ Si le signal $x(t)$ est choisi comme référence de phase, alors $\varphi = 0$ et en représentation complexe \underline{X}_m est réel, simplement noté X_m . En revanche, toujours en représentation complexe, les autres signaux possèdent *a priori* une amplitude complexe (sauf dans le cas où un signal est en phase avec le signal choisi comme référence).
- ▶ On remarque que $\Re(\underline{x}(t)) = \Re(\underline{X}_m e^{j\omega t}) = x(t) \neq X_m$; en revanche, comme $|e^{j\omega t}| = 1$, $|\underline{x}(t)| = |\underline{X}_m| = X_m$.

► Certains sujets, ou certaines situations, conduisent à un signal en sinus et non en cosinus : $x(t) = X_m \sin(\omega t)$. Il faut alors revenir à un cosinus en retirant $\pi/2$ à l'argument, car $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$. De manière plus élégante, on peut aussi continuer à poser $\underline{x}(t) = X_m e^{j\omega t}$, mais alors $x(t) = \Im(\underline{x}(t))$.

II.3.3. Dérivation et intégration

Il arrive fréquemment que l'on doive dériver ou intégrer temporellement une expression ; il est donc nécessaire de savoir l'effectuer en représentation complexe.

Théorème 7.14. Dérivation et intégration en représentation complexe

Soit un signal sinusoïdal, $X_m \cos(\omega t + \varphi)$, dont la représentation complexe est \underline{x} :

- sa dérivée est $j\omega \underline{x}$;
- sa primitive (en supposant la valeur moyenne nulle) est $\frac{1}{j\omega} \underline{x}$.

PREUVE. D'après les résultats obtenus lors de l'étude de la représentation de Fresnel (voir page 169),

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = \Re \left[X_m j \omega e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = \Re(j\omega \underline{x}), \\ \int x(t) dt &= \frac{X_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \Re \left[\frac{X_m}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = \Re \left(\frac{1}{j\omega} \underline{x} \right). \end{aligned}$$

II.3.4. Moyenne d'un produit

Théorème 7.15. Moyenne d'un produit en notation complexe

Considérons deux signaux sinusoïdaux synchrones de la forme

$$u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

La valeur moyenne de $u_1(t) u_2(t)$ est

$$\langle u_1(t) u_2(t) \rangle = \frac{U_{1m} U_{2m}}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

En notation complexe, on l'obtient par la relation

$$\langle u_1(t) u_2(t) \rangle = \Re \left(\frac{1}{2} \underline{u}_1 \underline{u}_2^* \right).$$

PREUVE. Le produit des deux signaux est

$$u_1(t) u_2(t) = U_{1m} U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Une formule classique de trigonométrie permet de l'écrire sous la forme

$$\frac{U_{1m} U_{2m}}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Le terme qui dépend du temps est sinusoïdal, sa valeur moyenne est donc nulle. Il reste finalement

$$\langle u_1(t) u_2(t) \rangle = \frac{U_{1m} U_{2m}}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Le calcul des valeurs moyennes de produits est utile lors des calculs de puissances ou de valeurs efficaces (voir par exemple l'exercice 5 page 187).

II.3.5. Intérêt de la notation complexe

Lorsqu'une grandeur vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants, avec un second membre sinusoïdal de pulsation ω (régime sinusoïdal forcé), il est légitime de chercher des solutions particulières sinusoïdales de même pulsation ω .

En considérant le théorème 7.14, l'utilisation de la notation complexe permet de transformer cette équation différentielle en équation algébrique dans le corps des complexes, ce qui est bien plus simple à résoudre. Une fois l'équation résolue, il ne faut pas oublier de repasser dans le corps des réels pour obtenir la solution physique (en prenant la partie réelle de la solution complexe obtenue). La section III illustre la mise en pratique de cette technique. Mais auparavant, nous allons généraliser les outils vus pour le régime continu (comme les lois de Kirchhoff) au cas du régime sinusoïdal forcé grâce aux grandeurs complexes.

II.4. Impédance et admittance complexes

II.4.1. Définitions et propriétés

Un dipôle linéaire est un dipôle pour lequel la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. L'utilisation de la représentation complexe permet de transformer cette équation différentielle en équation algébrique liant \underline{u} et \underline{i} .

Théorème 7.16. Impédance complexe d'un dipôle linéaire passif

Pour un dipôle linéaire passif, la tension complexe \underline{u} à ses bornes est reliée à l'intensité complexe \underline{i} qui le traverse par une relation similaire à la loi d'Ohm,

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i},$$

où \underline{Z} est un nombre complexe, appelé impédance complexe du dipôle. Cela généralise la loi d'Ohm, en régime sinusoïdal forcé, à tout dipôle linéaire passif.

Le théorème précédent tient lieu de définition d'un dipôle passif : pour un tel dipôle, \underline{u} et \underline{i} sont proportionnels. Un dipôle linéaire est dit actif si la relation entre \underline{u} et \underline{i} est affine, par exemple $\underline{u} = E \pm \underline{Z} \underline{i}$ (source).

Définition 7.17. Admittance complexe

L'admittance complexe \underline{Y} d'un dipôle linéaire passif est définie par $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$. Elle généralise la notion de conductance en régime sinusoïdal forcé.

L'argument de \underline{Z} est tel que $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{u}) - \arg(i)$, il est donc égal au déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$. Le module de \underline{Z} relie les amplitudes ou les valeurs efficaces¹² pour des signaux sinusoïdaux par $U_m = |\underline{Z}|I_m$ ou $U_{\text{eff}} = |\underline{Z}|I_{\text{eff}}$.

II.4.2. Résistance

La loi d'Ohm¹³ est toujours valable, donc $u(t) = Ri(t)$. En passant en notation complexe, on obtient $\underline{u} = R\underline{i}$.

Synthèse

Impédance complexe d'une résistance

Pour une résistance, $\underline{Z} = R$. Cette impédance étant réelle, $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase aux bornes d'une résistance.

II.4.3. Condensateur idéal

En convention récepteur, $i = C \frac{du}{dt}$, et ainsi $u(t)$ et $i(t)$ oscillent à la même pulsation ω . En représentation complexe, on obtient donc $\underline{i} = jC\omega\underline{u}$. On en déduit alors l'admittance complexe du condensateur $\underline{Y} = 1/\underline{Z} = jC\omega$. Son argument, qui est celui de j , est égal au déphasage de $i(t)$ par rapport à $u(t)$, qui vaut donc $+\pi/2$.

Synthèse

Impédance complexe d'un condensateur

Pour un condensateur, $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$. Cette impédance est imaginaire pure et de partie imaginaire négative. Aux bornes d'un condensateur, $i(t)$ est déphasé de $+\pi/2$ par rapport à $u(t)$: le courant est en quadrature de phase avance sur la tension.

Le comportement fréquentiel du condensateur est important à connaître :

- à basses fréquences, c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0, le module de l'impédance complexe du condensateur tend vers l'infini ; le condensateur se comporte alors comme un circuit ouvert. En effet, si $|\underline{Z}|$ tend vers l'infini, alors l'amplitude du courant $I_m = \frac{U_m}{|\underline{Z}|}$ tend vers zéro ;
- à hautes fréquences, pour ω tendant vers l'infini, l'impédance du condensateur tend vers zéro, donc la tension à ses bornes également : le condensateur se comporte comme un court-circuit.

Ces comportements limites permettent souvent d'avoir simplement des informations préliminaires sur le fonctionnement d'un circuit.

Remarque Lorsque l'on place un oscilloscope en mode AC, cela a pour effet de placer un condensateur en série à l'entrée. Ce dernier va couper les basses fréquences (voir chapitre 8 pour la notion de filtrage), et tout particulièrement les signaux continus, qui correspondent à une fréquence nulle : le mode AC supprime les composantes

12. Ce qui est la même chose à un facteur $\sqrt{2}$ près ; néanmoins, il ne faut pas mélanger les deux dans l'expression.

13. Dans tout ce qui suit, les dipôles sont étudiés en convention récepteur. Pour passer en convention générateur, il suffit de changer le signe des relations entre courant et tension.

continues. C'est pour cette raison que le mode *AC* (*Alternative Current*) est à utiliser avec précaution ; par défaut, il faut toujours se placer en mode *DC* (*Direct Current*), qui laisse passer à la fois l'alternatif et le continu.

II.4.4. Bobine idéale

En convention récepteur, $u = L \frac{di}{dt}$; en passant en représentation complexe, on obtient donc $\underline{u} = jL\omega \underline{i}$. On en déduit l'impédance complexe d'une bobine $\underline{Z} = jL\omega$. Son argument, qui est celui de j , est égal au déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$.

Synthèse

Impédance complexe d'une bobine

Pour une bobine, $\underline{Z} = jL\omega$. Cette impédance est imaginaire pure et de partie imaginaire positive. Aux bornes d'une bobine, $u(t)$ est déphasé de $+\pi/2$ par rapport à $i(t)$: la tension est en quadrature de phase avancée sur le courant.

Le comportement fréquentiel d'une bobine est le suivant :

- ▶ à basses fréquences, c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0, le module de l'impédance complexe tend vers zéro, la bobine est équivalente à un fil ;
- ▶ à hautes fréquences, pour ω tendant vers l'infini, l'impédance de la bobine tend vers l'infini, donc elle se comporte comme un circuit ouvert.

II.4.5. Étude d'un réseau en régime sinusoïdal forcé

Toutes les lois linéaires obtenues au chapitre 5 sont transposables en régime sinusoïdal forcé du fait de la linéarité de l'opérateur partie réelle.

Lois de Kirchhoff en notation complexe Les lois de Kirchhoff sont ainsi directement utilisables avec les grandeurs complexes, c'est-à-dire la loi des nœuds (voir section III.2.2 page 116) et la loi des mailles (voir section III.3 page 117).

Attention

Les lois de Kirchhoff sont valables en régime sinusoïdal forcé, mais uniquement pour les grandeurs complexes, et non pour leurs modules.

Diviseurs de tension et de courant Les formules des diviseurs de tension (voir section VI.2.1 page 126) et de courant (voir section VI.2.2 page 127) se généralisent au cas complexe pour les dipôles linéaires passifs (sous réserve de travailler avec les impédances complexes).

Association de deux impédances Les formules d'association d'impédances en série ou en parallèle se transposent à partir de celles obtenues pour l'association de résistances (voir section III.1.2 page 114). Ainsi l'impédance équivalente à des associations de dipôles linéaires passifs en série est la somme des impédances, et

l'admittance équivalente à des associations de dipôles linéaires passifs en parallèle est la somme des admittances.

Une nouvelle fois, les lois d'association ne sont valables que pour les grandeurs complexes et non pour les modules (ou les grandeurs réelles).

Synthèse

Utilisation des impédances

La notion d'impédance généralise la notion de résistance à tout dipôle linéaire passif en régime sinusoïdal forcé. Il est donc possible de travailler avec ces dipôles comme avec de simples résistances, mais en notation complexe. En particulier, il faut prendre l'habitude de travailler avec les impédances pour des groupements série, et avec les admittances lorsque les dipôles sont en parallèle.

EXERCICE CORRIGÉ 7.18.

RLC série

Considérons un circuit *RLC* série soumis à une tension $e(t) = E \cos \omega t$. Exprimer l'amplitude complexe \underline{u}_c de la tension aux bornes du condensateur en fonction de E , C , R , L et ω .

Corrigé

La formule du diviseur de tension donne immédiatement

$$\underline{u}_c = E \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = E \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = E \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Il est alors possible d'étudier la résonance en tension du condensateur (voir section III.2).

Représentation de Thévenin En régime sinusoïdal forcé, un dipôle actif linéaire peut être représenté par un générateur de Thévenin de fem complexe \underline{E} en série avec une impédance \underline{Z} .

II.4.6. Caractère inductif ou capacitif d'un dipôle

Définition 7.19. *Résistance et réactance*

L'impédance est un nombre complexe, qu'on peut donc écrire sous la forme $\underline{Z} = R + jX$, avec R et X deux réels tels que :

- ▶ la résistance R est un réel positif ou nul ;
- ▶ la réactance X est un réel quelconque. Si $X > 0$, le dipôle est dit inductif, si $X < 0$, il est dit capacitif et si $X = 0$, il est résistif (par analogie avec les impédances d'une résistance, d'un condensateur ou d'une bobine).

Les termes capacitif et inductif renvoient évidemment à la notion de condensateur ou de bobine.

- ▶ Pour un condensateur idéal (voir section II.4.3 page 173), $R = 0$ et $X = -\frac{1}{C\omega} < 0$.
- ▶ Pour une bobine idéale (voir section II.4.4 page 174), $R = 0$ et $X = L\omega > 0$.

III. Excitation sinusoïdale d'un oscillateur

Cette section reprend l'étude des oscillateurs amortis (électriques ou mécaniques) introduits à la section I, en réponse cette fois à une excitation sinusoïdale. Ce sera l'occasion de rencontrer un phénomène particulièrement intéressant en physique, tant par ses applications technologiques que par son importance théorique : la résonance.

III.1. Présentation

III.1.1. Mise en équation, analogies

Forçage de l'oscillateur mécanique amorti Reprenons l'oscillateur mécanique étudié à la section I.1.1 page 151, mais supposons maintenant qu'un dispositif non précisé¹⁴ impose le mouvement de l'extrémité A du ressort (voir figure 7.16). Par exemple, $x_A(t) = A_m \cos(\omega t)$ suit un mouvement sinusoïdal connu et l'on souhaite déterminer celui du mobile M de masse m .

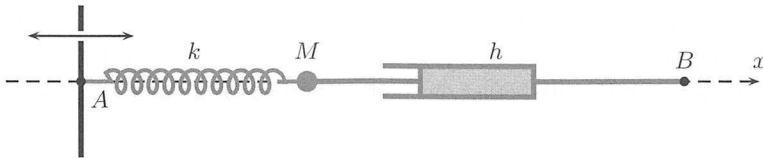


FIG. 7.16. Forçage de l'oscillateur mécanique amorti.

La longueur du ressort est $\ell_0 + x(t) - x_A(t)$ (ℓ_0 est la longueur à vide), en supposant une nouvelle fois que $x(t)$ (désignant la position du mobile de masse m) est nul à l'équilibre en l'absence de forçage. La projection sur l'axe (Ox) du principe fondamental de la dynamique s'écrit alors $m\ddot{x} = -k(x - x_A) - h\dot{x}$, soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 A_m \cos(\omega t) \quad ; \quad Q = \frac{1}{2\xi} \quad (7.12)$$

en reprenant les notations déjà définies pour la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et pour le taux d'amortissement $\xi = h/(2m\omega_0)$.

Forçage du circuit électrique Le circuit électrique étudié est le RLC série de la figure 7.7 (voir page 158) où l'on a remplacé le générateur de tension continue par un générateur basse fréquence délivrant une tension $e(t) = E \cos(\omega t)$ sinusoïdale (voir figure 7.17). La mise en équation est alors identique en remplaçant E par $E \cos(\omega t)$ et conduit, sur le modèle de l'équation (7.8) page 158, à la forme canonique

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E \cos(\omega t). \quad (7.13)$$

Analogies Une nouvelle fois, l'équation canonique (7.13) obtenue pour l'oscillateur électrique est similaire à l'équation (7.12) obtenue pour l'oscillateur mécanique,

14. Le système étudié pourrait modéliser un sismomètre, le mouvement de l'extrémité serait alors le mouvement du support lors d'un tremblement de terre.

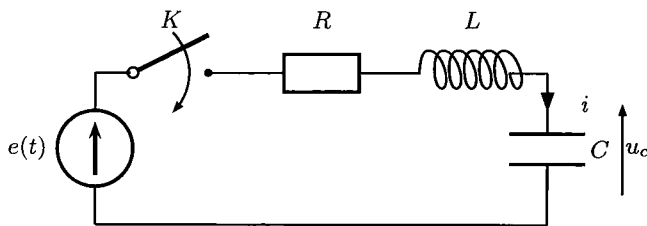


FIG. 7.17. Circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale de tension.

de sorte que les analogies proposées à la section I.1.3 (voir page 154) restent valables¹⁵. Nous allons poursuivre en privilégiant l'exemple électrique dans la discussion, et donc la réponse en tension, mais les résultats obtenus sur u_c seront transposables à l'élongation $x(t)$ (de même entre intensité et vitesse).

III.1.2. Régime transitoire

Nous allons par la suite étudier le cas d'un régime sinusoïdal forcé (ou régime harmonique). En pratique, lorsque l'on met le circuit sous tension (lorsque l'on ferme K), le régime n'est harmonique qu'après un bref¹⁶ régime transitoire (solution de l'équation homogène, voir figure 7.18).

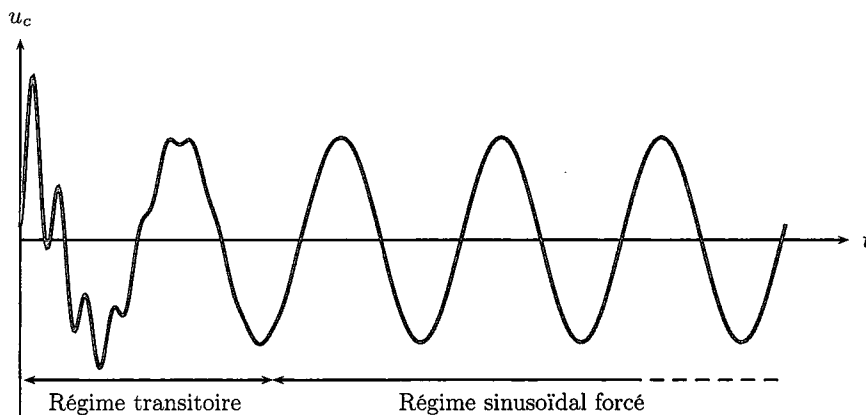


FIG. 7.18. Exemple de régimes transitoire et sinusoïdal forcé.

III.2. Résonance en tension

Dans cette section, nous allons chercher la forme exacte de la solution particulière $u_{c,p}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ de l'équation (7.13) afin d'obtenir la solution en régime sinusoïdal forcé. Pour cela, il faut déterminer l'amplitude U_m et la phase φ .

15. L'amplitude de la tension de forçage est l'analogue de l'amplitude du déplacement du support.

16. Voir synthèse page 162 pour la durée du régime transitoire. Mathématiquement, la solution n'est harmonique que lorsque t tend vers l'infini.

III.2.1. Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

Pour bénéficier de la grande simplification permise par l'utilisation de la notation complexe, il faut introduire la représentation complexe associée aux grandeurs réelles intervenant dans le problème. Par convention, celles-ci sont soulignées :

- ▶ tension excitatrice du générateur (référence de phase) : $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$;
- ▶ réponse du condensateur : $\underline{u}_c(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$, avec $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe de $u_c(t)$.

On introduit ces grandeurs dans l'équation différentielle en tirant profit du fait qu'en notation complexe, la dérivation temporelle revient à multiplier par $j\omega$, donc

$$-\omega^2 \underline{U}_m e^{j\omega t} + 2\xi\omega_0 j\omega \underline{U}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{U}_m e^{j\omega t} = \omega_0^2 E e^{j\omega t}.$$

Il est possible de tout simplifier par $e^{j\omega t}$ puisque ce terme est non nul. D'où l'expression de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur¹⁷,

$$\underline{U}_m = E \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_0 j\omega}.$$

Dans la suite, nous allons travailler avec la pulsation réduite¹⁸.

Définition 7.20. Pulsation réduite

La pulsation réduite est la grandeur adimensionnée x telle que $x = \omega/\omega_0$.

L'expression de l'amplitude complexe devient (en divisant haut et bas par ω_0^2)

$$\underline{U}_m = E \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}. \quad (7.14)$$

Nous allons étudier successivement les propriétés du module et l'argument de l'amplitude complexe de $u_c(t)$, afin de calculer l'amplitude et la phase de la tension aux bornes du condensateur, $u_c(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) = \Re(\underline{U}_m e^{j\omega t})$.

III.2.2. Étude du module : résonance en tension

Le module de l'équation (7.14) est défini par

$$|\underline{U}_m| = U_m = E \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

On constate tout d'abord que $U_m(0) = E$ (c'est le cas du régime continu, le condensateur est alors équivalent à un circuit ouvert, et la tension à ses bornes est celle du générateur) et $\lim_{x \rightarrow \infty} U_m(x) = 0$. L'étude de la fonction $U_m(x)$ s'effectue en introduisant la fonction $f(x) = (1 - x^2)^2 + (x/Q)^2$. En effet, le calcul montre que $\frac{dU_m}{dx} = -\frac{df}{dx} \frac{E}{f^{3/2}}$; ainsi, $U_m(x)$ est extrémale pour $\frac{df}{dx} = 0$,

$$\frac{df(x)}{dx} = x \left(\frac{2}{Q^2} - 4 + 4x^2 \right) = 0.$$

17. Nous avons du reste déjà obtenu une expression de ce type dans l'exercice corrigé 7.18 page 175.

18. Travailler avec des grandeurs adimensionnées est une bonne habitude à prendre en physique ; le facteur de qualité Q et le taux d'amortissement ξ sont des valeurs adimensionnées.

La solution $x = 0$ est évidente et toujours possible. Le terme entre parenthèses peut s'annuler, ce qui revient à résoudre $x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$, qui n'admet de solution réelle, non nulle, que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, il existe une autre valeur x_r pour laquelle la dérivée de $f(x)$ s'annule, $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Il y a donc deux cas à distinguer :

- si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$, donc $U_m(x)$ est monotone décroissante et maximale en $x = 0$;
- si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $U_m(x)$ est de dérivée nulle en $x = 0$, elle est maximale¹⁹ en

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Comme $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ pour $x \in [0; x_r]$ et $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$ pour $x \in [x_r; \infty[$, la fonction $U_m(x)$ est croissante jusqu'à x_r , puis est décroissante.

Dans le cas où $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire pour un faible taux d'amortissement $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la tension aux bornes du condensateur présente un maximum en x_r qui vaut

$$U_m(x_r) = E \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

Ce maximum est d'autant plus grand que le facteur de qualité est important. Si $Q \gg 1$, alors

$$x_r \simeq 1 \quad \text{et} \quad U_m(x_r) \simeq QE \gg E.$$

De plus, en $x = 1$, l'amplitude vaut $QE \gg E$. La tension aux bornes du condensateur peut prendre de très grandes valeurs par rapport à la tension de forçage : c'est un phénomène de résonance.

Définition 7.21. Résonance

Lorsqu'un système (électrique, mécanique, etc.) est soumis à une excitation sinusoïdale, il peut exister certaines fréquences particulières, appelées fréquences de résonance, pour lesquelles l'amplitude de sa réponse passe par un maximum : on dit qu'il y a résonance. À la résonance, même une faible excitation peut suffire pour produire de très grandes oscillations du système (cela peut même aller jusqu'à sa destruction).

Pour tracer simplement la courbe représentative de $U_m(x)$, on utilise les propriétés précédentes. On constate également que

$$U_m(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{E}{x^2}.$$

La figure 7.19 représente quelques courbes de résonance pour différentes valeurs du facteur de qualité. Dès que Q augmente, on constate bien que la pulsation de résonance se rapproche de ω_0 , et que l'amplitude tend vers Q . Notons aussi que la largeur du pic de résonance diminue lorsque l'amplitude à la résonance augmente.

19. La dérivée seconde de $f(x)$ en x_r est positive, égale à $8 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) = 8x_r^2 > 0$; c'est donc un minimum pour $f(x)$, et par conséquent un maximum pour $U_m(x) = 1/\sqrt{f(x)}$.

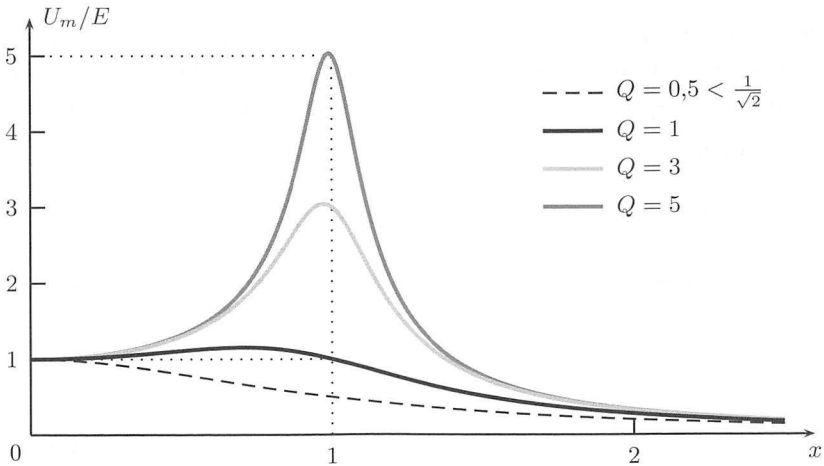


FIG. 7.19. Résonance en tension lorsque $Q > 1/\sqrt{2}$. Plus Q est élevé (c'est illustré par $Q = 5$ sur la figure), plus la résonance a lieu pour $x \simeq 1$ et plus le maximum relatif est proche de Q en valeur.

Synthèse

Résonance en tension

Si l'on soumet un circuit RLC série (respectivement un oscillateur mécanique) à une excitation sinusoïdale, alors la tension aux bornes du condensateur (respectivement l'élongation) présentera une résonance uniquement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, et ce pour la pulsation de résonance

$$\omega_r = x_r \omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0.$$

Cette pulsation est toujours plus faible que la pulsation propre ω_0 du circuit, mais elle s'en rapproche lorsque l'amortissement diminue (voir figure 7.19). Dans ce cas, l'amplitude peut prendre de très grandes valeurs, car elle est proportionnelle à Q .

III.2.3. Étude de la phase

Le déphasage de $u_c(t)$ par rapport à $e(t)$ est donné par l'argument de $\underline{U}_m(x)$ puisque $e(t)$ a été choisi comme référence de phase. D'après l'équation (7.14), l'argument φ est donné par

$$\varphi = \arg(\underline{U}_m(x)) = -\arg\left((1-x^2) + j\frac{x}{Q}\right). \quad (7.15)$$

Donc $\tan \varphi = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$. Néanmoins, comme la fonction tangente est de période π , l'équation précédente ne suffit pas²⁰ à déterminer φ . D'après l'équation (7.15), le complexe dans la parenthèse est de partie imaginaire positive (signe de x/Q), donc

20. La phase ϕ d'une grandeur est donnée par l'argument de l'amplitude complexe associée. Lorsque l'on exprime $\tan \phi$, il subsiste une indétermination sur l'intervalle de longueur π auquel ϕ appartient ; il faut alors étudier le signe du cosinus et/ou du sinus de ϕ .

$\sin \varphi$ est du signe de $-x/Q$, d'où $\sin \varphi < 0$ et $\varphi \in [-\pi; 0]$. Ainsi, en reprenant l'équation (7.15) et en utilisant le fait que $-j^2 = 1$,

$$\varphi = -\arg \left[j \left(+\frac{x}{Q} - j(1-x^2) \right) \right] = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1-x^2}{x/Q} \right). \quad (7.16)$$

Au voisinage de $x = 0$, on peut vérifier que $\tan \varphi \sim -\frac{x}{Q}$ et $\tan \frac{\varphi}{Q} \sim \frac{x}{Q}$, donc on en déduit $\varphi \sim -\frac{x}{Q}$. Plus le facteur de qualité est grand, plus la tangente à l'origine a une pente proche de zéro. On peut alors tracer la courbe représentative de la phase, c'est l'objet de la figure 7.20 pour différentes valeurs du facteur de qualité.

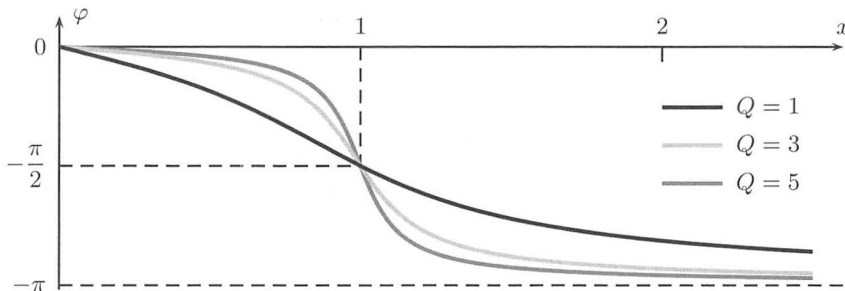


FIG. 7.20. Déphasage aux bornes de C pour différentes valeurs de Q.

Méthode

Détermination de la pulsation propre

Dans le cas d'un facteur de qualité modéré, conduisant à une résonance faible (ou pas de résonance si $Q < 1/\sqrt{2}$), le graphe expérimental d'amplitude (en tension, ou en élongation pour l'oscillateur mécanique) ne permet pas d'obtenir rapidement la pulsation propre, car le pic est peu ou pas prononcé. En revanche, on peut toujours repérer un déphasage de $-\pi/2$ sur le graphe de phase pour l'obtenir.

III.3. Résonance en intensité

Nous allons maintenant chercher l'expression de l'intensité parcourant le circuit en régime sinusoïdal forcé. Elle est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$, il faut donc déterminer son amplitude I_m et sa phase à l'origine ϕ . Pour cela, nous allons utiliser la même méthode que pour la tension aux bornes du condensateur : la représentation complexe.

III.3.1. Amplitude complexe de l'intensité

La référence de phase étant toujours associée à l'excitation, la représentation complexe du courant s'écrit donc $\underline{i} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$. Comme $i = C \frac{du_c}{dt}$, on peut écrire $\underline{i} = jC\omega \underline{u}_c$, d'où l'amplitude complexe du courant

$$\underline{I}_m = jC\omega \underline{U}_m \quad (7.17)$$

avec \underline{U}_m l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur (voir équation 7.14). D'où

$$\underline{I}_m = jC\omega E \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}.$$

Or, $jC\omega = jC\omega_0 x$, donc en divisant haut et bas par $j\frac{x}{Q}$ on obtient²¹

$$\underline{I}_m = \frac{E}{R} \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}. \quad (7.18)$$

III.3.2. Étude du module - Résonance en intensité

Le module de l'amplitude complexe du courant donne l'amplitude du courant et s'exprime par

$$I_m = |\underline{I}_m| = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

On constate que $\lim_{x \rightarrow 0} I_m(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} I_m(x) = 0$, donc il existe (au moins) un maximum entre les deux. Ce maximum correspond au minimum de la fonction $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$, qui a lieu lorsque ce terme s'annule, donc en $x = 1$, soit $\omega = \omega_0$. Cette pulsation est la pulsation de résonance en intensité. À cette pulsation ,

$$I_m(\omega_0) = \frac{E}{R} = QE\sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (7.19)$$

L'amplitude à la résonance est proportionnelle à $1/R$, elle est donc d'autant plus grande que l'amortissement est plus faible.

Synthèse

Résonance en intensité

Si l'on soumet un circuit RLC série (respectivement un oscillateur mécanique) à une excitation sinusoïdale, alors il existe toujours une résonance en intensité (respectivement vitesse) pour la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0$.
À la résonance, l'amplitude est proportionnelle au facteur de qualité, elle est donc d'autant plus grande que l'amortissement est plus faible.

Posons $I_0 = E\sqrt{\frac{C}{L}}$, alors

$$I_m = I_0 \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Faisons varier Q (*via* la résistance R , par exemple) pour voir comment se transforme l'allure de la courbe représentative de $I_m(x)/I_0$. En plus des valeurs particulières précédentes, il faut obtenir les équivalents en zéro et en l'infini :

21. Il est facile de montrer que $QC\omega_0 = \frac{1}{R}$ en utilisant les définitions de Q et ω_0 .

- ▶ en $+\infty$, le terme dominant dans la racine est $Q^2 x^2$, donc $I_m(x)/I_0 \sim \frac{1}{x}$;
- ▶ en zéro, le terme dominant est $(Q/x)^2$, donc $I_m(x)/I_0 \sim x$. Ainsi, la pente de la tangente à l'origine est égale à un (elle est indépendante de R), elle n'est pas horizontale comme c'était le cas précédemment.

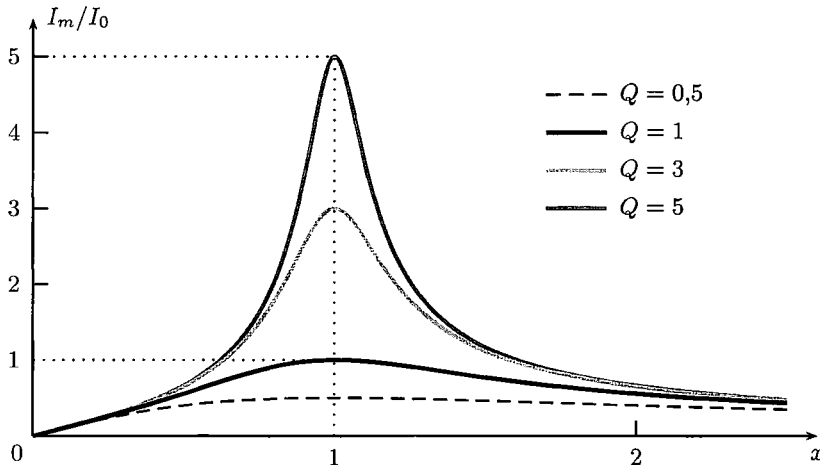


FIG. 7.21. Résonance en intensité pour différentes valeurs de Q .

Les courbes correspondantes sont représentées sur la figure 7.21 pour quelques valeurs de Q . On constate que la pulsation de résonance est toujours égale à ω_0 , et qu'à cette pulsation l'amplitude de $I_m(x)/I_0$ vaut Q . De plus, la tangente à l'origine est bien non nulle. On observe également que la largeur du pic de résonance diminue lorsque Q augmente, c'est-à-dire quand l'amortissement diminue. Mais, pour caractériser rigoureusement la largeur du pic, il faut choisir à quelle hauteur la calculer.

Définition 7.22. Largeur du pic de résonance - Acuité

La largeur de la résonance est la bande de pulsations $\Delta\omega$ pour lesquelles $I_m(\omega) \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$. On appelle acuité de la résonance la grandeur adimensionnée $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$: plus la résonance est étroite (aiguë), plus l'acuité de la résonance est grande.

Pour calculer la largeur de la résonance, il faut donc déterminer les pulsations réduites x_1 et x_2 telles que $I_m(x_{1,2}) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ (voir figure 7.22), d'où

$$I_0 \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{Q I_0}{\sqrt{2}}.$$

Il faut donc résoudre $Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$. La fonction $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ est invariante par inversion, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, lorsque x_1 vérifie $f(x_1) = \frac{1}{Q^2}$, il en va de même pour $x_2 = 1/x_1$. La valeur $x = 1$ annule f et n'est donc pas solution. On montre facilement que cette équation admet deux solutions positives et deux solutions négatives ; il existe donc deux nombres positifs x_1 et $x_2 = 1/x_1 \neq x_1$ faisant l'affaire. On peut donc écrire

$$Q^2 \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)^2 = Q^2 (x_1 - x_2)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad |x_2 - x_1| = \frac{1}{Q} ; \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

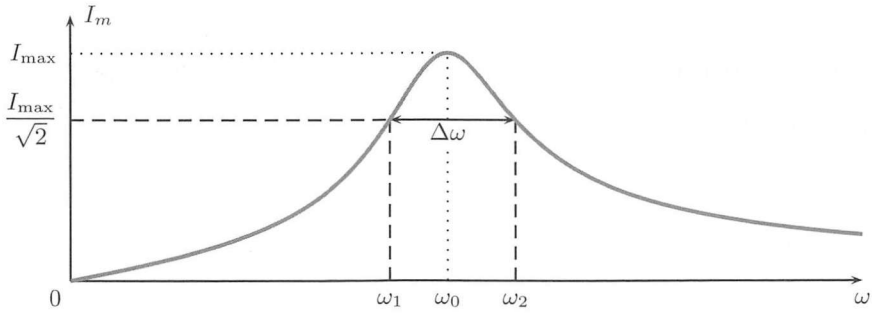


FIG. 7.22. Largeur de la résonance en intensité.

Synthèse

Acuité de la résonance - Facteur de qualité

L'acuité de la résonance est égale au facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

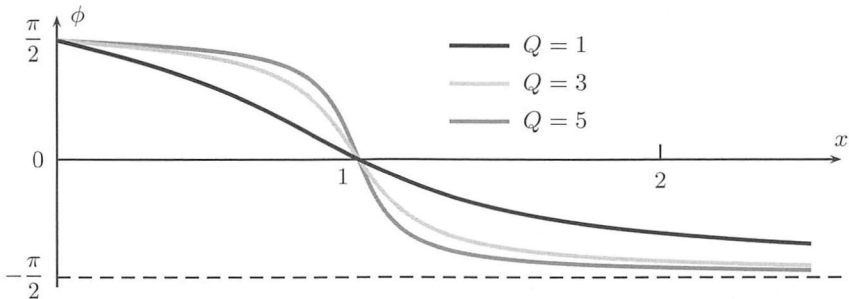
Plus Q est grand (voir figure 7.21), donc plus l'amortissement est faible, plus le pic de résonance est étroit (résonance aiguë) et l'acuité élevée.

III.4. Étude de la phase

L'équation (7.17) lie l'intensité et la tension par la relation $\underline{I}_m = jC\omega\underline{U}_m$, donc

$$\phi = \arg(\underline{I}_m) = \arg(\underline{U}_m) + \frac{\pi}{2}.$$

La courbe de la phase du courant est représentée à la figure 7.23; elle s'obtient donc en décalant de $+\pi/2$ celle de la phase de $u_c(t)$ (voir figure 7.20).

FIG. 7.23. Déphasage de l'intensité pour différentes valeurs de Q .

On constate qu'à la résonance, le déphasage est nul.

Il est également possible de relier la largeur de la résonance à la phase. À la résonance, $Q(x - 1/x) = \pm 1$, soit, d'après l'équation (7.18), $\underline{I}_m = \frac{E}{R} \frac{1}{1 \pm j}$ et ainsi $\phi = -\arg(1 \pm j) = \pm\pi/4$. On relève $x_2 - x_1 = 1/Q$ sur un graphe expérimental comme celui de la figure 7.24.

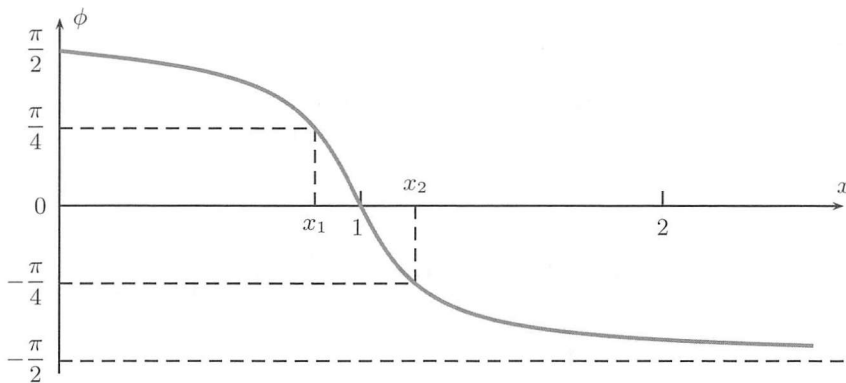


FIG. 7.24. Déphasage du courant et largeur de la résonance.

Méthode

Détermination expérimentale des paramètres

À la résonance en intensité, le courant et la tension du générateur sont en phase. Expérimentalement, il suffit de se placer en mode XY sur l'oscilloscope, avec la tension du générateur sur la voie X et celle aux bornes de la résistance (pour mesurer $i(t)$, il suffit de mesurer la tension aux bornes de la résistance d'après la loi d'Ohm) en voie Y , et de chercher la fréquence qui donne un déphasage nul entre les deux, ce qui correspond à une droite en mode XY (méthode de Lissajous, plus précise que la recherche du maximum sur la courbe en amplitude lorsque Q est faible).

- ▶ La fréquence de résonance donne la fréquence propre de l'oscillateur.
- ▶ Le facteur de qualité se détermine à l'aide du graphe expérimental d'amplitude en intensité ($Q = \omega_0/\Delta\omega$) ou à l'aide de la phase (voir *infra*).

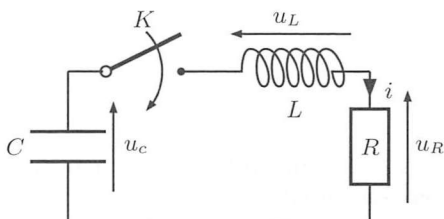
IV. Exercices

1. Régime libre d'un circuit ★

(solution page 684)

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur dans le circuit de la figure 7.25, le condensateur étant initialement chargé à une tension $u_c = E$.

Déterminer $u_c(t)$ dans le cas d'un amortissement faible (à définir).

FIG. 7.25. Circuit RLC en régime libre.

2. Étincelle de rupture ★★

(solution page 684)

Une bobine réelle, d'inductance $L = 3 \text{ mH}$ et de résistance $r = 3 \Omega$, est alimentée par un générateur idéal de tension continue $E = 12 \text{ V}$. Un interrupteur K fermé est placé en série (voir figure 7.26).

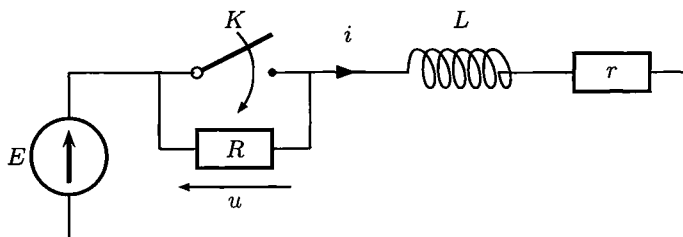


FIG. 7.26. Circuit contenant une bobine.

1. La résistance R en parallèle aux bornes de l'interrupteur représente la résistance de l'air, qui est très grande, et n'intervient que lorsque l'interrupteur est ouvert. On appelle $u(t)$ la tension aux bornes de l'interrupteur.

a/ Quelle est l'intensité i_0 dans le circuit, sachant que le courant est établi depuis longtemps? Application numérique.

b/ À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Déterminer la loi de variation de l'intensité $i(t)$ dans le circuit. Examiner le cas limite où R tend vers l'infini (en fait $R \gg r$). Conclusion.

c/ Déterminer la loi $u(t)$. Calculer $u(0)$ et u_∞ , où u_∞ est la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers l'infini. Examiner le comportement limite de ces deux tensions lorsque R tend vers l'infini, et comparer à E . Application numérique pour $R = 10 \text{ k}\Omega$. Que risque-t-on d'observer au niveau de l'interrupteur?

2. Pour résoudre le problème précédent, on place un condensateur en parallèle de l'interrupteur. Il n'est donc plus nécessaire de tenir compte de R . On donne $C = 0,27 \mu\text{F}$. À $t < 0$, l'interrupteur est fermé et le condensateur déchargé. On l'ouvre à $t = 0$.

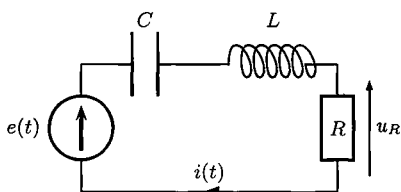
a/ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ après ouverture de l'interrupteur. On posera $\lambda = r/(2L)$ et on introduira une pulsation propre.

b/ Donner l'expression de $u(t)$ et tracer son graphe. Commentaires et conclusion.

3. Circuit RLC et représentation de Fresnel ★

(solution page 686)

On considère le circuit RLC série de la figure 7.27, alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude E_m .

FIG. 7.27. Circuit RLC excité par une tension sinusoïdale.

On souhaite déterminer l'amplitude du courant i et son déphasage par rapport à e en fonction de E , R , L et C à l'aide d'une représentation de Fresnel. Pour des raisons pratiques, i sera pris comme référence des phases : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et ainsi $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$, où φ est le déphasage de $e(t)$ par rapport à $i(t)$.

Établir l'équation différentielle liant e , u_R , u_L et u_C ainsi que l'expression de ces trois tensions en fonction de i , puis I_m , ω et t . Reporter les quatre tensions dans une représentation de Fresnel et en déduire I_m et φ . On supposera pour le schéma que $LC\omega^2 > 1$.

4. Circuit déphaseur ★

(solution page 687)

Considérons le montage de la figure 7.28 en régime sinusoïdal forcé, alimenté par un générateur de fem $e(t) = E \cos(\omega t)$ à masse flottante (sinon une des résistances R serait en court-circuit). On souhaite justifier graphiquement, à l'aide de la représentation de Fresnel, que ce circuit peut être utilisé comme déphaseur. Pour cela on choisit $e(t)$ comme origine des phases.

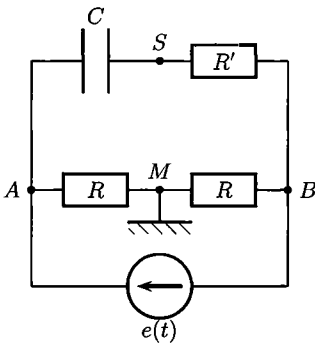


FIG. 7.28. Circuit déphaseur.

Représenter les tensions $V_A - V_M$, $V_B - V_M$, $V_S - V_A = u_C$ et $V_S - V_B = u_{R'}$. Sur le diagramme de Fresnel, comment doit être U_C par rapport à $u_{R'}$? En déduire la norme de la tension de sortie $u_S = V_S - V_M$ et conclure quant à l'utilisation du montage.

5. Loi des nœuds et grandeurs efficaces ★

(solution page 687)

On considère le circuit de la figure 7.29. Exprimer I , grandeur efficace de i , en fonction des courants efficaces I_1 et I_2 associés aux courants i_1 et i_2 du circuit.

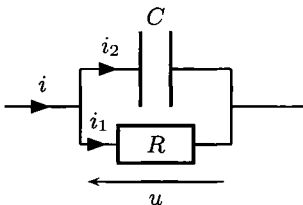


FIG. 7.29. Branche RC parallèle.

6. Pont de Wien ★

(solution page 688)

On considère le pont de Wien de la figure 7.30. Calculer $\underline{u}_s(t)$ en fonction de $\underline{u}_e(t)$, R , C et ω .

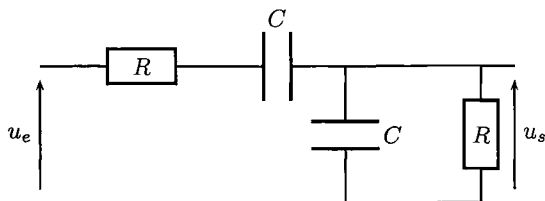


FIG. 7.30. Pont de Wien.

7. Modèle de condensateur en haute fréquence ★ (solution page 688)

Lorsque la fréquence augmente, un condensateur ne peut plus être simplement modélisé par une capacité C en parallèle avec une résistance de fuite R_f traduisant les fuites dans l'isolant qui n'est pas parfait. Il est nécessaire de tenir compte des imperfections supplémentaires suivantes : l'inductance L des armatures et connexions, et la résistance série R_s qui modélise les pertes dans le condensateur. Le condensateur est alors équivalent au circuit de la figure 7.31, étudié en régime sinusoïdal forcé. La résistance de fuite étant très grande ($R_f > 10 \text{ M}\Omega$), nous la remplacerons par un circuit ouvert.

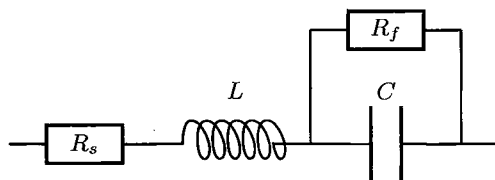


FIG. 7.31. Circuit équivalent d'un condensateur à haute fréquence.

1. Calculer l'impédance équivalente \underline{Z} du condensateur. En déduire son module.
2. Pour quelle pulsation le module de \underline{Z} est-il minimum ? À quel composant est alors équivalent le condensateur ?
3. Donner les équivalents de \underline{Z} à basse et haute fréquences. À quoi est équivalent le condensateur à haute fréquence ? Commentaires.
4. Tracer le module de \underline{Z} en fonction de la pulsation ω . On représentera aussi les courbes asymptotes et les points caractéristiques. Application numérique : $C = 100 \mu\text{F}$, $L = 1 \mu\text{H}$ et $R_s = 0,05 \Omega$.

8. Ponts de Sauty, Maxwell et Nernst ★ (solution page 689)

On considère le pont de la figure 7.32 en régime sinusoïdal forcé, alimenté par un générateur de fem $e(t) = E \cos(\omega t)$.

L'ampèremètre est sensible aux faibles courants (microampèremètre) et possède une impédance interne \underline{Z}_A .

Lorsque le pont est équilibré, le courant circulant dans l'ampèremètre est nul.

1. Trouver une relation entre les quatre impédances lorsque le pont est équilibré.
2. Suivant la nature des quatre impédances, le pont peut servir à mesurer diverses grandeurs²².

²² Cette méthode était très utilisée, mais, avec le développement de l'instrumentation numérique, elle ne l'est presque plus.

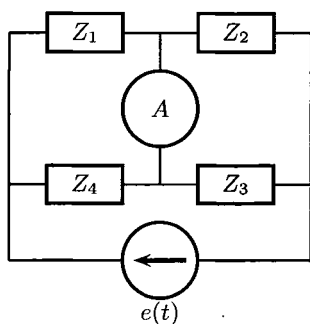


FIG. 7.32. Pont à quatre impédances.

a/ Le pont de Sauty est tel que : \underline{Z}_1 représente un condensateur réel (voir chapitre 5 section V.2.3 page 122) modélisé par une capacité C_1 en parallèle avec une résistance de fuite R_1 , \underline{Z}_2 une résistance R_2 , \underline{Z}_3 une résistance R_3 , et \underline{Z}_4 un condensateur parfait de capacité C_4 en parallèle avec une résistance R_4 . Exprimer, à l'équilibre, R_1 et C_1 en fonction des autres composants. En déduire un protocole expérimental de mesure de la capacité et de la résistance de fuite d'un condensateur réel.

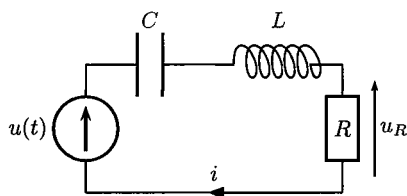
b/ Le pont de Maxwell est tel que : \underline{Z}_1 représente une bobine réelle modélisée par une inductance L_1 en série avec une résistance R_1 , \underline{Z}_2 une résistance R_2 , \underline{Z}_3 une capacité C_3 en parallèle avec une résistance R_3 , et \underline{Z}_4 une résistance R_4 . Exprimer, à l'équilibre, L_1 et R_1 en fonction des autres composants. En déduire un protocole expérimental de mesure de l'inductance et de la résistance de la bobine.

c/ Le pont de Nernst est tel que : \underline{Z}_1 représente une capacité C en série avec une résistance R , \underline{Z}_2 une capacité C en parallèle avec résistance R , \underline{Z}_3 une résistance R_3 , et \underline{Z}_4 une résistance R_4 . Montrer que l'équilibre du pont n'est possible que pour une seule pulsation ω_0 , à déterminer. En déduire un protocole expérimental de mesure de fréquence.

9. Détermination des caractéristiques d'une bobine ★ (solution page 690)

On considère un circuit RLC série (voir figure 7.33) alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.

On suppose la bobine et le condensateur idéaux. Un oscilloscope permet d'observer les tensions $u(t)$ et $u_R(t)$ (voir figure 7.34). On donne $R = 20 \Omega$ et $C = 10 \mu\text{F}$.

FIG. 7.33. Circuit RLC .

- À partir de la figure 7.34, déterminer l'amplitude U_m , l'amplitude I_m de l'intensité du courant, la période T et la pulsation ω .
- Mesurer le déphasage φ du courant par rapport à la tension $u(t)$.
- Montrer que les valeurs mesurées sont incompatibles avec l'hypothèse de la bobine idéale.
- On suppose désormais que la bobine a une résistance interne r . Calculer r .
- En déduire la valeur numérique de l'inductance L .

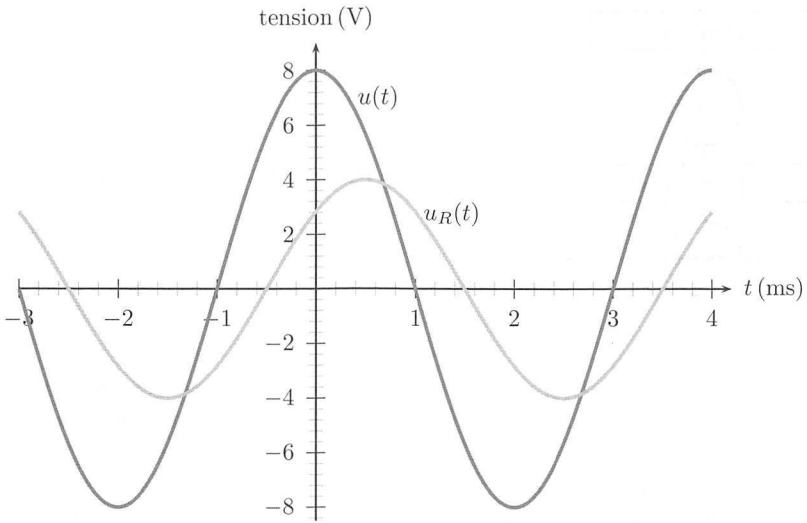


FIG. 7.34. Courbes observées à l'oscilloscope.

10. Excitation en vitesse ★

(solution page 690)

Un mobile M de masse m , pouvant se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal (Ox), est soumis à l'action d'un ressort fixé en A , de raideur k et de longueur à vide négligeable, et d'un amortisseur fluide fixé au point mobile B , où $x_B = b_0 + b \cos(\omega t)$, voir figure 7.35. Cet amortisseur exerce sur le mobile une force de frottement fluide $-h\vec{v}_r = -h(\dot{x} - \dot{x}_B)\vec{u}_x$ (car \vec{v}_r est une vitesse relative).

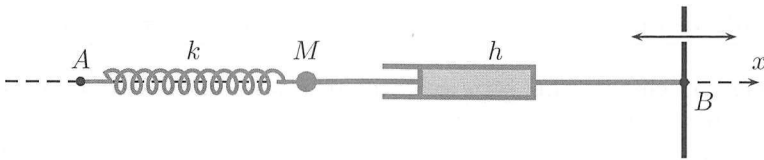


FIG. 7.35. Forçage en vitesse de l'oscillateur mécanique amorti.

On recherche des oscillations forcées, $\underline{x} = \underline{X}_0 \exp(j\omega t)$. Exprimer le rapport \underline{X}_0/b .

11. Exploitation d'une courbe de résonance ★

(solution page 690)

Un circuit RLC série est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$, avec $E = 5 \text{ V}$.

1. Comment procéder à la mesure de l'intensité du courant dans le circuit ?
2. La figure 7.36 est la courbe de résonance en intensité obtenue expérimentalement, avec I_m l'amplitude du courant en régime sinusoïdal forcé. En exploitant cette courbe, déterminer la valeur de la résistance R du circuit.
3. Déterminer la pulsation de résonance et la largeur de la courbe de résonance. En déduire les valeurs de L , C et du facteur de qualité Q de ce circuit RLC .

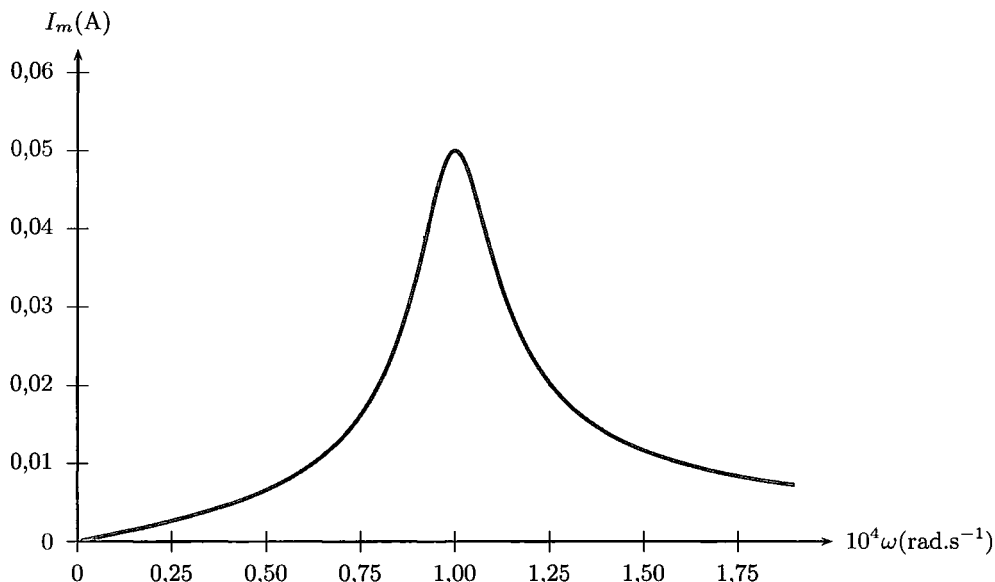


FIG. 7.36. Courbe de résonance en intensité.

12. Antirésonance ★★

(solution page 690)

On considère le circuit de la figure 7.37 avec $e(t) = E \cos(\omega t)$.

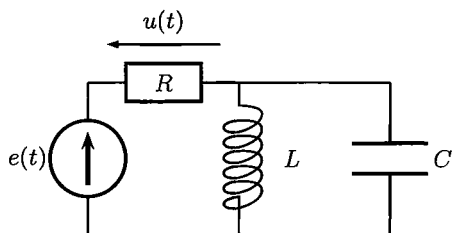


FIG. 7.37. Circuit antirésonant.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On pose $2\lambda = \frac{1}{RC}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ le facteur de qualité.
2. En déduire l'amplitude complexe $\underline{U}_m(x)$ de $u(t)$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite.
3. Étudier et tracer le module de \underline{U}_m en fonction de x . Montrer qu'il existe une pulsation pour laquelle on a une antirésonance (amplitude de $u(t)$ nulle).

13. Modélisation d'un quartz ★★

(solution page 692)

On utilise en électronique des cristaux de quartz piézoélectriques²³ permettant de réaliser des oscillateurs de fréquence précise. Sous certaines conditions, un quartz admet le schéma électrique équivalent de la figure 7.38.

23. Lorsqu'un corps piézoélectrique est soumis à une contrainte mécanique, par exemple une compression, il apparaît une différence de potentiel entre ses faces, et réciproquement il se déforme mécaniquement s'il est soumis à une différence de potentiel.

La capacité C_2 représente la capacité constituée par deux faces opposées du quartz²⁴. Les autres composants constituent la partie motionnelle (liée au couplage électromécanique de l'effet piézoélectrique) du quartz : ils n'ont pas d'existence propre, mais permettent de modéliser le comportement piézoélectrique du quartz.

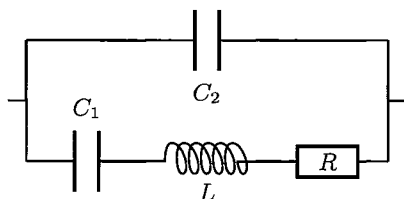


FIG. 7.38. Modélisation d'un quartz.

1. Calculer l'impédance équivalente \underline{Z} de ce montage. Dans la suite, on considère l'amortissement dû à la résistance R négligeable. Simplifier \underline{Z} dans ce cas.
2. Généralement, la valeur de la capacité C_2 est très grande devant celle de C_1 . Montrer, dans l'expression de \underline{Z} , la présence de deux pulsations remarquables ω_p et ω_s , avec $\omega_p = \omega_s(1 + \varepsilon)$, où $0 < \varepsilon \ll 1$.
3. Montrer qu'il existe une plage de fréquences pour laquelle le dispositif peut être assimilé à un dipôle capacitif, et une autre où il peut être considéré comme inductif. Montrer que cette dernière zone est très étroite.
4. Tracer le module de \underline{Z} en fonction de la fréquence.
5. En réalité, il existe toujours un léger amortissement, et il faut donc tenir compte de la résistance R . Le facteur de qualité est alors défini par $Q = \frac{1}{RC_1\omega_s}$. Comment est modifiée la courbe précédente ? On donne $L = 50$ H, $C_1 = 5 \cdot 10^{-14}$ F, $C_2 = 8 \cdot 10^{-12}$ F et $R = 400 \Omega$. Calculer les fréquences f_p et f_s , ainsi que le facteur de qualité du quartz. Commentaires.

14. Étude d'un haut-parleur électrodynamique ★★★ (solution page 694)

D'un point de vue électrique, un haut-parleur est constitué d'une bobine idéale L_e en série avec une résistance R_e qui représente la résistance des fils (voir exercice 4 page 627). Le couplage électromécanique entre la membrane du haut-parleur et le circuit électrique précédent conduit à un schéma électrique équivalent du haut-parleur qui tient compte du mouvement de la membrane (voir figure 7.39).

On donne $R_e = 630 \Omega$, $L_e = 1$ mH, $R_m = 57,8 \Omega$, $L_m = 11,3$ mH et $C_m = 6,2$ mF.

1. Déterminer l'admittance \underline{Y}_m des trois impédances en parallèle (R_m , C_m et L_m). En déduire l'impédance $\underline{Z}_m = 1/\underline{Y}_m$; cette impédance est appelée impédance motionnelle, car elle modélise le couplage électromécanique dû au mouvement de la membrane du haut-parleur

Calculer l'impédance équivalente \underline{Z}_e des deux impédances en série (R_e et L_e); \underline{Z}_e est l'impédance électrique du haut-parleur due au bobinage qui le constitue.

En déduire l'impédance équivalente \underline{Z} du circuit de la figure 7.39.

2. Écrire \underline{Z}_m sous la forme $\underline{Z}_m(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, où les fonctions R et X sont réelles.

24. Lorsqu'un quartz est inséré dans un circuit électronique, deux de ses faces sont métallisées; comme elles sont séparées par le quartz, qui est un isolant, l'ensemble constitue un condensateur, modélisé par la capacité C_2 .

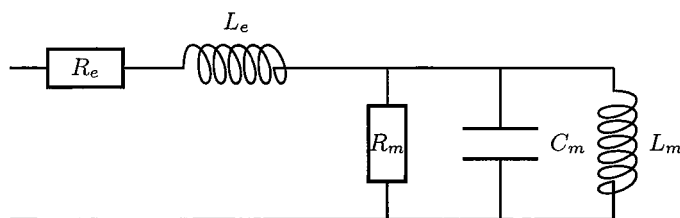


FIG. 7.39. Schéma électrique équivalent d'un haut-parleur électrodynamique.

3. Tracer l'allure des variations de $R(\omega)$ et $X(\omega)$ en fonction de ω . Donner l'équivalent de $|\underline{Z}_m(\omega)|$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ et lorsque $\omega \rightarrow \infty$; en déduire le composant auquel le circuit est équivalent asymptotiquement.
4. Calculer le module de $\underline{Z}_m(\omega)$. Pour quelle valeur ω_0 de ω est-il maximum? Donner sa valeur en ce point. Application numérique.
5. Rechercher les valeurs ω_1 et ω_2 de ω telles que $|\underline{Z}_m(\omega)| = \frac{|\underline{Z}_m|_{\max}}{\sqrt{2}}$. Comment appelle-t-on le rapport $\frac{\omega_0}{|\omega_2 - \omega_1|}$? Tracer la courbe de $|\underline{Z}_m(\omega)|$ et indiquer ω_1 et ω_2 .
6. Étudier et tracer l'évolution du point $N(\omega)$ du plan complexe, d'affixe $\underline{Z}_e(\omega)$, lorsque ω varie. Limiter le tracé, sachant que l'on s'intéresse à la gamme de fréquences 300-3 400 Hz, correspondant aux fréquences vocales.
7. Donner l'allure du graphe relatif au point d'affixe $\underline{Z}(\omega)$ (on tiendra compte de la limitation en fréquence introduite ci-dessus).

Chapitre 8

FILTRAGE LINÉAIRE

L'essor des télécommunications à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle a conduit les scientifiques à développer de nombreux outils pour améliorer les réseaux. Un mathématicien allemand, Franz Breisig, s'est intéressé dans les années 1920 à la notion de quadripôle, c'est-à-dire aux circuits électriques qui comportent deux bornes d'entrée et de sortie. Dès que l'on souhaite transmettre une information électrique (signal Internet, téléphonique, etc.), la notion de quadripôle devient nécessaire. Dans ce chapitre, nous allons développer des outils permettant l'étude des quadripôles linéaires, mais également la notion de filtrage qui lui est intimement liée (section II).

Le principe du filtrage repose sur le fait que tout signal périodique peut se décomposer en une composante continue (valeur moyenne) à laquelle s'ajoute une somme de signaux sinusoïdaux : c'est la décomposition en série de Fourier¹ (section I). Le filtrage consiste à agir sur chaque composante harmonique de manière différente : certaines seront supprimées ou atténuées, d'autres conservées².

Nous illustrerons le filtrage en étudiant des filtres types d'ordres un et deux (section III). Les premiers seront traités avec des circuits *RC*, et les seconds avec des circuits *RLC*.



Joseph Fourier

I. Signaux périodiques

I.1. Décomposition en série de Fourier

Considérons une fonction $s(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , périodique de période T , et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On montre³ qu'il est possible de décomposer cette fonction en une série de Fourier

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \quad (8.1)$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et n entier naturel. Le coefficient s_0 représente la *valeur moyenne* de la fonction s sur une période (composante continue en électricité), $s_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$. La valeur t_0 est arbitraire du fait de la T -périodicité de la fonction. Les coefficients de Fourier a_n et b_n se calculent par

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(n\omega t) dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(n\omega t) dt .$$

1. Joseph Fourier (1768-1830) est un mathématicien et physicien français. Professeur à 16 ans, il développe la théorie des séries qui portent son nom à l'occasion de son étude des phénomènes de diffusion thermique.
2. C'est le cas par exemple dans les chaînes hi-fi qui comportent plusieurs haut-parleurs, certains réservés aux hautes fréquences (les plus petits) et d'autres aux basses fréquences (les plus gros). Il est donc nécessaire de pouvoir séparer les différentes composantes fréquentielles afin de les diriger vers le haut-parleur adéquat.
3. Sous certaines conditions aux points de discontinuités, restriction sans importance en physique.

- La fonction $t \mapsto s_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ s'appelle *harmonique de rang n* de la fonction s .
- L'harmonique s_n a pour pulsation $n\omega$: les harmoniques de rang de plus en plus élevé oscillent de plus en plus rapidement.
- L'harmonique de rang $n = 1$ est appelé *fondamental* : le fondamental est de période T , comme la fonction s .
- Les coefficients de Fourier a_n et b_n d'une fonction tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

En pratique, lorsque l'on décompose un signal selon la méthode précédente, la somme est généralement tronquée et ne donne donc qu'une approximation de la fonction. Nous allons voir sur deux exemples classiques comment la forme du signal évolue suivant le nombre de termes sommés.

Considérons un signal triangulaire pair de période T , et de valeur moyenne non nulle, égale à s_0 . Le calcul des coefficients de Fourier donne la décomposition suivante, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$s(t) = s_0 - \frac{4(s_{\max} - s_{\min})}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\omega t]}{(2n+1)^2}. \quad (8.2)$$

La fonction $s(t) - s_0$ étant paire, il n'y a que des fonctions cosinus dans la décomposition⁴. La figure 8.1 montre les courbes obtenues pour différentes sommes partielles $S_p = s_0 + \sum_{n=1}^p s_n(t)$.

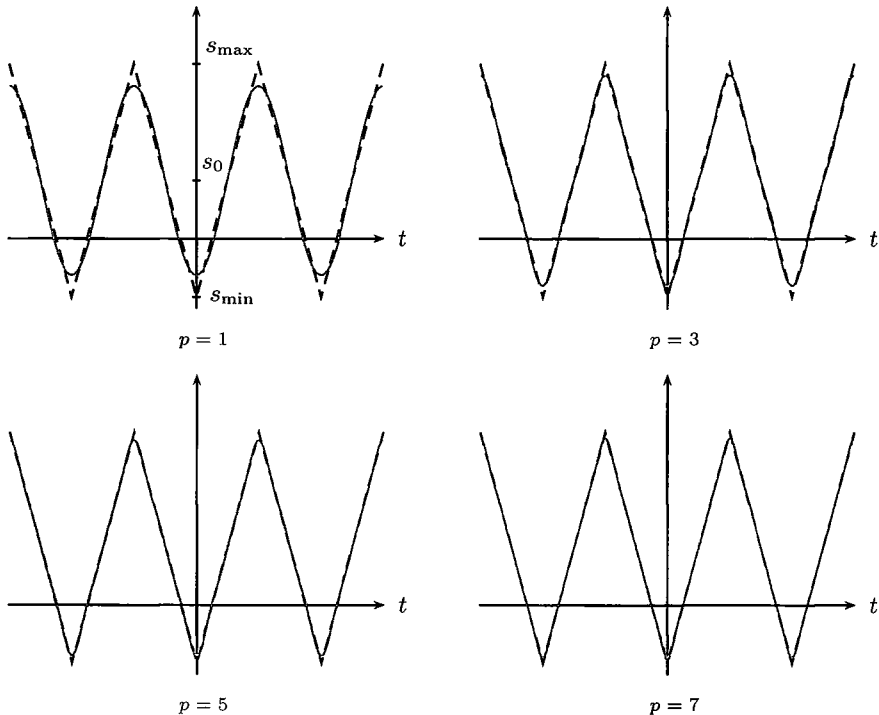


FIG. 8.1. Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire.

4. De même, les a_{2n} sont nuls par symétrie.

Plus la somme partielle comporte de termes, plus elle approche la fonction $s(t)$ de façon satisfaisante. Du fait de l'absence de discontinuité, la somme partielle converge très rapidement⁵ vers s . Pour $p = 7$ (soit $n = 3$ lorsque l'on considère l'argument du cosinus sous la forme $(2n + 1)\omega t$), le signal est déjà très bien reconstitué.

Considérons maintenant un signal créneau, de période T et de valeur moyenne non nulle, égale à s_0 . Choisissons de plus $s(t) - s_0$ impaire, ainsi il n'y aura que des fonctions sinus dans la décomposition,

$$s(t) = s_0 + \frac{2(s_{\max} - s_{\min})}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin [(2n + 1)\omega t]}{2n + 1}. \quad (8.3)$$

La figure 8.2 montre les courbes obtenues pour différentes sommes partielles.

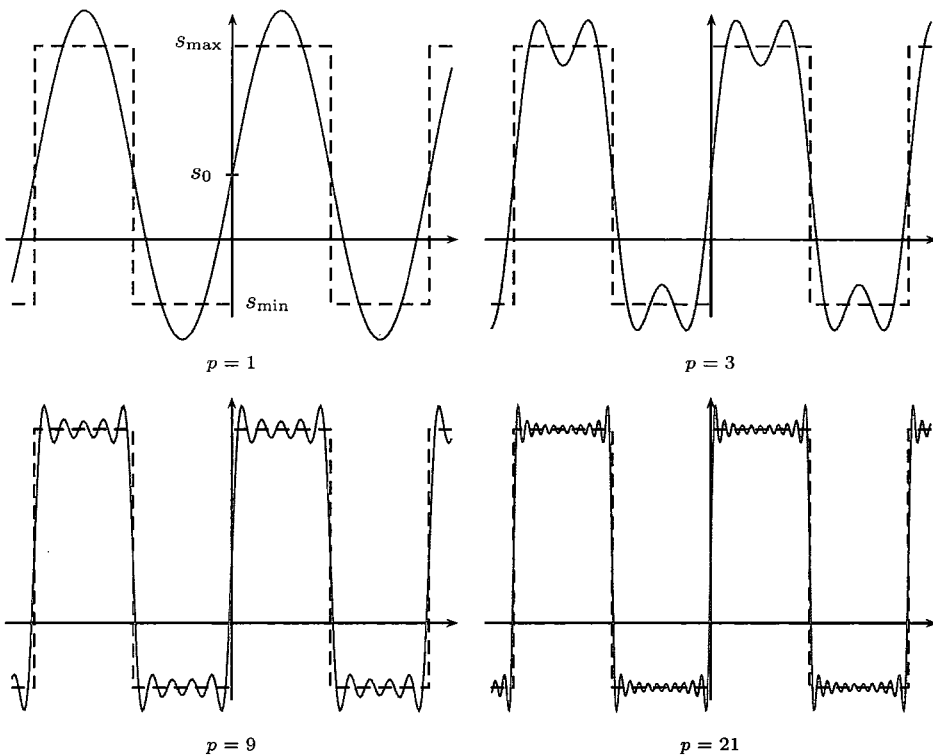


FIG. 8.2. Décomposition en série de Fourier d'un signal créneau.

Plus la somme partielle comporte de termes, plus elle approche la fonction $s(t)$. Néanmoins, pour $p = 9$, l'allure du signal est ressemblante, sauf au voisinage des discontinuités qui nécessitent de sommer un plus grand nombre de termes. De plus, les oscillations très rapides qui apparaissent au niveau des discontinuités du créneau correspondent au phénomène de Gibbs qui est un effet de bord inévitable, dû aux discontinuités de la fonction⁶.

5. L'amplitude des coefficients décroît en $1/n^2$, voir équation (8.2).

6. L'amplitude des coefficients décroît en $1/n$, voir équation (8.3).

I.2. Analyse harmonique - Spectre

En factorisant la somme par $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ dans l'équation (8.1), on obtient

$$s(t) = s_0 + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega t) \right].$$

Les coefficients devant le sinus et le cosinus sont des nombres dont la somme des carrés vaut 1. Par conséquent, il peuvent être vus comme le sinus et le cosinus d'un certain angle. On pose

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \quad \cos \phi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} ; \quad -\sin \phi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}.$$

En appliquant la formule de trigonométrie

$$\cos p \cos q - \sin p \sin q = \cos(p + q),$$

on obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 8.1. Théorème de Fourier

Soit s une fonction du temps T -périodique. En posant la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$, elle peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales de la forme

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n). \quad (8.4)$$

L'écriture sous cette forme de la fonction s s'appelle le développement en série de Fourier de s .

- ▶ Le coefficient s_0 est la valeur moyenne de la fonction s .
- ▶ Le terme $n = 1$ de la somme s'appelle le fondamental, de pulsation égale à celle du signal.
- ▶ Les termes suivants sont les harmoniques d'ordre n , de pulsation $n\omega$, d'amplitude c_n et de phase à l'origine de temps ϕ_n .

Pour une fonction s donnée, le calcul des coefficients de Fourier a_n et b_n (qui permet de trouver les amplitudes c_n et les phases ϕ_n) n'est pas au programme des CPGE. S'il est utile dans un exercice, le développement en série de Fourier d'une fonction doit être fourni.

Définition 8.2. Spectre de Fourier d'un signal

S'intéresser aux coefficients de Fourier de s , c'est réaliser une analyse spectrale (ou analyse harmonique) du signal.

Le spectre de Fourier d'un signal s est l'ensemble des coefficients de Fourier de s . En physique, ce spectre est souvent représenté en traçant l'amplitude c_n (et parfois la phase ϕ_n) sous forme de diagrammes en bâtons (voir figure 8.3).

Dans le cas général, il y a un nombre infini d'harmoniques ; néanmoins, leur amplitude décroît généralement assez vite avec n et le spectre est alors souvent limité aux premiers harmoniques.

On représente un spectre de Fourier en amplitude avec l'ordre de l'harmonique en abscisse, et en ordonnée l'amplitude c_n de l'harmonique. Les spectres des signaux créneau et triangulaire étudiés précédemment sont donnés sur la figure 8.3. La décroissance de l'amplitude des bâtons est en $1/n$ pour le créneau, et en $1/n^2$ pour le triangle : du fait des discontinuités du créneau, il faut en pratique plus d'harmoniques pour reconstituer le signal.

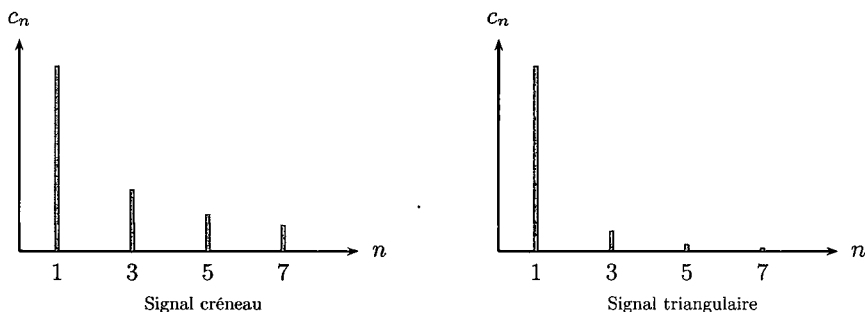


FIG. 8.3. Spectres d'un signal créneau et triangulaire.

Remarque Ce qui précède peut se généraliser aux fonctions non périodiques avec la transformée de Fourier.

PC
▽

I.2.1. Valeur efficace, formule de Parseval

On montre la formule suivante, appelée formule (ou égalité) de Parseval,

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt = s_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = s_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2}.$$

Or, la valeur efficace d'un signal sinusoïdal d'amplitude c_n est égale à $c_n/\sqrt{2}$. Au membre de gauche, on reconnaît le carré de la valeur efficace du signal (voir définition 7.7 page 165). Le membre tout à droite est une somme des carrés des valeurs efficaces des composantes harmoniques, le facteur $1/2$ provenant du $1/\sqrt{2}$ (élevé au carré); on l'omet pour la composante continue, car la valeur efficace d'un signal constant de valeur s_0 est s_0 .

Théorème 8.3. Énoncé physique de l'égalité de Parseval

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

△
PC

II. Quadripôle linéaire, filtrage

II.1. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

II.1.1. Quadripôle

Définition 8.4. Quadripôle

Un quadripôle est un circuit électrique qui comporte quatre bornes (voir figure 8.4) : deux bornes d'entrée et deux de sortie. Généralement, l'entrée est connectée à un générateur, ou à la sortie d'un autre quadripôle (voir section II.2.2). Le circuit branché à la sortie du quadripôle s'appelle la charge (s'il n'y en a pas, la sortie est dite en circuit ouvert).

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement aux quadripôles linéaires, c'est-à-dire qui ne comportent que des dipôles linéaires, en régime sinusoïdal forcé.

II.1.2. Fonction de transfert

On introduit les grandeurs suivantes, selon les notations de la figure 8.4 : les tensions d'entrée u_E et de sortie u_S du quadripôle, ainsi que les courants d'entrée i_E et de sortie i_S . On remarquera les conventions d'orientation utilisées : l'entrée du quadripôle

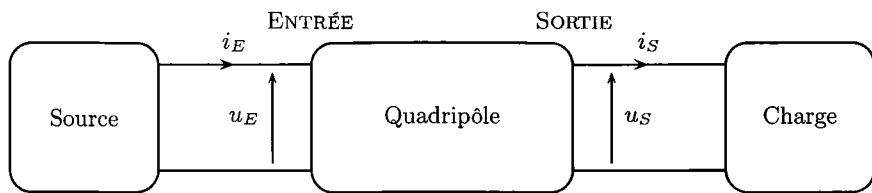


FIG. 8.4. Quadripôle et notations.

est en convention récepteur, et sa sortie en convention générateur. Ce choix, bien qu'arbitraire, comme toutes les orientations, est le plus fréquent.

Afin de formaliser l'étude des filtres (quadripôles qui effectuent une opération de filtrage), nous travaillerons avec un signal sinusoïdal de fréquence donnée, pour voir comment son amplitude et sa phase sont modifiées par le filtre (réponse fréquentielle du filtre linéaire). Une fois connu le comportement d'un signal de fréquence donnée, il est possible de reconstituer le comportement de n'importe quel signal grâce au principe de superposition et à la décomposition en série (ou la transformée) de Fourier. Travailler avec des signaux sinusoïdaux conduit naturellement à utiliser la représentation complexe. Introduisons les tensions complexes, $\underline{u}_E = \underline{U}_E e^{j\omega t} = U_E e^{j\varphi_E} e^{j\omega t}$ et $\underline{u}_S = \underline{U}_S e^{j\omega t} = U_S e^{j\varphi_S} e^{j\omega t}$.

Définition 8.5. Fonction de transfert en tension

On appelle fonction de transfert d'un quadripôle, en régime sinusoïdal forcé, la grandeur complexe définie par $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E}$.

Elle est caractérisée par :

- ▶ son module, appelé gain $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$;
- ▶ son argument, déphasage entre les tensions de sortie et d'entrée, $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H})$.

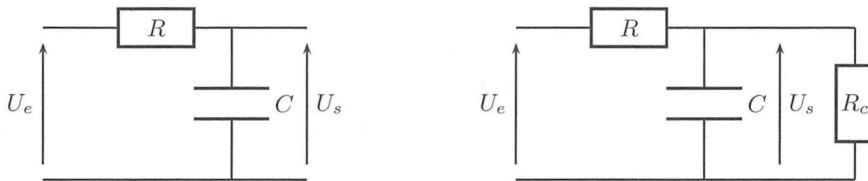
On a le gain $G = 1$ si l'amplitude du signal n'est pas modifiée, $G < 1$ s'il est atténué, et $G > 1$ s'il est amplifié.

Attention Influence de la charge

La fonction de transfert dépend de la charge branchée en sortie du quadripôle. Pour pouvoir caractériser un quadripôle par sa fonction de transfert, il est indispensable de la calculer en sortie ouverte, c'est-à-dire avec une charge d'impédance infinie.

EXERCICE CORRIGÉ 8.6. Fonction de transfert, influence de la charge

1. On considère le quadripôle RC de la figure ci-dessous (à gauche), déterminer sa fonction de transfert.
2. Le quadripôle n'est plus en sortie ouverte (figure de droite, où l'on a ajouté une résistance R_c comme charge), déterminer le nouveau rapport $\underline{U}_S/\underline{U}_E$.



Corrigé

1. La fonction de transfert s'obtient (comme souvent) par un diviseur de tension,

$$\underline{U}_S = \underline{U}_E \frac{1}{1 + \underline{Y}_C \underline{Z}_R} = \underline{U}_E \frac{1}{1 + jRC\omega},$$

donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

2. La formule du diviseur de tension s'écrit maintenant

$$\underline{U}_S = \underline{U}_E \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{\text{eq}}},$$

avec $\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{R_c} + jC\omega$ l'admittance équivalente du groupement parallèle C, R_c . Donc

$$\frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_c} + jRC\omega}.$$

La présence de la résistance de charge modifie le rapport des tensions. Cependant, si $R_c \gg R$, on trouve bien le résultat obtenu en sortie ouverte (voir section II.2).

Méthode

Calcul d'une fonction de transfert

La plupart des fonctions de transfert se calculent très simplement en utilisant un diviseur de tension en sortie (voir exercice corrigé 8.6).

Remarque Dans le cas linéaire qui nous occupe, les liens existant entre dérivée et multiplication par $j\omega$ (voir théorème 7.14 page 171) permettent de retrouver l'équation différentielle à partir de la fonction de transfert. Cette méthode, purement formelle, est valable, que les signaux soient effectivement sinusoïdaux ou non (et donc le régime sinusoïdal forcé ou non).

II.2. Modélisation de l'entrée et de la sortie d'un quadripôle

II.2.1. Impédances d'entrée et de sortie

Lorsqu'une source est branchée sur un quadripôle, elle débite un courant d'entrée i_E (voir figure 8.4). Tous les composants du quadripôle étant linéaires, il est possible de modéliser l'ensemble du circuit situé après l'entrée du quadripôle, charge éventuelle comprise, par une impédance \underline{Z}_E , appelée impédance d'entrée, sur laquelle la source est branchée. Ainsi, vue depuis l'entrée, la source de tension u_E est connectée à une impédance \underline{Z}_E , dans laquelle elle débite un courant $\underline{i}_E = \underline{u}_E / \underline{Z}_E$ (voir figure 8.5).

Définition 8.7. Impédance d'entrée

On appelle impédance d'entrée d'un quadripôle l'impédance vue de l'entrée, c'est-à-dire la grandeur complexe

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{u}_E}{\underline{i}_E}.$$

Elle est indépendante de la source, mais elle dépend de la constitution du quadripôle.

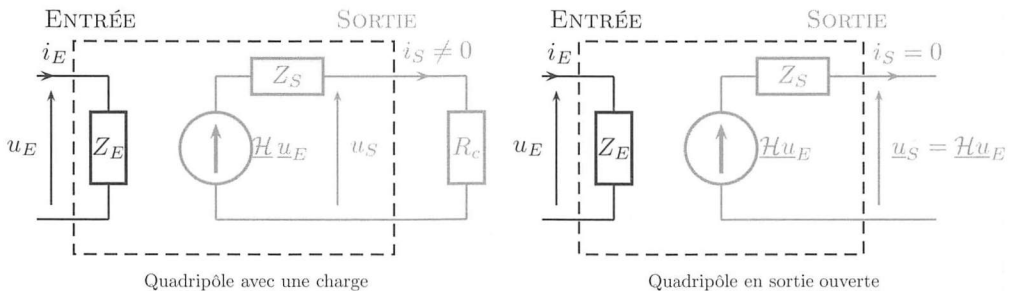


FIG. 8.5. Entrée et sortie d'un quadripôle.

Appelons \underline{H} la fonction de transfert du quadripôle en sortie ouverte, telle que $\underline{u}_S = \underline{H} \underline{u}_E$: il y a donc une tension en sortie, en général non nulle, alors que le courant de sortie \underline{i}_S est égal à zéro. La sortie se comporte donc comme un dipôle actif, puisqu'il existe une tension, même si aucun courant n'est débité. On peut alors la modéliser par une représentation de Thévenin, de fem complexe $\underline{H} \underline{u}_E$ et d'impédance interne \underline{Z}_S , appelée impédance de sortie du quadripôle (voir figure 8.5). On notera

que la fem dépend d'une autre tension, ici celle d'entrée : une telle source est une source commandée (ou liée).

Définition 8.8. Impédance de sortie

La sortie d'un quadripôle se comporte, pour la charge, comme un dipôle actif, dont l'impédance interne du générateur de Thévenin équivalent est appelée impédance de sortie \underline{Z}_S .

D'après les deux définitions précédentes, il est possible d'adopter la représentation du quadripôle de la figure 8.5. La source en sortie est une source commandée par la tension d'entrée. Il faut retenir les valeurs suivantes :

- ▶ un générateur basse fréquence (GBF) possède une impédance de sortie de 50Ω ;
- ▶ un oscilloscope possède une résistance⁷ d'entrée égale à $1 \text{ M}\Omega$;
- ▶ un multimètre (utilisé en voltmètre) possède une résistance d'entrée de $10 \text{ M}\Omega$.

II.2.2. Quadripôles en cascade

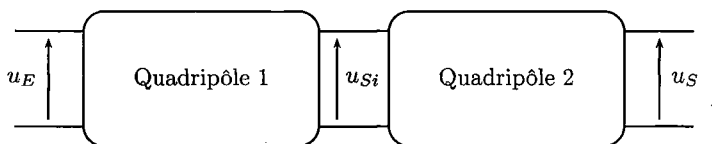


FIG. 8.6. Quadripôles en cascade.

Considérons deux quadripôles en cascade (voir figure 8.6), de fonctions de transfert en sortie ouverte respectives $\underline{\mathcal{H}}_1$ et $\underline{\mathcal{H}}_2$. On notera \underline{Z}_{E1} et \underline{Z}_{S1} les impédances, en sortie ouverte, d'entrée et de sortie du premier quadripôle, et \underline{Z}_{E2} et \underline{Z}_{S2} celles du second. La fonction de transfert totale s'exprime par

$$\underline{\mathcal{H}} = \frac{\underline{u}_S}{\underline{u}_E} = \frac{\underline{u}_S}{\underline{u}_{Si}} \frac{\underline{u}_{Si}}{\underline{u}_E} \neq \underline{\mathcal{H}}_1 \underline{\mathcal{H}}_2,$$

l'inégalité provenant du fait que le quadripôle 1 n'est pas en sortie ouverte. Le quadripôle 1 joue le rôle de source pour le quadripôle 2, ce dernier étant la charge du premier. Comme la fonction de transfert dépend de la charge, il est normal que le second quadripôle modifie la fonction de transfert du quadripôle 1. Faisons intervenir les impédances de sortie et d'entrée des quadripôles (voir figure 8.7). Un diviseur de tension permet d'écrire

$$\underline{u}_{Si} = \underline{\mathcal{H}}_1 \underline{u}_E \frac{\underline{Z}_{E2}}{\underline{Z}_{E2} + \underline{Z}_{S1}},$$

donc

$$\underline{\mathcal{H}} = \frac{\underline{u}_S}{\underline{u}_{Si}} \frac{\underline{u}_{Si}}{\underline{u}_E} = \underline{\mathcal{H}}_1 \underline{\mathcal{H}}_2 \frac{\underline{Z}_{E2}}{\underline{Z}_{E2} + \underline{Z}_{S1}}.$$

Il n'est possible d'avoir $\underline{\mathcal{H}} = \underline{\mathcal{H}}_1 \underline{\mathcal{H}}_2$ que dans deux cas :

- ▶ si $|\underline{Z}_{E2}| \gg |\underline{Z}_{S1}|$. En effet, le courant appelé par le quadripôle 2, égal à $\frac{\underline{\mathcal{H}}_1 \underline{u}_E}{\underline{Z}_{E2} + \underline{Z}_{S1}}$, tend alors vers zéro, ce qui revient bien à une sortie ouverte pour le quadripôle 1 ;
- ▶ si $\underline{Z}_{S1} = 0$, c'est-à-dire si la sortie du premier quadripôle se comporte comme une source idéale de tension.

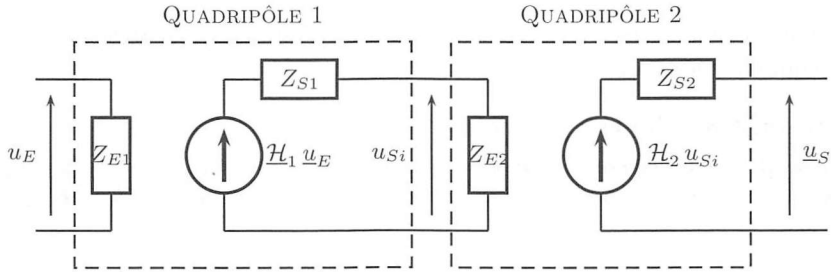


FIG. 8.7. Quadripôles en cascade, modélisation avec les impédances d'entrée et sortie.

Attention

Fonction de transfert, quadripôles en cascade

De manière générale, la fonction de transfert équivalente pour des quadripôles qui se suivent (montés en cascade) n'est pas le produit des fonctions de transfert en sortie ouverte individuelles.

Afin de garantir le bon fonctionnement de ces quadripôles lorsqu'on les met en cascade, il faut réaliser des filtres de tension de *faible impédance de sortie* et de *forte impédance d'entrée*.

EXEMPLE 8.9.

En particulier, il faut que l'impédance d'entrée Z_E d'un circuit alimenté par un GBF vérifie $|Z_E| \gg 50 \Omega$, sinon la tension en sortie du GBF n'est pas celle indiquée (dans le cas d'un générateur numérique).

De même, lors de la mesure d'une tension à l'aide d'un oscilloscope (voir l'exercice 1 page 224 à ce sujet), il faut que l'impédance de sortie Z_S du quadripôle vérifie $|Z_S| \ll 1 \text{ M}\Omega$ pour que la tension mesurée soit égale à la tension réelle (en sortie ouverte, sans l'appareil de mesure).

II.3. Filtres linéaires

II.3.1. Principe du filtrage - Filtres

Nous avons vu que tout signal temporel peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux : somme discrète si le signal est périodique (série de Fourier), ou somme continue pour les autres signaux⁸. Il arrive fréquemment que l'on souhaite supprimer ou seulement modifier l'importance d'une partie des fréquences présentes dans un signal.

7. Il s'agit en fait d'une impédance d'entrée, car la résistance est en parallèle avec un condensateur de quelques dizaines de pF, voir exercice 1.

8. On parle alors de transformée de Fourier ; le signal doit vérifier certaines conditions mathématiques, mais nous admettons que cette transformation est toujours possible pour les signaux rencontrés en physique.

Par exemple :

- ▶ supprimer un grésillement (en général de haute fréquence) dans un enregistrement ;
- ▶ supprimer des fréquences au-delà d'une certaine valeur dans un enregistrement audio : c'est le principe utilisé en compression audio MP3, où les hautes fréquences, peu audibles et qui ne contiennent pas d'information musicale essentielle, sont supprimées afin d'alléger la taille du fichier sonore ;
- ▶ sélectionner une station de radio, ce qui nécessite de sélectionner une plage précise de fréquences autour de la fréquence d'émission de la station.

L'opération qui consiste à donner plus ou moins d'importance, à supprimer ou à amplifier certaines plages de fréquences dans un signal s'appelle filtrage. Comme la fonction de transfert d'un quadripôle dépend de la fréquence, nous allons l'utiliser pour concevoir des filtres.

Les filtres passifs⁹ ne contiennent que des composants linéaires passifs tels que des résistances, des condensateurs et des bobines.

II.3.2. Fréquence de coupure - Types de filtres

Pour caractériser précisément les plages de fréquences du signal qui sont restituées ou atténuées, on introduit les notions de pulsation de coupure et de bande passante.

Définition 8.10. *Pulsation de coupure - Bande passante*

La ou les pulsations de coupure ω_c sont définies par $G(\omega_c) = G_{\max}/\sqrt{2}$, où G_{\max} désigne la valeur maximale du gain G de la fonction de transfert.

La bande passante, de largeur $\Delta\omega$, est l'intervalle des pulsations tel que $G(\omega) \geq G(\omega_c)$. Un filtre coupe les pulsations (ou les fréquences) qui sont hors de la bande passante, et laisse passer celles qui s'y trouvent.

Un filtre est dit *idéal* si le gain est constant (et non nul) dans la bande passante, et nul en dehors. Dans la pratique, le gain est une fonction continue, et ses variations sont donc progressives¹⁰. Il existe quatre types de filtres, caractérisés par la nature de leur bande passante (voir figure 8.8).

- ▶ Filtre passe-bas : atténue ($G < 1$) les signaux de pulsation supérieure à une pulsation de coupure ω_c . La bande passante est donc $[0; \omega_c]$. Il est utilisé par exemple lors d'une démodulation, pour supprimer le souffle d'un enregistrement audio, etc.
- ▶ Filtre passe-haut : atténue les signaux de pulsation inférieure à une pulsation de coupure ω_c . La bande passante est donc $[\omega_c; \infty[$. Il est utilisé par exemple pour supprimer un signal continu (mode AC de l'oscilloscope).
- ▶ Filtre passe-bande : ne laisse passer qu'une seule bande de pulsation comprise entre deux pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} . La bande passante est donc $[\omega_{c1}; \omega_{c2}]$. Ce sont des filtres utilisés pour sélectionner une station de radio, une chaîne de télévision, etc.
- ▶ Filtre coupe-bande (ou réjecteur de bande) : laisse passer tous les signaux, à l'exception d'une bande particulière de pulsation entre deux pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} . La bande passante est donc $[0; \omega_{c1}] \cup [\omega_{c2}; \infty[$. Ces filtres permettent de supprimer une plage de fréquences précise, et peuvent donc être utiles pour éliminer des fréquences parasites.

9. Par opposition aux filtres actifs, obtenus à l'aide de composants actifs tels que des amplificateurs opérationnels ou des transistors.

10. Cela est dû à un nombre de composants fini.

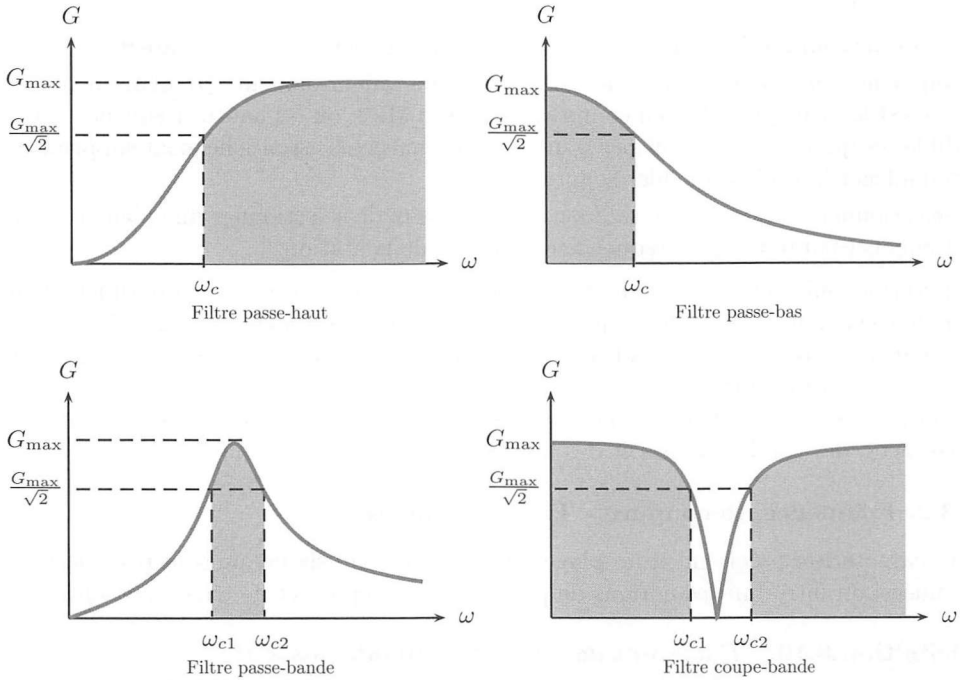
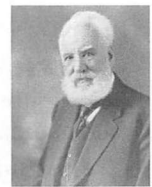


FIG. 8.8. Allure des gains pour les différents types de filtres. La bande passante est en gris.

II.3.3. Gain en décibels

La plage de fréquences sur laquelle il est nécessaire de travailler est en général très large. Par exemple, pour un signal audio, il faut étudier les fréquences entre 20 Hz et 20 kHz. Il se pose donc un problème d'échelle lors de la représentation : comment travailler sur une gamme de fréquences si grande, tout en arrivant à distinguer ce qui se passe, par exemple, autour de 200 Hz et en même temps autour de 8 kHz ? Un moyen simple de résoudre cette difficulté consiste à utiliser une échelle logarithmique pour la fréquence.



Graham Bell

La figure 8.9 montre l'intérêt de l'échelle logarithmique. Elle représente, pour une gamme de fréquences identique, une même courbe de gain selon deux échelles. Les deux minima à 300 et 500 Hz sont difficilement mesurables en échelle linéaire, à moins de restreindre l'intervalle d'étude autour de ces valeurs, alors qu'en échelle logarithmique ils sont facilement repérables¹¹. L'échelle logarithmique permet de bien distinguer les trois minima, pourtant séparés de presque 10 kHz.

11. Les traits verticaux permettent de lire les multiples des puissances de dix : le premier minimum est au niveau du troisième trait vertical, la fréquence est donc 3 fois 10^2 Hz, soit 300 Hz.

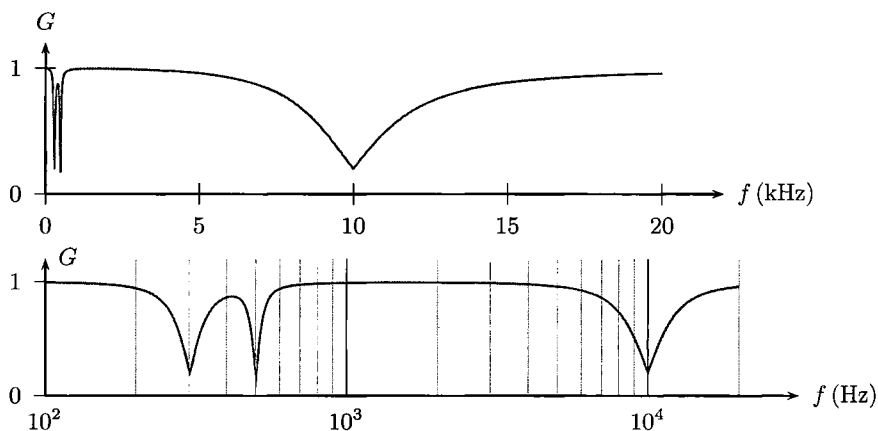


FIG. 8.9. Comparaison d'une même courbe de gain en échelles linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

En échelle logarithmique, on appelle :

- octave, un intervalle de fréquences compris entre une fréquence et le double de cette fréquence (notion plutôt utilisée en acoustique) ;
- décade, un intervalle de fréquences correspondant à un rapport de 10 entre les fréquences extrêmes.

De la même manière, il est plus commode de travailler sur le logarithme (décimal) du gain que sur le gain lui-même. Le bel est l'unité de mesure logarithmique X_B du rapport X de deux puissances (moyennes), $X_B = \log \frac{P_2}{P_1}$; le nom de cette unité est un hommage au Britannique Alexander Graham Bell (1847-1922), l'inventeur du téléphone. Un bel correspondant à un facteur 10 entre les deux puissances, facteur trop important pour en faire une unité pratique, l'unité usuelle est le décibel, soit un dixième de bel, $X_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$. Le gain dont on dispose, *via* la fonction de transfert, est le rapport de deux tensions et non de deux puissances. Afin d'être cohérent, il faut comparer les puissances qui seraient fournies par ces deux tensions u_1 et u_2 à une résistance R , soit respectivement $\mathcal{P}_1 = \frac{U_1^2}{2R}$ et $\mathcal{P}_2 = \frac{U_2^2}{2R}$, où U_1 et U_2 sont les amplitudes des tensions. Ainsi, $X_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{U_2^2}{U_1^2} = 10 \log \left[\left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \right] = 20 \log \frac{U_2}{U_1}$.

Définition 8.11. Gain en décibels

Le gain en décibels est défini par

$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) = 20 \log |\mathcal{H}(j\omega)|.$$

C'est un nombre sans dimension qui s'exprime en décibel (symbole dB). Augmenter G_{dB} de 20 dB revient à multiplier le gain par 10, et le diminuer de 20 dB revient à diviser le gain par 10.

II.3.4. Diagramme de Bode d'un filtre, fréquence de coupure

Définition 8.12. Diagramme de Bode

On appelle diagramme de Bode d'un filtre l'ensemble des deux courbes représentatives suivantes, tracées en fonction de ω en échelle logarithmique (voir section III) :

- ▶ gain en décibels de la fonction de transfert $G_{\text{dB}} = 20 \log G(\omega) = 20 \log |\underline{\mathcal{H}}(j\omega)|$;
- ▶ argument de la fonction de transfert $\varphi(\omega) = \arg(\underline{\mathcal{H}}) = \varphi_S - \varphi_E$.

Cette représentation graphique permet de résumer l'action d'un filtre sur les différentes fréquences.

Comme il est fréquent de travailler avec le gain en décibels, il est d'usage de définir aussi en décibels la fréquence de coupure. Puisque

$$20 \log(1/\sqrt{2}) = -10 \log 2 \simeq -3,0,$$

on définit la fréquence de coupure à -3 dB par

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3.$$

II.3.5. Notion de gabarit

La réalisation d'un filtre est contrainte par un cahier des charges. On peut par exemple contraindre le gain entre deux courbes limites (voir figure 8.10, à gauche, qui illustre le gabarit d'un filtre passe-bas en échelle linéaire pour le gain) ou simplement spécifier une bande de fréquence que l'on souhaite transmettre (avec une atténuation maximale dans la bande passante de a dB) ainsi qu'une bande rejetée (avec une atténuation minimale A dB dans cette bande). Ce dernier cas est illustré à droite sur la figure 8.10, en échelle logarithmique, dans le cas d'un passe-bas pour lequel on a spécifié une bande passante $[0; f_p]$, avec une tolérance de a dB sur l'atténuation et une bande rejetée $[f_r; +\infty]$ où l'atténuation doit être supérieure à A dB.

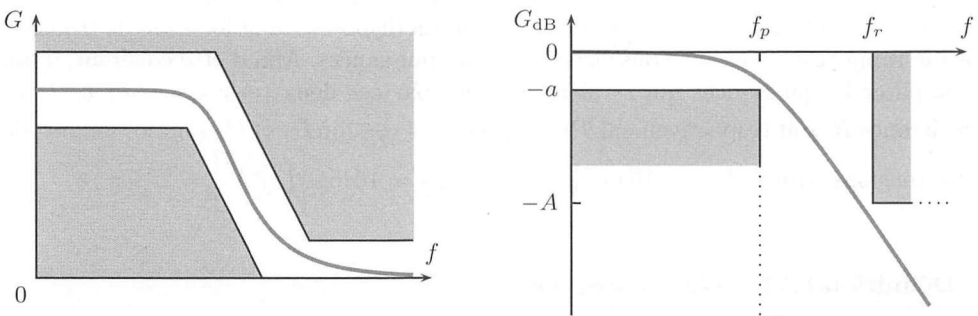


FIG. 8.10. Gabarits de filtres passe-bas.

II.3.6. Caractère moyennneur, intégrateur ou dérivateur

Comportement asymptotique d'un filtre dans un diagramme de Bode

Les filtres que nous étudierons seront constitués d'un certain nombre de résistances, condensateurs et bobines.

La fonction de transfert sera donc le rapport de deux polynômes¹² de la variable $j\omega$. Lorsque $\omega \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow \infty$, le terme dominant de la fonction de transfert sera de la forme $\alpha(j\omega)^n$, où n est un entier relatif et α un facteur sans intérêt ici. Asymptotiquement, dans un diagramme de Bode (échelle logarithmique en abscisse) :

- le gain en dB sera égal à $20 \log(\omega^n) = 20n \log \omega$; il s'agit d'une droite de pente $20n$, que l'on exprimera en décibel par décade (augmenter $\log \omega$ d'une unité correspond à augmenter la pulsation d'une décade) ;
- la phase sera égale à $\arg \alpha + \arg[(j\omega)^n] = \arg \alpha + n\frac{\pi}{2}$, ce qui se représente par une asymptote horizontale.

Caractère dérivateur d'un filtre

Une opération de dérivation correspond à multiplier par $j\omega$; la fonction de transfert d'un dérivateur varie donc linéairement en fonction de ω (cas $n = 1$ dans le paragraphe précédent, ici non pas de manière asymptotique mais sur toute la gamme de fréquences en théorie). Le diagramme de Bode d'un dérivateur est donc une droite de pente 20 dB/décade pour le gain en décibel et un déphasage constant quelle que soit la fréquence. Tout filtre possédant dans une certaine gamme de fréquences un comportement de ce type présentera un caractère dérivateur dans la gamme concernée (voir section III pour des exemples).

Caractère intégrateur d'un filtre

Inversement, intégrer correspond à une division par $j\omega$, soit $n = -1$ dans le premier paragraphe. Tout filtre dont le diagramme de Bode en gain présente, dans une certaine gamme de fréquences, une pente de -20 dB/décade tout en assurant un déphasage constant se comporte comme un intégrateur pour la gamme de fréquences concernée.

Comportement moyenneur

D'après la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique (voir équation (8.4) page 198), moyenner revient à extraire la composante continue du signal. Pour cela, il faut éliminer les harmoniques du signal; leur pulsation est multiple de celle du fondamental, soit $\omega_0 = 2\pi/T$, où T est la période du signal. En conséquence, tout filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est nettement inférieure à la fréquence du signal d'entrée se comporte comme un moyenneur.

III. Filtres linéaires passifs d'ordres un et deux

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats précédents à l'aide de filtres linéaires passifs d'ordres un et deux. Les premiers seront traités avec des circuits RC , et les seconds avec des circuits RLC . Bien entendu, il en existe de nombreux autres, dont certains sont donnés en exercices. Ce sera néanmoins l'occasion de mettre en place la méthode d'étude d'un filtre, et de définir une fonction de transfert canonique pour chaque filtre, c'est-à-dire sa forme mathématique, indépendamment des composants qui constituent le filtre. Dans toute cette section, les quadripôles sont supposés en sortie ouverte.

12. Du fait que l'équation différentielle est transformée en représentation complexe en une équation algébrique en $j\omega$, voir section II.3.5 page 172.

III.1. Filtre passe-bas d'ordre un

III.1.1. Étude qualitative

Considérons le circuit représenté à la figure 8.11. Avant éventuellement de calculer la fonction de transfert, il est nécessaire d'effectuer une analyse qualitative du filtre pour connaître son type.

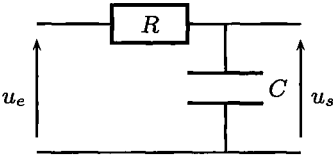


FIG. 8.11. Circuit RC .

► À basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, donc $u_s = u_e$ (aucun courant ne circule dans R puisque la sortie est ouverte).

► À haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), il est équivalent à un fil, donc $u_s = 0$ puisque le potentiel reste constant le long d'un fil.

Le filtre laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences : il s'agit bien d'un filtre passe-bas.

III.1.2. Fonction de transfert - Forme canonique

Un diviseur de tension permet d'obtenir

$$\underline{U}_s = \underline{U}_e \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \underline{U}_e \frac{1}{1 + jRC\omega},$$

avec \underline{U}_e et \underline{U}_s les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie. Ainsi, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{\mathcal{H}}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Le dénominateur est de degré un en $j\omega$, ce filtre est d'ordre un.

Il est commode d'introduire la pulsation caractéristique de ce filtre, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, et la variable sans dimension $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, appelée pulsation réduite. La fonction de transfert se met alors sous forme canonique

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = \frac{1}{1 + jx}. \quad (8.5)$$

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}, \quad (8.6)$$

avec H_0 le gain statique ($x = 0$, régime continu), qui n'est pas toujours égal à un comme avec le filtre étudié, et x la pulsation réduite.

On en déduit le gain pour le filtre étudié

$$G(x) = |\underline{\mathcal{H}}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

et la phase

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arg(1 + jx) = -\arctan(x). \quad (8.7)$$

III.1.3. Pulsation de coupure - Comportement pseudo-intégrateur

Calculons la pulsation ω_c de coupure à -3 dB. Par définition, nous avons vu que $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ et ici $G_{\max} = 1$, ce qui conduit immédiatement à $\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Dans le régime haute fréquence, $x = \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$, ainsi $\underline{H}(jx) \sim \frac{1}{jx} = \frac{\omega_0}{j\omega}$. On a donc dans ce domaine de fréquences $\underline{U}_s \sim \frac{U_c}{jx}$ qui est la représentation complexe de $u_s(t) \simeq \frac{1}{RC} \int u_e(t) dt$. Si $\omega \gg \omega_0$, la tension de sortie est à un facteur près une primitive de la fonction d'entrée. On parle de montage pseudo-intégrateur¹³.

III.1.4. Diagramme de Bode

Le gain en décibels se déduit facilement du gain $G(\omega)$,

$$G_{\text{dB}}(x) = 20 \log G(x) = -10 \log(1 + x^2).$$

Méthode

Diagramme de Bode asymptotique

L'étude asymptotique du gain en décibels et de la phase permet de déterminer les équations des asymptotes du diagramme.

- ▶ Si $x \ll 1$ (basses fréquences), alors $G_{\text{dB}} \rightarrow 0$ puisque $\log 1 = 0$, donc la droite d'équation $G_{\text{dB}} = 0$ est asymptote à basses fréquences.
- ▶ Si $x \gg 1$ (hautes fréquences), alors $1 + x^2 \sim x^2$, donc $G_{\text{dB}} \sim -20 \log x$ en sortant le carré du logarithme. La droite d'équation $G_{\text{dB}} = -20 \log x$ est asymptote à hautes fréquences : c'est une droite qui passe par l'origine $x = 1$ dans ce mode de représentation, et est de pente -20 dB/décade. Une pente de ± 20 dB/décade des asymptotes est caractéristique des filtres du premier ordre. Cela signifie qu'une multiplication par 10 de la fréquence conduit à une atténuation du signal de sortie d'un facteur 10.
- ▶ Si $x = 1$ (donc $\log(x) = 0$), alors $G_{\text{dB}} = -3$ dB, c'est la pulsation réduite de coupure.

Le tracé des asymptotes donne le diagramme de Bode asymptotique (on prendra l'habitude d'indiquer les pentes nulles des asymptotes). Ensuite, en plaçant la pulsation de coupure, le tracé de la courbe de gain se fait facilement (voir figure 8.12).

Remarque On admet généralement le fait que pour $x > 10$ ($\omega > 10\omega_c$) et $x < 0,1$ ($\omega < \frac{\omega_c}{10}$), le diagramme réel est confondu avec le diagramme asymptotique (règle connue sous le nom de la règle du dixième). Il est facile de le vérifier sur des applications numériques. Pour $x = 0,1$, le gain en décibels vaut

$$G_{\text{dB}}(x = 0,1) \simeq -10 \log(1 + 10^{-2}) \simeq -0,04 \text{ dB},$$

la courbe réelle est donc très proche de l'asymptote $G_{\text{dB}} = 0$. De la même manière,

13. Le terme pseudo permet de rappeler qu'il ne s'agit pas d'un véritable intégrateur puisqu'il y existe une condition sur la fréquence (voir aussi section II.3.6).

en $x = 10$, on obtient $G_{\text{dB}}(x = 10) \simeq -20,04 \text{ dB}$, ce qui est très proche des -20 dB de l'asymptote de pente -20 dB/décade .

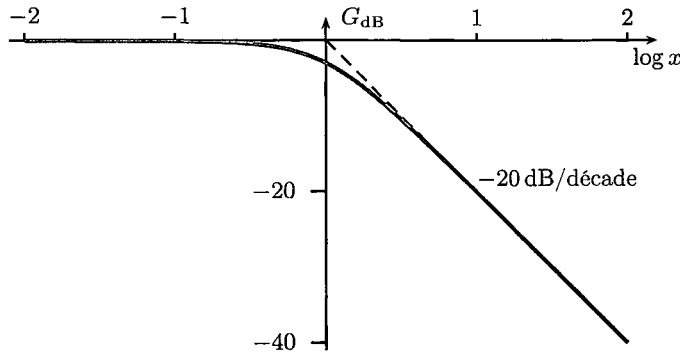


FIG. 8.12. Gain en décibels d'un filtre passe-bas du premier ordre.

Pour la phase φ :

- ▶ si $x \rightarrow 0$, alors $\varphi \rightarrow 0^-$;
- ▶ si $x \rightarrow \infty$, alors $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$;
- ▶ si $x = 1$ (donc $\log(x) = 0$), alors $\varphi = -\pi/4$. De plus, le point de coordonnées $(0, -\frac{\pi}{4})$ est centre de symétrie pour la courbe, car $\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ et le changement de x en $1/x$ correspond au changement de $\log(x)$ en $-\log(x)$.

Les asymptotes permettent de tracer le diagramme de Bode asymptotique, et la valeur en $x = 1$ permet de tracer le diagramme réel (voir figure 8.13).

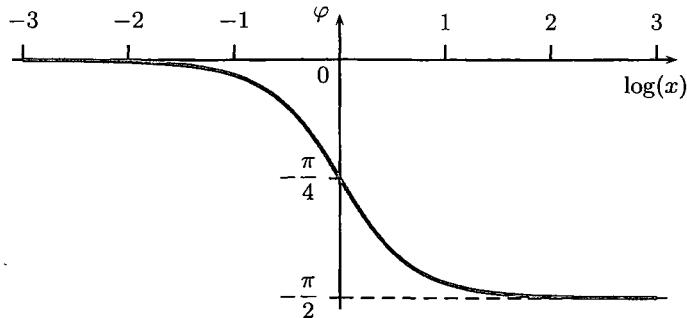


FIG. 8.13. Phase d'un filtre passe-bas du premier ordre.

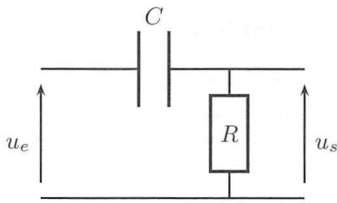
III.2. Filtre passe-haut d'ordre un

III.2.1. Étude qualitative

Considérons le circuit représenté à la figure 8.14.

- ▶ À basses fréquences, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, donc $u_s = 0$.
- ▶ À hautes fréquences, il est équivalent à un fil, donc $u_s = u_e$.

Le filtre est donc un passe-haut.

FIG. 8.14. Circuit CR passe-haut.

III.2.2. Fonction de transfert - Forme canonique

La fonction de transfert s'obtient par un diviseur de tension,

$$\underline{\mathcal{H}}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}.$$

Méthode

Écriture de la fonction de transfert

Il est souvent préférable de faire apparaître une constante au numérateur de la fonction de transfert. Cela simplifie considérablement son étude. On prendra donc l'habitude de le faire dès que possible.

Le dénominateur de l'avant-dernière expression (fraction rationnelle en $j\omega$) est de degré un en $j\omega$, le filtre est un filtre du premier ordre. Posons $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ une pulsation caractéristique, et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite. La fonction de transfert se met alors sous forme canonique,

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}.$$

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre est

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = H_0 \frac{jx}{1 + jx} = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{jx}},$$

avec H_0 le gain en haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), qui n'est pas toujours égal à un comme avec le filtre étudié ici, et x la pulsation réduite.

On en déduit le gain pour le filtre étudié

$$G(x) = |\underline{\mathcal{H}}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad (8.8)$$

et la phase

$$\varphi(x) = \arg(\underline{\mathcal{H}}(jx)) = -\arg\left(1 + \frac{1}{jx}\right) = \arctan\frac{1}{x}.$$

III.2.3. Pulsation de coupure - Comportement pseudo-dérivateur

En reprenant le même type d'analyse que pour le filtre passe-bas, la pulsation ω_c de coupure à -3 dB, telle que $G(\omega_c) = G_{\max}/\sqrt{2}$, est $\omega_c = \omega_0 = 1/(RC)$. À basses fréquences ($\omega \ll \omega_c$), $\underline{H}(j\omega) \sim j\omega$, le circuit se comporte comme un pseudo-dérivateur.

III.2.4. Diagramme de Bode

On constate que lorsque l'on change x en $1/x$, c'est-à-dire $\log(x)$ en $-\log(x)$, dans l'équation (8.8) on retrouve le gain du passe-bas d'ordre un. Les représentations du gain en décibels du filtre passe-haut et du filtre passe-bas sont donc symétriques par rapport à l'axe $\log(x) = 0$, voir figure 8.15.

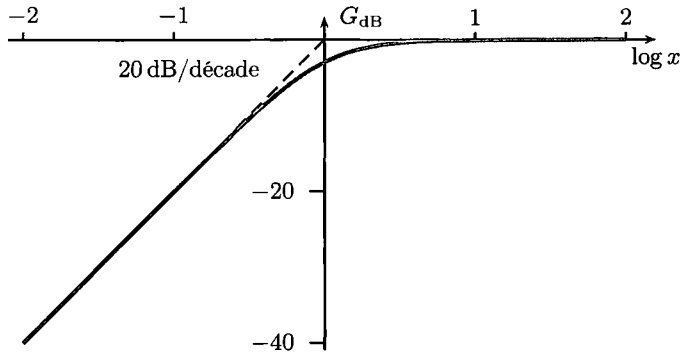


FIG. 8.15. Gain en décibels d'un filtre passe-haut du premier ordre.

Pour ce qui concerne la phase φ , elle est identique à celle du passe-bas traduite en ordonnée de $+\pi/2$, car la fonction de transfert du filtre passe-haut est celle du passe-bas multipliée par $jRC\omega$, dont l'argument est $\pi/2$; elle varie donc de $+\pi/2$ à basse fréquence à 0 à haute fréquence.

III.3. Filtre passe-bas d'ordre deux

III.3.1. Étude qualitative

Considérons le quadripôle représenté à la figure 8.16 et commençons par étudier le comportement de ce filtre dans les cas limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

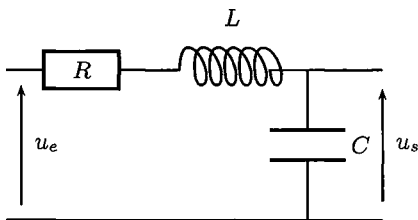


FIG. 8.16. Circuit RLC passe-bas d'ordre 2.

► À basses fréquences, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, et la bobine à un fil. Comme la sortie est ouverte, il n'y a pas de courant de sortie, donc aucun courant ne circule dans la résistance, et la tension à ses bornes est nulle. Par conséquent, $u_s(t) = u_e(t)$. Ce filtre laisse passer les basses fréquences.

► À hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil, et la bobine à un circuit ouvert. La tension de sortie est prise aux bornes d'un fil, donc $u_s(t) = 0$. Ce filtre coupe les hautes fréquences.

Le filtre étudié est donc un filtre passe-bas.

III.3.2. Fonction de transfert - Forme canonique

La fonction de transfert du filtre s'obtient par un diviseur de tension,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{1}{1 + jC\omega(R + jL\omega)} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Le dénominateur est un polynôme de degré deux en $j\omega$, c'est donc un filtre d'ordre deux. En introduisant la pulsation propre du circuit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, le facteur de qualité $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$, on peut écrire cette fonction sous forme canonique.

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}},$$

avec H_0 le gain statique (lorsque $x = 0$).

La relation entre la sortie et l'entrée est identique à celle que nous avons déjà obtenue lors de l'étude de la résonance du circuit RLC , voir équation (7.14) page 178. Le gain a pour expression

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \quad (8.9)$$

et la phase, sur le modèle de l'équation (7.16),

$$\varphi = -\arg \left[j \left(+\frac{x}{Q} - j(1 - x^2) \right) \right] = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1 - x^2}{x/Q} \right) \quad (8.10)$$

afin d'assurer $\varphi \in [-\pi; 0]$ comme l'indique le signe de son sinus.

III.3.3. Étude du gain en décibels

Le gain du passe-bas d'ordre deux est identique à celui de la figure 7.19 page 180, à ceci près que l'on va maintenant le tracer en échelle logarithmique. Nous avons en particulier étudié l'existence de la résonance en tension lorsque $Q > 1/\sqrt{2}$ pour une pulsation ω_r définie par

$$\omega_r = x_r\omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0.$$

Comme en $x = 1$ le gain est égal à Q (le maximum étant en x_r), dans ce cas l'amplitude peut prendre de très grandes valeurs.

Le gain en décibels s'exprime par

$$G_{dB}(x) = 20 \log G(x) = -10 \log \left((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right).$$

Effectuons l'étude asymptotique de $G_{dB}(x)$.

- ▶ Si $x \rightarrow 0$ (basses fréquences), alors $G_{dB}(x) \simeq -10 \log 1 = 0$: il y a une asymptote horizontale $G_{dB} = 0$ pour les basses fréquences.
- ▶ Si $x \rightarrow \infty$ (hautes fréquences), alors le terme dominant dans le logarithme est x^4 , donc $G_{dB}(x) \sim -10 \log(x^4) \sim -40 \log(x)$. La droite d'équation $G_{dB} = -40 \log(x)$, de pente -40 dB/décade, est asymptote à hautes fréquences. Cette pente (sa valeur absolue) est caractéristique des filtres du second ordre. Cela signifie qu'à chaque décade (multiplication de la fréquence par dix), l'amplitude du signal de sortie est divisée par cent : la coupure des hautes fréquences est beaucoup plus efficace qu'avec un filtre du premier ordre (-20 dB/décade, donc seulement division par dix à chaque décade).

Le tracé du diagramme asymptotique ne pose pas de problème, néanmoins il faut faire attention pour le diagramme réel du fait de la résonance (voir figure 8.17). La courbe en tirets sur la figure correspond à $Q = 1/2$, valeur en dessous de laquelle la fonction de transfert du filtre peut s'écrire comme le produit de deux passe-bas d'ordre un. Celle en gris, correspondant à $Q = 1/\sqrt{2}$, distingue la limite entre les courbes qui vont subir une résonance des autres.

III.3.4. Étude de la phase

La phase a été tracée à la figure 7.20 page 181, il s'agit maintenant d'utiliser une échelle logarithmique pour les abscisses (voir figure 8.18). Une nouvelle fois, la courbe en tirets correspond à $Q = 1/2$. On notera que l'on retrouve ici le fait qu'à une asymptote de pente $20n$ dB/décade de la courbe de gain correspond une asymptote horizontale de valeur $n\pi/2$ de la courbe de phase.

Remarque L'étude du filtre passe-haut d'ordre deux (hors programme) se déduit simplement de celle du filtre passe-bas, en ajoutant π à la phase et en effectuant une symétrie par rapport à l'axe vertical $x = 1$ sur la figure 8.17.

III.4. Filtre passe-bande

III.4.1. Étude qualitative

Étudions les comportements limites du quadripôle représenté à la figure 8.19 :

- ▶ à basses fréquences, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil, par conséquent $u_s = 0$;
- ▶ à hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil et la bobine à un circuit ouvert, donc $u_s(t) = 0$.

Ce filtre coupe basses et hautes fréquences, c'est un passe-bande.

III.4.2. Fonction de transfert - Forme canonique

La fonction de transfert du filtre s'obtient par un diviseur de tension,

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{U_S}{U_E} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

Pour obtenir la forme canonique du filtre, il faut introduire la pulsation propre du circuit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, le facteur de qualité $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

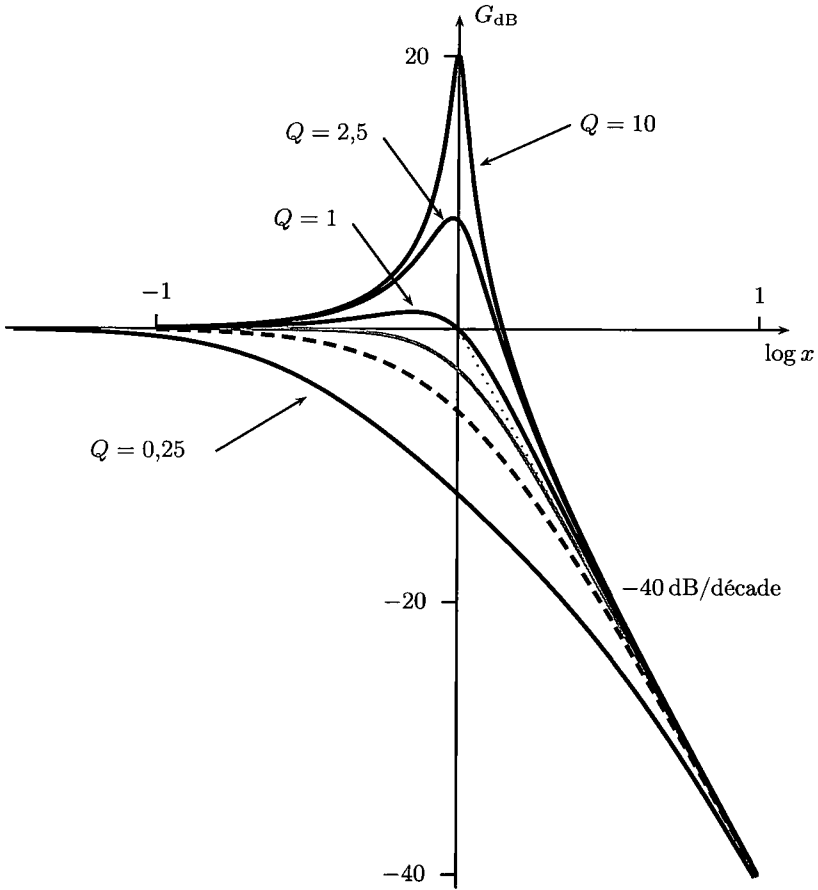


FIG. 8.17. Gain en décibels d'un filtre passe-bas du second ordre.

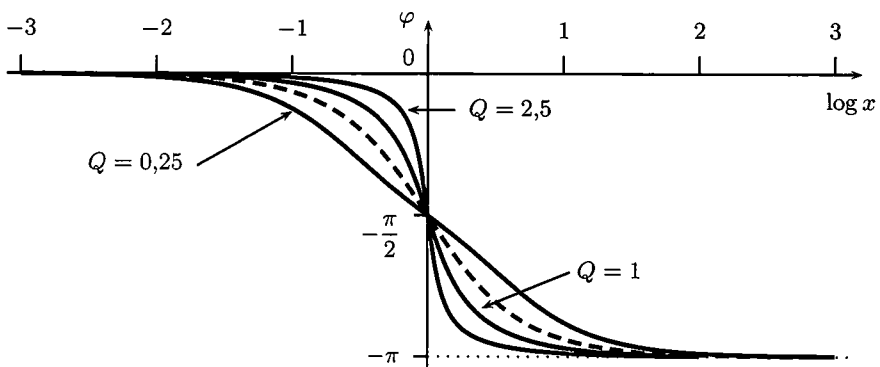
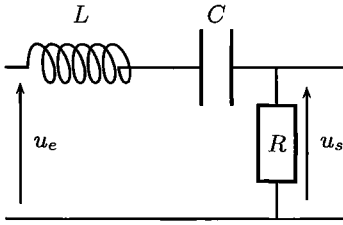


FIG. 8.18. Phase d'un filtre passe-bas du second ordre.

FIG. 8.19. Filtre RLC passe-bande d'ordre 2.

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est

$$\mathcal{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{j\frac{x}{Q}H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}, \quad (8.11)$$

avec H_0 le gain maximum (en $x = 1$). La première forme est plus pratique pour l'étude mathématique; la seconde correspond à la vraie forme canonique, dans laquelle le dénominateur est égal à $1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$ pour tous les filtres du second ordre.

Le gain du filtre s'écrit

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}. \quad (8.12)$$

Comme l'argument du numérateur de la fonction de transfert vaut $\pi/2$, et que le dénominateur est identique à celui du passe-bas d'ordre 2 (voir équation 8.10), la phase s'obtient en décalant de $\frac{\pi}{2}$ l'ordonnée de celle du filtre passe-bas d'ordre 2.

III.4.3. Diagramme de Bode

La fonction de transfert du filtre passe-bande est formellement identique à l'amplitude complexe de l'intensité dans un circuit RLC série, avec $H_0 = E/R$ (voir section III.3 page 181). Il existe donc toujours un maximum en ω_0 comme le montre du reste directement l'équation (8.12). Le gain en décibels est

$$G_{\text{dB}}(x) = 20 \log G(x) = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right).$$

Effectuons l'étude asymptotique de $G_{\text{dB}}(x)$:

► si $x \rightarrow 0$ (basses fréquences), le terme dominant dans le logarithme est Q^2/x^2 , donc $G_{\text{dB}}(x) \sim -10 \log \frac{Q^2}{x^2} \sim -20 \log Q + 20 \log x$. La droite d'équation

$$G_{\text{dB}} = -20 \log Q + 20 \log x$$

est l'asymptote pour les basses fréquences, c'est une droite de pente 20 dB/décade;

► si $x \rightarrow \infty$ (hautes fréquences), alors le terme dominant dans le logarithme est Q^2x^2 , donc $G_{\text{dB}}(x) \sim -10 \log (Q^2x^2) \sim -20 \log Q - 20 \log x$. La droite d'équation

$$G_{\text{dB}} = -20 \log Q - 20 \log x,$$

de pente -20 dB/décade, est l'asymptote à hautes fréquences.

Les asymptotes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées d'équation $\log x = 0$. Le maximum du gain a lieu pour la résonance, donc en $x = 1$ où $G_{\text{dB}} = 0$,

pour toute valeur de Q : le maximum est indépendant du facteur de qualité. Les deux asymptotes précédentes se coupent lorsque $-20 \log Q + 20 \log x = -20 \log Q - 20 \log x$, donc pour $x = 1$. Elles se croisent au point d'ordonnée $-20 \log Q$, positive si $Q < 1$ et négative si $Q > 1$ (voir figure 8.20), donc :

- ▶ si $Q < 1$, le gain G_{dB} maximum est situé sous le point de croisement des asymptotes, la courbe réelle est donc sous les asymptotes : la résonance est floue, et le filtre peu sélectif (voir le calcul de la bande passante qui suit) ;
- ▶ si $Q > 1$, le gain G_{dB} maximum est situé au-dessus du point de croisement des asymptotes, la courbe réelle est donc également au-dessus des asymptotes : la résonance est aiguë, et le filtre sélectif.

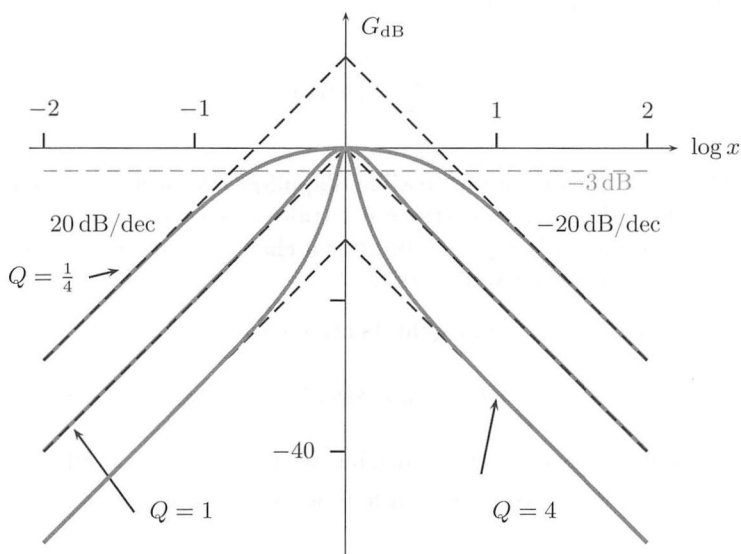


FIG. 8.20. Gain en décibels d'un filtre passe-bande du second ordre.

La sélectivité du filtre, c'est-à-dire sa bande passante à -3 dB, est liée à la largeur de la résonance en intensité.

Rappel

Acuité de la résonance - Facteur de qualité

La largeur de la courbe de résonance est la bande de pulsations $\Delta\omega$ pour lesquelles l'amplitude est supérieure ou égale à l'amplitude maximale divisée par racine de deux. Elle est telle que

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Plus Q est grand, donc plus l'amortissement est faible, plus la résonance est aiguë.

La définition de la largeur de la courbe de résonance correspond exactement à celle de la bande passante à -3 dB. Donc plus le facteur de qualité sera important, plus le filtre sera sélectif. La bande passante réduite étant donnée par $\Delta x = \frac{1}{Q}$. De plus, nous avons vu que les pulsations réduites de coupure vérifient $x_1 x_2 = 1$; elles sont

donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, car $\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2 = 0$, donc $\log x_1 = -\log x_2$. La courbe du gain en décibels est représentée sur la figure 8.20, ainsi que la coupure à -3 dB, ce qui permet de vérifier les propriétés énoncées précédemment.

IV. Filtrage d'un signal périodique

IV.1. Principe

On note $e(t)$ le signal, supposé T -périodique, envoyé en entrée d'un filtre linéaire. Le théorème de Fourier (voir théorème 8.4 page 198) permet d'écrire e sous la forme d'une série de Fourier. En notant $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \phi_n).$$

Le filtre étudié étant linéaire, il est possible d'appliquer le principe de superposition. Chaque harmonique du signal d'entrée e est traité séparément par le filtre. Il suffit donc d'évaluer *séparément* la réponse du filtre à chaque harmonique, puis d'en faire la somme, pour obtenir le signal de sortie.

- L'harmonique e_n de rang n du signal d'entrée e s'écrit

$$e_n(t) = E_n \cos(n\omega t + \phi_n).$$

Il a pour amplitude E_n , pour phase à l'origine des temps ϕ_n et sa pulsation est $n \times \omega$.

- Le filtre linéaire est caractérisé par sa fonction de transfert complexe

$$\underline{H}(j\omega) = G(\omega) \exp[j\varphi(\omega)],$$

où $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont respectivement le gain et la phase pour la pulsation ω .

- L'effet du filtre sur l'harmonique e_n de rang n (qui pulse à $n \times \omega$) est de multiplier son amplitude E_n par $G(n\omega)$ et d'ajouter $\varphi(n\omega)$ à sa phase. En sortie de filtre, cet harmonique est donc devenu :

$$s_n(t) = \underbrace{G(n\omega) \times E_n}_{\stackrel{\text{def}}{=} S_n} \cos[n\omega t + \phi_n + \varphi(n\omega)].$$

C'est un signal d'amplitude $S_n = G(n\omega) \times E_n$, de phase à l'origine des temps $\phi_n + \varphi(n\omega)$ et de pulsation $n\omega$.

- Par linéarité du filtre (principe de superposition), le signal s de sortie est la somme de tous les signaux s_n de sortie, soit

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(t).$$

On résume cette approche dans le théorème suivant.

Théorème 8.13. Action d'un filtre linéaire sur un signal périodique

Soit e un signal T -périodique (de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$) écrit sous forme de série de Fourier,

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \phi_n).$$

S'il entre dans un filtre linéaire de fonction de transfert $\mathcal{H}(j\omega) = G(\omega) \exp[j\varphi(\omega)]$ où G est le gain et φ la phase du filtre, le signal de sortie s correspondant s'écrit comme la série de Fourier

$$s(t) = G(0)E_0 + \sum_{n=1}^N G(n\omega)E_n \cos[n\omega t + \phi_n + \varphi(n\omega)].$$

Attention :

- G et φ sont des fonctions de la pulsation. Il faut les considérer à la pulsation $n\omega$ de chaque harmonique ;
- le terme constant E_0 est traité comme n'importe quel harmonique. Sa pulsation étant nulle, il est affecté du gain $G(0)$ correspondant à cette pulsation.

IV.2. Exemple du filtrage d'un signal créneau pour obtenir une tension continue de valeur variable

La méthode usuelle pour fabriquer une alimentation de tension continue réglable (alimentation à découpage) consiste à envoyer une tension créneau de rapport cyclique α (voir figure 8.21 à gauche) réglable sur un filtre passe-bas du type de celui représenté sur la figure 8.21 (à droite), dans lequel la résistance R symbolise l'ensemble des circuits que l'on souhaite alimenter sous une tension presque parfaitement continue.

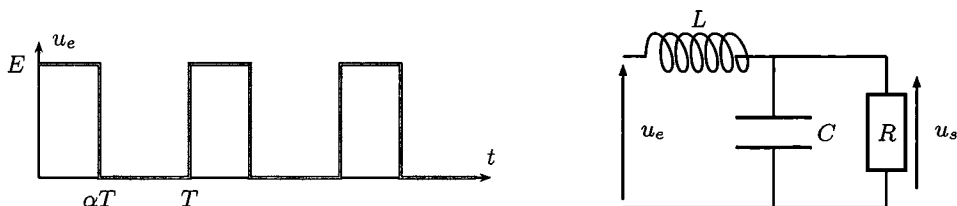


FIG. 8.21. Signal créneau de rapport cyclique α (à gauche) et circuit étudié.

À basses fréquences, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert, donc $u_s = u_e$. À hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil, donc $u_s = 0$. Ce filtre est un passe-bas.

Le signal d'entrée est rectangulaire, de rapport cyclique α variable ($0 < \alpha < 1$) ; sa décomposition en série Fourier (admise) s'écrit

$$u_e(t) = \alpha E + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{2E}{\pi n} |\sin(n\pi\alpha)|. \quad (8.13)$$

En ne conservant que la composante continue à l'aide du filtre passe-bas (voir exercice corrigé 8.14 pour les calculs), la sortie est alors $u_s \simeq \alpha E$, tension continue réglable via le rapport cyclique α .

EXERCICE CORRIGÉ 8.14.*Tension continue de valeur variable*

1. Déterminer la fonction de transfert du filtre de la figure 8.21; on posera $\omega_0^2 = 1/LC$, $\gamma = L\omega_0/R$ et $x = \omega/\omega_0$. Vérifier qu'il s'agit d'un passe-bas d'ordre deux.

2. On suppose $\gamma = 2$, le filtre présente-t-il une résonance ?

3. On tronque la série de Fourier du signal rectangulaire $u_e(t)$ à sa composante continue αE et au fondamental d'amplitude $c_1 = 2E \sin(\pi\alpha)/\pi$ (justification de cette hypothèse à la question suivante). Calculer la valeur moyenne U_{s0} du signal $u_s(t)$ à la sortie du filtre, ainsi que l'amplitude U_{sf} de son fondamental en fonction de α, E, γ et x .

En déduire l'amplitude crête à crête ΔU_s (appelée ondulation) de la tension de sortie $u_s(t)$. Application numérique : calculer U_{s0} et ΔU_{sf} pour un signal rectangulaire d'entrée de fréquence $f = 10 \text{ kHz}$, d'amplitude $E = 10 \text{ V}$ et de rapport cyclique $\alpha = 0,5$. On donne $\gamma = 2$, $L = 135 \mu\text{H}$ et $C = 240 \mu\text{F}$.

4. Justifier, compte tenu des valeurs précédentes, que l'on pouvait se contenter de la valeur moyenne du signal et de son fondamental pour déterminer la sortie. Déterminer alors complètement $u_s(t)$ dans le cas $\alpha = 0,5$ (pour lequel $\phi_1 = -\pi/2$, voir équation 8.13) et le tracer.

Corrigé

1. Un diviseur de tension permet d'écrire $\underline{U}_s = \underline{U}_e \frac{1}{1 + \underline{Y}jL\omega}$, avec $\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega$ l'admittance équivalente du groupement RC parallèle. On en déduit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2},$$

ce qui donne, en posant la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$,

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\gamma x}.$$

On reconnaît la forme canonique d'un passe-bas d'ordre deux, avec $Q = 1/\gamma$ (notons que $\gamma = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ aurait été le facteur de qualité dans le cas du RLC série, voir section III.3.2 page 215; ici plus R est grand, plus le facteur de qualité est grand).

2. Si $\gamma = 2$, $Q = 0,5$; il n'y a donc pas de résonance car $Q < 1/\sqrt{2}$.

3. Comme $G(x=0) = 1$ (le continu correspond à $x=0$), on en déduit que la composante continue est restituée sans modification d'amplitude en sortie du filtre, soit par définition

$$U_{s0} = \frac{1}{T} \int_0^T u_e(t) dt = \alpha E = 5 \text{ V}.$$

En revanche, pour $x \neq 0$, le gain n'est pas égal à 1, donc pour le fondamental de pulsation ω , $U_{sf} = c_1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (\gamma x)^2}}$ avec $x = \omega/\omega_0$, soit

$$U_{sf} = \frac{2E}{\pi} \sin(\alpha\pi) \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (\gamma x)^2}}.$$

L'ondulation du signal vaut $\Delta U_s = 2U_{sf}$.

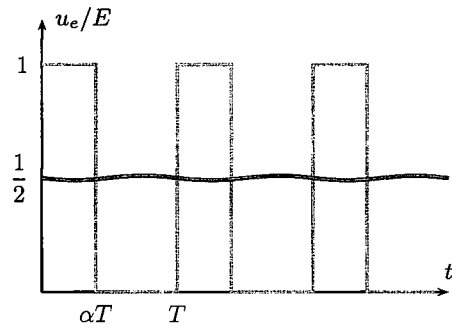
Numériquement, $\omega_0 \simeq 5,6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Or, $\omega \simeq 6,2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $\omega \gg \omega_0$. Étant donné que $x \gg 1$, on peut écrire $\Delta U_s \simeq \frac{4E}{\pi} \frac{1}{x^2}$. On trouve alors $\Delta U_s \simeq 0,1 \text{ V}$.

4. Notons $x = \omega/\omega_0$, rapport de la pulsation du fondamental avec la pulsation propre du filtre. L'amplitude c'_n de l'harmonique de rang n , compte tenu du fait que $n\omega \gg \omega_0$, soit $nx \gg 1$, est de l'ordre de $c_n/(nx)^2$. L'amplitude de l'harmonique de rang n rapportée à celle (notée c'_1) du fondamental est alors

$$\frac{c'_n}{c'_1} \simeq \frac{c_n}{(nx)^2} \frac{x^2}{c_1} = \frac{1}{n^2} \frac{c_n}{c_1} \simeq \frac{1}{n^3}.$$

La décroissance est très rapide, seul le fondamental, d'amplitude déjà faible comparée à la valeur moyenne du signal de sortie (du moins tant que le rapport cyclique α n'est pas trop faible, ce qui est le cas numériquement dans cet exercice), est utile pour décrire le signal de sortie.

La forme de la tension de sortie est $u_s(t) = U_{s0} + U_{sf} \cos(\omega t + \phi_1 + \varphi_1)$, où φ_1 reste à déterminer. Comme $x \gg 1$, on peut écrire $\varphi_1 \simeq -\pi$. Les courbes sont représentées sur la figure ci-contre pour $\alpha = 0,5$, soit $u_s(t) = \frac{1}{2}E - U_{sf} \sin(\omega t)$; la tension de sortie est quasiment constante.



IV.3. Illustrations

Sont ici présentées quelques interprétations du signal de sortie de filtres que nous avons étudiés pour une entrée créneau ou triangle. On montre notamment comment on utilise les comportements asymptotiques des filtres (caractère dérivateur ou intégrateur, voir section II.3.6 page 208). Les exercices 7 et 8 proposent d'autres exemples.

Passé-bas du premier ordre Le signal d'entrée considéré est un triangle normalisé, d'amplitude crête à crête unité et de valeur moyenne $1/2$.

Si la fréquence de coupure du filtre est très grande devant celle du fondamental, l'essentiel des harmoniques du signal triangulaire passent, donc le signal en sortie est le même que celui en entrée (en noir sur la figure 8.22).

En revanche, si la fréquence de coupure est plus faible, le signal est dans la bande coupée, donc le premier effet est de diminuer l'amplitude des variations du signal (la valeur moyenne est inchangée, car le filtre passe-bas laisse passer les basses fréquences). De plus, le filtre passe-bas se comporte comme un intégrateur à hautes fréquences; une rampe devient alors un morceau de parabole, c'est ce que l'on constate à droite sur la figure 8.22.

Passé-haut du premier ordre Le signal triangulaire normalisé est envoyé dans un filtre passe-haut. Un tel filtre rejette la composante continue, la valeur moyenne du signal de sortie sera donc nulle.

Si la fréquence de coupure du filtre est plus faible que celle du fondamental, les harmoniques passent sans déformation, le signal de sortie est un triangle de valeur moyenne nulle (en gris foncé sur la figure 8.23).

Dans le cas où la fréquence de coupure est beaucoup plus grande, la plupart des harmoniques du triangle sont dans la bande rejetée, le signal de sortie est donc d'amplitude plus faible que le signal d'entrée. De plus, à basses fréquences, un filtre passe-haut se comporte comme un dérivateur; le signal de sortie a donc l'allure d'un créneau (et cela d'autant mieux que la fréquence de coupure est élevée par rapport à celle du fondamental), voir figure 8.23, en noir (agrandissement à droite).

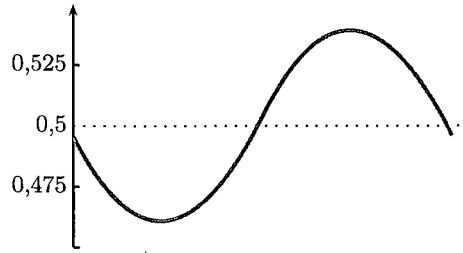
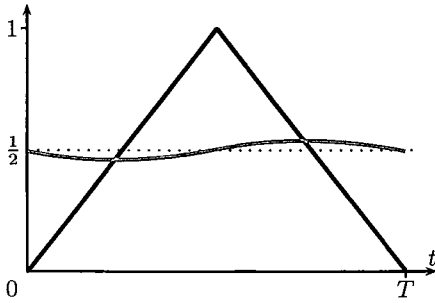


FIG. 8.22. Effet d'un filtre passe-bas sur un signal triangulaire. À gauche, en noir pour un filtre dont la fréquence de coupure est 100 fois plus grande que celle du fondamental ; en gris pour un filtre dont la fréquence de coupure est 10 fois plus faible. À droite, agrandissement de ce dernier cas ; on reconnaît deux arcs de paraboles.

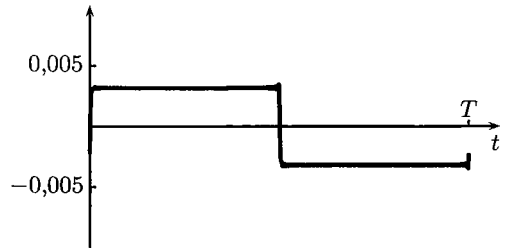
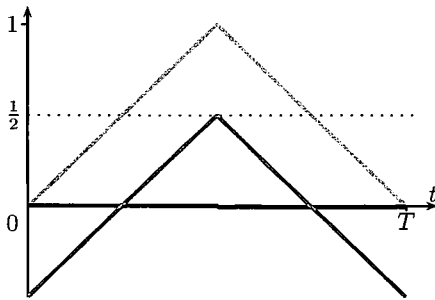


FIG. 8.23. Effet d'un filtre passe-haut sur un signal triangulaire (en gris clair). En noir pour un filtre dont la fréquence de coupure est 100 fois plus grande que celle du fondamental ; en gris foncé pour un filtre dont la fréquence de coupure est 100 fois plus faible. À droite, agrandissement de ce dernier cas ; on reconnaît un créneau.

V. Exercices

1. Impédances d'entrée et de sortie

(solution page 696)

Calculer l'impédance d'entrée du circuit représenté à la figure 8.24, supposé en sortie ouverte.

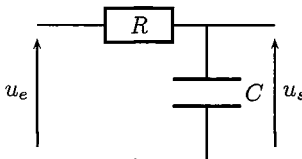


FIG. 8.24. Circuit RC .

2. Égalisation RIAA

(solution page 696)

L'égalisation RIAA (Recording Industry Association of America) est un standard pour l'enregistrement et la restitution des disques vinyles.

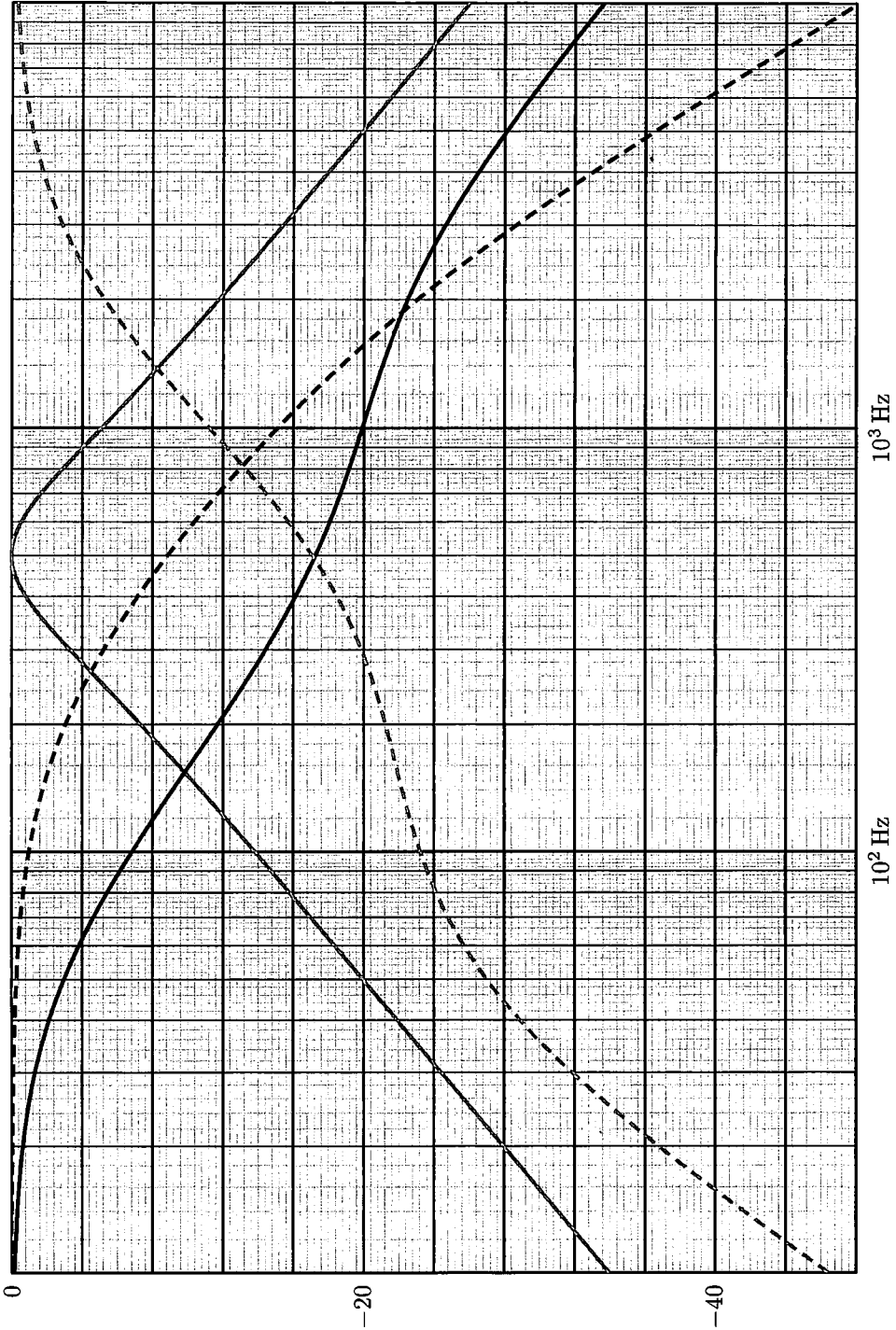


FIG. 8.25. Gain en décibels de quelques filtres.

Lors de la lecture du disque, le signal électrique est envoyé dans un filtre dont la fonction de transfert (normalisée) est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j\tau_1\omega}{(1 + j\tau_2\omega)(1 + j\tau_3\omega)}$$

1. Le diagramme de Bode en gain du filtre RIAA est représenté sur la figure 8.25 page 225, parmi d'autres gains. Déterminer, en le justifiant, laquelle des quatre courbes correspond au gain du filtre étudié.
2. Les trois constantes de temps intervenant dans la fonction de transfert sont $75 \mu\text{s}$, $318 \mu\text{s}$ et $3180 \mu\text{s}$. On suppose $\tau_2 > \tau_3$. Attribuer sans calcul, mais en le justifiant, chaque valeur aux constantes de temps τ_1 , τ_2 et τ_3 .
3. Mesurer sur la figure le gain à la fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, justifier le résultat obtenu.
4. À quelle fréquence le gain normalisé est-il égal à -32 dB ?

3. Fonction de transfert et équation différentielle (solution page 697)

On considère le circuit représenté à la figure 8.26.

Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{u}/\underline{e}$.

En déduire l'équation différentielle qui lie $u(t)$ et $e(t)$.

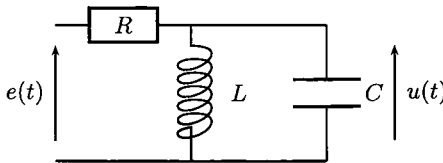


FIG. 8.26. Filtre *RLC*.

4. Circuit *RL* (solution page 697)

On étudie le circuit de la figure 8.27, où u_e représente un générateur idéal de tension sinusoïdale.

1. Quelle est (sans calculs) la nature de ce filtre ?
2. Calculer sa fonction de transfert en sortie ouverte, et l'écrire sous forme canonique. Donner l'ordre du filtre. Quelle est sa pulsation de coupure à -3 dB ?
3. Tracer son diagramme de Bode asymptotique, puis le diagramme réel.

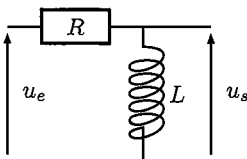


FIG. 8.27. Filtre *RL*.

5. Entrée d'un oscilloscope (solution page 698)

L'impédance d'entrée d'un oscilloscope est caractérisée par un groupement parallèle R_0 , C_0 . On souhaite étudier un filtre RC série (voir figure 8.28). La tension de sortie u_s du filtre est envoyée à l'entrée de l'oscilloscope. On donne $R = 1 \text{ k}\Omega$ ou $100 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$, $R_0 = 1 \text{ M}\Omega$ et $C_0 = 30 \text{ pF}$.

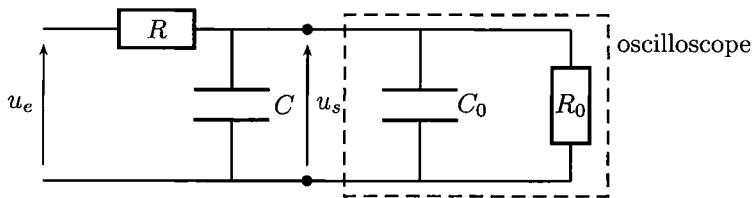


FIG. 8.28. Étude d'un filtre RC avec un oscilloscope.

1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$ du filtre RC seul. Quelle est sa fréquence de coupure ?
2. Donner la fonction de transfert de l'ensemble RC et oscilloscope. Comment est modifiée la fréquence de coupure du fait de la présence de l'oscilloscope ?

6. Gabarit d'un filtre passe-bande (solution page 698)

On considère un filtre passe-bande RLC dont la fonction de transfert a été établie à la section III.4.2 page 216,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{j\frac{x}{Q}H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}},$$

où l'on a introduit la pulsation propre du circuit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, le facteur de qualité $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

Un cahier des charges impose pour ce filtre qu'il laisse passer avec une atténuation inférieure à 4 dB toutes les fréquences dans une bande comprise entre 300 Hz et 800 Hz, et rejette avec une atténuation supérieure à 18 dB toutes les fréquences inférieures à 50 Hz ou supérieures à 5 kHz.

1. Tracer le gabarit¹⁴ du filtre sur la figure 8.25 page 225.
2. Vérifier que le gain dessiné en gris sur la figure respecte le cahier des charges. Estimer la pente des asymptotes ; est-ce compatible avec le filtre passe-bande d'ordre deux étudié ?
Quelle est la fréquence centrale de ce filtre ? On impose $L = 0,10$ H, en déduire la valeur de C .
3. Estimer à l'aide du graphe la valeur du facteur de qualité Q . En déduire la valeur de la résistance.

7. Effet d'un filtre passe-bas sur un signal créneau (solution page 699)

On considère un filtre RC passe-bas du premier ordre (voir section III.1 page 210, on rappelle que la pulsation de coupure de ce filtre est $\omega_c = 1/(RC)$), alimenté par un signal créneau symétrique de fréquence $f = 1,6$ kHz.

1. Le filtre est constitué d'une résistance $R = 1,0$ k Ω et d'un condensateur de capacité $C = 1,0$ nF ; quelle est l'allure du signal en sortie du filtre ?
2. On choisit maintenant $C = 1,0$ μ F ; quelle est l'allure du signal en sortie du filtre ?

14. Sur le modèle du gabarit proposé à droite sur la figure 8.10 page 208.

8. Effet d'un filtre passe-bande sur un signal

(solution page 700)

1. On considère un filtre passe-bande d'ordre deux de facteur de qualité $Q = 0,1$ alimenté par un signal triangulaire (en gris clair sur la figure 8.29). Le signal en sortie de ce filtre est représenté en noir pour un filtre dont la fréquence centrale est égale à celle du fondamental, et en gris foncé pour un filtre dont la fréquence centrale est 100 fois plus faible (agrandissement de ce dernier cas sur la figure de droite). Interpréter qualitativement l'allure de ces signaux.

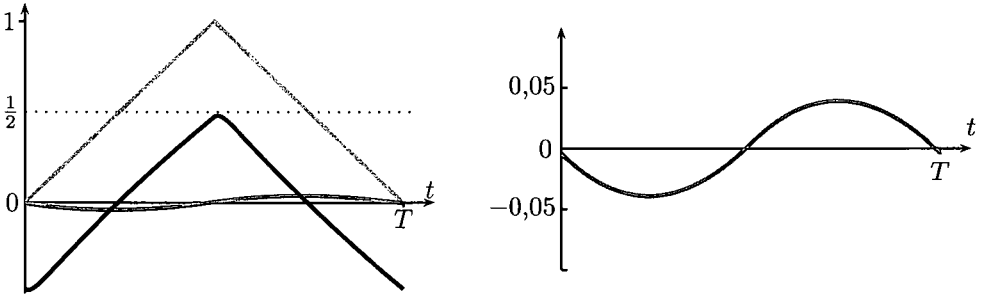


FIG. 8.29. Effet d'un filtre passe-bande de faible facteur de qualité ($Q = 0,1$) sur un signal triangulaire (en gris clair). En noir pour un filtre dont la fréquence centrale est égale à celle du fondamental; en gris pour un filtre dont la fréquence centrale est 100 fois plus faible. À droite, agrandissement de ce dernier cas.

2. On considère maintenant un filtre passe-bande d'ordre deux alimenté par un signal créneau (en gris clair sur la figure 8.30).

Sur la partie gauche de la figure 8.30, en noir, est représentée la sortie dans le cas où $Q = 100$ et où la fréquence du fondamental du créneau est égale au cinquième de la fréquence centrale du passe-bande. Interpréter qualitativement l'allure de la sortie.

Sur la partie droite, la sortie est représentée dans le cas d'un filtre de facteur de qualité $Q = 10$, dont la fréquence centrale est deux fois plus faible que la fréquence du fondamental du créneau. Interpréter qualitativement l'allure de la sortie.

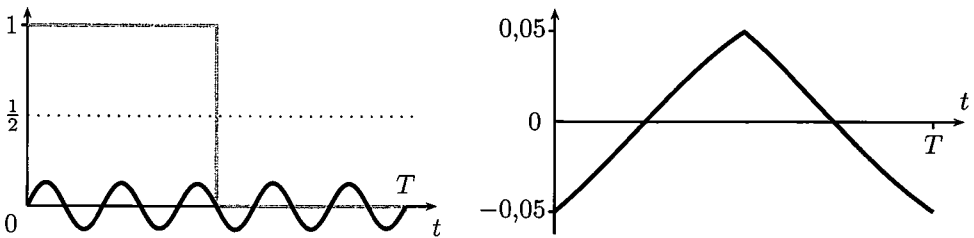


FIG. 8.30. Effet d'un filtre passe-bande de facteur de qualité élevé sur un signal créneau (en gris). À gauche, en noir, pour un filtre de facteur de qualité $Q = 100$ dont la fréquence centrale est égale à cinq fois celle du fondamental; à droite pour un filtre de facteur de qualité $Q = 10$ dont la fréquence centrale est deux fois plus faible que la fréquence du fondamental.

Formulaire sur les signaux

Ressort élastique

Loi de Hooke (raideur k , longueur à vide ℓ_0) :

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u} \text{ où } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\ell}$$

Énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Équations différentielles

Forme canonique de l'oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Pulsation propre d'un système masse-ressort :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Onde progressive

Onde progressive monodimensionnelle de célérité c se propageant sur un axe (O, \vec{u}_x) dans le sens des x croissants :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Onde progressive monodimensionnelle sinusoïdale :

$$s(x, t) = Y_m \cos(\omega t - kx + \phi)$$

	Période	Fréquence	Pulsation
Temporelle	$T = \lambda/c$	$f = 1/T$	$\omega = 2\pi f$
Spatiale	$\lambda = cT$	$\kappa = 1/\lambda$	$k = 2\pi\kappa$

Onde stationnaire

Amplitude :

$$s(M,t) = s(x,t) = f(x)g(t)$$

Distance entre deux nœuds ou deux ventres de vibration :

$$x_{p+1}^{n,v} - x_p^{n,v} = \frac{\lambda}{2}$$

Interférences

Ordre d'interférence pour une différence de chemin optique δ :

$$p = \frac{\delta}{\lambda}$$

Interfrange sur un écran situé à une distance D de deux fentes séparées de a :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

Lois de Snell-Descartes

Pour la réflexion :

1. le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence ;
2. l'angle de réflexion r est l'opposé de l'angle d'incidence i , soit $r = -i$.

Pour la réfraction :

1. le rayon réfracté est dans le plan d'incidence ;
2. l'angle d'incidence i_1 et l'angle de réfraction i_2 vérifient $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Lentilles minces

Approximation de Gauss (rayons paraxiaux) :

les angles entre les rayons et l'axe optique sont faibles, et le rayon coupe la lentille au voisinage du centre.

Foyer principal image F' :

le conjugué d'un objet ponctuel situé à l'infini sur l'axe optique.

Foyer principal objet F :

le point de l'axe optique dont le conjugué est à l'infini.

Distances focales image f' et objet f :

$$f = \overline{OF} \quad ; \quad f' = \overline{OF'} \quad ; \quad f' = -f$$

Vergence d'une lentille mince dans l'air ($n_{\text{air}} = 1$) :

$$V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

Relations de conjugaison

Avec origine au centre de la lentille (Descartes) :

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'}$$

$$\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{OA'}{OA}$$

Avec origines aux foyers (Newton) :

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = ff'$$

$$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Relation de Planck-Einstein

Énergie du photon :

$$\mathcal{E} = h\nu = pc$$

Constante de Planck :

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Relation de de Broglie

Une particule d'impulsion \vec{p} possède des propriétés ondulatoires caractérisées par une longueur d'onde λ .

$$\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$$

Amplitude de probabilité

La probabilité \mathcal{P} qu'un quanton arrive en un point est proportionnelle au module au carré de l'amplitude de probabilité en ce point.

$$\mathcal{P} \propto |a|^2$$

Si deux chemins indiscernables conduisent en un point, les amplitudes de probabilité s'additionnent, les interférences sont maximales.

$$\mathcal{P} \propto |a_1 + a_2|^2$$

Si deux chemins discernables conduisent en un point, les probabilités s'additionnent, les interférences sont minimales.

$$\mathcal{P} \propto |a_1|^2 + |a_2|^2$$

Principe d'indétermination de Heisenberg

Lors d'une série de mesure de la position et de l'impulsion d'un quanton, les produits des écarts types des résultats de mesures sont minorés.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Énergie du point zéro - État fondamental

Un oscillateur harmonique quantique possède une énergie moyenne minimale non nulle.

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle \geq \mathcal{E}_{m,0} = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

Un quanton confiné dans un puits de potentiel infini de largeur L possède une énergie moyenne minimale non nulle.

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2$$

Un quanton confiné dans un puits de potentiel infini de largeur L possède une énergie et une longueur d'onde de de Broglie quantifiées.

$$\left. \begin{aligned} (n+1) \frac{\lambda_n}{2} &= L \\ \mathcal{E}_n &= (n+1)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \end{aligned} \right] n \in \mathbb{N}$$

Intensité et tension

Intensité algébrique i du courant électrique :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La tension U_{AB} entre deux points A et B est la différence des potentiels :

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

Lois de Kirchhoff

En un nœud N où arrivent p branches parcourues par des intensités I_k , avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant est orienté vers N , et $\varepsilon_k = -1$ sinon :

$$\sum_{k=1}^p \varepsilon_k I_k = 0$$

Le long d'une maille orientée comportant p dipôles, avec U_k la tension aux bornes du dipôle k , $\varepsilon_k = +1$ si U_k est dans le sens positif, et $\varepsilon_k = -1$ sinon :

$$\sum_{k=1}^p \varepsilon_k U_k = 0$$

Puissance reçue

Puissance \mathcal{P}_r reçue algébriquement par un dipôle AB en convention récepteur :

$$\mathcal{P}_r = U_{AB}I_{AB}$$

Résistance

Loi d'Ohm (signe positif en convention récepteur) :

$$U = \pm Ri$$

Puissance reçue (dissipation par effet Joule) :

$$\mathcal{P}_r = Ri^2 = \frac{U^2}{R} > 0$$

Condensateur parfait

Relation charge-tension :

$$q = CU$$

Le lien entre l'intensité et la tension dépend de la convention choisie (signe positif en convention récepteur) :

$$i = \pm C \frac{dU}{dt}$$

Énergie emmagasinée par le condensateur :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$$

Bobine idéale

Le lien entre l'intensité et la tension dépend de la convention choisie (signe positif en convention récepteur) :

$$U = \pm L \frac{di}{dt}$$

Énergie emmagasinée par la bobine :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$$

Association de résistances

Résistance équivalente R_{eq} à N résistances R_k (k entre 1 et N) en série :

$$R_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N R_k$$

Conductance équivalente G_{eq} à N résistances R_k ($G_k = 1/R_k$, k entre 1 et N) en parallèle :

$$G_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N G_k$$

Diviseurs de tension et de courant

Pour deux résistances R_1 et R_2 en série, soumises à une tension U , la tension U_1 (dans le sens de U) aux bornes de R_1 est :

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Pour deux résistances R_1 et R_2 en parallèle, sur lesquelles arrive un courant d'intensité i , l'intensité i_1 (dans le sens de i) dans R_1 est :

$$i_1 = i \frac{G_1}{G_1 + G_2} = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Circuit soumis à un échelon de tension

Constante de temps (circuit RC) :

$$\tau = RC$$

Constante de temps (circuit RL) :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Circuit RLC série soumis à un échelon de tension

Pulsation propre ω_0 :

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Taux d'amortissement ξ :

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

Équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$$

Résistance critique :

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Régimes libres d'un circuit *RLC* série

Régime pseudo-périodique

($R < R_c$, $\xi < 1$, $Q > 1/2$)

avec pseudo-pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$:

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)]$$

Régime critique

($R = R_c$, $\xi = 1$, $Q = 1/2$) :

$$u_c(t) = (\alpha + \beta t) \exp(-\xi\omega_0 t)$$

Régime apériodique

($R > R_c$, $\lambda > \omega_0$, $Q > 1/2$)

$r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$:

$$u_c(t) = \alpha_+ \exp(r_+ t) + \alpha_- \exp(r_- t)$$

Durée du régime transitoire

(durée la plus faible pour le régime critique, $Q = 1/2$) :

$$\begin{array}{ll} \frac{2Q}{\omega_0} & \text{si } Q \gtrsim \frac{1}{2} \\ \frac{1}{Q\omega_0} & \text{si } Q \ll \frac{1}{2} \end{array}$$

Régime pseudo-périodique d'un circuit *RLC* série

Pseudo-période :

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > T_0$$

Régime très faiblement amorti ($Q \gg 1$), avec \mathcal{E} l'énergie totale stockée dans le circuit, et $\Delta\mathcal{E}$ la variation de \mathcal{E} sur une pseudo-période :

$$\left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

Valeur moyenne

Valeur moyenne d'un signal $f(t)$ de période T (t_0 instant quelconque) :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Valeur efficace

Valeur efficace d'un signal $f(t)$ de période T (t_0 instant quelconque) :

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt}$$

Signal sinusoïdal

Signal sinusoïdal $x(t)$ d'amplitude X_m , de pulsation ω et de phase à l'origine φ :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Lien entre pulsation ω , période T et fréquence f :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Lien entre amplitude et valeur efficace X_{eff} :

$$X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones

Déphasage $\Delta\varphi \in [-\pi; \pi]$ d'un signal $x_2(t) = X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ par rapport à un signal $x_1(t) = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ (Δt est le décalage temporel entre les deux signaux) :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \Delta t = \frac{2\pi \Delta t}{T}$$

Représentation complexe

Représentation complexe d'un signal sinusoïdal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ (\underline{X}_m est l'amplitude complexe) :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

Dérivée $\frac{dx(t)}{dt}$ d'un signal sinusoïdal $x(t)$ en représentation complexe : :

$$j\omega \underline{x}$$

En représentation complexe, primitive de valeur moyenne nulle $\int x(t) dt$ d'un signal sinusoïdal $x(t)$:

$$\frac{1}{j\omega} \underline{x}$$

En représentation complexe, valeur moyenne du produit de deux signaux sinusoïdaux synchrones $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} \langle x_1(t)x_2(t) \rangle &= \Re\left(\frac{1}{2} \underline{x}_1 \underline{x}_2^*\right) \\ &= \frac{U_{1m}U_{2m}}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Circuit *RLC* série

Pulsation propre :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Taux d'amortissement :

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Grandeurs adimensionnées

Facteur de qualité :

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

Pulsation réduite :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Résonance en tension d'un circuit RLC série

Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur $u_c(t)$:

$$\underline{U}_m(x) = \frac{E}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Pulsation réduite de résonance :

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1$$

Très faible amortissement ($Q \gg 1$) :

$$x_r \simeq 1 \quad ; \quad |\underline{U}_m(x_r)| \simeq QE \gg E$$

Phase φ (réponse en retard) :

$$\varphi \in [-\pi; 0]$$

Résonance en intensité d'un circuit RLC série

Amplitude complexe de l'intensité :

$$\underline{I}_m = \frac{E}{R} \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

Pulsation réduite de résonance :

$$x_r = 1$$

Largeur Δx de la courbe de résonance :

$$\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Phase φ à la résonance :

$$\varphi = 0$$

Impédance

Impédance \underline{Z} d'un dipôle passif linéaire, dont la tension complexe à ses bornes est \underline{u} , et l'intensité complexe \underline{i} :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$$

Une impédance \underline{Z} peut s'écrire sous la forme d'une résistance R et d'une réactance X :

$$\underline{Z} = R + jX$$

Impédance d'une résistance en convention récepteur :

$$\underline{Z}_R = R$$

Impédance d'un condensateur parfait en convention récepteur :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Impédance d'une bobine idéale en convention récepteur :

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

Association d'impédances

Impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$ à N impédances \underline{Z}_k (k entre 1 et N) en série :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$$

Admittance équivalente $\underline{Y}_{\text{eq}}$ à N impédances $\underline{Z}_k = 1/\underline{Y}_k$ (k entre 1 et N) en parallèle :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$$

Diviseurs de tension et de courant

Pour deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 en série, soumises à une tension complexe \underline{u} , la tension \underline{u}_1 (dans le sens de \underline{u}) aux bornes de \underline{Z}_1 est :

$$\underline{u}_1 = \underline{u} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Pour deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 en parallèle, sur lesquelles arrive un courant d'intensité complexe \underline{i} , l'intensité \underline{i}_1 (dans le sens de \underline{i}) dans \underline{Z}_1 est :

$$\underline{i}_1 = \underline{i} \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \underline{i} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Puissance instantanée reçue

En convention récepteur, la puissance (algébrique) instantanée reçue par un dipôle soumis à une tension $u(t)$ et parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ est :

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$$

En convention récepteur, la puissance moyenne reçue (U_e tension efficace, I_e intensité efficace, et φ déphasage du courant par rapport à la tension) est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = U_e I_e \cos \varphi$$

Résistance :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = RI_e^2 = \frac{U_e^2}{R}$$

Condensateur et bobine parfaits :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = 0$$

Impédance $\underline{Z} = R + jX$:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = RI_e^2 = \frac{U_e^2}{R} \geq 0$$

Fonction de transfert

En notant \underline{U}_e et \underline{U}_s les amplitudes complexes associées respectivement aux tensions d'entrée et de sortie du quadripôle, la fonction de transfert est :

$$\underline{\mathcal{H}}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$$

Gain de la fonction de transfert :

$$G(\omega) = |\underline{\mathcal{H}}(j\omega)|$$

Gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log G(\omega) = 20 \log |\underline{\mathcal{H}}(j\omega)|$$

Pulsation de coupure - Bande passante

Pulsation(s) de coupure ω_c
(G_{max} est la valeur maximale du gain G) :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

La bande passante est l'intervalle des pulsations telles que :

$$G(\omega) \geq G(\omega_c)$$

Filtres linéaires d'ordre un

Filtre passe-bas (H_0 gain statique, x pulsation réduite) :

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$$

Filtre passe-haut (H_0 gain à haute fréquence, x pulsation réduite) :

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = H_0 \frac{jx}{1 + jx} = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{jx}}$$

Filtres linéaires d'ordre deux

Filtre passe-bas (H_0 gain statique, Q facteur de qualité) :

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Filtre passe-haut (H_0 gain à haute fréquence, Q facteur de qualité) :

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = \frac{-x^2 H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Filtre passe-bande (H_0 gain maximum, Q facteur de qualité) :

$$\underline{\mathcal{H}}(jx) = \frac{j\frac{x}{Q} H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Bande passante réduite Δx pour un filtre passe-bande :

$$\Delta x = \frac{1}{Q}$$

Deuxième partie

MÉCANIQUE

FONDÉE sous sa forme moderne aux XVI^e et XVII^e siècles par l'Italien Galilée et l'Anglais Newton, la mécanique est la branche de la physique qui étudie et quantifie le mouvement, dans l'espace et au cours du temps, des objets matériels, et propose des descriptions des causes de ces mouvements.

Le programme de première année commence par l'étude du mouvement des *points matériels*, c'est-à-dire des systèmes dont on peut négliger l'extension dans l'espace. Un tel modèle est évidemment raisonnable pour étudier des *particules* de petite dimension (petits objets macroscopiques, ou bien particules élémentaires), mais aussi lorsqu'on ne s'intéresse qu'au *mouvement d'ensemble* d'un objet quasiment rigide (une *planète*, par exemple), et pas à ses mouvements propres (révolution de la planète autour de son axe) ou à ses déformations.

Cette étude est ensuite complétée par l'analyse du mouvement de rotation d'un solide indéformable (système rigide idéalisé) autour d'un axe fixe.

Les lois de la mécanique (lois de la quantité de mouvement, du moment cinétique, de l'énergie cinétique) seront mises en application sur des exemples simples afin de faire ressortir les principales idées physiques sans avoir recours à des calculs complexes.

Le formalisme mathématique ne doit pas être la priorité dans un problème de mécanique. Cependant, la mise en place d'une étude nécessite de bien *modéliser* le dispositif étudié. Pour être efficace, il faut apporter un soin particulier à l'algébrisation des grandeurs et bien manipuler les vecteurs.

Chapitre 9

CINÉMATIQUE DU POINT ET DU SOLIDE INDÉFORMABLE

LA CINÉMATIQUE donne les outils mathématiques de description des *mouvements*, indépendamment de leurs causes éventuelles. Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la description, par un observateur, du mouvement d'un mobile. Un tel mouvement est un déplacement *dans l'espace et au cours du temps*. L'étude de la cinématique impose donc une étude préalable des notions de *repérage géométrique* d'une position dans l'espace et de *mesure des instants*.

I. Mouvement d'un point dans un référentiel

L'étude d'un problème de cinématique, comme beaucoup de problèmes de la physique, est subordonnée à la définition de corps de référence rigides, relativement auxquels les mouvements peuvent être étudiés, et d'horloges marquant l'écoulement du temps ; l'ensemble d'un corps de référence rigide et d'une horloge forme un *référentiel*.

Définition 9.1. *Référentiel*

Un référentiel (\mathcal{R}) est défini par la donnée d'un point O , l'origine, et d'une base \mathcal{R} formée d'autant de vecteurs que le problème en nécessite, soit $(\mathcal{R}) = (O, \mathcal{R})$. En mécanique classique, le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels.

Aucun problème de cinématique ou de mécanique ne peut être traité sans préciser au préalable le référentiel choisi.

I.1. Instant d'un événement

L'étude du mouvement d'un mobile M exige un repérage temporel des événements constitués par le passage du mobile en plusieurs lieux successifs de l'espace. L'écoulement du temps est repéré par référence à une *horloge*. Une horloge peut être n'importe quel système physique au comportement périodique ; sa période définit une échelle de temps.

Il suffit de disposer d'un procédé de *mesure des durées* et de l'unité associée pour pouvoir repérer un instant t par comparaison aux battements d'une horloge, au prix du choix préalable d'un instant origine. L'unité de mesure des durées dans le système international est la *seconde* (symbole s).

Par exemple, notre calendrier est basé sur le mouvement de la Terre autour du Soleil et le calendrier musulman sur le mouvement de la Lune autour de la Terre : la Lune fait un tour complet en 29 j 12 h 44 min environ. Actuellement la définition de la seconde n'est plus basée sur les phénomènes astronomiques, mais fait référence à la vitesse de la lumière. Il en résulte des horloges d'une très grande stabilité. Le « record » de

précision obtenu à ce jour est celui des horloges atomiques de l'équipe de Claude Cohen-Tannoudji¹ qui ne dérivent que d'une seconde en 30 millions d'années!

I.2. Repérage d'un point

Dans toute la suite, le point mobile sera noté M . L'objectif est de le situer géométriquement par rapport à un solide de référence *indéformable*, supposé *immobile* et lié à l'observateur (voir figure 9.1).

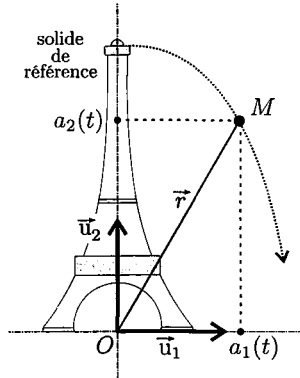


FIG. 9.1. Exemple de référence.

Pour cela on utilise un *système de coordonnées* : si l'on étudie par exemple le mouvement d'un mobile dans un plan, à l'instant t , ce système de coordonnées est une paramétrisation des points du référentiel au moyen de deux nombres réels $(a_1(t), a_2(t))$. Pour un référentiel donné, il existe une infinité de systèmes de coordonnées possibles. Les valeurs des coordonnées dépendent d'une origine O et de la base vectorielle (\vec{u}_1, \vec{u}_2) dans laquelle on cherche à exprimer la position du point mobile M , qui est donc défini par le *vecteur position* $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2$. Si on dispose d'un système de mesure des longueurs, on repère le point M par ses deux coordonnées a_1 et a_2 , projections du *vecteur position* \vec{r} sur chacun des vecteurs de base \vec{u}_1 et \vec{u}_2 que l'on choisit généralement *unitaires*.

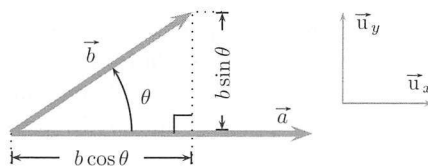
On rappelle que dans le système international, l'unité de mesure des longueurs (a_1 ou a_2) est le *mètre* dont le symbole est m.

Si \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthonormés et fixes, on parle de base et de coordonnées cartésiennes. On utilisera la notation (\vec{u}_x, \vec{u}_y) pour désigner la base cartésienne du plan. Dans ce contexte la notion de produit scalaire permet d'obtenir facilement les coordonnées en reliant les longueurs aux angles.

1. Claude Cohen-Tannoudji est né en 1933 à Constantine. Après 4 années d'études à l'École normale supérieure à Paris, il passe l'agrégation de physique puis devient docteur d'État en 1962, avec une thèse portant sur la théorie du pompage optique. En 1973, il est élu au Collège de France puis devient membre de l'Académie des sciences en 1981. Il reçoit de nombreux prix tout au long de sa carrière, en particulier la médaille d'or du CNRS en 1996. En 1997, il partage le prix Nobel avec Steven Chu et William D. Phillips pour le développement de méthodes permettant de refroidir et piéger des atomes avec des faisceaux laser.

Rappel Produit scalaire

Soit deux vecteurs quelconques \vec{a} et \vec{b} , de longueurs $\|\vec{a}\| = a$ et $\|\vec{b}\| = b$, tels que $(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$.



Dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) utilisée, $\vec{a} = a\vec{u}_x$ et $\vec{b} = b(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y)$, ainsi $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$. Le vecteur $b \cos\theta\vec{u}_x$ représente la projection du vecteur \vec{b} sur l'axe dirigé par \vec{u}_x .

On retiendra le lien entre produit scalaire et cosinus d'angle

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a b}.$$

Les deux vecteurs orthonormés \vec{u}_x et \vec{u}_y forment une base du plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ qui divise l'espace tridimensionnel en deux parties : la partie \mathcal{H} située au-dessus du plan et la partie \mathcal{B} située en dessous. Afin de repérer le point M dans l'espace tout entier, il est nécessaire de choisir un troisième vecteur hors du plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Pour préserver la simplicité d'utilisation du produit scalaire, il faut que ce vecteur soit unitaire et orthogonal à \vec{u}_x et \vec{u}_y . Il ne reste alors que deux possibilités pour ce vecteur : l'une dans \mathcal{H} , l'autre dans \mathcal{B} . La base cartésienne de l'espace à trois dimensions correspond au choix tel que $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit *directe* : si le pouce de la main droite pointe dans la direction et le sens de \vec{u}_x , et l'index dans la direction et le sens de \vec{u}_y , alors le majeur indique le sens du troisième vecteur \vec{u}_z . Par ce moyen, nous avons également orienté le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$; sur la figure 9.2, l'angle θ est défini dans le sens direct et il sera positif, contrairement à l'angle φ qui sera négatif.

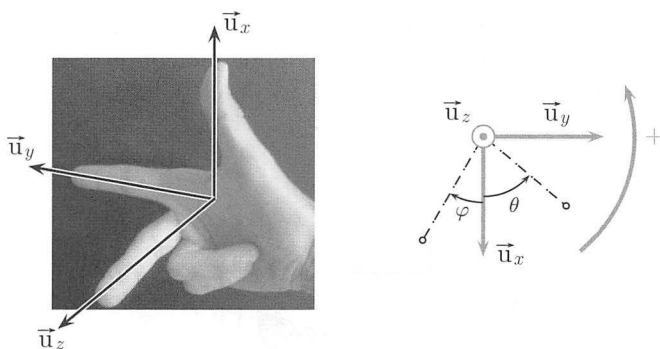


FIG. 9.2. Règle de la main droite et orientation.

I.3. Lois horaires et trajectoire

Dans le cas général d'un mouvement dans l'espace tridimensionnel, les *lois horaires* du mouvement d'un point mobile M relativement au référentiel (\mathcal{R}) correspondent à

la donnée des trois coordonnées $a_1(t)$, $a_2(t)$ et $a_3(t)$ du vecteur position $\vec{r}_M(t)$ dans la base associée à (\mathcal{R}) . Ces coordonnées sont généralement des fonctions du temps. Si on peut éliminer, explicitement ou implicitement, le temps entre les lois horaires, l'équation qui en résulte, de la forme générale $f(a_1, a_2, a_3) = 0$, porte le nom d'*équation de trajectoire* du point M ; elle définit une certaine courbe (\mathcal{T}) , qui est, en totalité ou en partie, décrite par le point M du point de vue d'un observateur fixe dans (\mathcal{R}) .

Définition 9.2. Trajectoire

La trajectoire (\mathcal{T}) du point mobile M dans son mouvement relativement au référentiel (\mathcal{R}) est le lieu des positions, relatives à (\mathcal{R}) , successivement parcourues par M lors de l'écoulement du temps.

I.4. Relativité du mouvement

Il est fondamental de bien comprendre que le mouvement d'un mobile, repéré par ses coordonnées dans un référentiel, dépend du choix de ce dernier. On dit qu'il est relatif au référentiel et on parle donc de relativité. L'exemple d'un bateau en mouvement par rapport à un phare et dans lequel on laisse tomber un objet en chute libre depuis le haut de son mât est ici très instructif. On suppose que le mouvement de M s'effectue dans un plan car le bateau se déplace en ligne droite sur une mer calme. Le référentiel $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est celui du phare et $(\mathcal{R}') = (O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est celui du bateau. Une observation triviale de l'évolution du bateau (voir figure 9.3) permet de dresser le tableau suivant :

Instant considéré	t_1	t_2	t_3
Coordonnées de M dans (\mathcal{R})	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
Coordonnées de M dans (\mathcal{R}')	$(0, y_1)$	$(0, y_2)$	$(0, y_3)$

Il est clair que ni les trajectoires (droite verticale dans (\mathcal{R}') et parabole dans (\mathcal{R}) si la vitesse du bateau est constante, voir section III.2 page 260), ni les coordonnées ne sont identiques dans les deux référentiels, alors que l'on utilise pourtant dans cet exemple la même base !

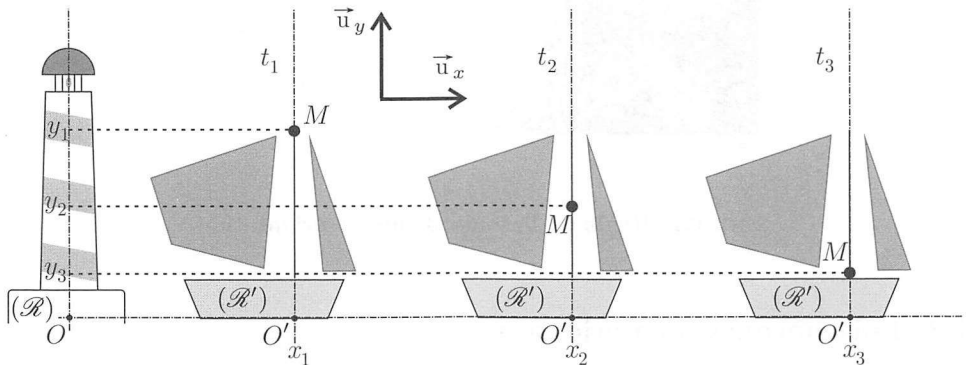


FIG. 9.3. Chute d'un corps dans un référentiel mobile.

Attention Choix du référentiel

Dans un problème de mécanique, il est fondamental de préciser le choix du référentiel effectué. Ce choix dépend des symétries du problème ou des quantités que l'on cherche à déterminer. La valeur des grandeurs physiques dépend généralement du choix de ce référentiel.

Au début du xx^e siècle, Poincaré, Einstein et Minkowski comprirent que cette relativité devait être étendue à l'écoulement du temps dans les différents référentiels. Ce fut la révolution de la relativité restreinte.

I.5. Repérages classiques - Approche constructive du vecteur vitesse

Il existe une infinité de systèmes de coordonnées, chacun attaché à une base particulière. Dans le cas tridimensionnel, nous en étudierons et utiliserons principalement trois, chacun ayant un intérêt selon le type de mouvement considéré.

- ▶ Un système ne possédant aucune symétrie particulière sera généralement décrit par ses coordonnées cartésiennes relatives à la base notée $\mathcal{K} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
- ▶ Un système possédant une symétrie autour d'un axe dirigé par le vecteur \vec{u}_z pourra être avantageusement décrit par ses coordonnées dans la base locale cylindro-polaire $\mathcal{C} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- ▶ Un système possédant une symétrie centrale pourra quant à lui être décrit dans la base locale sphérique $\mathcal{S} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$.

La grandeur physique indispensable à la description du mouvement est le vecteur vitesse instantanée. Une première définition intuitive consiste à dire que la vitesse instantanée d'un point M dans un référentiel (\mathcal{R}) est le rapport de la variation de position de M entre les instants t et $t + dt$ par l'intervalle de temps dt supposé infinitésimal. La variation de position est généralement notée $d\vec{r}$, il s'agit d'un vecteur dont l'expression est relative à un référentiel; il en va donc de même pour la vitesse qui ne peut être exprimée qu'une fois le référentiel précisé. La vitesse du point M dans le référentiel (\mathcal{R}) sera notée $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$. Une définition plus précise du vecteur vitesse sera proposée à la section II.2.

Nous allons à présent spécifier les trois repérages fondamentaux, puis déterminer dans chaque cas la variation infinitésimale de position pour en déduire l'expression correspondante de la vitesse.

I.5.1. Repérage cartésien

Le solide de référence étant choisi, on lui rattache un système d'axes orthogonaux (O, \vec{u}_x) , (O, \vec{u}_y) et (O, \vec{u}_z) . On note \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z les vecteurs unitaires orientant ces trois axes, qui sont donc fixes dans le référentiel (\mathcal{R}) et par rapport à l'observateur. Le vecteur caractérisant la position de M s'écrit alors $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Dans ce cas particulier, la base orthonormée directe notée $\mathcal{K} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est appelée base cartésienne et les composantes (x, y, z) de \vec{r} dans \mathcal{K} sont alors appelées *coordonnées cartésiennes* ou repérage cartésien.

Soit M' un point infiniment proche de M de coordonnées (x', y', z') dans \mathcal{K} . Le vecteur $d\vec{r} = \overline{MM'}$ est le vecteur *déplacement élémentaire* relatif au référentiel (\mathcal{R}) . Soit $d\vec{r} = \overline{MM'} = (x' - x)\vec{u}_x + (y' - y)\vec{u}_y + (z' - z)\vec{u}_z$ (voir figure 9.4).

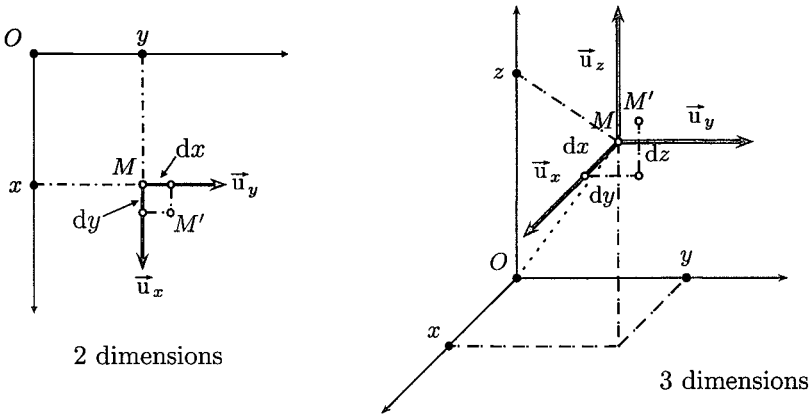


FIG. 9.4. Coordonnées et base cartésiennes.

On pose $x' = x + dx$, $y' = y + dy$ et $z' = z + dz$, où dx , dy et dz sont les déplacements élémentaires (infiniment petits) le long de chacun des axes du repère.

En coordonnées cartésiennes, le déplacement élémentaire relatif au référentiel (\mathcal{R}) s'écrit

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z. \quad (9.1)$$

En divisant par l'intervalle de temps dt correspondant à ce déplacement élémentaire, on obtient l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes dans (\mathcal{R})

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z. \quad (9.2)$$

Remarque On prendra garde à ne pas confondre différentielles et dérivées ; en effet, $d\vec{r}$ a pour module une *longueur* infinitésimale qui se mesure en mètres ; par contre, $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{(\mathcal{R})}$ a pour module une *vitesse* mesurée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. De même, on ne confondra pas dx et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

I.5.2. Repérage cylindro-polaire

Ce système s'utilise lorsqu'il existe une direction privilégiée : mouvements circulaires, mouvements dans le champ de gravitation, etc. Nous allons construire la base cylindro-polaire \mathcal{C} à partir d'une base cartésienne \mathcal{K} fixe dans le référentiel (\mathcal{R}) .

Soit m la projection orthogonale du point mobile M sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir figure 9.5), le vecteur \overline{mM} est donc colinéaire à \vec{u}_z . Le vecteur $\vec{r} = \overline{OM}$ se décompose en un mouvement d'ascension, selon (O, \vec{u}_z) , et un mouvement dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

$$\vec{r} = \overline{OM} = \overline{Om} + \overline{mM} = \overline{Om} + z\vec{u}_z$$

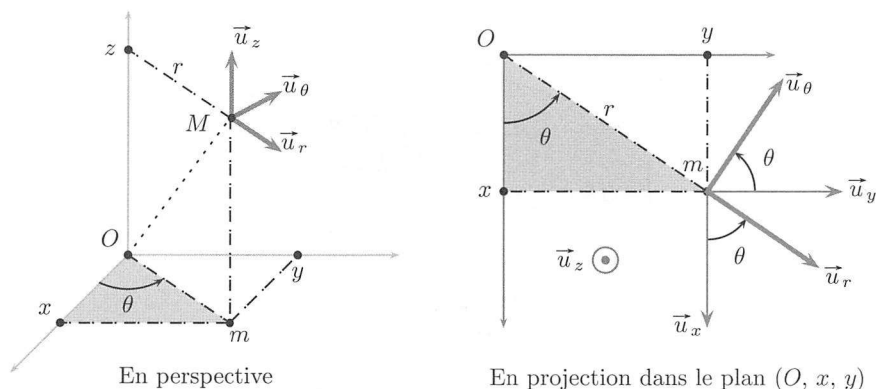


FIG. 9.5. Coordonnées et base locale cylindro-polaires.

Posons $Om = \|\vec{Om}\| = r$ et $\theta = (\vec{u}_x, \vec{Om})$. Le triangle rectangle grisé de la figure 9.5 permet de trouver facilement les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et cylindro-polaires.

$$\vec{Om} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \quad \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (9.3)$$

Attention**La valeur de θ tu vérifieras !**

Dans la relation $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, l'angle θ est obtenu modulo π ; il faut toujours vérifier la cohérence de sa valeur en évaluant le signe de $\cos \theta$ (resp. $\sin \theta$) qui doit être le même que celui de x (resp. y).

On note \vec{u}_r le vecteur unitaire qui reste colinéaire au vecteur \vec{Om} : il s'agit du *vecteur unitaire radial*. Dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ on définit ensuite le *vecteur orthoradial* \vec{u}_θ , perpendiculaire au vecteur \vec{u}_r et tel que la base cylindrique $\mathcal{C} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit directe. Les vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ peuvent être exprimés dans la base cartésienne (voir figure 9.5).

$$\vec{u}_r = +\cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y \quad (9.4)$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y \quad (9.5)$$

Le repérage d'un point M en coordonnées cylindriques est caractérisé par les trois paramètres r , θ et z . Dans la base cylindro-polaire $\mathcal{C} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, le vecteur position s'exprime alors comme

$$\vec{r} = \vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta).$$

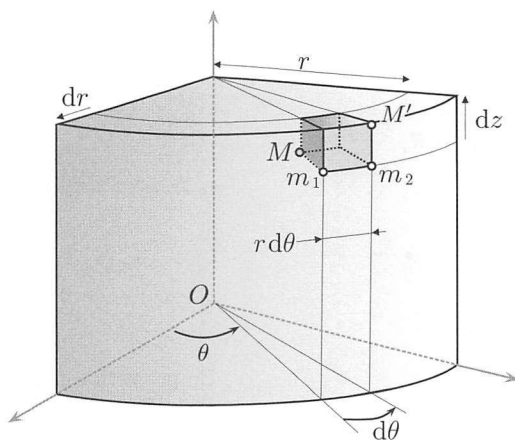


FIG. 9.6. Variation élémentaire de position en coordonnées cylindro-polaires.

Soit M' le point image de M lorsque l'on effectue les transformations élémentaires $r \rightarrow r + dr$, $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ et $z \rightarrow z + dz$. La variation $r \rightarrow r + dr$ envoie le point M sur le point m_1 de la figure 9.6, on a donc $\overline{Mm_1} = dr \vec{u}_r$. La variation $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ envoie m_1 sur m_2 . L'arc élémentaire m_1m_2 est identifié à un segment. Sa longueur $(r+dr)d\theta$ doit être considérée au premier ordre, ainsi $\overline{m_1m_2} = r d\theta \vec{u}_\theta$. Enfin, la variation $z \rightarrow z + dz$ permet d'atteindre depuis m_2 le point M' tel que $\overline{m_2M'} = dz \vec{u}_z$. On obtient donc finalement l'expression du vecteur $d\vec{r} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1m_2} + \overline{m_2M'}$ dans la base locale cylindro-polaire.

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \quad (9.6)$$

De la même manière qu'en coordonnées cartésiennes, nous obtenons l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindro-polaires en divisant cette variation de position par l'élément d'intervalle de temps correspondant, soit

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z. \quad (9.7)$$

L'expression (9.6) de la variation élémentaire du vecteur position, et par conséquent l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques, a été obtenue de façon « géométrique ». On peut aussi obtenir ces expressions en utilisant la notion de dérivée d'un vecteur par rapport à son angle polaire, qui est fondamentale en mécanique.

Les vecteurs \vec{u}_x et \vec{u}_y sont fixes, leurs variations et donc leurs dérivées sont nulles. Si l'on dérive les expressions (9.4) et (9.5) de \vec{u}_r et \vec{u}_θ par rapport à l'angle polaire θ , seules les fonctions trigonométriques vont avoir des dérivées non nulles; le calcul explicite donne alors

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} &= -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y = \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= -\cos(\theta) \vec{u}_x - \sin(\theta) \vec{u}_y = -\vec{u}_r. \end{aligned}$$

On observe donc que l'action de dérivation des vecteurs polaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ consiste simplement à les faire tourner d'un angle $+\frac{\pi}{2}$. Ce résultat se généralise à tous les vecteurs unitaires polaires.

Synthèse

Dérivées des vecteurs unitaires polaires

La dérivée par rapport à son angle d'un vecteur unitaire polaire est un vecteur unitaire tourné de $+\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r. \quad (9.8)$$

Ce nouvel outil permet alors de calculer directement la dérivée de $\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ par rapport à l'angle polaire θ . Il vient $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} + \frac{dz}{d\theta}\vec{u}_z$ et l'on a donc $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta + \frac{dz}{d\theta}\vec{u}_z$. En multipliant cette dernière expression par la variation d'angle $d\theta$ on retrouve l'expression (9.6) de la variation élémentaire $d\vec{r}$ du vecteur position. Nous retrouverons directement l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques par ce même type de calcul variationnel à la section II.2.

I.5.3. Repérage sphérique

Soit $\mathcal{K} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base cartésienne fixe dans le référentiel (\mathcal{R}) auquel est associé l'observateur. On étudie le mouvement du mobile M dont le vecteur position est $\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. On note K et H les projetés orthogonaux de M respectivement sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et sur l'axe vertical (O, \vec{u}_z) (voir figure 9.7).

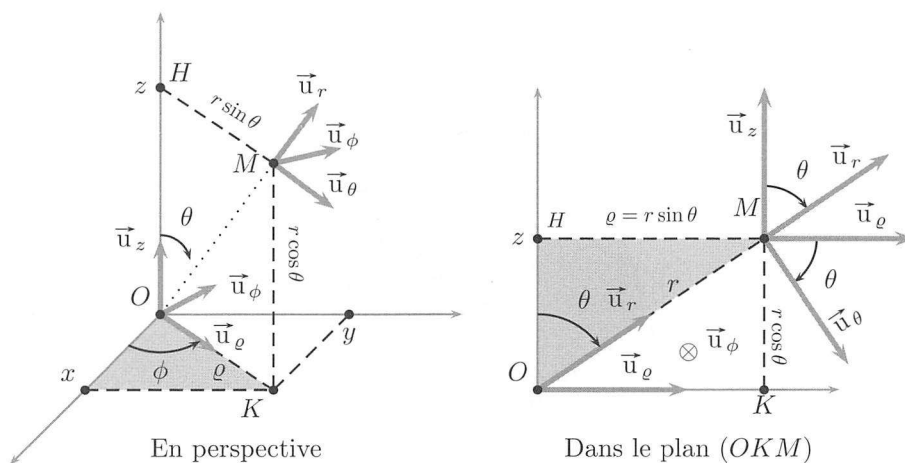


FIG. 9.7. Coordonnées et base locale sphériques.

Pour situer le point M , il suffit de connaître sa distance r à l'origine O ainsi que la direction de la droite reliant O à M . Cette droite sera parfaitement connue si on donne l'angle θ qu'elle fait avec l'axe vertical (O, \vec{u}_z) et l'angle ϕ entre le vecteur \vec{OK} et l'axe (O, \vec{u}_x) . La position du point M est alors définie par ses coordonnées sphériques que sont les trois paramètres r , θ et ϕ .

Notons \vec{u}_r le vecteur unitaire qui reste à chaque instant colinéaire au vecteur position \vec{r} , on a donc $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$; le vecteur \vec{u}_r est dit radial. Son expression est particulièrement simple, mais cette simplicité n'est qu'apparente car \vec{u}_r dépend des deux variables angulaires θ et ϕ .

À partir de \vec{u}_r nous allons maintenant compléter la base sphérique. Considérons le plan (O, \vec{OK}, \vec{OM}) qui est aussi le plan $(O, \vec{u}_z, \vec{u}_\rho)$. Le deuxième vecteur, noté \vec{u}_θ , est dans ce plan, perpendiculaire à \vec{u}_r et dans le sens positif indiqué par θ (voir figure 9.7). Le troisième vecteur unitaire est \vec{u}_ϕ , choisi tel que la base $\mathcal{S} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ soit directe.

Le repérage d'un point M en coordonnées sphériques est caractérisé par les trois paramètres r , θ et ϕ . Dans la base sphérique $\mathcal{S} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$, le vecteur position s'exprime alors comme

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta, \phi). \quad (9.9)$$

Attention

Vecteurs unitaires sphériques et polaires

- Il ne faut pas confondre $(\vec{u}_r)_{\text{cyl}}$ et $(\vec{u}_r)_{\text{sph}}$. En fait, $(\vec{u}_r)_{\text{cyl}}$ correspond à la projection orthogonale de $(\vec{u}_r)_{\text{sph}}$ sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Pour éviter toute confusion, dans le contexte sphérique, on écrira $(\vec{u}_r)_{\text{cyl}} = \vec{u}_\rho$.
- Le vecteur \vec{u}_ϕ correspond au vecteur orthoradial cylindrique que l'on avait noté \vec{u}_θ dans la base cylindro-polaire. Il ne faudra donc pas confondre $(\vec{u}_\theta)_{\text{cyl}}$ et $(\vec{u}_\theta)_{\text{sph}}$; en fait, $(\vec{u}_\theta)_{\text{cyl}} = (\vec{u}_\phi)_{\text{sph}}$.

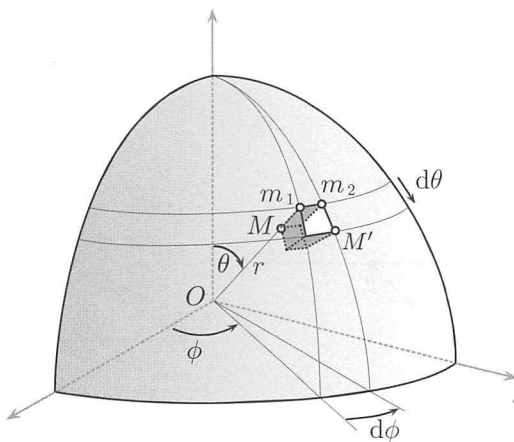


FIG. 9.8. Variation élémentaire de position en coordonnées sphériques.

Déterminons le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques. La transformation $r \rightarrow r + dr$ envoie, selon \vec{u}_r , le point M sur le point m_1 de la figure 9.8, ainsi $\vec{Mm}_1 = dr \vec{u}_r$. L'arc infinitésimal $m_1 m_2$ correspondant à la variation $\phi \rightarrow \phi + d\phi$ est assimilé à un segment, sa longueur $(r+dr) \sin(\theta) d\phi$ est exprimée au premier ordre dans la direction de \vec{u}_ϕ ; ainsi $\vec{m}_1 m_2 = r \sin(\theta) d\phi \vec{u}_\phi$. Enfin, l'arc infinitésimal $m_2 M'$ qui correspond à la variation $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ est assimilé à un segment de longueur $(r+dr) d\theta$. Il est exprimé au premier ordre dans la direction de \vec{u}_θ ; ainsi $\vec{m}_2 M' = r d\theta \vec{u}_\theta$. En écrivant $d\vec{r} = \vec{Mm}_1 + \vec{m}_1 m_2 + \vec{m}_2 M'$ dans la base locale sphérique, nous obtenons

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\phi \vec{u}_\phi. \quad (9.10)$$

En inspectant la figure 9.7, il est facile de relier les paramètres de l'expression de \vec{r} dans \mathcal{S} à ceux de l'expression de \vec{r} dans \mathcal{C} .

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{u}_r = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \\ \begin{cases} \rho &= r \sin(\theta) \\ z &= r \cos(\theta) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \tan(\theta) &= \frac{\rho}{z} \end{cases} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Finalement, en projetant le vecteur cylindro-polaire \vec{u}_ρ dans la base cartésienne, on obtient les relations permettant le passage de la base sphérique à la base cartésienne.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{u}_r = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \\ \begin{cases} x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan(\theta) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan(\phi) &= \frac{y}{x} \end{cases} \end{aligned} \quad (9.12)$$

II. Vecteurs vitesse et accélération

Dans la section précédente, nous avons construit la notion de vitesse comme un rapport de grandeurs infinitésimales : la variation élémentaire du vecteur position divisée par la durée correspondante. Il est maintenant temps de formaliser cette notion à travers l'outil mathématique correspondant à ce rapport : la dérivée. La vitesse et sa variation temporelle, appelée accélération, sont des vecteurs, il nous faut donc définir la notion de dérivée temporelle d'un vecteur.

II.1. Dérivation temporelle d'un vecteur

II.1.1. Généralités sur la dérivation

Dans le cours de mécanique, la dérivée temporelle d'une fonction $f(t)$ est notée indifféremment $\frac{df}{dt}$ ou \dot{f} . De même, nous noterons $\frac{d^2f}{dt^2}$ ou \ddot{f} la dérivée seconde (toujours par rapport à la variable t) de la fonction $f(t)$, et ainsi de suite en rajoutant un point par ordre de dérivation temporelle.

Une grandeur *constante* vérifie $\dot{f} = 0$ dans tous les référentiels (\mathcal{R}).

Attention

Vocabulaire des variables et constantes

On prendra garde à ne pas confondre les termes *constant* (pour une grandeur qui ne dépend pas explicitement du temps), *invariant* (pour une grandeur qui ne dépend pas du référentiel d'étude) et *uniforme* (pour une grandeur qui, à chaque instant, prend la même valeur en tout lieu de l'espace).

Une grandeur non constante est dite *variable*, une grandeur non invariante est dite *relative*.

La transposition de la notion de dérivée dans le contexte vectoriel se fait sans encombre. Lorsqu'un vecteur dépend d'un paramètre, sa dérivée par rapport à ce paramètre est le vecteur obtenu en calculant la limite du rapport de la variation du vecteur sur la variation du paramètre. En physique, ce paramètre est souvent le temps ; on a donc dans ce cas

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \delta t) - \vec{a}(t)}{\delta t}. \quad (9.13)$$

Cette définition permet de voir que la dérivée d'un vecteur est un vecteur. Pour calculer cette dérivée, on peut par exemple décomposer le vecteur dans une base quelconque et utiliser les règles habituelles de dérivation.

Méthode Dérivée d'un vecteur

Les formules usuelles de dérivées s'appliquent aussi aux vecteurs, en particulier :

- ▶ si le vecteur \vec{a} est constant, alors $\dot{\vec{a}} = \vec{0}$;
- ▶ la somme de deux vecteurs se dérive comme une somme de deux fonctions usuelles, $\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}}$;
- ▶ le produit d'un vecteur par une fonction se dérive comme un produit usuel de deux fonctions $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{a}) = \dot{f}\vec{a} + f\dot{\vec{a}}$;
- ▶ un produit scalaire se dérive comme un produit usuel $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$.

II.1.2. Cas d'une décomposition dans une base cartésienne

Supposons que les coordonnées cartésiennes d'un vecteur \vec{b} soient des fonctions du temps. Dans la base \mathcal{K} du référentiel fixe d'étude (\mathcal{R}), on écrira donc

$$\vec{b} = b_x(t) \vec{u}_x + b_y(t) \vec{u}_y + b_z(t) \vec{u}_z.$$

Dans cette expression, les vecteurs de base restent fixes, mais le vecteur varie au cours du temps. Pour un observateur lié à (\mathcal{R}), les règles de dérivation rappelées dans l'encadré « Méthode » permettent de voir que la dérivée de \vec{b} est un vecteur $\frac{d\vec{b}}{dt} = \dot{\vec{b}}$ dont les coordonnées cartésiennes sont les dérivées des coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{b} .

Dans un référentiel (\mathcal{R}) et pour une décomposition dans une base cartésienne,

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{(\mathcal{R})} = \frac{db_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{db_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{db_z}{dt} \vec{u}_z = \dot{b}_x \vec{u}_x + \dot{b}_y \vec{u}_y + \dot{b}_z \vec{u}_z.$$

Il faudra toujours indiquer clairement le référentiel dans lequel on effectue la dérivation, sauf s'il n'y a aucune ambiguïté. En effet, dans un autre référentiel (\mathcal{R}') dont l'origine est par exemple mobile par rapport à celle de (\mathcal{R}), les vecteurs \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z liés à (\mathcal{R}) dépendent du temps et leurs dérivées sont non nulles.

II.1.3. Cas d'une décomposition dans une base quelconque

Considérons une grandeur vectorielle \vec{b} représentée dans une base orthonormée \mathcal{B} . Pour simplifier l'étude sans nuire à sa généralité, nous nous placerons dans le cas

monodimensionnel, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1)$ et $\vec{b} = b_1(t) \vec{u}_1$. Le vecteur \vec{u}_1 est unitaire et mobile par rapport à une base cartésienne du référentiel (\mathcal{R}) , ainsi $\dot{\vec{u}}_1 = \dot{\vec{u}}_1(t)$.

Le vecteur \vec{u}_1 étant unitaire, $\|\vec{u}_1\|^2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1$, ainsi $\frac{d(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1)}{dt} = 0$. Par ailleurs, les règles de dérivation rappelées dans l'encadré « Méthode » permettent de voir que $\frac{d(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1)}{dt} = 2\vec{u}_1 \cdot \dot{\vec{u}}_1$. En rapprochant les deux façons d'effectuer le calcul, on trouve donc finalement que $\vec{u}_1 \cdot \dot{\vec{u}}_1 = 0$. Dans cette expression, le vecteur $\dot{\vec{u}}_1$ n'a aucune raison d'être nul ; ainsi la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire mobile est perpendiculaire à ce dernier.

$$\text{Si } \|\vec{u}_1(t)\| = 1 \quad \text{alors} \quad \vec{u}_1 \perp \dot{\vec{u}}_1.$$

Ce résultat est évidemment généralisable à un vecteur de norme constante mais non unitaire. Néanmoins, en physique, il est fortement recommandé de travailler avec des vecteurs de base unitaires.

Ce résultat permet aussi de comprendre qu'au cours du temps, un vecteur unitaire ne s'allonge pas, il tourne. Revenons maintenant au vecteur $\vec{b} = b_1(t) \vec{u}_1$, produit d'un réel représentant la longueur de \vec{b} par le vecteur unitaire \vec{u}_1 en mouvement dans (\mathcal{R}) . Dans la dérivée, nous trouvons deux composantes

$$\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\left(\frac{db_1}{dt}\right)}_{\text{allongement}} \vec{u}_1 + b_1(t) \underbrace{\left(\frac{d\vec{u}_1}{dt}\right)_{(\mathcal{R})}}_{\text{rotation}}.$$

Pour un observateur lié à (\mathcal{R}) et entre les deux instants t et $t + dt$, le vecteur \vec{b} varie de façon infinitésimale et passe de l'expression $\vec{b}(t)$ à l'expression $\vec{b}(t + dt)$. Par définition de la dérivée,

$$\vec{b}(t + dt) - \vec{b}(t) = dt \times \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{(\mathcal{R})} = (db_1) \vec{u}_1 + b_1 (d\vec{u}_1)_{(\mathcal{R})}.$$

On observe donc un allongement algébrique db_1 dans la direction \vec{u}_1 et un changement de direction dû à la présence du second terme $(d\vec{u}_1)_{(\mathcal{R})}$, ce que montre la figure 9.9.

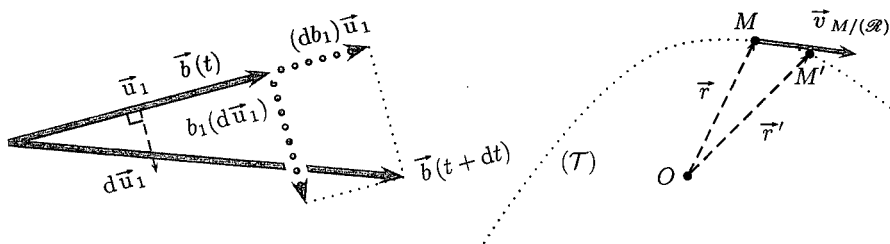


FIG. 9.9. Variations d'un vecteur (à gauche). Trajectoire et vitesse (à droite).

Dans un référentiel donné, un vecteur sera qualifié de constant s'il l'est en *norme* et en *direction*, c'est-à-dire si les deux composantes de sa variation s'annulent en même temps. Le caractère linéaire de la décomposition d'un vecteur sur une base permet de généraliser immédiatement cette étude au cas d'un vecteur ayant un nombre arbitraire de composantes dans une base mobile.

II.2. Définition du vecteur vitesse

II.2.1. Définition intrinsèque de la vitesse

Pour connaître la position d'un point mobile M dans un référentiel (\mathcal{R}), il suffit de déterminer le vecteur position \overrightarrow{OM} et cela à chaque instant. Par la suite, nous noterons souvent $\vec{r}(t)$ ce vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$. On appelle *vitesse* de M relativement à (\mathcal{R}) le vecteur qui exprime le changement de la position de M au cours du temps par rapport à l'origine O de (\mathcal{R}).

Définition 9.3. Vitesse

La vitesse du point mobile M dans son mouvement relativement au référentiel (\mathcal{R}) est la dérivée dans (\mathcal{R}) de son vecteur position dans le même référentiel,

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \dot{\vec{r}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})}. \quad (9.14)$$

Les composantes de la vitesse s'expriment donc en mètre par seconde ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Sur la figure 9.9 (à droite), un point M est en mouvement sur une certaine courbe trajectoire (\mathcal{T}). On a noté sur cette figure sa position M à l'instant t et sa position M' à l'instant t' , ultérieur tel que $t' = t + \delta t$. Ces positions sont représentées par les vecteurs \vec{r} et \vec{r}' . Pendant la durée $\delta t = t' - t$, le déplacement est décrit par le vecteur $\delta\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \vec{r}' - \vec{r}$. Par définition de la dérivée, on peut exprimer la vitesse par la limite,

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{t' - t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\delta t}.$$

La vitesse au point M a donc pour direction la limite de la direction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ lorsque M et M' deviennent infiniment voisins. Cette direction limite correspond à la tangente en M à la courbe trajectoire (\mathcal{T}). Si on note \vec{t} le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire dans le sens du déplacement, alors

Le vecteur *vitesse instantanée* $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ d'un point M mobile est tangent en chaque point de sa trajectoire. Si \vec{t} est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M dans le sens du mouvement de M , alors

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = v \vec{t} \quad \text{avec} \quad v = \|\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}\| \geq 0. \quad (9.15)$$

II.2.2. La vitesse dans les trois systèmes de coordonnées fondamentaux

Les différents résultats obtenus dans les paragraphes précédents permettent de retrouver à présent l'expression du vecteur vitesse dans les trois systèmes de coordonnées fondamentaux sans passer par la géométrie, mais en dérivant directement le vecteur position.

Vitesse en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit $\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ dans la base cartésienne \mathcal{K} . Celle-ci étant fixe dans (\mathcal{R}), on peut donc écrire directement

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z. \quad (9.16)$$

Vitesse en coordonnées cylindro-polaires

En coordonnées cylindro-polaires, $\vec{r} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$, on a donc $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\vec{u}}_r + \dot{z} \vec{u}_z$. On écrit alors

$$\dot{\vec{u}}_r = \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (9.17)$$

car nous avons expliqué (voir équation (9.8) page 251) que la dérivée du vecteur \vec{u}_r par rapport à son angle polaire θ le faisait tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. On obtient donc finalement

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z. \quad (9.18)$$

Vitesse en coordonnées sphériques

La dérivée du vecteur position $\vec{r} = r \vec{u}_r$ dans la base locale sphérique est légèrement plus compliquée. Nous avons vu en effet que le vecteur radial sphérique \vec{u}_r dépend des deux angles θ et ϕ . Le calcul qui suit n'est donc malheureusement pas explicitement au programme des CPGE, il est néanmoins suffisamment simple et instructif pour être soumis à certains lecteurs moins pressés que d'autres.

Une variation élémentaire du vecteur position dans la base locale sphérique s'écrit $d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r$; or, $d\vec{u}_r = \left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\right)_{\phi=\text{cte}} d\theta + \left(\frac{d\vec{u}_r}{d\phi}\right)_{\theta=\text{cte}} d\phi$. Quand ϕ est constant, θ est l'angle polaire de \vec{u}_r ; ainsi $\left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\right)_{\phi=\text{cte}} = \vec{u}_\theta$. De plus,

$$\left(\frac{d\vec{u}_r}{d\phi}\right)_{\theta=\text{cte}} = \frac{d}{d\phi} (\sin(\theta) \vec{u}_\theta + \cos(\theta) \vec{u}_\phi)_{\theta=\text{cte}},$$

le second terme de cette dérivée est donc nul, et pour le premier terme il convient de noter que pour θ constant, ϕ est l'angle polaire de \vec{u}_θ ; ainsi $\left(\frac{d\vec{u}_r}{d\phi}\right)_{\theta=\text{cte}} = \sin(\theta) \vec{u}_\phi$. On obtient donc la relation $d\vec{u}_r = \vec{u}_\theta d\theta + \sin(\theta) \vec{u}_\phi d\phi$ qui, en « divisant » par dt , permet d'écrire $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{u}_\phi$. Finalement, nous retrouvons

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\phi} \vec{u}_\phi. \quad (9.19)$$

II.3. Définition du vecteur accélération

II.3.1. Définition intrinsèque

La vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ du point mobile M repéré par le vecteur position $\vec{r}(t)$ est généralement une fonction du temps. C'est l'accélération qui permet d'évaluer la façon dont varie le vecteur vitesse en norme et en direction relativement au référentiel (\mathcal{R}) .

Définition 9.4. Accélération

L'accélération du point mobile M dans son mouvement relativement au référentiel (\mathcal{R}) est la dérivée dans (\mathcal{R}) de son vecteur vitesse dans ce même référentiel,

$$\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt}\right)_{(\mathcal{R})}. \quad (9.20)$$

Les composantes de l'accélération se mesurent en mètre par seconde carrée ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

En utilisant le vecteur unitaire \vec{t} tangent à la trajectoire en M , le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = v\vec{t}$. Le vecteur \vec{t} étant unitaire, sa dérivée temporelle est un vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{t} , appelé vecteur normal et généralement noté \vec{n} . La définition de l'accélération permet donc de la décomposer en une composante tangentielle \vec{a}_t selon \vec{t} et une composante normale \vec{a}_n selon \vec{n} .

$$\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{t}}_{\text{tangentielle}} + v \underbrace{\left(\frac{d\vec{t}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})}}_{\text{normale}} \quad (9.21)$$

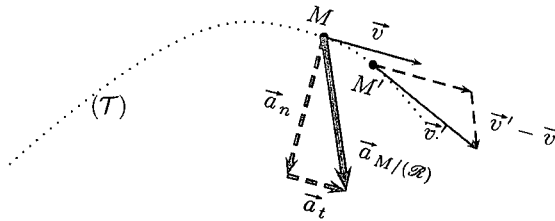


FIG. 9.10. Accélération d'un mobile.

La figure 9.10 représente les deux composantes de l'accélération, chacune s'interprète de la façon suivante :

- la dérivée $\frac{dv}{dt}$ représente la variation de la norme de la vitesse du mobile M et donc « l'allongement » du vecteur vitesse. La conséquence de cette variation est l'existence d'une *composante tangentielle*, proportionnelle à \vec{t} , pour l'accélération du mobile. Cette composante est notée \vec{a}_t ;
- la variation de la direction du vecteur vitesse a pour conséquence l'existence d'une *composante normale* et donc colinéaire à \vec{n} . On montre que cette composante est dans le sens de la concavité de la trajectoire (\mathcal{T}) . Elle est notée \vec{a}_n .

II.3.2. Expression en coordonnées cartésiennes

Les composantes de $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})}$ dans la base cartésienne \mathcal{K} s'obtiennent simplement en dérivant l'expression (9.16) donnant les composantes de la vitesse dans cette même base. On a donc

$$\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z. \quad (9.22)$$

II.3.3. Expression en coordonnées cylindro-polaires

En dérivant l'expression (9.18) de la vitesse dans la base cylindro-polaire locale, on obtient aussi une expression de l'accélération

$$\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z.$$

La relation (9.17) a permis de trouver que $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$, en tournant \vec{u}_θ de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ on obtient $-\vec{u}_r$; ainsi $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$. En regroupant les différents

termes, on obtient l'expression de $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})}$ dans \mathcal{C} sous la forme

$$\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z. \quad (9.23)$$

On peut remarquer une autre forme utile de cette expression,

$$\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z. \quad (9.24)$$

Il est important de connaître les expressions (9.23) et (9.24), mais aussi de savoir les retrouver.

Encore une fois, on ne confondra pas le référentiel (\mathcal{R}), dans lequel on calcule les dérivées successives $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = (\dot{\vec{r}})_{(\mathcal{R})}$ et $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = (\dot{\vec{v}}_{M/(\mathcal{R})})_{(\mathcal{R})}$, et la base de projection utilisée pour écrire les coordonnées de ces vecteurs. Ici, le référentiel (\mathcal{R}) est celui de l'observateur ; il est fixe. La base de projection est quant à elle potentiellement mobile relativement à l'origine de (\mathcal{R}) : les bases \mathcal{C} et \mathcal{S} sont dites locales, car elles sont liées à M . Pour cette raison, on ne doit pas oublier de dériver les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ faute de quoi, on ne trouverait qu'une partie des composantes de la vitesse et de l'accélération !

L'expression générale de l'accélération en coordonnées sphériques est compliquée et ne recèle que peu d'intérêt. Elle pourra être utilisée dans certains cas particuliers et, alors, on partira directement du vecteur position que l'on dérivera deux fois.

III. Exemples de mouvements simples

Dans cette section, nous allons étudier deux cas de mouvement pour deux types de systèmes : le point et le solide indéformable.

Le solide indéformable est un modèle physique adapté à la description d'un système matériel possédant une extension spatiale.

Définition 9.5. Le solide indéformable

On appelle solide indéformable un système matériel (S) dont les distances entre deux points quelconques restent invariables au cours du temps.

$$\forall (A, B) \in (S) \quad \|\overline{AB}\| = \text{cte.}$$

L'étude du mouvement d'un solide indéformable se ramène à la détermination du mouvement de l'un de ses points P , ainsi que du mouvement de rotation propre du solide défini par trois angles. Les lois de la mécanique doivent permettre la détermination de ces six coordonnées : on dit que le solide indéformable possède six *degrés de liberté*.

Définition 9.6. Le point matériel

On appelle point matériel un solide dont la position est entièrement définie par la seule donnée des trois coordonnées d'un seul de ses points.

Le point matériel se voit donc affecté de toutes les caractéristiques physiques du solide parmi lesquelles la masse, la charge, la force appliquée, etc. Cela revient à négliger tout effet de rotation du solide sur lui-même ou son extension spatiale.

Le point mobile M , que nous avons introduit depuis le début de ce chapitre, est un point matériel.

III.1. Mouvement rectiligne d'un point

Le mouvement d'un point est *rectiligne* si sa trajectoire est une droite (ou un segment de droite). Dans ce cas, la direction du vecteur vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ est constante ; on pourra donc écrire $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \bar{v} \vec{u}_1$, où \vec{u}_1 est un vecteur unitaire constant.

Dans un tel mouvement, le fait que $\dot{\vec{u}}_1 = \vec{0}$ implique que l'accélération normale est nulle (voir relation (9.21)). Le vecteur accélération est donc colinéaire au vecteur vitesse, $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\bar{v}}{dt} \vec{u}_1$, qui pourra s'écrire $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{\vec{v}}{\bar{v}}$ lorsque $v \neq 0$.

Attention Grandeurs algébriques

Dans l'expression $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \bar{v} \vec{u}_1$, la grandeur \bar{v} est algébrique. Il ne faut pas confondre \vec{u}_1 avec le vecteur \vec{t} (voir figure 9.9) qui est, par définition, toujours dans le sens du mouvement. En effet, le sens de parcours de M sur sa droite trajectoire peut changer (par exemple, en cas de mouvement oscillant). C'est une erreur très fréquente que de vouloir modifier tel ou tel signe d'une équation mécanique en fonction de ce qu'on imagine être le sens effectif du mouvement. Il est *essentiel* d'utiliser toujours des relations entre grandeurs algébriques.

Un mouvement est dit *rectiligne uniforme* si la droite trajectoire est parcourue avec une vitesse dont le module v reste constant au cours du temps. L'accélération d'un mouvement rectiligne et uniforme reste *constamment nulle* : c'est la caractéristique de ce mouvement.

III.2. Mouvement d'un point soumis à accélération constante

Au voisinage de la Terre le champ de gravité est uniforme et procure une accélération constante à tous les corps en chute libre. Galilée fut le premier à étudier ce type de mouvement de façon quantitative au début du XVII^e siècle. Compte tenu de son importance, nous proposons de traiter ce problème en y consacrant un exercice corrigé.

EXERCICE CORRIGÉ 9.7.

Mouvement à accélération constante

Un point matériel mobile M est en mouvement relativement au référentiel (\mathcal{R}) . Il possède dans ce dernier une accélération constante $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = -a_0 \vec{u}_z$ avec $a_0 > 0$. À l'instant $t = 0$, le mobile se trouve en l'origine O de (\mathcal{R}) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 [\cos(\alpha) \vec{u}_x + \sin(\alpha) \vec{u}_y]$, l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $v_0 > 0$.

- Déterminer les lois horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
- Déterminer l'équation de la trajectoire (\mathcal{P}) de M . Déterminer les coordonnées du point P par lequel le mobile repasse par le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ pour $t > 0$. Pour quelle valeur de α la distance OP est-elle maximale ?
- Déterminer l'ensemble des points que le mobile peut atteindre dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ pour une valeur de v_0 fixée en faisant varier l'angle α dans tout l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Corrigé

- L'expression $\left(\frac{d\vec{v}_{M/K}}{dt}\right)_{(K)} = -a_0 \vec{u}_z$ s'intègre immédiatement puisque a_0 est constant, ainsi que la base de projection (cartésienne) : à partir de $\ddot{z} = -a_0$,

$\ddot{x} = \ddot{y} = 0$, on obtient $\dot{z} = -a_0 t + \dot{z}_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ et $\dot{y} = \dot{y}_0$, où les constantes d'intégration \dot{x}_0 , \dot{y}_0 et \dot{z}_0 sont ici les composantes de la vitesse initiale. Il vient donc enfin $\dot{z} = -a_0 t + v_0 \sin \alpha$, $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$ et $\dot{y} = 0$.

Une seconde intégration mène à $z = -\frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + z_0$, $x = v_0 t \cos \alpha + x_0$ et $y = y_0$. Les constantes d'intégration x_0 , y_0 et z_0 sont fixées par le fait qu'à $t = 0$ le mobile est en O : ainsi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Finalement, les lois horaires s'écrivent $z(t) = -\frac{a_0 t^2}{2} + v_0 \sin \alpha t$, $x(t) = v_0 \cos \alpha t$ et $y(t) = 0$.

Notons qu'il est *très rare* de pouvoir intégrer ainsi directement les expressions de l'accélération ou de la vitesse. De manière générale, on prendra garde, en intégrant une expression du type $\dot{f} = g$, à ne *jamais écrire* $f(t) = g \cdot t + \text{cte}$, sauf si on s'assure explicitement que g est une constante au cours du temps...

2. On obtient l'équation de la trajectoire (qui est une courbe plane du plan $y = 0$) en éliminant le temps selon $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, donc $z = -\frac{a_0 x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$. C'est une parabole, passant par O et par le point P tel que $z = 0$ et $x_P = \frac{v_0^2}{a_0} \sin(2\alpha)$. Par symétrie, le sommet de la parabole est atteint pour $x_S = \frac{x_P}{2}$, $z_S = \frac{v_0^2}{a_0} \sin^2 \alpha$. La distance $x_P = OP$ est maximale quand $\sin(2\alpha)$ est maximal, donc pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

La figure 9.11 représente trois trajectoires correspondant à la même valeur de v_0 , pour $\alpha = \pi/4, \pi/6$ et $\pi/3$.

3. Un point de coordonnées (x, z) peut être atteint seulement s'il existe une valeur de α qui permet de réaliser l'équation $z = -\frac{a_0 x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$, que nous réécrivons comme une équation pour la variable $\tau = \tan \alpha$ sous la forme

$$\tau^2 \frac{a_0 x^2}{2v_0^2} - x\tau + z + \frac{a_0 x^2}{2v_0^2} = 0;$$

il y a en général deux solutions réelles à cette équation si le discriminant de l'équation vérifie $\Delta > 0$. Ces deux solutions sont de même signe (puisque dans l'équation $a\tau^2 + b\tau + c = 0$, le produit c/a des racines est positif) et ce signe est positif (puisque leur somme $-b/a$ est positive). Il s'agit de deux valeurs de $\tau = \tan \alpha$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$, donc on aura bien deux solutions pour α dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Finalement, la condition demandée s'écrit $x^2 \geq 4 \frac{a_0 x^2}{2v_0^2} \left(\frac{a_0 x^2}{2v_0^2} + z \right)$ ou $z \leq -\frac{a_0 x^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2a_0}$: c'est la *parabole de sûreté* (en pointillé sur la figure 9.11).

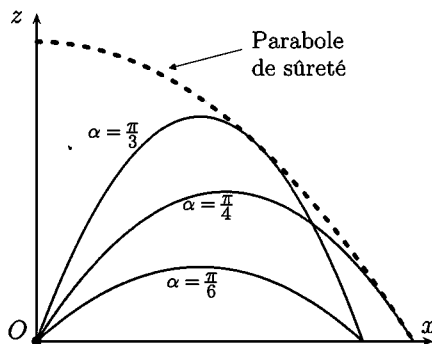


FIG. 9.11. Trajectoires à accélération constante.

III.3. Mouvement de translation d'un solide

Un solide est en translation si, à tout instant, la position du solide se déduit de sa position initiale par une translation. Considérons deux points quelconques A et B du solide indéformable Σ . On note A_0 et B_0 leurs positions respectives dans le référentiel d'étude (\mathcal{R}) à l'instant $t = 0$ pris comme origine ; puis A_t et B_t leurs positions dans (\mathcal{R}) à un instant t quelconque. Le solide est dit en translation si, à chaque instant t , il existe un vecteur \vec{T} tel que $\overrightarrow{A_0A_t} = \overrightarrow{B_0B_t} = \vec{T}$. Cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{A_0B_0}$ lié au solide évolue parallèlement à lui-même au cours du mouvement : à chaque instant t , on a donc $\overrightarrow{A_tB_t} = \overrightarrow{A_0B_0}$.

Définition 9.8. Solide en translation

Un solide indéformable est en translation si tout segment lié à ce solide évolue parallèlement à lui-même au cours du temps.

À chaque instant t , $\overrightarrow{A_tB_t} = \overrightarrow{A_0B_0}$.

Attention Translation

Le terme de *translation* n'a de sens que pour un solide. On ne peut pas, par exemple, définir de segment lié à un point.

Le fait qu'à chaque instant $\overrightarrow{A_tB_t} = \overrightarrow{A_0B_0}$ permet d'écrire $\frac{d\overrightarrow{A_tB_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{A_0B_0}}{dt} = \vec{0}$. En insérant le point O dans le vecteur du premier terme de cette égalité, on obtient la propriété caractéristique du mouvement de translation d'un solide suivante.

Théorème 9.9. Champ de vitesse d'un solide en translation

Tous les points d'un solide en translation possèdent la même vitesse

$$\vec{v}_{A_t/(\mathcal{R})} = \vec{v}_{B_t/(\mathcal{R})}.$$

Cette vitesse peut dépendre du temps.

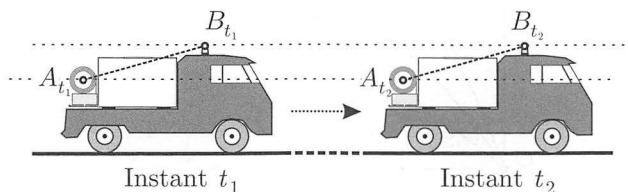


FIG. 9.12. Translation rectiligne.

Les deux cas d'étude de notre programme sont les suivants :

- si les points du solide décrivent une droite lors du mouvement, on dit que la *translation* est *rectiligne*. C'est le cas par exemple d'une voiture se déplaçant sur une route rectiligne (voir figure 9.12) ;
- si les points du solide décrivent des cercles, la *translation* est dite *circulaire*. C'est le cas par exemple d'une nacelle suspendue à une grande roue dans un parc d'attractions (voir figure 9.13).

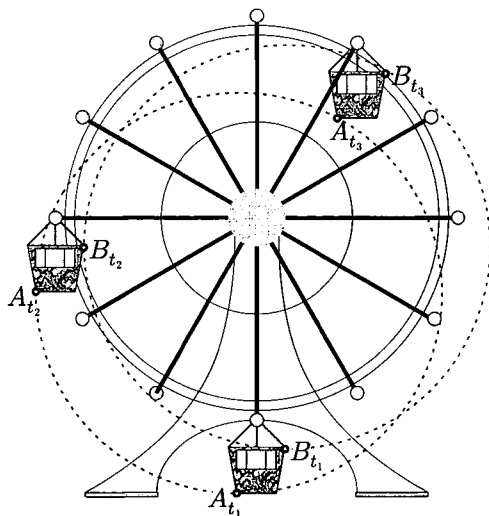
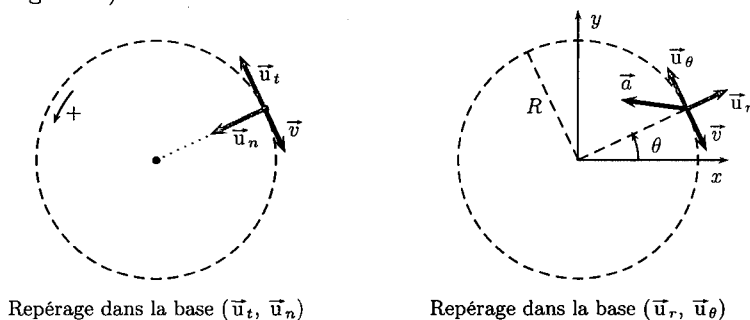


FIG. 9.13. Translation circulaire.

III.4. Mouvement circulaire d'un point

Dans un mouvement *circulaire*, la trajectoire du mobile M est un cercle ou un arc de cercle de rayon situé dans un plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. *A priori* on ne connaît pas le sens de parcours du mobile sur sa trajectoire, c'est pour cette raison que l'on se donne une orientation *arbitraire*, indiquée par le signe « plus » sur la figure 9.14. On utilise alors le vecteur \vec{u}_t , *tangent à la trajectoire* dans le sens de l'orientation choisie. La base est complétée par le choix du vecteur \vec{u}_n orienté vers le centre de la trajectoire (voir figure 9.14 à gauche).



Repérage dans la base (\vec{u}_t, \vec{u}_n)

Repérage dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

FIG. 9.14. Trajectoire circulaire.

Définition 9.10. Vitesse angulaire

Soit un point en mouvement circulaire, repéré par l'angle polaire θ (voir figure 9.14). Sa vitesse angulaire est définie par

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.$$

Cette grandeur se mesure en radian par seconde² ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

La vitesse angulaire décrit l'angle parcouru par unité de temps par le rayon vecteur \overline{OM} au cours du mouvement de M et vérifie

$$\bar{v} = R\omega.$$

Sachant que $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \bar{v} \vec{u}_t$, la grandeur \bar{v} étant algébrique, l'accélération $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})}$ s'écrit dans la base (\vec{u}_t, \vec{u}_n) sous la forme $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\bar{v}}{dt} \vec{u}_t + \bar{v} \frac{d\vec{u}_t}{dt}$.

- ▶ Si l'on a choisi $\vec{u}_t = \vec{u}_\theta$, alors $\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r = \dot{\theta} \vec{u}_n = \frac{\bar{v}}{R} \vec{u}_n$.
- ▶ Si l'on a choisi $\vec{u}_t = -\vec{u}_\theta$, alors $\frac{d\vec{u}_t}{dt} = -\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_r = -\dot{\theta} \vec{u}_n = \frac{\bar{v}}{R} \vec{u}_n$.

L'accélération s'écrit donc dans tous les cas

$$\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{d\bar{v}}{dt} \vec{u}_t + \frac{\bar{v}^2}{R} \vec{u}_n.$$

La composante de $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})}$ selon le vecteur \vec{u}_n est toujours positive. L'accélération normale est toujours dirigée dans le sens de la concavité de la courbe. On dit qu'elle est *centripète*.

Un mouvement est dit circulaire uniforme si v reste constant au cours du mouvement ; dans ce cas, $\vec{a}_t = \vec{0}$ et l'accélération est purement centripète, $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \frac{\bar{v}^2}{R} \vec{u}_n$.

Synthèse**Mouvement circulaire**

- ▶ La vitesse d'un point M en mouvement circulaire autour d'un axe fixe s'écrit

$$\vec{v} = R\omega \vec{u}_t.$$

- ▶ L'accélération d'un mouvement circulaire n'est jamais nulle, même lorsque le mouvement est uniforme ($\omega = \text{cte}$) : la composante normale de cette accélération est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire.

2. Dans certaines applications ou certains problèmes, on peut utiliser d'autres unités occasionnelles comme les tours par seconde ou minute, etc.

III.5. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Dans un tel mouvement, la position du solide à l'instant t se déduit de sa position initiale par une rotation autour de l'axe de rotation Δ .

Soit A et B deux points quelconques du solide, H et Q leur projection orthogonale sur l'axe de rotation Δ . Lors du mouvement du solide, ces deux points ont une trajectoire circulaire dont les rayons respectifs sont AH et BQ . Chaque point du solide évolue sur un cercle contenu dans un plan perpendiculaire à Δ (voir figure 9.15).

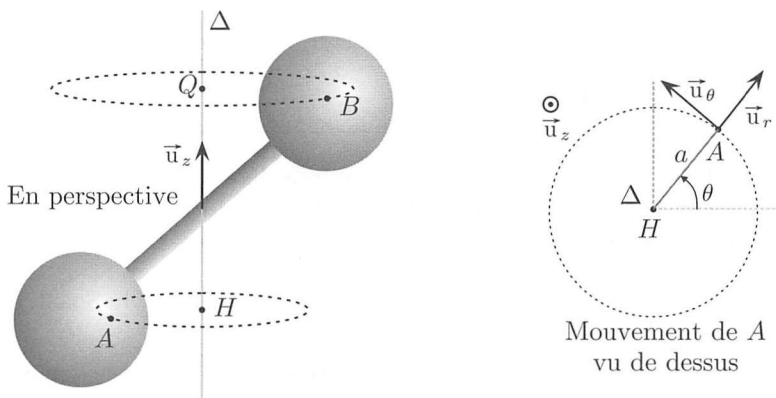


FIG. 9.15. Rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe.

Définition 9.11. Solide en rotation

Un solide indéformable Σ est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous les points de Σ ont un mouvement circulaire d'axe Δ dans un plan perpendiculaire à Δ .

Soit A un point du solide et H son projeté orthogonal sur Δ . Posons $\overrightarrow{HA} = a\vec{u}_r$, dans $\mathcal{C} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la base cylindro-polaire locale. Il est clair que la longueur a est constante, ainsi $\vec{v}_A = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Or, $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$, donc $\vec{v}_A = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{HA}$. Dans un tel mouvement, tous les points du solide possèdent la même vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. Il est donc commode d'introduire le vecteur $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$. Ce vecteur caractérise la rotation de tous les points du solide dans leurs mouvements circulaires, on parle du vecteur rotation instantanée du solide. En revenant au point A , on peut donc écrire $\vec{v}_A = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HA}$. Le point H est un point de l'axe de rotation, sa vitesse est donc nulle; ainsi $\vec{v}_A = \vec{v}_H + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HA}$.

Soit O un point quelconque de l'axe de rotation, que l'on prendra comme origine du référentiel d'étude (\mathcal{R}) . Les vecteurs \overrightarrow{OH} et $\vec{\Omega}$ étant colinéaires, $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OH} = \vec{0}$. On a donc finalement $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}$.

Définition 9.12. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour un solide indéformable Σ en rotation autour d'un axe fixe Δ :

- ▶ l'axe de rotation Δ est l'ensemble des points dont la vitesse est nulle;
- ▶ le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$ est colinéaire à l'axe de rotation et sa projection sur l'axe représente la vitesse angulaire du solide autour de Δ ;
- ▶ si O est un point quelconque de Δ , la vitesse en un point M de Σ est telle que $\vec{v}_M = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Remarque Il existe des mouvements de solide pour lesquels seule la direction de l'axe Δ reste fixe (colinéaire à un vecteur fixe \vec{u}_z). C'est le cas, par exemple, d'une roue qui roule sur le sol : l'axe de la roue est mobile (il se translate) mais il garde une direction constante (horizontale). Les points de la roue ont alors un mouvement composé d'une rotation et d'une translation. Ce type de mouvement, plus compliqué que celui décrit ci-dessus, n'est pas au programme des CPGE et ne sera donc pas étudié dans ce livre.

IV. Exercices

1. Mouvement de la Terre

(solution page 700)

L'orbite de la Terre est une ellipse qui peut être considérée en première approximation comme un cercle de rayon $R = 149,5 \cdot 10^6$ km. On considère ici la Terre comme un point matériel. La période de son mouvement est $T = 1$ an = 365,25 jours.

1. Calculer la vitesse angulaire de rotation ω de la Terre autour du Soleil. En déduire le module de sa vitesse moyenne.
2. Quel est le module de l'accélération centripète de la Terre dans ce mouvement ?

2. Mouvement circulaire ★

(solution page 700)

On considère un point M se déplaçant dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sur un cercle de rayon R . On note $\theta(t)$ l'angle, à l'instant t , entre le vecteur \vec{u}_x et le vecteur position $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$. On donne la loi horaire $\theta(t) = 2\pi \sin(\frac{2\pi t}{\tau})$ avec $\tau > 0$.

1. Calculer la vitesse angulaire de M . Décrire le mouvement du point sur le cercle.
2. Déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_M à chaque instant, puis représenter la position de M et sa vitesse aux instants $t = 0; \frac{\tau}{25}; \frac{\tau}{12}; \frac{\tau}{4}; \frac{\tau}{2}$ et $\frac{3\tau}{4}$. On prendra $\sin(\frac{2\pi}{25}) = \frac{1}{4}$.
3. Déterminer l'expression du vecteur accélération \vec{a}_M à chaque instant, puis représenter ce vecteur sur le schéma de la question précédente.

3. Mouvement d'une hélice ★

(solution page 701)

L'hélice d'un avion immobile tourne à vitesse angulaire constante $\omega_0 = 1\,200$ tr·min⁻¹ dans le plan $\Pi = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Le point O est le centre de l'hélice. À l'instant $t = 0$, le moteur est coupé et l'hélice s'arrête après avoir effectué 90 tours. On suppose la décélération angulaire constante. On repère la position d'une pale d'hélice par un angle θ dans Π .

1. Déterminer l'équation horaire $\theta(t)$ du mouvement. Combien de temps l'hélice met-elle pour s'arrêter ?
2. À l'instant $t = 2$ s, calculer les valeurs de la vitesse angulaire et de la vitesse linéaire de l'extrémité A de la pale de référence située à une distance $b = 2$ m du point O . Calculer la valeur des accélérations normales et tangentielles pour ce point. Faire une représentation du vecteur vitesse et du vecteur accélération de l'extrémité de l'hélice.

4. Mouvement parabolique ★★

(solution page 702)

Un point M est mobile dans un plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sur une trajectoire parabolique d'équation $y = \frac{1}{4a}x^2$ représentée sur la figure 9.16. La longueur a permet d'exprimer x et y dans la même unité, le mètre; dans tout l'exercice on prendra $a = 1$ m. Le mobile est en O à l'instant $t = 0$ et un enregistrement de la position de M est effectué toutes les τ secondes avec $\tau = 0,04$ s. On a dressé ci-dessous le tableau de l'abscisse de M à ces différents instants.

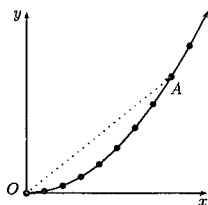


FIG. 9.16. Mouvement parabolique.

t [s]	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40
x [m]	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4

1. Quelle est la vitesse instantanée du mobile en chacun des points $M(t = n\tau)$? On indiquera les coordonnées du vecteur vitesse dans la base cartésienne $\mathcal{K} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
2. Déterminer, dans \mathcal{K} , les composantes des vecteurs unitaires \vec{u}_t et \vec{u}_n respectivement tangent (dans le sens du mouvement) et normal (dirigé vers l'intérieur de la parabole) au point A de la trajectoire. Donner l'expression du vecteur \vec{v}_A dans la base intrinsèque $\mathcal{I} = (\vec{u}_t, \vec{u}_n)$. Calculer la valeur de l'angle $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_t)$ en A .
3. On suppose qu'à $t = 8\tau$ le point M est en A . Déterminer, dans la base polaire locale $\mathcal{C} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, les composantes du vecteur vitesse \vec{v}_A et représenter ce vecteur sur un schéma.
4. Déterminer les composantes du vecteur accélération \vec{a}_A dans \mathcal{K} , \mathcal{I} et \mathcal{C} .

5. Mouvement cycloïdal ★★

(solution page 704)

Une roue de rayon a et de centre C se déplace dans un plan vertical $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ de sorte que l'abscisse x_C de son centre vérifie la loi horaire $x_C(t) = v_0 t$ avec $v_0 > 0$. Un point M de la roue, situé à la distance r de C , tourne avec celle-ci à la vitesse angulaire constante ω .

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de la position et de la vitesse de M en fonction de r , v_0 , ω et t .
2. On impose $v_0 = \omega a$. Expliquer pourquoi cette condition correspond à l'absence de tout dérapage de la roue sur le plan horizontal $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sur lequel elle roule.
3. Pour une valeur de r quelconque, déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de M . Au moyen d'un logiciel de votre choix, tracer les trajectoires dans les trois cas $r < a$, $r = a$ et $r > a$. On commentera les résultats obtenus.

6. Mouvement d'une tige

(solution page 704)

Le système représenté sur la figure 9.17 est en mouvement dans le plan (xOy) . Il est constitué de deux roues tournant à la vitesse angulaire ω autour de leur axe respectif (O_1, \vec{u}_z) et (O_2, \vec{u}_z) , reliées par une tige \mathcal{T} de longueur ℓ , de centre C . Les axes sont fixes et les liaisons en A et B sont articulées. On donne $O_1A = O_2B = a$. À $t = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{O_1A}$ et $\overrightarrow{O_2B}$ font le même angle θ_0 avec \vec{u}_x . Le référentiel d'étude est $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

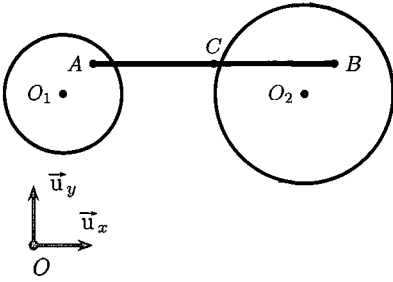


FIG. 9.17. Tige articulée.

Quel est le mouvement de la tige $[AB]$? Représenter graphiquement et déterminer les expressions de $\vec{v}_{A/(\mathcal{R})}$, $\vec{v}_{B/(\mathcal{R})}$ et $\vec{v}_{C/(\mathcal{R})}$.

7. Mouvement de translation circulaire

(solution page 705)

L'espace est rapporté à un repère $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On considère un solide Σ assimilé à un triangle ABC en mouvement dans le plan (xOy) . À l'instant $t = t_0$, le solide occupe la position $A_0B_0C_0$ représentée sur la figure 9.18. La trajectoire du point A est un cercle centré sur l'origine de (\mathcal{R}) et de rayon R . On étudie deux cas pour le mouvement de Σ : la translation circulaire puis la rotation autour de l'axe (O, \vec{u}_z) .

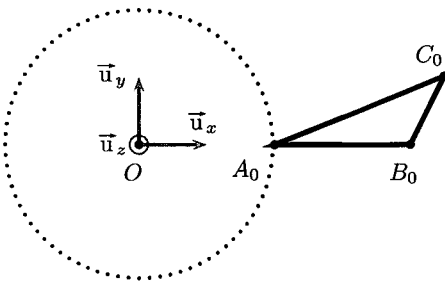


FIG. 9.18. Solide en translation circulaire.

1. Dans chacun des cas, représenter le champ de vitesse du solide à l'instant t_0 .
2. Soit θ l'angle entre le rayon vecteur \overrightarrow{OA} et le vecteur \vec{u}_x . Représenter la position du solide lorsque $\theta = \frac{\pi}{3}$ puis $\theta = \frac{5\pi}{4}$. Représenter le champ de vitesse pour ces deux positions et pour les deux types de mouvements.
3. Quelle est la vitesse angulaire du point A sur sa trajectoire? Quelle est la valeur du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{\Sigma/(\mathcal{R})}$ du solide pour chacun des mouvements?

8. Le système bielle-vilebrequin ★★

(solution page 705)

Dans un référentiel fixe $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère un système constitué :

- ▶ d'un vilebrequin, qui est un disque de centre O , de rayon R tournant autour de l'axe (O, \vec{u}_z) ;
- ▶ d'une bielle, qui est une tige DM de longueur ℓ articulée en D et en M . On donne $OD = r$.

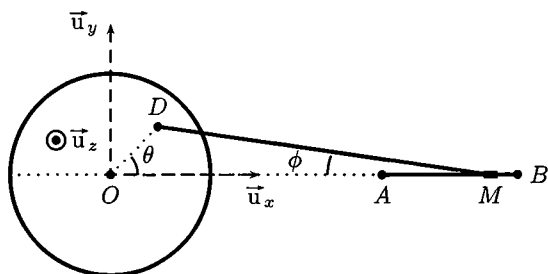


FIG. 9.19. Système bielle-vilebrequin.

Le dispositif est représenté sur la figure 9.19. Généralement, un piston entraîné par un moteur thermique déplace le point M le long de l'axe (Ox) entre les points A et B ; il engendre ainsi la rotation du vilebrequin. On a ici la transformation d'un mouvement de translation en un mouvement de rotation.

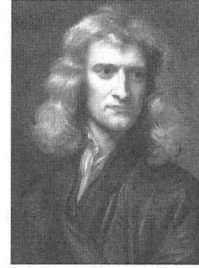
1. En considérant les solides indéformables, déterminer la relation entre r , ℓ , θ et ϕ et en déduire $\dot{\phi}$ en fonction de r , ℓ , θ et de $\omega = \dot{\theta}$. Que devient cette expression au premier ordre si l'on suppose que $\frac{r}{\ell} \ll 1$?
2. Déterminer la relation entre \dot{x} , qui caractérise la vitesse du point M , et ω , qui caractérise la vitesse angulaire du vilebrequin. Que devient cette relation au premier ordre en $\frac{r}{\ell}$?

Chapitre 10

DYNAMIQUE DU POINT

LA DYNAMIQUE donne les relations qui lient les causes du mouvement des corps matériels à la nature de ce mouvement. Celui-ci résulte d'actions qui sont modélisées par les *forces*.

Ce chapitre est consacré aux lois de la dynamique classique formulées par Galilée et Newton¹ au XVII^e siècle. Ces lois doivent être considérées comme des *principes*, c'est-à-dire qu'elles sont affirmées et non démontrées, justifiées uniquement par la validité de leurs conséquences. Certains résultats expérimentaux ont montré qu'en réalité le domaine d'application des lois de Newton est limité par les domaines quantique et relativiste. Dans cette partie nous resterons dans le cadre classique. Le domaine quantique s'est développé depuis le début du XX^e siècle et



Isaac Newton

concerne particulièrement l'étude des phénomènes à l'échelle atomique. Une introduction au monde quantique est proposée au chapitre 4. C'est également au début du XX^e siècle que les domaines des grandes vitesses et des densités importantes de masse sont développés par Einstein afin notamment d'assurer la compatibilité entre la mécanique et l'électromagnétisme. Quelques notions de relativité sont proposées au chapitre 12.

I. Lois de Newton

I.1. Principe d'inertie

I.1.1. Énoncé du principe d'inertie

Le principe d'inertie, ou première loi de Newton chez les Anglo-Saxons, a été formulé par Galilée.

Loi 10.1. *Principe d'inertie ou première loi de Newton*

Il existe une catégorie particulière de référentiels, dits galiléens, relativement auxquels un point matériel ne subissant aucune interaction persiste dans son état initial de mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Si un mobile est initialement immobile (cas particulier de translation rectiligne et uniforme, à vitesse nulle), il persistera donc dans cet état de repos tant qu'aucune force ne lui est appliquée : le mouvement de translation rectiligne et uniforme ne résulte pas de l'application d'une action (force) ; c'est la modification du mouvement qui est

1. Isaac Newton est né en Angleterre en 1642, l'année de la mort de Galilée. Il est le fondateur de la physique moderne : les lois qu'il énonce en 1688 et que nous allons étudier ont jeté les bases de la formalisation indispensable à la compréhension de la philosophie naturelle.

la conséquence de l'action exercée. C'est la raison pour laquelle Galilée exprima que *le mouvement [rectiligne et uniforme] est comme rien*. Pour changer ce mouvement, il faut appliquer des forces.

Le principe d'inertie indique qu'un point matériel tend naturellement à résister à toute tentative de modification de sa vitesse : il faut exercer une action pour perturber le mouvement. Cette résistance à toute modification du mouvement porte le nom d'*inertie*.

Définition 10.2. *Masse d'un corps*

Tout point matériel M est caractérisé par sa masse inerte m , grandeur invariante (c'est-à-dire indépendante du référentiel galiléen choisi), strictement positive, et constante (indépendante du temps). De l'existence de la masse résulte l'inertie du corps. L'unité de masse du système international est le kilogramme (symbole kg)².

Ainsi tout objet de masse m présente une inertie au changement ; *a contrario* un objet sans masse ne peut théoriquement pas voir sa vitesse changer, c'est le cas du photon.

I.1.2. Référentiels galiléens

Avant d'affirmer le principe d'inertie, il a fallu réaliser des expériences mettant en jeu des objets sur lesquels aucune action ne s'exerce, et en particulier sans frottements ; l'objet ou le système est alors dit *isolé*. À défaut de réaliser ces expériences, il faut être capable de les imaginer, par extrapolation de résultats expérimentaux avec des frottements de plus en plus faibles. C'est ce travail que l'on doit à Galilée.

En laboratoire, on peut diminuer très fortement les frottements en réalisant des expériences sur une table à coussin d'air. Lorsque celle-ci est parfaitement horizontale, le poids du mobile est compensé par la réaction du support et le déplacement sur une couche d'air élimine presque totalement les forces de frottements. Un objet sur lequel les actions se compensent totalement est dit *pseudo isolé*.

On peut considérer le laboratoire comme étant le référentiel d'étude et l'enregistrement de la trajectoire du mobile sur la table à coussin d'air, fixe par rapport à ce référentiel, permet d'observer une trajectoire rectiligne avec une vitesse uniforme.

Néanmoins, si par la pensée on étendait la table à coussin d'air sur de très grandes échelles de distance, on observerait une déviation du mobile à cause de la rotation de la Terre sur son axe : le référentiel du laboratoire n'est donc pas galiléen !

Toutefois, pour des expériences sur de petites échelles ou dont la durée τ est faible devant la période terrestre, le mouvement de la Terre autour de ses pôles peut être assimilé à un petit segment de droite parcouru à vitesse constante ; le mouvement est donc approximativement rectiligne uniforme pour cette durée τ et, dans ce cas, on pourra assimiler le référentiel du laboratoire à un référentiel galiléen. On parle également de référentiel *inertiel*.

Théorème 10.3. *Référentiel galiléen*

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

2. Il s'agit de la dernière unité encore définie par un étalon unique : le kilogramme est égal à la masse du prototype international du kilogramme, cylindre de platine iridié déposé au Bureau international des poids et mesures, à Sèvres (Hauts-de-Seine). Il est envisagé de remplacer cette définition, par exemple par le choix d'une valeur conventionnelle de la constante de Planck h .

La preuve de ce théorème apparaîtra clairement avec la deuxième loi de Newton. Trouver un référentiel galiléen, c'est donc en trouver une infinité ! La difficulté réside bel et bien dans le fait d'en observer un. En réalité, il n'existe que des référentiels approximativement galiléens. C'est cette remarque qui conduira Einstein vers la relativité générale de 1906 à 1915.

Dans toute la suite, nous supposons avoir été capables de déterminer un référentiel d'étude galiléen. C'est en deuxième année que nous étudierons les lois de la dynamique dans les référentiels non galiléens.

I.1.3. Quantité de mouvement

Nous avons vu que la masse est une grandeur affectée à tout objet dont la vitesse peut varier. Elle est essentielle, car c'est elle qui génère l'inertie. Nous allons introduire une première grandeur proportionnelle à la masse. Pour cette raison, elle est dite *cinétique*.

Définition 10.4. Vecteur quantité de mouvement

On appelle *résultante cinétique* ou *vecteur quantité de mouvement* (*qdm*) d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ par rapport au référentiel (\mathcal{R}) le vecteur $\vec{p}_{M/(\mathcal{R})} = m\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$.

Remarque On rencontre aussi le terme « impulsion » pour désigner le vecteur quantité de mouvement, mais c'est un abus de langage. En effet, l'identité des notions d'impulsion et de quantité de mouvement en dynamique du point n'est qu'un cas particulier réservé à des systèmes simples. Pour des systèmes plus complexes (particule en interaction avec un champ électromagnétique extérieur, par exemple), l'impulsion n'est pas limitée à la seule quantité de mouvement du mobile³. Dans le chapitre 4, nous utilisons l'impulsion car c'est bien d'elle qu'il s'agit !

I.2. Principe fondamental de la dynamique

Le grand apport de Newton à la physique est l'énoncé de sa seconde loi. Cette loi est aussi appelée principe fondamental de la dynamique ou, trop simplement, loi de la quantité de mouvement.

Loi 10.5. Principe fondamental de la dynamique ou deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}), le vecteur quantité de mouvement d'un point M de masse m vérifie

$$\frac{d\vec{p}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i \rightarrow M} \quad (10.1)$$

où la somme porte sur toutes les actions subies par M . Chacune de ces actions $\vec{F}_{i \rightarrow M}$ est un vecteur invariant, c'est-à-dire indépendant du choix du référentiel galiléen (\mathcal{R}).

3. En 1788, le mathématicien Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a donné une formulation analytique de la mécanique classique. C'est dans ce travail remarquable, mais hors programme, que la notion d'impulsion prend tout son sens.

On peut considérer cette loi comme une définition de la notion de force dénommée « action » dans l'énoncé ci-dessus. On remarquera le fait que la force est définie comme la variation d'un vecteur, elle est donc elle-même un vecteur !

L'unité de mesure des forces porte le nom usuel de newton (symbole N) ; le principe fondamental de la dynamique permet de voir que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

I.3. Principe des actions réciproques

La troisième loi de Newton est aussi connue sous le nom de *principe des actions réciproques* (voir figure 10.1) ou *principe de l'action et de la réaction*.

Loi 10.6. Troisième loi de Newton (principe des actions réciproques)

Considérons deux points matériels M_1 et M_2 de masses inertes m_1 et m_2 . On suppose que ces deux points interagissent et on note $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ l'action du point M_1 sur le point M_2 . Le principe des actions réciproques ou troisième loi de Newton indique que ces forces sont deux à deux opposées, ce qui se traduit par la relation

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}. \quad (10.2)$$

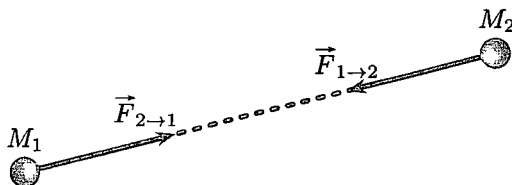


FIG. 10.1. Principe des actions réciproques.

La troisième loi de Newton impose l'égalité des normes des forces entre mobiles en interaction, $F_{1 \rightarrow 2} = \|\vec{F}_{1 \rightarrow 2}\|$ et $F_{2 \rightarrow 1} = \|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\|$. Elle n'impose généralement pas l'égalité des effets de ces forces ! Ainsi, les masses m_1 et m_2 étant *a priori* différentes, une force identique aura un effet bien plus marqué sur la masse la plus faible. Par exemple, l'action (de pesanteur) exercée par la Terre sur un mobile terrestre est égale, en norme, à l'action exercée en retour par ce mobile sur la Terre ; mais, compte tenu de la masse très élevée de la Terre ($M_T = 6,2 \cdot 10^{24} \text{ kg}$), on peut en général négliger l'influence de ce mobile sur le mouvement de la Terre elle-même !

Remarque Ce principe est remis en cause dans le cadre des théories de la relativité d'Einstein. Par exemple, l'effet ressenti par M_1 de la part de M_2 ne peut pas être instantané car, dans ces théories, aucune information ne peut se propager à une vitesse plus grande que celle de la lumière, ce qui est en contradiction avec l'expression de la troisième loi de Newton.

II. Lois de force

II.1. Lois d'interaction

La deuxième loi de Newton montre que la détermination de la vitesse et de la trajectoire d'un mobile M , c'est-à-dire la résolution d'un problème de mécanique, nécessite

de connaître toutes les forces qui s'exercent sur M . Il faudra donc toujours faire un *inventaire* des forces qui s'exercent sur le point mobile étudié. Ces forces appartiennent essentiellement à deux catégories :

- ▶ les premières relèvent des interactions fondamentales entre particules et font l'objet de descriptions exactes dans un modèle microscopique (loi de la gravitation, forces électromagnétiques, etc.). Ces forces peuvent toujours être exprimées exactement au moyen d'une loi mathématique précise ;
- ▶ les secondes sont des résultantes à notre échelle ou *résultantes macroscopiques* d'effets ou d'interactions complexes à l'échelle moléculaire (par exemple, les forces de frottements ou celle de rappel d'un ressort). Généralement, la complexité de ces interactions ne permet pas d'obtenir des expressions algébriques simples permettant de les décrire. Elles seront cependant toujours modélisées par un vecteur \vec{F} qui sera peut-être une inconnue du système mécanique. Parfois, l'expérimentation permet de déduire des *lois phénoménologiques* simples représentant ces forces. Il ne faut cependant pas perdre de vue que ces lois n'ont pas le même statut que les interactions fondamentales et ne font l'affaire que dans un certain domaine de validité déterminé expérimentalement.

II.2. Forces de gravitation

II.2.1. Loi de gravitation universelle

La loi de la gravitation a été énoncée par Newton à la fin du XVII^e siècle, sur la base des lois empiriques de Kepler, elles-mêmes issues des observations expérimentales de Tycho Brahé. Contrairement à ce que l'on pense généralement, Newton n'a pas postulé *ex nihilo* cette loi, mais l'a déduite de constats expérimentaux en comparant le mouvement de chute d'un objet à la surface de la Terre⁴ et le mouvement de la Lune (voir figure 10.2). Nous proposons de présenter ce moment divin de l'histoire des sciences sous la forme d'une approche de type documentaire.

Si l'on se place dans des conditions expérimentales telles que l'on peut négliger les frottements dus à l'air, lors de sa chute au voisinage du sol, une pomme voit le module de sa vitesse augmenter de $(\Delta v)_{\text{pomme}} = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ chaque seconde. C'est un constat expérimental !

En ce qui concerne la Lune, le mouvement semble bien différent ! Dans une première approximation, nous pouvons supposer que la trajectoire de la Lune est circulaire uniforme d'altitude $h = 3,76 \cdot 10^5 \text{ km}$ parcourue en $T = 27,4$ jours. Le rayon terrestre étant $R_T = 6,40 \cdot 10^3 \text{ km}$, le rayon de la trajectoire lunaire est donc

$$R = R_T + h = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

L'uniformité de la vitesse de la Lune sur sa trajectoire permet de la calculer simplement, on trouve la valeur remarquable $v = \frac{2\pi R}{T} \simeq 1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

D'après Newton, tout comme la pomme, la Lune tombe, mais reste pourtant sur sa trajectoire quasiment circulaire. Pour que cela soit possible, il suffit (voir figure 10.2 à droite) qu'à chaque seconde, le vecteur vitesse de la Lune tourne exactement du même angle θ que la Lune elle-même sur sa trajectoire. L'angle décrit par la Lune en une seconde est donné par $\theta = \frac{2\pi}{T} \times 1 \text{ s}$, soit $\theta \simeq 2,66 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$.

Pendant sa « chute » perpétuelle (voir figure 10.2), la variation de la direction de la vitesse de la Lune s'écrit $(\Delta v)_{\text{Lune}} = v \tan(\theta) \simeq 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ par seconde de mouvement.

4. La fameuse pomme souvent associée à Newton.

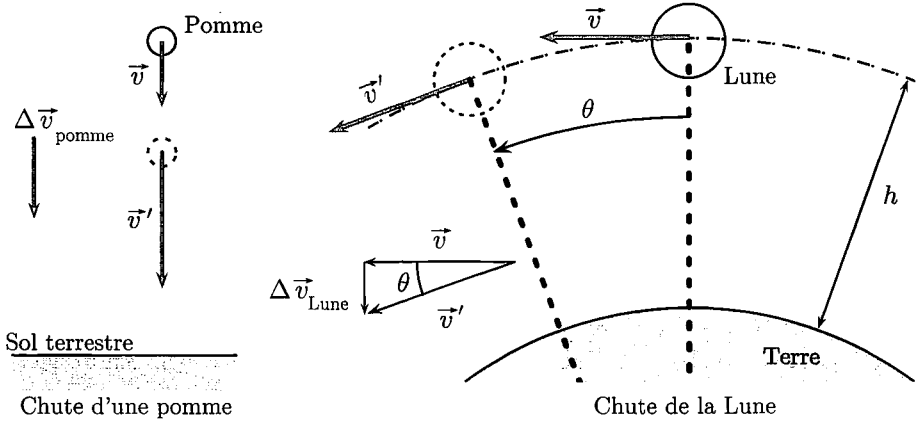


FIG. 10.2. Chute des corps.

Que ce soit la pomme ou la Lune, il y a bien dans les deux cas variation de la vitesse et donc de la quantité de mouvement : en module pour la pomme et en direction pour la Lune. Le génie de Newton est ici d'avoir compris que ces deux variations de quantité de mouvement sont les fruits d'une même force : la gravitation universelle. Pour cela il constate que

$$\frac{(\Delta v)_{\text{pomme}}}{(\Delta v)_{\text{Lune}}} = 3,6 \cdot 10^3 = \left(\frac{R}{R_T} \right)^2.$$

Il en conclut que la force de gravitation, à l'origine de la variation des vitesses de la Lune et de la pomme, décroît proportionnellement à l'inverse du carré de la distance au centre attracteur.

Après avoir montré que les lois de force sont de même nature pour la chute d'une pomme ou le mouvement d'un astre, on remarque encore que l'accélération acquise dans le champ de pesanteur $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ est la même pour tous les corps en chute libre : si le quotient $\frac{\vec{F}}{m}$ ne dépend pas de la masse m , c'est que la force \vec{F} est proportionnelle à la masse m (de la pomme, de la Lune, etc.). Newton propose alors une loi de force symétrique pour les rôles de deux points matériels en interaction (donc conforme au principe des actions réciproques).

Loi 10.7. Loi de la gravitation universelle

Deux points matériels M_1 et M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , s'attirent mutuellement proportionnellement à leurs masses et à l'inverse du carré de la distance d qui les sépare. En notant \vec{u}_{12} le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 ,

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{u}_{12} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}. \quad (10.3)$$

La constante G est appelée constante de gravitation universelle. Dans le système international d'unité, elle vaut $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

La constante G est positive, le signe $-$ est introduit pour marquer le caractère attractif de l'interaction gravitationnelle. En remarquant que le vecteur unitaire $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{d}$ (voir figure 10.3), la loi de gravitation universelle s'écrit également

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{d^3}. \quad (10.4)$$

La première évaluation de cette constante (et donc, indirectement, de la masse de la Terre) est due au physicien britannique Cavendish en 1798. Ultérieurement, une grande précision a été obtenue par le physicien hongrois Eötvös.

Les scalaires m_1 et m_2 qui interviennent dans l'expression de la force gravitationnelle sont des masses *pesantes*. Ces quantités mesurent la capacité des points M_1 et M_2 à interagir via la force de gravitation. Il n'existe *a priori* pas de lien entre la masse pesante et la masse d'inertie introduite dans les grandeurs cinétiques. Des expériences de plus en plus précises ont permis la mesure du rapport $\frac{m_{\text{inertie}}}{m_{\text{pesante}}}$, aucune n'a pu mettre en évidence une différence entre ce rapport et la valeur 1. L'égalité numérique des deux types de masses est l'un des principes de base de la relativité générale.

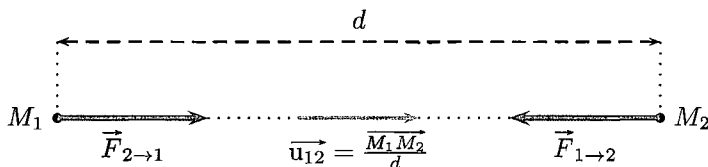


FIG. 10.3. Loi de la gravitation universelle.

II.2.2. Gravitation terrestre

On note C le centre de la Terre. On cherche à déterminer la force gravitationnelle qu'exerce la Terre sur un point M de masse m et situé à la distance r du centre $CM = \|\vec{CM}\| = r$. Nous allons utiliser l'expression de la loi d'interaction universelle entre deux points matériels en considérant la Terre constituée d'un très grand nombre N de points matériels de masse m_i . La masse M_T de la Terre est obtenue par la somme

$$M_T = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Notons $\vec{u}_i = \frac{\vec{M}_i \vec{M}}{\|\vec{M}_i \vec{M}\|}$ le vecteur unitaire dirigeant le vecteur $\vec{M}_i \vec{M}$ et $d_i = \|\vec{M}_i \vec{M}\|$. La force d'attraction exercée par la Terre sur le point M est la somme de toutes les forces exercées par les M_i et s'exprime donc comme

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = \sum_{i=1}^N -\mathcal{G} \frac{m_i m}{d_i^2} \vec{u}_i.$$

Cette expression est compliquée ! Une hypothèse simple mais réaliste consiste à supposer que la distribution des masses M_i est invariante par rotation autour du centre C de la figure 10.4. On constate alors toujours sur cette figure que, par symétrie, les forces \vec{F}_i peuvent être groupées deux à deux pour donner une résultante partielle dirigée selon le vecteur \vec{u} . La résultante globale de toutes les forces de gravitation exercées par la Terre sur le point M situé à l'extérieur de la planète s'écrit alors

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}. \quad (10.5)$$

Nous montrerons ultérieurement cette expression qui n'est bien sûr qu'approximative puisque la Terre n'est pas parfaitement sphérique et des termes correctifs seront à envisager pour une expression plus conforme à la réalité.

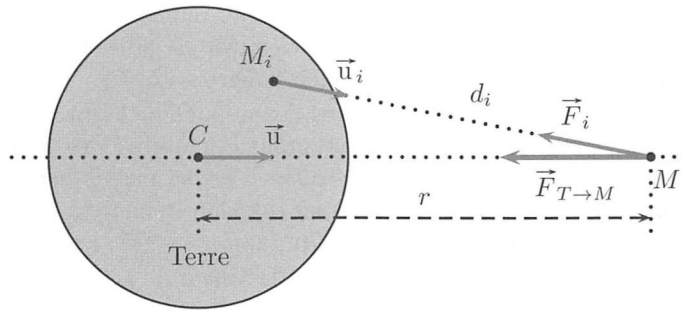


FIG. 10.4. Champ de gravitation terrestre.

II.2.3. Gravitation terrestre au niveau du sol

Plaçons-nous dans l'approximation d'une Terre sphérique de rayon R_T et posons $r = R_T + h$. La quantité h représente l'altitude du point M par rapport au sol. On suppose dans la suite que le point M reste au voisinage du sol, ce qui signifie que $\frac{h}{R_T} \ll 1$ car $R_T \simeq 6380 \text{ km}$ durant tout son mouvement. De même, lors d'un mouvement de faible amplitude par rapport aux dimensions de la Terre, on peut considérer que le vecteur \vec{u} varie très peu. On peut alors simplifier la description du champ de gravitation terrestre au voisinage du sol.

► D'une part, son intensité est quasiment constante,

$$-\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \simeq -\mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T^2} = -m g_0.$$

► D'autre part, sa direction ne change quasiment pas ; elle est opposée au vecteur $\vec{u} = \vec{u}_z$, unitaire, perpendiculaire au sol et dirigé vers le haut ; ce vecteur dirige alors la *verticale ascendante locale* sur la figure 10.5.

Au niveau du sol, la loi de gravitation terrestre s'écrit donc

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = m \vec{g}_0 = -m g_0 \vec{u}_z \quad \text{où} \quad g_0 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \simeq 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (10.6)$$

La quantité g_0 porte le nom d'*accélération de la pesanteur terrestre* et sa valeur numérique doit être retenue.

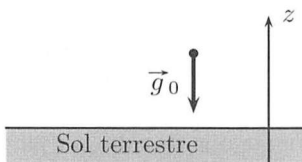


FIG. 10.5. Gravité terrestre.

Les conditions d'obtention de g_0 peuvent paraître très approximatives (répartition sphérique de la masse terrestre, référentiel terrestre galiléen...). Pourtant la prise en compte de ces diverses modifications ne fait varier la valeur de g_0 que de quelques pourcents. On utilisera donc la valeur proposée ci-dessus.

II.3. Forces élastiques

II.3.1. Une loi de comportement

Considérons un solide, ancré à l'une de ses extrémités, sur lequel on exerce une force dirigée selon un axe de symétrie (voir figure 10.6). On constate expérimentalement que le solide subit une déformation, sa longueur varie ainsi de ℓ_0 à ℓ . La section du solide ainsi que son volume varient également. En général, le volume augmente lorsque l'on exerce une traction et diminue en compression, c'est le cas de l'acier ; il y a cependant des cas exceptionnels où l'inverse se produit.

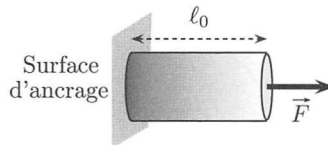


FIG. 10.6. Solide ancré.

On dira que la déformation est *élastique*, ou encore *réversible* si l'objet retourne à son état initial lorsque l'on supprime la contrainte.

La déformation élastique est *linéaire* si elle est proportionnelle à la contrainte ; cette situation se produit généralement pour de *petites déformations*. Contrairement à la loi de gravitation qui possède un statut théorique, les lois régissant les déformations des solides sont des lois de comportement qui dépendent du milieu étudié ; elles découlent d'observations : la description est phénoménologique⁵. Si la déformation devient trop importante, elle peut devenir élastique non linéaire puis non élastique ; on dit alors que la déformation est plastique, elle est alors irréversible : le système ne reprendra pas sa forme initiale lorsque l'on supprime la contrainte.

II.3.2. Loi de Hooke

Le cas le plus simple de déformation élastique est celui des ressorts. Nous avons représenté sur la figure 10.7 le cas d'un ressort à spire non jointive, que l'on peut donc solliciter en traction comme en compression. Pour le ressort, le domaine de l'élasticité linéaire reste valable même pour des valeurs $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ assez grandes, à condition que la déformation soit bien selon l'axe du ressort. Dans ces conditions, les forces exercées par un ressort élastique, fixé à ses deux extrémités aux points M et P , sont données par la *loi de Hooke* (voir figure 10.7).

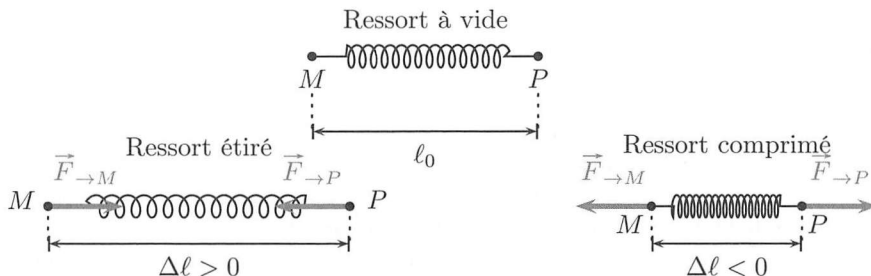


FIG. 10.7. Forces exercées par un ressort élastique sur ses extrémités.

5. Remarquons qu'il existe également des déformations élastiques en flexion et en torsion.

Loi 10.8. Loi de Hooke

Un ressort élastique exerce sur chacune de ses extrémités une force dirigée le long de l'axe du ressort, proportionnelle à l'allongement algébrique de celui-ci, et dirigée dans le sens qui s'oppose à la déformation du ressort.

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u} \quad \text{où} \quad \ell = MP \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{\ell} \quad (10.7)$$

Dans cette loi :

- ▶ le vecteur \vec{u} est unitaire, il est dirigé du point M , d'application de la force, vers l'extérieur du ressort ;
- ▶ la longueur ℓ_0 est celle du ressort sans contrainte, on parle de longueur à vide ; la constante k , mesurée en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, est appelée *raideur* du ressort, on caractérise également le ressort par sa souplesse $s = \frac{1}{k}$;
- ▶ la longueur $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ est l'allongement algébrique⁶ du ressort : si $\Delta\ell > 0$, le ressort est effectivement allongé (en extension) et si $\Delta\ell < 0$, il est en compression.

Sur la figure 10.7, on voit comment le signe de l'allongement commande le sens des forces exercées par le ressort sur les objets qui y sont liés.

Si le ressort possède une masse « nulle », il exerce sur son autre extrémité P la force $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow P} = -\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M}$. Il faut bien voir que, même si l'une des extrémités du ressort est fixée à une paroi, la déformation résulte de l'application de deux actions mécaniques opposées ; s'il n'y a qu'une seule force, en application du principe fondamental de la dynamique, la force accélère le ressort sans provoquer de déformation.

Attention**Signe et loi de Hooke**

Un ressort élastique de masse négligeable exerce à ses deux extrémités deux forces opposées. L'allongement du ressort dépend du déplacement de ces deux extrémités. En conséquence, les erreurs de signe sont fréquentes dans l'expression algébrique ou vectorielle de la force élastique. Ces erreurs conduisent en général à des solutions aberrantes des problèmes mécaniques. De telles erreurs sont donc faciles à éviter et doivent l'être à tout prix.

II.3.3. Cas des fils inextensibles

Considérons maintenant le cas d'un ressort de raideur k très élevée ; son allongement $\Delta\ell$ sera (en valeur absolue) très faible, mais le produit $k\Delta\ell$, c'est-à-dire la force exercée par le ressort sur ses extrémités, peut rester fini. Ce ressort, aux propriétés limites, peut modéliser un *fil inextensible de masse négligeable*. Lorsque le fil est tendu comme sur la partie gauche de la figure 10.8, son allongement est négligeable alors que la force qu'il exerce sur un objet accroché à son extrémité ne l'est pas. On note souvent \vec{T} cette force appelée *tension du fil*, toujours dirigée le long de l'axe du fil et vers l'autre extrémité. En général, le module de cette force n'est pas connu et l'utilisation de la

6. En physique, on dit qu'une quantité est algébrique si l'on veut préciser qu'elle peut être positive ou négative.

deuxième loi de Newton permet de la caractériser entièrement. Dans le cas où le fil n'est pas tendu, à droite de la figure 10.8, on négligera la force exercée en M en prenant $T = 0$.

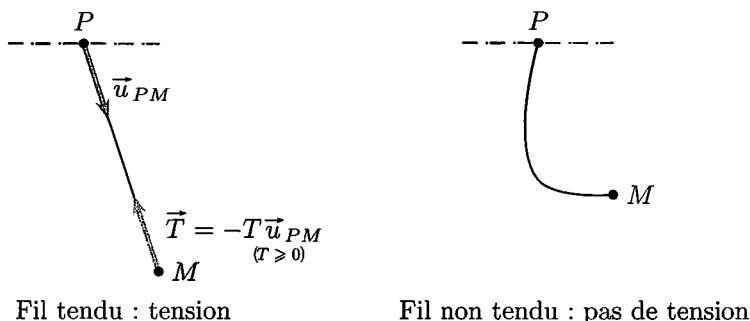


FIG. 10.8. Tension des fils inextensibles.

Pour fixer les idées tant sur les méthodes à mettre en œuvre que sur le type de problèmes rencontrés, nous proposons de traiter *in extenso* la mise en équation générale du pendule simple. Le cas des petites oscillations et une étude plus particulière de ce problème font l'objet de l'exercice 6 page 289.

EXERCICE CORRIGÉ 10.9. Équation du mouvement d'un pendule simple

Un point matériel M de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur ℓ , fixé au point O . Ce point est l'origine du référentiel galiléen $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, l'axe (O, \vec{u}_y) est selon la verticale descendante. À chaque instant t , on note $\theta(t) = (\overline{OM}, \vec{u}_y)$ l'angle entre le fil et la verticale. À l'instant $t = 0$, on lâche le point M sans vitesse initiale dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ depuis la position $\theta(t = 0) = \theta_0$.

1. Faire un schéma du système sur lequel on précisera les vecteurs unitaires de la base cartésienne $\mathcal{K} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ainsi que les différentes forces qui s'exercent sur le point M .
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le point M dans la base \mathcal{K} . En déduire que le mouvement s'effectue dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
3. En se plaçant dans la base polaire locale $\mathcal{P} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ dans le plan du mouvement, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et l'expression du module T de la tension du fil.

Corrigé

1. Le schéma est un élément essentiel de la résolution d'un problème de mécanique. Pour être utile, il est nécessaire qu'il soit suffisamment clair et explicite (on peut par exemple utiliser des couleurs), il doit aussi faire apparaître les vecteurs unitaires utilisés. Les angles choisis ne doivent pas prêter à confusion (sauf s'ils sont imposés par l'énoncé) : on évitera donc les angles dont le sinus et le cosinus ont des valeurs absolues semblables (pas d'angles à 45° par exemple!). En ce qui concerne le problème du pendule proposé, la gravité impose le sens de \vec{u}_y ; le sens de \vec{u}_x n'est pas imposé par le problème, il est choisi de façon arbitraire. Une fois \vec{u}_x et \vec{u}_y choisis, \vec{u}_z est imposé par le fait que la base \mathcal{K} est directe : pour trouver le sens de \vec{u}_z on utilise donc la règle de la main droite. Le schéma est ainsi celui proposé sur la figure 10.9.

Les deux forces subies par le point M sont la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_y$ et la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r = \frac{\overline{OM}}{\|\overline{OM}\|}$ et $T > 0$.

2. La quantité de mouvement de la particule de masse m dans (\mathcal{R}) s'écrit $\vec{p}_{M/(\mathcal{R})} = m\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$. En coordonnées cartésiennes, $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$, ainsi $\vec{p}_{M/(\mathcal{R})} = m(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z)$. Une lecture de la figure 10.9 montre que $\vec{P} = mg\vec{u}_y$ et $\vec{T} = -T(\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y)$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans ce problème $\vec{p}_{M/(\mathcal{R})} = \vec{P} + \vec{T}$; en explicitant chaque vecteur dans \mathcal{K} , il vient

$$(m\ddot{x} + T\sin(\theta))\vec{u}_x + (m\ddot{y} + T\cos(\theta) - mg)\vec{u}_y + m\ddot{z}\vec{u}_z = \vec{0}.$$

Un vecteur est nul si et seulement si toutes ses composantes sont nulles. Le principe fondamental de la dynamique implique donc trois relations qui sont ici (comme dans la plupart des problèmes de mécanique) trois équations différentielles. L'annulation de la composante selon \vec{u}_z s'écrit $m\ddot{z} = 0$ que l'on intègre en $m\dot{z} = \alpha$ puis $mz(t) = \alpha t + \beta$. Dans cette relation, α et β sont des constantes d'intégration, on les détermine en considérant les conditions initiales du problème : à $t = 0$, le point est dans le plan $z = 0$ donc $\beta = 0$, et sa vitesse est nulle donc

$$\dot{x}(t=0) = \dot{y}(t=0) = \dot{z}(t=0) = 0,$$

ainsi $\alpha = 0$. La fonction $z(t)$ est donc identiquement nulle : le point M reste dans le plan $z = 0$.

3. Dans le plan du mouvement, on introduit la base polaire locale $\mathcal{P} = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ représentée sur la figure 10.9. Dans cette base, $\vec{OM} = \ell\vec{u}_r$ donc $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \dot{\ell}\vec{u}_r + \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, la longueur du fil est constante et nous avons vu dans le chapitre de cinématique que $\vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$, ainsi $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. En dérivant par rapport au temps, et en se souvenant que $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$, on trouve alors que $\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r$. Dans la base polaire locale, le schéma du problème montre immédiatement que $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ et $\vec{P} = mg(\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$. En explicitant chaque vecteur dans \mathcal{P} , le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \vec{T} + \vec{P}$ s'écrit donc

$$m\ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - m\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -T\vec{u}_r + mg(\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta).$$

En regroupant les termes selon les mêmes composantes, on trouve finalement deux équations

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \\ T = m[g\cos(\theta) - \ell\dot{\theta}^2]. \end{cases}$$

La première équation permet d'obtenir $\theta(t)$: il s'agit de l'équation du mouvement du problème, sa résolution doit ici être envisagée de façon numérique car il s'agit d'une équation différentielle non linéaire du second ordre. Une fois la fonction $\theta(t)$ connue, la seconde équation permet d'obtenir $T(t)$. On remarquera que T n'est alors généralement plus l'opposé du poids comme à l'équilibre.

II.4. Liaisons et frottements

Les forces de liaison et de frottements résultent d'interactions complexes entre deux corps, et cela à l'échelle microscopique. À notre échelle, c'est une résultante de ces forces que nous observons et notre description sera phénoménologique. Les modèles utilisés sont donc issus des expériences et représenteront souvent des situations idéalisées.

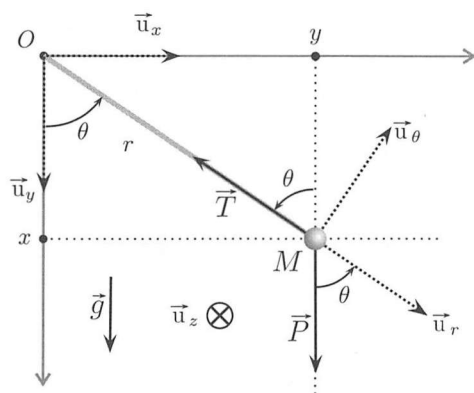


FIG. 10.9. Pendule simple.

II.4.1. Contact avec un support

Nous nous plaçons ici dans le cas d'un mobile M qui glisse sur un support solide Σ . On note \vec{R} la résultante macroscopique des forces de contact exercées par Σ sur le mobile, appelée *réaction* du support (voir figure 10.10).

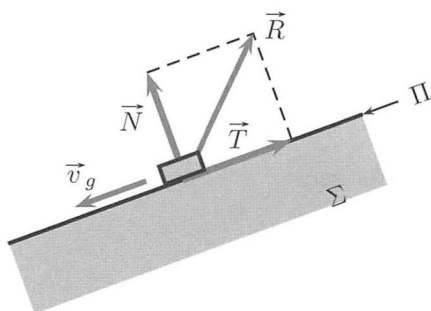


FIG. 10.10. Réaction du support sur un mobile.

On décompose \vec{R} en deux composantes $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$:

- la composante normale \vec{N} est la projection de \vec{R} sur la normale au plan Π tangent aux deux solides en contact. Le vecteur \vec{N} est donc orthogonal au support, et dirigé de celui-ci vers le solide ;
- la composante tangentielle \vec{T} est la projection orthogonale de \vec{R} sur Π . Ce vecteur modélise les frottements entre le solide et le support.

Attention

Frottement \neq glissement

Si l'on prend en compte les frottements, la composante \vec{T} existe toujours, même si le solide ne bouge pas. On dit alors que le solide adhère au support et c'est justement cette composante qui, en équilibrant \vec{N} et le poids, empêche le solide de bouger !

II.4.2. Lois phénoménologiques du frottement sec

L'étude des frottements a été initiée par Léonard de Vinci vers 1500 ; c'est Coulomb qui la formalisera en 1760 en introduisant notamment les lois relatives aux composantes normales et tangentielles. Nous en donnons une première expression simplifiée. Étudions le mouvement du mobile dans le référentiel du support noté (\mathcal{R}_Σ) . La grandeur importante pour la modélisation des frottements est la vitesse du mobile par rapport à (\mathcal{R}_Σ) . Cette vitesse est souvent appelée *vitesse de glissement* et on la notera $\vec{v}_g = \vec{v}_{M/(\mathcal{R}_\Sigma)}$.

Loi 10.10. Lois du frottement sec

- La composante normale \vec{N} est dirigée du support vers le mobile ; elle assure l'impenétrabilité du support solide. La condition $\vec{N} = \vec{0}$ caractérise le décollage du mobile à partir de son support.
- La force de frottement s'oppose au mouvement, $\vec{T} \neq \vec{0}$.

Dans certains cas idéalisés, on peut négliger les forces de frottement devant les autres forces en jeu. La composante tangentielle est alors considérée nulle, $\vec{T} = \vec{0}$; la réaction du support est alors normale, $\vec{R} = \vec{N}$. Dans la réalité, les frottements sont toujours présents, sinon tout déraperait comme sur une route verglacée ! Le contact entre les solides est généralement à l'origine de frottements dits secs.

Loi 10.11. Modèle pour les frottements secs

- Si la vitesse de glissement \vec{v}_g est non nulle :
 - ◇ le vecteur \vec{T} est colinéaire à \vec{v}_g , ainsi $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$;
 - ◇ le vecteur \vec{T} s'oppose au mouvement, ainsi $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$;
 - ◇ il existe un paramètre f_d sans dimension, appelé coefficient de frottement dynamique, vérifiant $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$.
- Dans toutes les situations où les frottements empêchent le mouvement du mobile par rapport au support, $\vec{v}_g = \vec{0}$, il existe un paramètre f_s sans dimension, appelé coefficient de frottement statique, tel que $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$. On parle d'adhérence.

Les coefficients de frottement f_d et f_s sont des paramètres expérimentaux. Ils caractérisent les matériaux en contact, mais dépendent des conditions (température, pression, humidité, etc.) du contact et aussi de l'état de surface. Leur étude fait partie d'un sous-domaine de la mécanique appelé tribologie. Notons que plus f_d est grand, plus les frottements sont importants. Par exemple pour un contact acier-acier, f_d varie de 0,15 à 0,60 suivant l'état de surface et les conditions expérimentales. Le contact béton-sol est tel que $f_d \in [0,60; 0,90]$. Enfin, le freinage automobile est souvent assuré par un contact entre des plaques en dérivés carbonés et un disque d'acier pour lequel le coefficient f_d est de l'ordre de 0,5. En général, $f_d \leq f_s$; cependant, dans de nombreux modèles simplifiés, on écrit souvent $f_d \simeq f_s$.

L'effet des frottements secs peut donc être résumé dans le tableau ci-après.

	Glissement	Adhérence
Vitesse de glissement	$\vec{v}_g \neq \vec{0}$	$\vec{v}_g = \vec{0}$
Réaction du support	$\vec{T} = -f_d N \frac{\vec{v}_g}{ \vec{v}_g }$	$T < f_s N$

On remarque que dans chacun des cas (glissement ou adhérence), il existe deux relations, l'une des deux seulement étant une égalité.

II.4.3. Lois phénoménologiques du frottement visqueux (ou fluide)

Un mobile qui se déplace dans un fluide (l'air, par exemple) est soumis, de la part de ce fluide, à une force de frottement dit visqueux ou fluide, qui tend à s'opposer à sa vitesse. Si la vitesse du mobile par rapport au fluide est « faible », la norme de la force de frottement est approximativement proportionnelle à la norme de la vitesse du mobile. Si elle est « grande », la force est approximativement proportionnelle à la norme *au carré* de cette vitesse.

Loi 10.12. Modèle pour les frottements visqueux

On note \vec{v} la vitesse du mobile par rapport au fluide.

► Si la norme de \vec{v} est « faible », la force de frottement est de la forme

$$\vec{F} = -\lambda \vec{v} \text{ avec } \lambda > 0.$$

► Si la norme de \vec{v} est « grande », la force s'écrit

$$\vec{F} = -\mu \|\vec{v}\| \vec{v} \text{ avec } \mu > 0.$$

Les facteurs λ ou μ sont appelés coefficients de frottement visqueux.

La frontière entre les domaines de « faible » et « grande » vitesses dépend de plusieurs facteurs : masse volumique et viscosité du fluide, taille du mobile solide. Ces paramètres variant d'un problème l'autre, on ne peut, à ce stade, pas donner de valeur pour la vitesse de transition. En première année des CPGE, un énoncé d'exercice indique toujours la forme à utiliser pour les frottements fluides.

II.5. Forces électromagnétiques

L'atome est constitué de protons, de neutrons et d'électrons, appelés particules élémentaires. Comme nous l'avons vu page 272, l'une des caractéristiques de la particule est sa masse. Cependant l'expérience montre qu'une autre est essentielle, il s'agit de la *charge électrique* q . Comme pour la masse, la charge est invariante par changement de référentiel, mais son signe peut être positif (protons, cations, noyaux atomiques), négatif (électrons, anions) ou nul comme dans le cas du neutron. Dans le système international, l'unité de charge est le coulomb (symbole C) et à l'échelle atomique, la charge q d'un système physique est toujours un multiple entier de la charge élémentaire e .

Un système macroscopique chargé est constitué d'un très grand nombre de particules qui semble varier de façon continue dans tout son volume. Il faut savoir également que le coulomb est une « grosse » unité qui est largement surdimensionnée, car si un système macroscopique possède généralement une charge très grande par rapport à la charge élémentaire e , elle restera souvent très inférieure à 1 C. On mesure

$$e = 1,660217646 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

L'existence et le mouvement des charges électriques sont à l'origine des champs électriques et magnétiques. La présence de ces derniers est elle-même à l'origine de forces dites électromagnétiques. Le chapitre 12 est entièrement consacré à l'étude de ces phénomènes.

III. Exercices

Méthode

La résolution d'un problème de mécanique suit une procédure assez automatique en fonction des questions posées et des impératifs de l'énoncé.

- ▶ On commence par définir le système étudié, on indique alors le référentiel d'étude.
- ▶ On se lance ensuite dans le bilan des actions considérées, puis on dessine un schéma muni des vecteurs unitaires utiles.
- ▶ On écrit alors le principe fondamental de la dynamique. La projection de cette relation vectorielle sur les différents vecteurs de base considérés donne alors des relations entre les grandeurs recherchées.
- ▶ Ces relations sont souvent des équations différentielles que l'on peut tenter de résoudre.

1. La Lune, notre satellite ?

(solution page 706)

La Terre, la Lune et le Soleil sont des corps célestes assimilables à des points sur les échelles de distances qui les séparent. En effet, la distance moyenne Terre-Lune est de l'ordre de $d_{TL} = 3,80 \cdot 10^5$ km et la distance Terre-Soleil, aussi appelée unité astronomique, est en moyenne environ 400 fois supérieure. Les masses de ces corps sont $m_L = 7,36 \cdot 10^{22}$ kg, $m_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg et $m_S = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg.

Parmi ces trois corps, qui tourne autour de qui ? Quelle est l'origine de ces mouvements ? Une application numérique en ordre de grandeur confirme-t-elle cette origine ?

2. Frottement fluide

(solution page 707)

Une voiture, assimilée à un point de masse m , roule sur une route rectiligne horizontale dirigée par le vecteur \vec{u}_x . Sa vitesse est constante et s'écrit $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. À l'instant $t = 0$, on coupe son moteur et elle n'est plus soumise qu'à une force de frottement fluide linéaire, c'est-à-dire proportionnelle à la vitesse $\vec{F} = -h\vec{v}$. Grâce à des roues

possédant des essieux parfaitement huilés, tout se passe comme si la route exerçait sur la voiture une réaction nulle selon \vec{u}_x .

- Déterminer la loi de variation de \vec{v} en fonction du temps. On fera apparaître une constante de temps τ que l'on définira.
- En déduire l'équation horaire du mouvement $x(t)$.

3. Glissement sur un plan incliné

(solution page 707)

1. Le cas 1 de la figure 10.11 représente une portion de plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle α . Un chariot de masse m est mobile sans frottement sur des rails posés parallèlement à une ligne de plus grande pente du plan. Sa position est repérée sur l'axe (O, \vec{u}_x) par l'abscisse x de son centre d'inertie G . On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le chariot est lancé vers le haut depuis la position $x(t = 0) = 0$ avec la vitesse $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$.

Pour quelle valeur de v_0 , la vitesse du chariot s'annule-t-elle au point A d'abscisse $x = a$? On exprimera v_0 en fonction de g , a et α .

2. Le cas 2 de la figure 10.11 représente le même plan incliné muni d'un dispositif à ressort, poulie et fil, qui permet d'exercer sur le chariot une force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$, les constantes k et ℓ_0 étant respectivement la raideur et la longueur à vide du ressort. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, on a $\ell = \ell_0$ et que le chariot est lancé vers le haut depuis la position $x(t = 0) = 0$ avec la vitesse $\vec{v}(t = 0) = v_1 \vec{u}_x$. Il atteint ensuite le point B où sa vitesse s'annule et redescend.

En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de v_1 , k , m , g et α . Pour quelle valeur de v_0' le point B est-il confondu avec le point A ? On donnera v_1 en fonction de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a et v_0 .

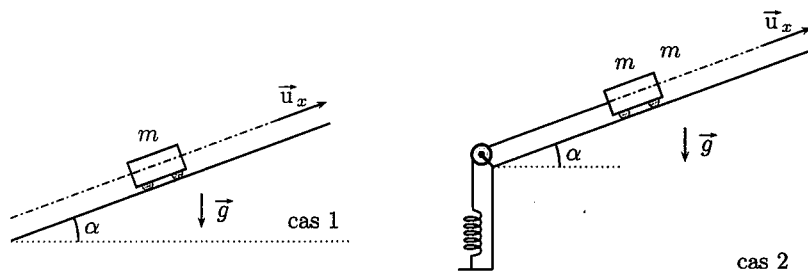


FIG. 10.11. Chariot sur plan incliné.

4. Oscillateurs à ressorts ★

(solution page 709)

Un point matériel M de masse m (voir figure 10.12) est astreint à glisser sans frottement le long de l'axe vertical ascendant (Oz) ; il peut être fixé aux deux points O ($z = 0$) et A ($z = H$) par deux ressorts, respectivement de raideurs k_1 et k_2 et de longueurs à vide ℓ_1 et ℓ_2 . On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur. Les points O et A sont rigidement fixés à un bâti et une glissière sans frottement assure le maintien de M selon l'axe (O, \vec{u}_z) . Ni le bâti ni la glissière ne sont représentés sur la figure 10.12.

- Dans le cas (a), un seul ressort (k_1, ℓ_1) relie le point M au point O .
a/ Établir l'équation du mouvement.

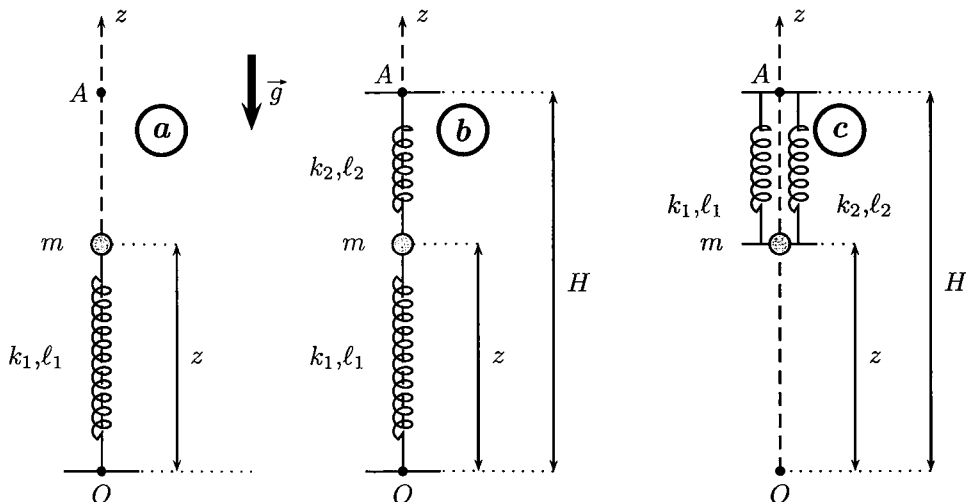


FIG. 10.12. Oscillateurs à ressorts.

b/ Déterminer la position d'équilibre z_0 .

c/ Déterminer la période des oscillations autour de l'équilibre.

d/ Comment ces résultats sont-ils modifiés si le ressort lie M au point A ?

2. Dans le cas (b), le ressort (k_1, ℓ_1) relie le point M au point O et le ressort (k_2, ℓ_2) relie M au point A .

a/ Établir l'équation du mouvement.

b/ En déduire que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un ressort unique qui serait fixé en O ; déterminer ses caractéristiques (k, ℓ) . En déduire la période des oscillations autour de l'équilibre.

c/ Montrer que l'ensemble est encore équivalent à un ressort unique qui serait fixé en A ; déterminer ses caractéristiques (k', ℓ') ; commenter.

3. Dans le cas (c), les deux ressorts (k_1, ℓ_1) et (k_2, ℓ_2) relient ensemble M et A .

a/ Établir l'équation du mouvement.

b/ Montrer que l'ensemble est encore équivalent à un ressort unique qui serait fixé en A ; déterminer ses caractéristiques (k'', ℓ'') ; commenter.

5. Un peu de balistique ★

(solution page 709)

On lance, depuis le point O , avec une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant l'angle α avec la verticale, un mobile M de masse m dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Cet exercice complète l'étude cinématique introduite dans l'exercice corrigé 9.7 du chapitre 9 (voir page 260) dont on utilisera les résultats.

1. On néglige tout frottement.

a/ Déterminer la portée du tir, c'est-à-dire la distance du point de tir à laquelle le mobile retombe dans le plan horizontal du départ. Pour quelle valeur de α cette portée est-elle maximale, si la norme v_0 de \vec{v}_0 est fixée?

b/ Montrer aussi que, pour v_0 fixé, la trajectoire reste toujours au-dessous d'une courbe appelée *parabole de sûreté*, dont on déterminera l'équation.

2. On prend en compte maintenant un frottement fluide du mobile sur l'air, de la forme $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$.

a/ Quelle est l'unité de mesure de τ ? Exprimer les composantes horizontale et verticale de la vitesse en fonction du temps. En déduire les lois horaires du mouvement.

b/ Montrer que la vitesse de M admet une limite que l'on déterminera. Quelle est la nouvelle expression de la portée maximale du tir?

3. On abandonne maintenant le point M sans vitesse initiale d'une hauteur h et on prend en compte, en plus du poids, une force de frottement visqueux quadratique de norme λv^2 , opposée à la vitesse.

a/ Établir l'équation différentielle du mouvement.

b/ Montrer que le mouvement peut admettre une vitesse limite constante. En résolvant l'équation différentielle du mouvement par séparation des variables, déterminer la durée de chute minimale qu'il est nécessaire d'attendre pour considérer que cette vitesse limite est atteinte à 1 % près?

6. Mouvement d'un pendule ★★

(solution page 710)

Un point matériel M de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur ℓ_0 , fixé au point O d'un référentiel galiléen $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ dont l'axe (O, \vec{u}_z) est vertical ascendant. On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

La position du pendule est repérée par l'angle θ fait par le fil avec la verticale. On lance le fil depuis la position d'équilibre $\theta = 0$ avec la vitesse angulaire initiale $\omega_0 = \dot{\theta}(t = 0)$.

1. Déterminer l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par θ . On posera $\Omega_0^2 = \frac{g}{\ell_0}$.

2. On pose $\omega = \dot{\theta}$, déterminer $\omega \frac{d\omega}{d\theta}$. En déduire ω^2 en fonction de θ .

3. Quelle est l'expression de la période T_0 des petites oscillations de θ ? Comment se comporte la période des oscillations si leur amplitude augmente?

4. Exprimer la force de tension \vec{F} exercée par le fil sur la masse, en fonction de θ . Le fil reste-t-il tendu pendant toute la durée du mouvement?

5. On suppose que l'on peut ajuster les conditions initiales de sorte que le point M soit en mouvement circulaire dans un plan horizontal $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Montrer que :

a/ d'une part, le mouvement est nécessairement uniforme de pulsation Ω ;

b/ d'autre part, un tel mouvement n'est possible que si Ω est supérieur à une certaine valeur Ω_{\min} , que l'on exprimera en fonction de Ω_0 .

7. Perle sur un anneau ★★★

(solution page 711)

Une perle M est enfilée sur un anneau circulaire de rayon R fixe dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. La perle est assimilée à un point matériel qui peut se déplacer sur l'anneau (voir figure 10.13).

On suppose l'existence d'un frottement sec vérifiant les lois phénoménologiques de Coulomb. On note f le coefficient de frottement entre le mobile M et l'anneau. Le point est lancé depuis la position $\theta = 0$, dans la direction des $\theta > 0$ avec une vitesse initiale de module v_0 .

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le module de la vitesse $v = R\dot{\theta}$ du point M .

2. On pose $u = \frac{v}{\sqrt{gR}}$. Montrer que la durée τ du mouvement peut s'écrire sous la forme $\tau = \beta \int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$, avec α et β à déterminer.

3. On suppose que $\frac{v_0}{\sqrt{gR}} \ll 1$, donner alors une valeur approchée de τ en fonction de v_0 , f et g .

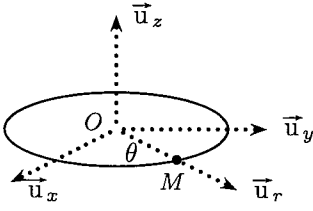


FIG. 10.13. Perle sur un anneau.

Chapitre 11

TRAVAIL, PUISSANCE ET ÉNERGIE

LES LOIS de conservation ont été considérées dans un premier temps comme des conséquences des lois dynamiques : sous le nom de *théorème des forces vives*, on doit à Huygens la première formulation de la loi de conservation de l'énergie. Les développements théoriques proposés notamment par Lagrange¹ ont permis de dégager progressivement le concept moderne d'énergie en physique, et en particulier en mécanique.

Chaque système en interaction avec son environnement échange avec celui-ci de l'énergie : il peut en fournir ou en recevoir, mais l'énergie ne peut être détruite ; elle est seulement échangée entre systèmes, en changeant éventuellement de forme. Ce principe de conservation est tellement fondamental que, lorsqu'il a semblé être violé dans l'étude de la désintégration² β , les physiciens ont préféré *inventer* une particule invisible pour restaurer la loi de conservation³.



Joseph Louis Lagrange

Les calculs simples menés à partir des lois de Newton dans ce chapitre ne montreront pas toujours une telle conservation ; dans les systèmes subissant des frottements par exemple, on montrera une diminution de l'*énergie mécanique*. Il ne faudra pas oublier que cette dernière n'est qu'une des formes de l'énergie ; il peut y avoir conversion en d'autres formes d'énergie (thermique, électrique) non décrites ici.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous considérons un point matériel mobile M de masse m en mouvement relativement au référentiel galiléen (\mathcal{R}) sous l'action de diverses forces $\vec{F}_{i \rightarrow M}$; le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit donc

$$m \left(\frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \sum_i \vec{F}_{i \rightarrow M} .$$

1. Joseph Louis, comte de Lagrange est un mathématicien, mécanicien et astronome italien, né à Turin en 1736 et décédé à Paris en 1813. Il passe trente ans dans le Piémont, puis vingt et un ans à Berlin, et le restant de ses jours à Paris. Il jette les bases du calcul des variations et publie en 1758 ses premiers résultats sur son application à des problèmes de mécanique. Durant sa période berlinoise, il publie plus de 80 mémoires sur diverses problématiques : algèbre, calcul infinitésimal, probabilités, théorie des nombres, mécanique théorique et céleste, mécanique des fluides, cartographie... Lagrange publie son célèbre livre de mécanique analytique en 1788, alors qu'il est membre de l'Académie des sciences de Paris. Il devient ensuite le premier professeur d'analyse de l'École polytechnique, fondée en 1794, et enseigne un an plus tard à l'École normale supérieure nouvellement créée.

2. C'est une désintégration radioactive dans laquelle une particule bêta (un électron ou son antiparticule, le positron) est émise.

3. C'est en 1931 que Wolfgang Pauli propose que l'énergie « manquante » dans la désintégration bêta est emportée par une autre particule, non encore découverte : le neutrino, qui fut observé pour la première fois en 1956.

I. Puissance et travail

I.1. Puissance

I.1.1. Définition et unité

Définition 11.1. Puissance

On appelle *puissance exercée par la force* $\vec{F}_{i \rightarrow M}$ dans le référentiel (\mathcal{R}) à l'instant t le produit scalaire de cette force par la vitesse de M ,

$$\mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}/(\mathcal{R})}(t) = \vec{F}_{i \rightarrow M}(t) \cdot \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}(t).$$

L'unité SI de mesure de la puissance porte le nom usuel de watt, son symbole est W, on notera que $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}$.

Précisons quelques ordres de grandeur :

- ▶ la puissance fournie par un moteur alimenté par piles est en général de l'ordre de quelques fractions de watt ;
- ▶ celle d'un appareil électrique plus puissant (four ou radiateur alimenté par le secteur 240 V) atteint quelques kilowatts ;
- ▶ la puissance d'un moteur à combustion interne (d'automobile) est de l'ordre de la centaine de kilowatts ;
- ▶ celle des moteurs d'une rame de TGV atteint une dizaine de mégawatts.

I.1.2. Puissances des forces motrices et résistantes

Une force ne fournit une puissance que si son point d'application M se déplace ; dans le cas (a) de la figure 11.1, la puissance exercée est *positive* et la force est dite *motrice*, car elle contribue de manière positive au mouvement de M sur sa trajectoire.

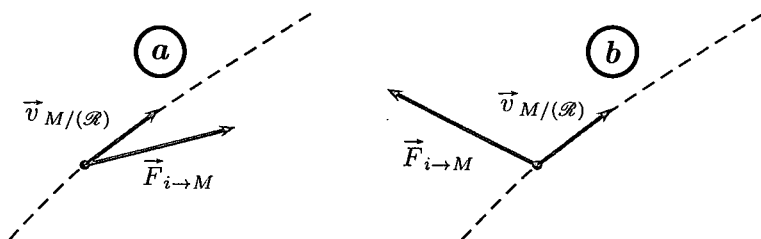


FIG. 11.1. Puissance fournie par une force.

Au contraire, dans le cas (b) de la figure 11.1, la puissance exercée est *negative* et la force est dite *résistante*. Une force peut aussi être *de puissance nulle* si elle est perpendiculaire au mouvement (ou si elle s'applique à un point immobile dans le référentiel d'étude).

Toutes ces propriétés algébriques de la puissance sont dues à sa définition qui fait intervenir le produit scalaire entre la force et la vitesse. Le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs confère un signe à la puissance.

Remarque On peut rencontrer pour $\mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}/(\mathcal{R})}$ diverses notations simplifiées, $\mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}}$ ou \mathcal{P} par exemple; on n'oubliera pourtant jamais que la puissance dépend effectivement de la force $\vec{F}_{i \rightarrow M}$ considérée, du mouvement du point M sur lequel elle s'applique et du référentiel (\mathcal{R}) choisi pour calculer cette puissance!

I.2. Travail

I.2.1. Définitions et unité

Considérons le déplacement élémentaire $d\vec{r} = \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} \cdot dt$ du point M , évalué relativement au référentiel (\mathcal{R}), au cours de la durée dt .

Définition 11.2. Travail élémentaire

On appelle travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}_{i \rightarrow M}$ au point M au cours de son déplacement, la grandeur notée δW (W pour work), produit scalaire de la force et du déplacement,

$$\delta W_{\vec{F}_{i \rightarrow M}} = \mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}/(\mathcal{R})}(t) dt = \vec{F}_{i \rightarrow M} \cdot d\vec{r}.$$

L'unité de mesure SI du travail porte le nom usuel de joule, son symbole est J, on notera que $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le signe du travail élémentaire est le même que celui de la puissance $\mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}/(\mathcal{R})}$; il possède donc la même interprétation physique en termes de forces motrices ou résistantes. L'unité de mesure est bien sûr différente!

On peut aussi définir le travail global exercé par cette même force lors du déplacement menant du point de vecteur position \vec{r}_1 (départ à l'instant t_1) jusqu'au point \vec{r}_2 (arrivée à l'instant t_2). Il suffit pour cela de sommer toutes les contributions élémentaires.

$$W_{\vec{F}_{i \rightarrow M}, t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}/(\mathcal{R})}(t) dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{i \rightarrow M} \cdot d\vec{r}$$

Remarque L'utilisation de la notation δW pour le travail élémentaire, au lieu de la notation dW qui ne devrait en principe jamais être employée, n'est pas fortuite. La raison de ce choix est aussi simple que fondamentale. Le travail δW (ou sa somme W) ne dépend pas seulement du point de départ et du point d'arrivée, mais aussi, en général, du chemin suivi pour passer de l'un à l'autre. L'emploi d'une notation dW suggérerait l'existence d'une fonction W qui permettrait d'écrire $\int_{\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B} dW = W(\vec{r}_B) - W(\vec{r}_A)$. Cela n'est en général pas le cas. Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer une force de frottement d'un mobile sur le sol : le travail résistant, donc négatif, fourni par cette force sera (en valeur absolue) plus important sur un trajet long que sur un trajet court, quand bien même les points de départ et d'arrivée sont identiques.

Attention Notation pour le travail

Bien que la notation ne le précise pas explicitement, le travail élémentaire $\delta W_{\vec{F}_{i \rightarrow M}}$ ou sa version globale $W_{\vec{F}_{i \rightarrow M}, t_1 \rightarrow t_2}$ dépendent :

- ▶ du référentiel (\mathcal{R}) ;
- ▶ de la force considérée ;
- ▶ du trajet suivi par le point M pour passer du point de départ au point d'arrivée. Le travail sur un trajet fini sera donc noté W ou $W_{\vec{F}_{i \rightarrow M}, t_1 \rightarrow t_2}$, mais jamais ΔW .

Précisons qu'il existe des cas particuliers pour lesquels le travail de certaines forces ne dépend que des positions initiale et finale : on parlera alors de *forces conservatives*. Toutefois, même dans ce cas, on conserve les notations δW et W .

II. Théorème de l'énergie cinétique

II.1. Théorème de la puissance cinétique

II.1.1. Énoncé du théorème

Le produit scalaire du principe fondamental de la dynamique par le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ s'écrit $m \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} \cdot \left(\frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \left(\sum_i \vec{F}_{i \rightarrow M} \right) \cdot \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$. Dans le premier membre de cette relation, on reconnaît la dérivée $\frac{1}{2} m \frac{dv_{M/(\mathcal{R})}^2}{dt}$, et dans le second $\mathcal{P}_{\rightarrow M/(\mathcal{R})}(t) = \sum_i \mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M/(\mathcal{R})}}$, la puissance fournie par *toutes* les forces au mobile M dans le référentiel galiléen (\mathcal{R}).

Définition 11.3. Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un mobile M de masse m et de vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ dans le référentiel (\mathcal{R}) est définie par l'expression toujours positive

$$\mathcal{E}_{c, M/(\mathcal{R})} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}^2.$$

Afin de simplifier certaines notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point considéré, on pourra écrire $\mathcal{E}_{c, M/(\mathcal{R})} = \mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}$; lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le référentiel considéré, $\mathcal{E}_{c, M/(\mathcal{R})} = \mathcal{E}_c(M)$ et même dans certains cas explicites on parlera de \mathcal{E}_c .

En rassemblant les calculs précédant la définition de l'énergie cinétique, on construit le théorème suivant.

Théorème 11.4. Théorème de la puissance cinétique

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel mobile M dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) est égale à la somme des puissances de toutes les forces qui s'exercent sur M ,

$$\frac{d\mathcal{E}_{c, M/(\mathcal{R})}}{dt} = \mathcal{P}_{\rightarrow M/(\mathcal{R})}(t). \quad (11.1)$$

II.1.2. Intégrale première de l'énergie cinétique

Dans le cas très particulier où *aucune force ne travaille*, par exemple parce que ces forces sont en permanence orthogonales à la vitesse, l'énergie cinétique du mobile reste constante au cours du temps. Comme cette constante ne fait intervenir que la vitesse, donc de dérivée *première* de la position au cours du temps, on parle alors d'*intégrale première* du mouvement.

$$\mathcal{P}_{\rightarrow M/(\mathcal{R})}(t) = 0 \implies \mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})} = \text{constante}$$

Cette conservation implique celle de $\|\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}\|$. On remarquera cependant que le vecteur vitesse n'est pas forcément constant, puisque sa direction peut varier ; seule sa norme reste constante.

II.2. Théorème de l'énergie cinétique

II.2.1. Énoncé du théorème

Le théorème de la puissance cinétique fournit une relation instantanée, c'est-à-dire valable à chaque instant, entre la dérivée de l'énergie cinétique et la puissance des forces exercées sur un mobile. On peut aussi proposer une interprétation *intégrale* de ce théorème : sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ on peut écrire

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}}{dt} dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\vec{F}_i \rightarrow M/(\mathcal{R})} dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\vec{F}_i \rightarrow M}.$$

Dans le dernier terme, on reconnaît le travail fourni par toutes les forces au point M ; alors que le premier, qui s'écrit $\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}(t_2) - \mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}(t_1)$, correspond à la *variation* de l'énergie cinétique sur l'intervalle de temps considéré. Cette variation sera notée $\Delta\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}$.

Théorème 11.5. Théorème de l'énergie cinétique

Lors du déplacement d'un mobile M entre les instants t_1 et t_2 , la variation de l'énergie cinétique est égale à la somme de tous les travaux des forces exercées sur ce mobile,

$$\Delta\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})} = \mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}(t_2) - \mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}(t_1) = \sum_i W_{\vec{F}_i \rightarrow M, t_1 \rightarrow t_2}.$$

Pour un déplacement élémentaire du mobile M , on écrira

$$d\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})} = \sum_i \mathcal{P}_{\vec{F}_i \rightarrow M/(\mathcal{R})} dt.$$

On remarque immédiatement que les notations différentielles ($d\mathcal{E}_c$ au lieu de δW) et des variations finies ($\Delta\mathcal{E}_c$ au lieu de W) suivent, pour l'énergie cinétique, les règles *inverses* de celles employées pour le travail. La raison en est à la fois simple et essentielle : les variations envisagées pour l'énergie cinétique ne dépendent effectivement que de l'état initial et de l'état final, et plus précisément de la vitesse initiale et de la vitesse finale du mobile.

II.2.2. Formes pratiques du théorème

On a regroupé ci-dessous les différentes formes des théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique :

Expression instantanée	$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}$	
Pour un déplacement élémentaire	$d\mathcal{E}_c = \delta W$	(11.2)
Pour un déplacement macroscopique	$\Delta\mathcal{E}_c = W$	

La relation $d\mathcal{E}_c = \delta W$ montre que tout travail reçu (dans le cas où $\delta W > 0$) par le point mobile M se traduit par une augmentation de son énergie cinétique : un mobile « stocke » le travail reçu sous forme d'énergie en augmentant la norme de sa vitesse. Cette énergie peut être restituée à l'extérieur si le point M fournit un travail à l'extérieur (c'est-à-dire s'il reçoit un travail négatif) en diminuant son énergie cinétique.

L'énergie cinétique apparaît ainsi comme un réservoir de travail que le mobile peut, par variation de sa vitesse, échanger avec l'extérieur.

III. Énergie mécanique

III.1. Forces conservatives

III.1.1. Exemple

Considérons un point matériel M subissant, dans le référentiel galiléen (\mathcal{R}), une force \vec{F}_0 , supposée *constante* (en norme et en direction). On suppose que M passe de la position M_i , caractérisée par son vecteur position $\vec{OM}_i = \vec{r}_i$, à la position M_f avec $\vec{OM}_f = \vec{r}_f$. Dans ce cas, le travail de la force \vec{F}_0 s'écrit $W_{\vec{F}_0 \rightarrow M, t_i \rightarrow t_f} = \vec{F}_0 \cdot \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r}$, soit encore $W_{\vec{F}_0 \rightarrow M, t_i \rightarrow t_f} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i) = \vec{F}_0 \cdot \vec{M}_i M_f$.

Considérons l'exemple très important de la force de pesanteur terrestre, dans le cas où le déplacement est suffisamment restreint pour qu'on puisse considérer que \vec{g} est constant en norme et en direction. On suppose que l'axe (Oz) utilisé est vertical ascendant de telle sorte que le poids s'écrit $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$. On a alors

$$W_{\text{poids}, t_i \rightarrow t_f} = -mg \vec{u}_z \cdot \vec{M}_i M_f,$$

soit aussi

$$W_{\text{poids}, t_i \rightarrow t_f} = mg(z_i - z_f), \quad (11.3)$$

où les quantités z_i et z_f correspondent aux altitudes des positions initiale et finale.

Remarques

- Attention à ne pas faire d'erreur de signe dans cette relation ! Le travail du poids est *moteur* (positif) lorsque le point matériel *descend*, donc lorsque $z_f < z_i$.
- On constate que dans le cas d'un champ de force uniforme, comme le champ de pesanteur, le travail de la force est *indépendant du chemin suivi*, c'est-à-dire qu'il ne dépend que des positions initiale et finale du point.

Le fait que le travail d'une force est indépendant du chemin suivi signifie que son expression peut s'écrire sous la forme $W = f(z_i) - f(z)$. Dans le cas du poids, $f(z) = mgz$ est une fonction de la position du point. Ce n'est qu'un cas particulier, car nous avons vu que le travail dépend généralement du chemin suivi; pour éviter toute confusion, nous n'écrirons jamais « $W(z)$ ».

Dans le cas d'une transformation élémentaire, l'expression (11.3) peut aussi s'écrire sous la forme $\delta W = -mg dz$. Ainsi, dans ce cas très particulier, le travail élémentaire δW est proportionnel à la différentielle de la fonction f , en fait $\delta W = -df$.

III.1.2. Généralisation

Nous allons généraliser la propriété remarquable du champ de pesanteur au moyen de la définition suivante.

Définition 11.6. Force conservative

Une force \vec{F}_c , exercée sur le point matériel M , est dite conservative si, lors d'un déplacement quelconque de M relativement au référentiel (\mathcal{R}) , le travail de \vec{F}_c est indépendant du chemin suivi.

Considérons un point matériel M soumis à la force conservative \vec{F}_c et se déplaçant du point A au point B . Soit O un point fixe de (\mathcal{R}) . On peut passer de A à B par une infinité de chemins et en particulier par un chemin passant par O . On a donc $W_{\vec{F}_c, A \rightarrow B} = W_{\vec{F}_c, A \rightarrow O} + W_{\vec{F}_c, O \rightarrow B} = W_{\vec{F}_c, A \rightarrow O} - W_{\vec{F}_c, B \rightarrow O}$ que l'on peut écrire sous la forme $f(A, O) - f(B, O)$, f étant une fonction de la seule position. On définit alors la fonction $\mathcal{E}_p, M \mapsto \mathcal{E}_p(M) = f(M, O)$, appelée énergie potentielle de M dans le champ de force \vec{F}_c .

Théorème 11.7. Théorème de l'énergie potentielle

Si \vec{F}_c est une force conservative, alors il existe une fonction scalaire $\mathcal{E}_p(M)$, appelée énergie potentielle, qui ne dépend que des coordonnées du point M telle que le travail de la force pour passer d'un point A à un point B est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle, que l'on appelle également diminution de l'énergie potentielle, $W_{\vec{F}_c, A \rightarrow B} = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B) = -\Delta\mathcal{E}_p$.

Dans le cas d'un déplacement élémentaire, on a également

$$\delta W_{\vec{F}_c} = -d\mathcal{E}_p. \quad (11.4)$$

On remarquera l'emploi justifié des notations $d\mathcal{E}_p$ et $\Delta\mathcal{E}_p$. Par définition en effet, la fonction \mathcal{E}_p ne dépend que de la position du mobile. Les variations de \mathcal{E}_p ne dépendent donc que des lieux des positions initiale et finale de M , et pas du chemin choisi pour passer de M_i à M_f .

L'énergie potentielle s'exprime dans la même unité que le travail (et donc que l'énergie cinétique), en joule.

La relation $W_{\vec{F}_c, A \rightarrow B} = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B) = -\Delta\mathcal{E}_p$ permet d'interpréter l'énergie potentielle comme un réservoir de travail potentiellement libérable.

III.1.3. Lien avec la puissance

La relation $\delta W = -d\mathcal{E}_p$, valable pour toute force conservative au cours d'un déplacement élémentaire de durée dt , s'écrit aussi $\frac{\delta W}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$; le premier terme de cette égalité est la puissance de la force \vec{F}_c . On peut donc écrire

$$\mathcal{P}_{\vec{F}_c \rightarrow M/(\mathcal{R})} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}. \quad (11.5)$$

Attention

Vocabulaire des forces conservatives

On dit qu'une *force conservative dérive* d'une énergie potentielle bien que la relation (11.5) montre que c'est la *puissance* qui est la *dérivée temporelle* de l'énergie potentielle.

On montrera ultérieurement que les composantes de ces forces conservatives s'expriment comme des *dérivées spatiales* de l'énergie potentielle.

Remarque Les expressions faisant intervenir l'énergie potentielle ($d\mathcal{E}_p$, $\Delta\mathcal{E}_p$ ou $\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$) montrent que seules les *variations* de l'énergie potentielle ont un sens physique. On peut ainsi toujours ajouter un terme constant à une énergie potentielle sans modifier le sens physique de celle-ci. L'origine (le point d'énergie nulle) des énergies potentielles est donc toujours *arbitraire*, et sans importance physique.

III.2. Théorème de l'énergie mécanique

III.2.1. Énoncé du théorème

Considérons un point matériel M , soumis à un ensemble de forces $\vec{F}_{i \rightarrow M}$, dont certaines sont conservatives et d'autres non. On pourra alors écrire

$$\sum_i \vec{F}_{i \rightarrow M} = \sum_j \vec{F}_{c,j} + \sum_k \vec{F}_{nc,k},$$

en notant $\sum_j \vec{F}_{c,j}$ la somme des forces conservatives et $\sum_k \vec{F}_{nc,k}$ la somme des autres forces. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit alors avec des notations évidentes

$$\frac{d\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}}{dt} = \mathcal{P}_{c \rightarrow M/(\mathcal{R})} + \mathcal{P}_{nc \rightarrow M/(\mathcal{R})}.$$

Les forces conservatives sont associées à des énergies potentielles $\mathcal{E}_{p,j}$ telles que $\mathcal{P}_{c \rightarrow M/(\mathcal{R})} = -\sum_j \frac{d\mathcal{E}_{p,j}}{dt}$. Finalement, on peut donc écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})} + \sum_j \mathcal{E}_{p,j} \right) = \mathcal{P}_{nc \rightarrow M/(\mathcal{R})}.$$

Il est temps de définir l'*énergie mécanique* du point matériel M par la relation

$$\mathcal{E}_{m/(\mathcal{R})} = \mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})} + \sum \mathcal{E}_p. \quad (11.6)$$

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit donc comme $\frac{d\mathcal{E}_{m/(\mathcal{R})}}{dt} = \mathcal{P}_{nc \rightarrow M/(\mathcal{R})}$, qui est la forme instantanée du théorème dit « de l'énergie mécanique ».

Comme dans le cas des théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques, ce « nouveau » théorème admet en fait trois formes équivalentes :

Expression instantanée	$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$	(11.7)
Pour un déplacement élémentaire	$d\mathcal{E}_m = \delta W_{nc}$	
Pour un déplacement fini	$\Delta\mathcal{E}_m = W_{nc}$	

Synthèse

Énergie mécanique

Un point matériel M en mouvement relativement au référentiel galiléen (\mathcal{R}) est susceptible de stocker de l'énergie sous deux formes, cinétique (liée à la vitesse) et potentielle (liée à la position), la somme des deux étant son énergie mécanique. Pour faire varier cette énergie mécanique, on doit user de forces non conservatives exerçant un travail non nul.

Remarques

- L'énergie mécanique, tout comme l'énergie potentielle, est définie avec une origine arbitraire : seules ses variations ont une signification physique.
- Dans certains problèmes, l'énergie mécanique \mathcal{E}_m est simplement notée \mathcal{E} afin de ne pas confondre l'indice avec la masse m qui intervient dans l'énergie cinétique.

III.2.2. Intégrale première de l'énergie mécanique

Théorème 11.8. Systèmes conservatifs

Un système est dit conservatif si toutes les forces qui lui sont appliquées dérivent d'une énergie potentielle ou bien ne travaillent pas. Son énergie mécanique totale est alors une constante du mouvement.

$$\mathcal{P}_{nc}(t) = 0 \iff \mathcal{E}_m = \text{constante}$$

Un système conservatif conserve son énergie mécanique !

Cette énergie mécanique constante est désignée sous le nom d'*intégrale première* du mouvement, car elle ne dépend que de la position (dans l'énergie potentielle) et des dérivées premières des coordonnées (dans l'énergie cinétique), mais pas des dérivées secondes.

La résolution d'une équation différentielle du premier ordre étant souvent plus simple que celle de l'équation du mouvement, qui est du second ordre, on préférera systématiquement les méthodes énergétiques pour tous les problèmes conservatifs⁴.

4. On doit à Lagrange une méthode générale d'étude des systèmes conservatifs décrits par un nombre quelconque de paramètres ; on peut montrer que l'ensemble des propriétés dynamiques d'un tel système est entièrement décrit par une fonction unique dépendant de ces paramètres (fonction de Lagrange). Toutefois, l'étude des méthodes de Lagrange ne figure pas au programme.

III.3. Exemples de forces conservatives

III.3.1. Pesanteur terrestre

Nous allons déterminer l'énergie potentielle d'un point M de masse m soumis à l'action du champ de pesanteur terrestre local, c'est-à-dire en supposant le champ \vec{g} uniforme. En notant \vec{P} le poids, la relation (11.4) donne

$$d\mathcal{E}_{p,\text{poids}} = -\delta W = -\vec{P} \cdot d\vec{r} = -m\vec{g} \cdot d\vec{r}.$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z.$$

En choisissant un axe vertical *ascendant* $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ et donc

$$d\mathcal{E}_{p,\text{poids}} = mg \vec{u}_z \cdot d\vec{r} = mg dz.$$

On trouve donc $\mathcal{E}_{p,\text{poids}} = mgz + \text{cte}$. L'énergie potentielle est connue à une constante additive près, en prenant l'origine des coordonnées comme origine des énergies potentielles, on trouve donc

$$\text{pour un axe } (Oz) \text{ ascendant } \mathcal{E}_{p,\text{poids}} = mgz. \quad (11.8)$$

Remarque Il est très important de choisir un axe orienté dans le sens *ascendant*, faute de quoi l'expression utilisée comportera une erreur de signe!

Dans le cas du déplacement fini d'un point A vers un point B , on retrouve bien $W_{\vec{P},A \rightarrow B} = -\Delta\mathcal{E}_p = -(mgz_B - mgz_A) = mgz_A - mgz_B$.

III.3.2. Gravitation à grande échelle

Dans le cas où l'amplitude spatiale du mouvement est importante, on ne peut plus négliger les variations de \vec{g} en norme ou en direction. On utilisera alors l'expression de la loi de Newton de la gravitation, sous la forme

$$\vec{F}_{m' \rightarrow m} = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$$

où la force est exercée par une masse m' située au point O sur une masse m située au point M , avec $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ (voir figure 11.2). On a déjà eu l'occasion d'affirmer (et on établira ultérieurement) que cette force est identique à celle $\vec{F}_G = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$ exercée par une répartition sphérique de masse M de rayon R , comme la force gravitationnelle exercée par une planète. L'énergie potentielle d'un point M de masse m soumis à l'action du champ gravitationnel se détermine par $d\mathcal{E}_{p,\text{gr}} = -\delta W = -\vec{F}_G \cdot d\vec{r}$.

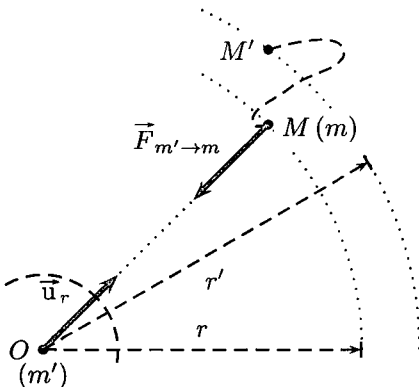


FIG. 11.2. Travail des forces de gravitation.

En coordonnées sphériques, $\vec{r} = r \vec{u}_r$, soit $d\vec{u}_r = dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r$, ainsi

$$d\mathcal{E}_{p,gr} = \mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r).$$

Or, \vec{u}_r et $d\vec{u}_r$ sont orthogonaux, il ne reste donc plus que $d\mathcal{E}_{p,gr} = \mathcal{G} \frac{mM}{r^2} dr$, qui s'intègre en $\mathcal{E}_{p,gr} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + \text{cte}$. En choisissant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini (c'est-à-dire que $\mathcal{E}_{p,gr} \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$), nous obtenons

$$\mathcal{E}_{p,gr} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}. \quad (11.9)$$

Le déplacement de M à M' se traduit donc (voir figure 11.2) par un travail résistant, puisque $r' > r$ donc $\mathcal{E}_{p,gr}(M') > \mathcal{E}_{p,gr}(M)$, donc encore $W = \mathcal{E}_p(M) - \mathcal{E}_p(M') < 0$.

À ce choix d'origine près, on peut d'ailleurs retrouver l'expression (11.8) dans le cas où le déplacement est de faible amplitude. En effet, si r reste voisin de R (par exemple, si le point M reste au voisinage du sol d'une planète de rayon R), on peut écrire $r = R + z$ où $|z| \ll R$, ce qui mène à l'expression approchée

$$-\mathcal{G} \frac{mM}{R+z} = -\mathcal{G} \frac{mM}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \simeq -\mathcal{G} \frac{mM}{R+z} \simeq -\mathcal{G} \frac{mM}{R} \left(1 - \frac{z}{R}\right),$$

qui peut s'écrire enfin sous la forme $-\mathcal{G} \frac{mM}{R+z} \simeq \text{cte} + m\mathcal{G} \frac{M}{R^2} z$, où on reconnaît bien sûr l'énergie potentielle mgz , mais avec une origine différente.

Attention

Pesanteur et gravitation

Il ne faut ni *confondre* les domaines d'application des termes $\mathcal{E}_{p,poids} = mgz$ et $\mathcal{E}_{p,gr} = -\mathcal{G} \frac{mm'}{r^2}$, ni surtout utiliser *les deux* expressions simultanément dans un même problème, ce qui reviendrait à compter deux fois la même interaction.

III.3.3. Forces de rappel élastiques

Considérons un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , fixé d'une part à un point fixe O , et d'autre part au mobile M , de masse m , qui subit donc la force \vec{F} exercée par le ressort. Si l'on note \vec{u} le vecteur unitaire de la direction \vec{OM} , cette force s'écrit $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}$ avec $\vec{OM} = \ell \vec{u}$; l'ensemble est représenté sur la figure 11.3.

Le déplacement élémentaire du point M peut s'écrire $d(\ell \vec{u}) = d\ell \vec{u} + \ell d\vec{u}$. Le vecteur $\ell d\vec{u}$ étant orthogonal à \vec{u} , on a donc $d\mathcal{E}_{p,k} = k(\ell - \ell_0) \vec{u} \cdot d\ell \vec{u}$; une intégration donne enfin $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$ où la quantité $(\ell - \ell_0)$ représente l'allongement du ressort. En choisissant l'origine de l'énergie potentielle lorsque le ressort possède sa longueur à vide, nous obtenons

$$\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2. \quad (11.10)$$

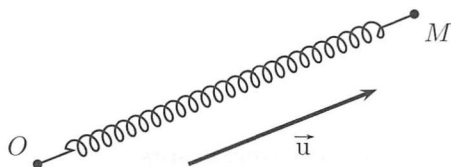


FIG. 11.3. Travail des forces élastiques.

III.3.4. Force électrostatique

La force électrostatique exercée par une charge q' sur une particule M de charge q s'écrit sous la forme $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_r$, avec des notations analogues à celles de la force de gravitation (voir figure 11.2). L'analogie s'étend aussi à l'expression de l'énergie potentielle, qui s'écrit dans ce contexte

$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (11.11)$$

IV. Mouvements unidimensionnels

IV.1. Définition et exemples

IV.1.1. Définition

On appelle *mouvement unidimensionnel* le mouvement d'une particule M de masse m et dont la position est entièrement définie par la donnée d'une seule variable. On dit d'un tel système qu'il ne possède qu'un seul degré de liberté. On note $q(t)$ cette variable qui peut être, selon le cas, une coordonnée cartésienne $x(t)$, une coordonnée angulaire $\theta(t)$, etc.

Un tel mouvement est de plus *conservatif* s'il peut être décrit par la conservation de l'énergie mécanique totale, c'est-à-dire si toutes les forces sont conservatives (ou bien ne travaillent pas). Lorsque ces deux conditions sont réunies, il existe des méthodes générales de description des équations du mouvement. Nous procéderons dans un premier temps par l'exemple.

IV.1.2. Exemples

► Considérons tout d'abord le cas (a) de la figure 11.4; un point matériel M de masse m est en mouvement sans frottement sur un axe vertical (Oz), sous l'action de son poids et de la force de rappel d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Les deux forces sont conservatives, l'énergie potentielle totale de M s'écrit $\mathcal{E}_p(z) = \frac{k}{2} (-z - \ell_0)^2 + mgz$ (puisque la longueur du ressort est $\ell = |OM| = -z > 0$) et son énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$.

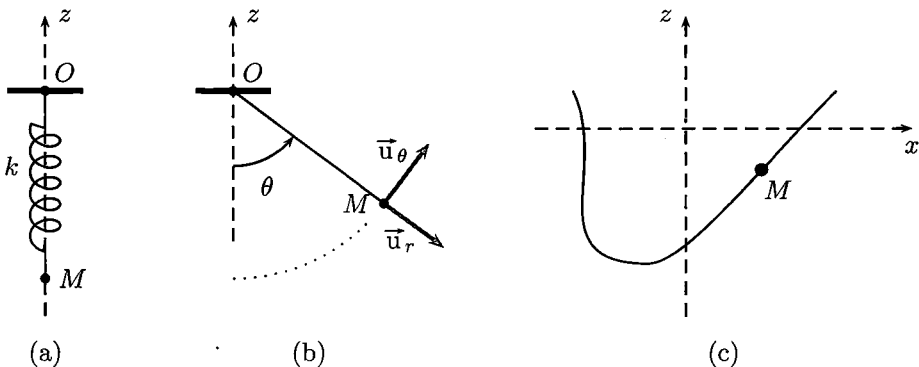


FIG. 11.4. Mouvements unidimensionnels conservatifs.

Conformément au théorème 11.8 (voir page 299), l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du système se conserve lors du mouvement. Le seul degré de liberté de ce problème est $q(t) = z(t)$ et l'on a $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{k}{2}(-z - \ell_0)^2 + mgz = \text{cte}$. En dérivant par rapport au temps l'expression de l'énergie mécanique, on obtient $m\dot{z}\ddot{z} + k(-z - \ell_0)(-\dot{z}) + mg\dot{z} = 0$. En simplifiant cette expression par \dot{z} supposé non uniformément nul, on obtient $m\ddot{z} = k(-z - \ell_0) - mg$, qui n'est autre que l'équation du mouvement du point matériel M obtenue au chapitre précédent en écrivant le principe fondamental de la mécanique.

► Envisageons à présent le pendule simple, en (b) sur la figure 11.4, formé d'un point M de masse m suspendu par un fil inextensible de longueur ℓ_0 à un point fixe O . Le point M est en mouvement sous l'action de la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ et de son poids $m\vec{g}$. Dans son mouvement circulaire, il possède la vitesse $\vec{v}_M = \ell_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et la tension du fil ne travaille jamais. Ce système est donc conservatif, son énergie mécanique \mathcal{E}_m est constante. L'énergie cinétique est $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell_0^2\dot{\theta}^2$ et l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p = mgz = mg\ell_0(1 - \cos\theta)$ en prenant comme origine des énergies la position la plus basse du pendule ($\theta = 0$). Finalement $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\ell_0^2\dot{\theta}^2 + mg\ell_0(1 - \cos\theta)$. Après simplification par $m\ell_0$, on écrira $\frac{1}{2}\ell_0\dot{q}^2 + g(1 - \cos(q)) = U_0$ avec pour ce problème $q(t) = \theta(t)$. La quantité $U_0 = \frac{\mathcal{E}_m}{m\ell_0}$ reste constante au cours du mouvement. En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient $\dot{q}[\ell_0\dot{q} + g\sin(q)] = 0$. Cette équation possède une solution évidente $q = \text{cte}$ qui n'est évidemment stable que lorsque $q(t) \equiv 0$. Hors de ce cas, il reste $\ddot{q} = -\frac{g}{\ell_0}\sin(q)$ qui est l'équation du mouvement obtenue grâce à la deuxième loi de Newton au chapitre précédent.

► Dans le cas (c) de la figure 11.4, un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottement sur une courbe d'équation $z = f(x)$ située dans un plan vertical. En l'absence de toute puissance de la force de frottement, ce problème reste conservatif, avec pour énergie potentielle $mgz = mgf(x)$, et pour énergie cinétique $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$. Mais $\dot{z} = \frac{dz}{dx}\dot{x}$, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(1 + f'(q)^2)\dot{q}^2 + mgf(q) = \text{cte}$ avec maintenant $q = x$. La dérivation temporelle de cette équation conduit à l'équation du mouvement.

Définition 11.9. Problèmes unidimensionnels conservatifs

On regroupe sous ce nom les systèmes décrits par une seule variable $q(t)$ et pour lesquels l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + \mathcal{E}_p(q)$$

est constante au cours du mouvement ; elle est fixée par les conditions initiales.

- La fonction $I(q) > 0$ est appelée inertie généralisée du système.
- La fonction $\mathcal{E}_p(q)$ représente l'énergie potentielle totale contenue dans le système.

IV.2. Équilibre d'un système conservatif unidimensionnel

IV.2.1. Position d'équilibre

L'étude des problèmes unidimensionnels conservatifs peut être menée en résolvant l'équation donnant l'expression de l'énergie mécanique : cette expression est en fait

une équation différentielle du premier ordre $\frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + \mathcal{E}_p(q) = \mathcal{E}_m$ que l'on peut résoudre en séparant les variables. On obtient alors une expression plus ou moins explicite de t en fonction de q que l'on peut tenter d'inverser. On peut aussi dériver par rapport au temps l'expression de l'énergie mécanique pour obtenir l'équation du mouvement $\frac{1}{2}\frac{dI(q)}{dq}\dot{q}^2 + I(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{d\mathcal{E}_p}{dq}\dot{q} = 0$; en écartant la solution $\dot{q} = 0$, il vient

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dI(q)}{dq}\dot{q}^2 = \phi(q) \quad \text{avec} \quad \phi(q) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dq}. \quad (11.12)$$

Un système unidimensionnel conservatif est à l'équilibre au point $q = q_0$ seulement si $q = q_0$ est une solution constante des équations du mouvement : le mobile peut alors rester indéfiniment au point $q = q_0$ s'il n'en est pas écarté. Compte tenu de l'équation (11.12), il est donc nécessaire que $q = q_0$ soit solution de l'équation du mouvement avec $\dot{q} = 0$ et $\ddot{q} = 0$; il faut donc $\phi(q_0) = 0$.

Théorème 11.10. Position d'équilibre d'un système conservatif

Pour qu'un système conservatif possède une position d'équilibre en $q = q_0$, il est nécessaire que son énergie potentielle possède un extremum en ce point.

$$\phi(q_0) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dq} \right|_{q_0} = 0$$

Dans un système conservatif, la relation entre l'énergie potentielle et la résultante des forces $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i \rightarrow M}$ est $d\mathcal{E}_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Pour déterminer les positions susceptibles d'être un équilibre pour un tel système, on peut donc soit :

- ▶ chercher les positions telles que la résultante des forces s'annule ;
- ▶ déterminer les extrema de l'énergie potentielle.

IV.2.2. Stabilité des équilibres

Définition 11.11. Stabilité locale d'une position d'équilibre

Une position d'équilibre $q = q_0$ d'un point matériel M est dite localement stable si lors du déplacement élémentaire δ_q depuis cette position, le point reste dans un voisinage de q_0 lorsqu'il est abandonné sans vitesse initiale.

On suppose qu'à $t = 0$, le point M est abandonné sans vitesse initiale ($\dot{q}(t = 0) = 0$) depuis la position $q(t = 0) = q_0 + \delta_q$. Sous ces hypothèses, l'équation du mouvement s'écrit à l'instant initial

$$\left(I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dI(q)}{dq}\dot{q}^2 = \phi(q) \right)_{t=0} \implies (I(q)\ddot{q})_{t=0} = \phi(q_0 + \delta_q).$$

Un développement limité au premier ordre permet d'écrire qu'au voisinage de l'équilibre $\phi(q_0 + \delta_q) = \phi(q_0) + \phi'(q_0)\delta_q$. Par ailleurs et au même ordre, on peut écrire $(I(q)\ddot{q})_{t=0} = I(q_0)\ddot{\delta}_q$. L'équilibre q_0 est tel que $\phi(q_0) = 0$, ainsi la perturbation linéaire δ_q est solution de l'équation différentielle

$$I(q_0)\frac{d^2\delta_q}{dt^2} - \phi'(q_0)\delta_q = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ; la stabilité d'une telle équation n'est garantie qu'à la condition que tous les coefficients

soient du même signe. Par hypothèse, nous avons vu que l'inertie généralisée est toujours positive, la stabilité linéaire du système est donc assurée pour peu que $\phi'(q_0)$ soit négatif. En remarquant que ϕ est l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle, on peut donc énoncer le théorème fondamental suivant.

Théorème 11.12. Stabilité d'un équilibre pour un système conservatif

Un système conservatif possède une position d'équilibre localement stable en $q = q_0$ si son énergie potentielle possède un minimum local en ce point.

Cette propriété sera donc établie si l'on réunit les deux conditions suivantes simultanément,

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dq} \right|_{q=q_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dq^2} \right|_{q=q_0} > 0.$$

Toute autre situation d'extremum (maximum, ou point d'inflexion à tangente horizontale) correspond à un équilibre *instable*.

Remarque Il existe des fonctions $\mathcal{E}_p(q)$ qui présentent des minima très « plats », pour lesquels la dérivée seconde s'annule ; l'étude complète de la stabilité de l'équilibre impose alors l'étude des dérivées ultérieures de $\mathcal{E}_p(q)$, jusqu'à obtenir le détail du comportement de $\mathcal{E}_p(q)$ au voisinage de son extremum.

IV.3. Mouvement autour d'un équilibre

IV.3.1. Principe de l'étude

Considérons toujours un problème conservatif régi par une énergie potentielle généralisée $\mathcal{E}_p(q)$; la figure 11.5 montre les divers comportements possibles de la fonction $\mathcal{E}_p(q)$ au voisinage de son extremum q_0 . Dans tous les cas, nous ferons l'étude du comportement du système sur la base de l'équation $\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q) = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 \geq 0$ (puisque $I(q) > 0$) ; les tracés se placent dans le cas où $\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q) > 0$ et la partie utile de la courbe est donc entièrement comprise *sous* la valeur constante \mathcal{E}_m .

Dans le cas où le point q_0 est un *maximum* de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(q)$ (voir figure 11.5 à gauche), l'écart $\mathcal{E}_p - U(q)$ (qui mesure l'énergie cinétique) *augmente* au fur et à mesure que le système s'éloigne de l'équilibre : c'est une marque de l'*instabilité* de la position d'équilibre.

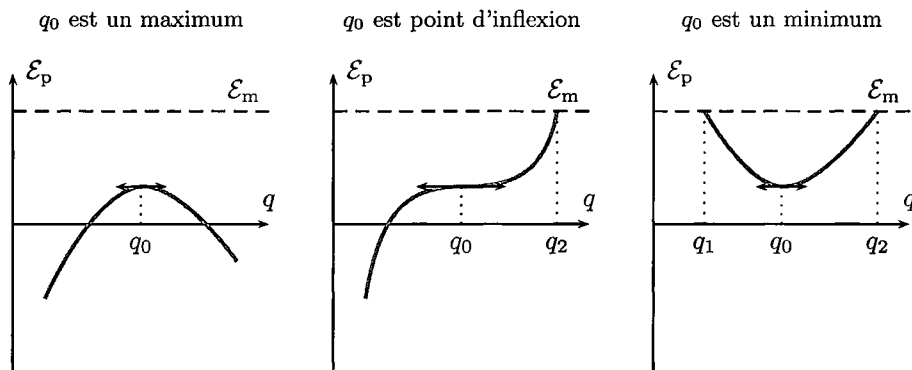


FIG. 11.5. Énergie potentielle au voisinage d'un équilibre.

Dans le cas où le point q_0 est un *point d'inflexion* (voir figure 11.5 au centre), le même comportement caractérise le système au moins dans un des deux cas possibles ; l'énergie cinétique généralisée augmente si q s'éloigne de q_0 par valeurs inférieures et il y aura encore instabilité.

Le seul cas de stabilité est bien celui où q_0 est un *minimum* de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(q)$, comme sur la figure 11.5 à droite. Le mouvement est alors forcément borné à l'intervalle $[q_1, q_2]$: lorsque le mobile se rapproche de ces positions, il ralentit, s'arrête puis repart en arrière. Le mouvement d'un tel système au voisinage d'une position d'équilibre stable est donc toujours un mouvement d'*oscillation* (au moins si l'énergie \mathcal{E}_m est assez faible). On s'intéresse donc dans la suite aux propriétés de ces oscillations.

IV.3.2. Période des oscillations autour d'un équilibre stable

Observons de plus près les variations de la fonction énergie potentielle $\mathcal{E}_p(q)$ autour d'un équilibre stable (voir figure 11.6). Si l'énergie totale prend une valeur \mathcal{E}'_{me} trop élevée, le mouvement n'est pas nécessairement borné : le système possède suffisamment d'énergie pour franchir la barrière de potentiel située à droite de q_2 , et il peut fuir à l'infini si le potentiel (non représenté sur la courbe pour $q \rightarrow \infty$) le lui permet. Nous nous placerons donc dans le cas où l'énergie mécanique \mathcal{E}_m limite le mouvement à l'intervalle $[q_1, q_2]$.

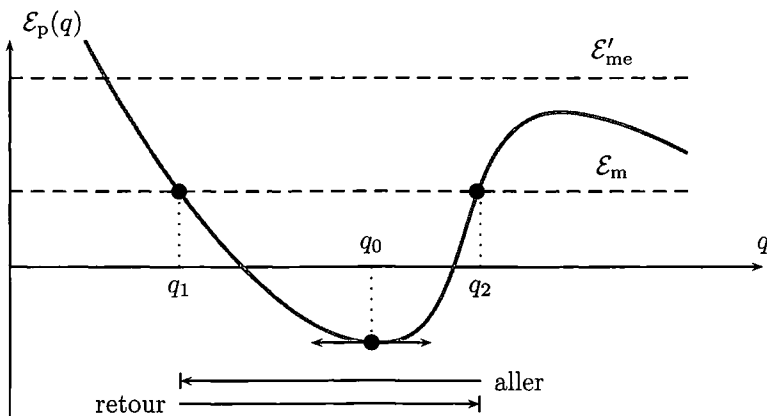


FIG. 11.6. Mouvements autour d'un équilibre stable.

Imaginons par exemple que le système soit abandonné à vitesse initiale nulle au point q_2 ; ainsi en ce point $\dot{q} = 0$ et $\mathcal{E}_p(q_2) = \mathcal{E}_m$. Il ne s'agit pas d'une position d'équilibre et le système démarre avec une énergie cinétique croissante au fur et à mesure que q s'éloigne de q_2 ; notons toutefois que dans cette phase (mouvement « aller » sur la figure 11.6), $\dot{q} < 0$ puisque q diminue.

Ce mouvement se poursuit jusqu'à la position q_0 , où le système ne s'arrête pas car il y possède une énergie cinétique élevée (en fait, maximale) ; il continue donc jusqu'en q_1 , où sa vitesse est nulle car $\mathcal{E}_p(q_1) = \mathcal{E}_p(q_2)$ et son énergie mécanique ne varie pas. Le mobile s'arrête donc en q_1 . Cette position n'est pas un équilibre, il ne peut donc y rester ; à partir de ce moment, il repart donc pour une phase de retour, caractérisée par $\dot{q} > 0$, qui le ramènera en q_2 ; ainsi, une succession ininterrompue d'oscillations s'amorce ; elles pourraient être en fait interrompues par des phénomènes non conservatifs (des frottements...), que nous avons négligés dans cette modélisation.

L'intensité (algébrique) de la vitesse \dot{q} peut être déterminée grâce à l'énergie mécanique $\frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + \mathcal{E}_p(q) = \mathcal{E}_m$, que l'on réécrit $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q))}{I(q)}}$. La durée d'un mouvement d'amplitude $\Delta q = q_2 - q_1$ est la même, quel que soit le sens de passage (aller ou retour) du mobile : la norme de sa vitesse ne dépend que de sa position q , et pas du sens du mouvement.

Pendant la phase « aller », on peut écrire $dt = -\sqrt{\frac{I(q)}{2[\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q)]}} dq$, et l'opposé pendant la phase « retour » ; en intégrant le long du chemin suivi, on trouve la période de l'oscillation

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{q_2}^{q_1} -\sqrt{\frac{I(q)}{2[\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q)]}} dq + \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{I(q)}{2[\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q)]}} dq \\ &= 2 \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{I(q)}{2[\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q)]}} dq. \end{aligned}$$

Il est totalement inutile de mémoriser l'expression ci-dessus de la période ; par contre, il est important de comprendre l'analyse qui a conduit à ce résultat afin de l'adapter à chaque situation physique.

Remarque On fera attention à la question des signes ! Une équation énergétique ne fournit en général que \dot{q}^2 , et on n'oubliera pas que $\dot{q} = \pm \sqrt{\dot{q}^2}$.

IV.3.3. Petites oscillations

La recherche d'une expression explicite de $q(t)$ à partir de l'équation

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + \mathcal{E}_p(q)$$

est souvent délicate, voire impossible ; il est par contre toujours possible d'obtenir une solution approchée dans le cas où $\epsilon(t) = q(t) - q_0$ reste faible : le mobile ne s'éloigne pas trop de son équilibre, on parle de *petites oscillations*. On peut en effet dans ce cas se contenter d'un développement limité, à l'ordre le plus bas non nul, de la fonction énergie potentielle au voisinage de q_0 . On écrit

$$\mathcal{E}_p(q) = \mathcal{E}_p(q_0) + \left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dq} \right|_{q_0} \epsilon + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dq^2} \right|_{q_0} \epsilon^2 + o(\epsilon^2).$$

Le terme du premier ordre en ϵ est nul par définition de l'état d'équilibre ; si \mathcal{E}_p est minimale en q_0 et si sa dérivée seconde n'est pas nulle en ce point, on posera $\kappa = \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dq^2} \right|_{q_0} > 0$. L'ordre le plus bas non nul est alors dans ce cas l'ordre 2, et l'on peut écrire $\mathcal{E}_p(q) = \mathcal{E}_p(q_0) + \frac{1}{2}\kappa\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$.

Le terme $\epsilon(t)$ et ses dérivées successives sont des infiniment petits du même ordre et donc $\dot{\epsilon}^2$ sera d'ordre deux. Afin que l'énergie cinétique $\frac{1}{2}I(q)\dot{\epsilon}^2$ reste bien d'ordre deux, on *doit* se contenter de l'ordre zéro pour le terme d'inertie $I(q)$; on prendra donc $I(q) \simeq I(q_0)$.

Au voisinage de la position d'équilibre $q = q_0$, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\frac{1}{2}I_0\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}\kappa\epsilon^2 = \mathcal{E}_m \quad \text{où} \quad \begin{cases} I_0 = I(q_0) \\ \kappa = \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dq^2} \right|_{q_0} \\ \mathcal{E}_m = \text{cte.} \end{cases}$$

On parle d'*approximation quadratique* ou d'*approximation parabolique* de $\mathcal{E}_p(q)$ au voisinage de son minimum. Par dérivation temporelle, on obtient l'*approximation linéaire* de l'équation du mouvement sous la forme

$$I_0\ddot{\epsilon} + \kappa\epsilon = 0.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont les solutions s'écrivent $\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t + \varphi)$, où ϵ_0 et φ sont des constantes d'intégration ; on identifie dans $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_0}}$ la *pulsation des petits mouvements*. On remarque que les petites oscillations sont *synchrones*, c'est-à-dire que leur période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations ; cette période s'exprime selon $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Ce caractère synchrone est une caractéristique des oscillations linéaires, il disparaît généralement lorsque l'amplitude des oscillations ne permet plus de se placer dans l'approximation linéaire.

Remarque Si l'on faisait le même développement des équations du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre *instable*, on obtiendrait une équation de la forme $I_0\ddot{\epsilon} - \kappa\epsilon = 0$ avec les mêmes notations. La solution générale est alors exponentielle et divergente au cours du temps. Le caractère non borné de cette solution est un autre moyen d'identifier le caractère instable de la position d'équilibre étudiée.

V. Exercices

1. Travail d'une force

(solution page 711)

Dans un référentiel $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, un point matériel M possède une vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ de norme v_0 constante. Il est soumis à une force \vec{F} et passe de l'origine O à un point K de coordonnées (a, b) . Pour se rendre en K , le point M peut suivre les trois chemins $\gamma_1 = OAK$, $\gamma_2 = OBK$ ou $\gamma_3 = OK$ représentés sur la figure 11.7.

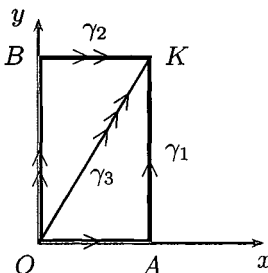


FIG. 11.7. Travail d'une force le long de différents chemins.

Sur chaque trajet calculer le travail $W_{\vec{F}, \gamma_i}$ de la force \vec{F} dans chacun des cas suivants

$$\vec{F} = \begin{cases} \vec{F}_1 = -k\vec{v}_0 \\ \vec{F}_2 = -\alpha(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y) \\ \vec{F}_3 = -\alpha(y\vec{u}_x - x\vec{u}_y). \end{cases}$$

Que peut-on conclure dans chacun des cas ?

2. Le bungee : saut à l'élastique

(solution page 712)

On souhaite déterminer les caractéristiques d'un dispositif prévu pour le saut à l'élastique depuis un pont (voir figure 11.8). L'élastique est assimilé à un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30,0$ m et, pour l'essai, on lui fixe une masse compacte de 100 kg. On laisse tomber la masse à partir de l'origine sans vitesse initiale. Dans une première phase, la masse est en chute libre, puis l'élastique intervient sur le mouvement pour le reste de sa chute. Le point le plus bas est situé à 60,0 m du point d'accrochage de l'élastique.

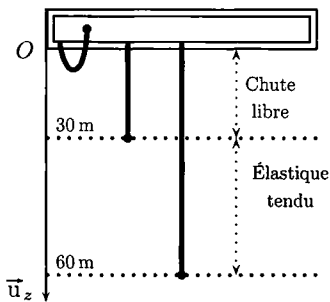


FIG. 11.8. Saut à l'élastique.

1. On néglige la résistance de l'air. Calculer la constante de raideur de l'élastique.
2. On suppose que la hauteur de chute maximale au-dessus du pont est de 70,0 m. Calculer la masse maximale que l'on peut accrocher à l'élastique.

3. Potentiel non quadratique ★

(solution page 712)

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur l'axe (O, \vec{u}_x) . Il est repéré par son abscisse x et soumis à une force \vec{F} qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x) = ax^2 - bx^3$, où a et b sont deux constantes positives. À $t = 0$, le point est en $x = 0$ et possède une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. On supposera que l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du point M est positive.

1. Représenter graphiquement la fonction énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$.
2. Décrire le mouvement du point M en fonction de la vitesse initiale v_0 et montrer qu'il peut être périodique dans certaines conditions.
3. Donner l'expression de la période du mouvement dans le cas périodique. Que devient cette expression dans le cas de petits mouvements pour lesquels $|x| \ll \frac{a}{b}$?
4. Décrire le mouvement de M si $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{4}{27}\frac{a^3}{b^2}$.

4. Traction ferroviaire ★

(solution page 714)

Un train, assimilé à un point matériel de masse m , monte une pente faisant l'angle α avec l'horizontale. La base cartésienne utilisée est représentée sur la figure 11.9. On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur. On suppose que l'effet de la locomotive est équivalent à un opérateur extérieur qui tire le train en fournissant une puissance constante \mathcal{P} et que le contact entre les roues et le rail donne lieu à des frottements secs. On note \vec{T} la composante tangentielle de la résultante des forces de réaction exercées par la voie sur le train.

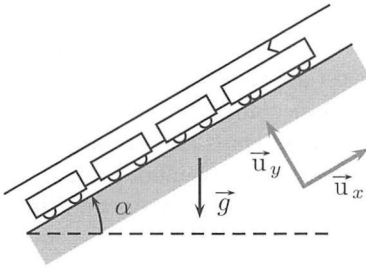


FIG. 11.9. Train en montée.

1. Exprimer le théorème de la puissance cinétique, sous forme d'une équation différentielle liant $v = \dot{x}$, m , g , T , \mathcal{P} et l'angle α . Déterminer la vitesse limite v_0 du train.
2. Le train démarre à l'instant initial à vitesse nulle. Exprimer la loi reliant la vitesse $v(t)$ à v_0 , m et $R = T + mg \sin \alpha$. Tracer la courbe donnant $v(t)$.

5. Point oscillant sur un cerceau ★★

(solution page 714)

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R . Le point M est fixé à un ressort dont l'autre extrémité glisse sans frottement sur un axe vertical tangent au cerceau, de sorte que le ressort reste horizontal (voir figure 11.10). On note θ l'angle dont le point monte relativement à la verticale. On note k la raideur de ce ressort dont la longueur à vide est égale à R .

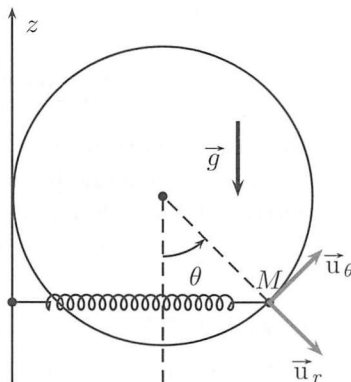


FIG. 11.10. Masse ponctuelle coulissant sur un cerceau.

1. Montrer que le problème est conservatif, et déterminer l'énergie potentielle correspondante.
2. Montrer que le système présente soit deux, soit quatre positions d'équilibre. On introduira le paramètre $\alpha = \frac{mg}{kR}$. Déterminer leur stabilité.

3. Déterminer la période des petites oscillations autour de la seule position d'équilibre qui reste stable pour toutes les valeurs de α .

6. Looping ★★

(solution page 715)

Un point matériel mobile M de masse m parcourt un circuit comportant une boucle, située dans un plan vertical, circulaire de centre C et de rayon R représenté sur la figure 11.11. Le point aborde le cercle en son point le plus bas B avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$. À l'instant t , il est repéré sur le cercle par l'angle

$$\theta = (\widehat{CB, CM}).$$

On note $\vec{g} = -g \vec{u}_y$ l'accélération de la pesanteur.

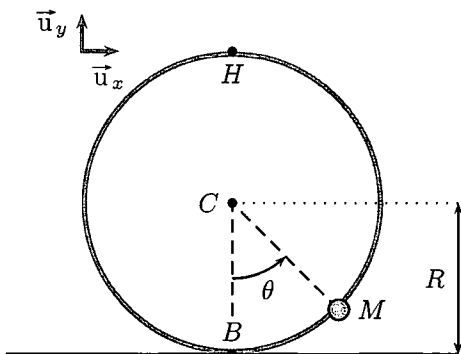


FIG. 11.11. Masse ponctuelle décrivant un looping dans un cerceau.

1. a/ On néglige tout frottement. Un dispositif approprié empêche le décollage du mobile. Quelle doit être la valeur minimale v_1 à donner à v_0 pour que le mobile atteigne le point H le plus haut du cercle ?

b/ Exprimer, en fonction de m , R , g et θ la force de réaction exercée sur le mobile.

c/ Montrer que, si $v_0 > v_2$, le cercle entier peut être parcouru sans risquer le décollage, même si le contact du mobile sur le cercle est unilatéral.

d/ On suppose ici que $v_0 = \sqrt{6gR}$; on donne $\int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{2+\cos u}} = 2,34$. On donne aussi $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $R = 1,00 \text{ m}$. Calculer la durée d'un tour.

2. Un dispositif approprié empêche à nouveau tout décollage du mobile, qui est maintenant soumis à une force de frottement de norme constante T lors de sa montée.

a/ Exprimer, en fonction de m , v_0 , g , R , T et θ la vitesse du mobile lorsqu'il atteint un point repéré par θ .

b/ Donner l'équation vérifiée par l'angle θ_0 définissant le point le plus haut atteint par le mobile.

c/ Proposer une expression approchée de θ_0 si $\theta_0 \ll 1 \text{ rad}$.

Chapitre 12

PARTICULES CHARGÉES DANS DES CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

DE MÊME qu'une masse est sensible au champ de gravitation, une particule chargée est sensible au champ électromagnétique. Dans ce chapitre, nous étudierons le mouvement d'une particule soumise à un champ électrique uniforme ou à un champ magnétique uniforme. Ces mouvements sont riches en applications.

I. Force de Lorentz

I.1. Force électrique

Une particule de charge électrique q subit une force à distance de la part d'autres charges immobiles dans le référentiel d'étude. Cette force, dite électrique, s'écrit

$$\vec{F}_{el} = q \vec{E} \quad (12.1)$$

où \vec{E} est le champ électrique créé par les autres charges.

Définition 12.1. *Champ électrique*

Le champ électrique est une grandeur vectorielle. Son unité dans le système SI est le volt \times mètre⁻¹ ($V \cdot m^{-1}$).

En première année, le calcul général du champ électrique créé par une répartition quelconque de charges n'est pas au programme. Le seul dispositif utile à connaître est le condensateur plan, qui permet de générer un champ électrique quasi uniforme (voir figure 12.1).

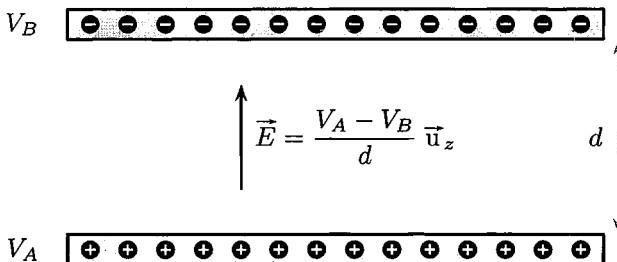


FIG. 12.1. Condensateur plan.

Définition 12.2. Condensateur plan

Un condensateur plan est un ensemble de deux plaques métalliques, appelées armatures, parallèles en regard l'une de l'autre. On branche ces armatures aux bornes d'un générateur électrique.

- ▶ L'armature située à la borne positive (potentiel V_A) se charge positivement.
- ▶ L'armature située à la borne négative (potentiel V_B) se charge négativement.

Cette répartition de charge crée, dans l'espace interarmatures, un champ électrique quasi uniforme :

- ▶ orthogonal aux armatures ;
- ▶ dirigé du fort potentiel V_A vers le faible potentiel V_B ;
- ▶ de norme

$$|\vec{E}| = \frac{V_A - V_B}{d} = \frac{U}{d}$$

où $U = V_A - V_B$ est la différence de potentiel entre les armatures, et d la distance séparant les armatures.

En dehors de l'espace interarmatures, le champ est quasi nul.

I.2. Force magnétique

Si on soumet un faisceau *homocinétiq*ue d'électrons (faisceau dans lequel tous les électrons ont la même vitesse) à un champ magnétique uniforme, on constate les phénomènes suivants.

- ▶ Si la vitesse des électrons est parallèle au champ magnétique, le faisceau n'est pas affecté.
- ▶ Si la vitesse des électrons est orthogonale au champ magnétique, la trajectoire des électrons est circulaire, contenue dans le plan formé par le champ magnétique et la vitesse initiale. La force magnétique subie par une particule est donc orthogonale à la vitesse de cette particule et au champ magnétique.
- ▶ Si l'intensité du champ magnétique est doublée, le rayon du cercle est divisé par deux. L'intensité de la force magnétique est donc proportionnelle au champ magnétique.
- ▶ Si la vitesse des électrons est doublée, le rayon du cercle est multiplié par deux. Une étude mécanique, qui sera faite ultérieurement, permet d'en déduire que l'intensité de la force magnétique est proportionnelle à la norme de la vitesse des particules.

Ces faits expérimentaux sont en accord avec l'expression suivante pour la force magnétique (voir figure 12.2),

$$\vec{F}_{\text{ma}} = q \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (12.2)$$

I.3. Force électromagnétique de Lorentz

De façon générale, il peut exister simultanément un champ électrique et magnétique. Une particule chargée est alors soumise simultanément aux deux forces (12.1) et (12.2), dont la somme est appelée force électromagnétique de Lorentz.

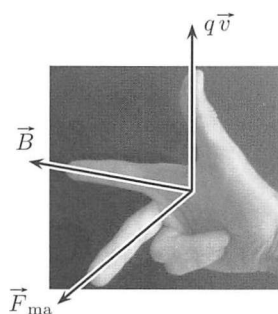


FIG. 12.2. Règle des trois doigts de la main droite pour trouver l'orientation de la force magnétique. Attention, l'orientation pouce \rightarrow index \rightarrow majeur ne fonctionne qu'avec la main droite. Pour les droitiers, penser à poser son stylo avant d'utiliser cette règle.

Définition 12.3. Force électromagnétique de Lorentz

Une particule de charge q , animée d'une vitesse \vec{v} , dans un champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} , subit la force électromagnétique de Lorentz,

$$\vec{F}_{lo} = q [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}].$$

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) est un physicien néerlandais. Après une thèse sur la propagation de la lumière, l'essentiel de ses recherches porte sur l'électromagnétisme. En 1892, il introduit la force exercée par un champ magnétique sur une particule chargée. Il prévoit théoriquement l'existence de ce qui sera ensuite appelé « effet Zeeman » : la fréquence des raies spectrales d'émission des atomes doit être légèrement modifiée en présence d'un champ magnétique. La confirmation expérimentale de ce phénomène est apportée par son brillant étudiant Pieter Zeeman en 1896. Pour cette découverte, Lorentz et Zeeman partagent le prix Nobel en 1902. Lorentz est également célèbre pour les formules de changement de référentiel dans le cadre de la relativité restreinte.



Hendrik Antoon Lorentz

I.4. Force électromagnétique vs poids

Rappelons les caractéristiques des deux particules chargées que nous connaissons le mieux.

Particule	Masse	Charge
Électron	$9,1 \cdot 10^{-31}$ kg	$-1,6 \cdot 10^{-19}$ C
Proton	$1,7 \cdot 10^{-27}$ kg	$+1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Supposons qu'un électron se trouve soumis à un champ électrique de norme $1,0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et au champ de pesanteur d'intensité $g \simeq 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Alors

$$\left| \frac{\text{poids}}{\text{force électrique}} \right| = \frac{mg}{qE} \simeq \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 9,8}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,0} = 5,5 \cdot 10^{-11} \ll 1.$$

Cela montre à quel point le poids est faible devant la force électrique. De plus, un champ électrique de $1,0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ est très faible¹. Par conséquent, notre estimation du rapport entre les deux forces est un majorant.

De même, estimons le rapport entre le poids d'un électron et la force magnétique qu'il subit s'il est dans un champ magnétique $B = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ à la vitesse de $v = 1,0 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

$$\left| \frac{\text{poids}}{\text{force magnétique}} \right| \simeq \frac{mg}{qvB} \simeq \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 9,8}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,0 \cdot 10^5 \times 1,0 \cdot 10^{-2}} = 5,5 \cdot 10^{-14} \ll 1.$$

Ici encore, le poids est largement négligeable devant la force magnétique.

Propriété 12.4. Poids des particules

Dans les conditions expérimentales terrestres, le poids d'une particule chargée est toujours négligeable devant la force électromagnétique de Lorentz qui s'exerce sur cette particule.

I.5. Puissance et travail de la force de Lorentz

Dans le référentiel d'étude, la vitesse de la particule est notée \vec{v} . La puissance fournie par la force de Lorentz à la particule est, par définition,

$$\mathcal{P}_{\text{lo}} = \vec{F}_{\text{lo}} \cdot \vec{v} = q [\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\perp \vec{v}}] \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (12.3)$$

La force magnétique, orthogonale à la vitesse \vec{v} , fournit une puissance nulle à la particule.

Théorème 12.5. Puissance de la force de Lorentz

La composante magnétique de la force de Lorentz fournit une puissance nulle à la particule. Seule la force électrique a une puissance non nulle.

- Un champ magnétique ne peut que dévier une particule, mais ne modifie pas la norme de sa vitesse.
- Seul un champ électrique peut modifier la norme de la vitesse d'une particule.

En multipliant l'expression (12.3) par la durée élémentaire dt , on fait apparaître le travail élémentaire de la force de Lorentz au cours du déplacement $\vec{d\ell} = \vec{v} dt$,

$$\delta W_{\text{lo}} = \mathcal{P}_{\text{lo}} dt = q \vec{E} \cdot \vec{d\ell}. \quad (12.4)$$

Or, le champ électrique possède la propriété suivante, qui est admise en première année et qui sera expliquée dans le cours d'électromagnétisme de deuxième année.

Propriété 12.6. Potentiel électrique

Il existe une grandeur réelle dépendant du point M de l'espace, notée $V(M)$, appelée potentiel électrique (en volts), telle que, entre deux points de l'espace séparés d'un déplacement élémentaire $\vec{d\ell}$, la variation élémentaire dV de V est liée au champ électrique \vec{E} par

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{d\ell}.$$

1. Il règne à la surface de la Terre un champ électrique dirigé vers le centre de la Terre dont l'intensité est d'environ $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Compte tenu de cette propriété, on peut modifier l'expression (12.4) du travail élémentaire de la force de Lorentz, puis intégrer ce travail entre deux points A et B .

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{lo}} = -q \, dV &\Rightarrow \int_A^B \delta W_{\text{lo}} = \int_A^B -q \, dV = [-qV]_A^B \\ &\Rightarrow W_{\text{lo } A \rightarrow B} = -[qV(B) - qV(A)] \end{aligned} \quad (12.5)$$

L'expression (12.5) montre que le travail fourni par la force à la particule le long d'un parcours $A \rightarrow B$ ne dépend que des points A et B , et pas du chemin suivi pour aller de l'un à l'autre. Il s'écrit comme l'opposé de la variation de la grandeur qV . Cela permet de définir l'énergie potentielle électrique.

Définition 12.7. Énergie potentielle électrique

Une particule de charge q , située au point M dans un champ électrique dérivant du potentiel électrique $V(M)$, possède l'énergie potentielle électrique

$$\mathcal{E}_{\text{p,él}}(M) = qV(M).$$

Cette énergie potentielle sera très utile pour étudier des mouvements de particules chargées par le théorème de l'énergie cinétique.

II. Particule chargée dans un champ électrique uniforme et permanent

II.1. Étude du mouvement

Étudions une particule de charge q et de masse m dans un champ électrique \vec{E} uniforme créé avec un condensateur plan (voir figure 12.3). Choisissons un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que :

- la particule soit en O à l'instant initial $t = 0$;
- le champ soit parallèle à \vec{u}_y , $\vec{E} = E \vec{u}_y$;
- la vitesse initiale de la particule, notée \vec{v}_0 , soit dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) et fasse un angle α avec \vec{u}_x .

On néglige le poids de la particule, qui est alors uniquement soumise à la force électrique. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule s'écrit

$$q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qE. \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient la vitesse,

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{constante} \\ \dot{y} = \frac{qE}{m} t + \text{constante} \\ \dot{z} = \text{constante} \end{cases}$$

Les constantes se déterminent avec les conditions initiales,

$$\text{à } t = 0, \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}.$$

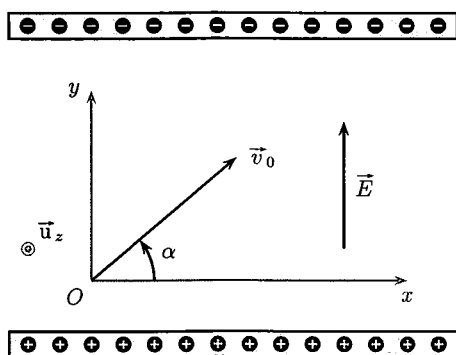


FIG. 12.3. Particule chargée de vitesse initiale \vec{v}_0 dans un condensateur plan créant le champ électrique uniforme \vec{E} .

On en déduit la vitesse à tout instant,

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_0 \cos \alpha \\ \frac{qE}{m} t + v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.6)$$

La composante selon \vec{u}_z de la vitesse est constamment nulle.

Dans un champ électrique uniforme, le mouvement de la particule est plan. La trajectoire est contenue dans le plan formé par \vec{E} et la vitesse initiale.

Le résultat (12.6) peut devenir faux si le champ électrique n'est pas uniforme.

En intégrant encore une fois par rapport au temps et en utilisant la position initiale $\vec{OM}(t=0) = (0,0,0)$, on obtient la position en fonction du temps,

$$\vec{OM}(t) = \begin{bmatrix} v_0 (\cos \alpha) t \\ \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 (\sin \alpha) t \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.7)$$

C'est l'équation de la trajectoire sous forme paramétrique (le temps est le paramètre). En éliminant t entre les composantes x et y , on reconnaît un polynôme du second degré,

$$y = \frac{qE}{2m v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x. \quad (12.8)$$

Lorsque le champ électrique est uniforme et permanent, la trajectoire est un arc de parabole contenu dans le plan formé par \vec{E} et la vitesse initiale. La concavité est dirigée dans le sens de \vec{E} si $q > 0$ et dans le sens opposé à \vec{E} si $q < 0$ (voir figure 12.4).

Notons que si la forme (12.8) est pratique pour un tracé à la main de la trajectoire, elle contient moins d'information que (12.7) puisque le temps a disparu. Elle ne permet donc pas de savoir où est la particule à chaque instant. Pour tracer la trajectoire, que ce soit à la main ou à l'ordinateur, mieux vaut garder la forme paramétrique et tracer la courbe paramétrée qui correspond.

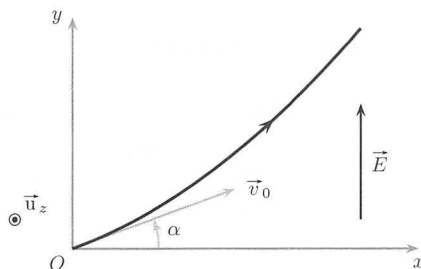


FIG. 12.4. Trajectoire parabolique de la particule dans \vec{E} uniforme. Ce tracé est valable pour $q > 0$ (concavité de la courbe dans le sens de \vec{E}).

II.2. Utilisation pratique des champs électrostatiques

II.2.1. Accélération de particules chargées

Si la vitesse initiale est parallèle au champ \vec{E} (cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$), la trajectoire est un segment de droite parallèle à \vec{E} . Seule la norme de la vitesse évolue, mais pas sa direction. On utilise ce genre de configuration pour accélérer les particules. Les calculs précédents restent valables, mais, dans un accélérateur, la direction de la vitesse est déjà connue et la grandeur importante est la norme de la vitesse en sortie. En résumé, dans un accélérateur :

- le temps est peu important ;
- le mouvement a un seul degré de liberté.

De plus, la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ est conservative : elle dérive d'une énergie potentielle (voir définition 12.7 page 317). Ces trois arguments suggèrent de faire une étude mécanique par le théorème de l'énergie cinétique.

Le champ uniforme est créé par un condensateur plan entre les armatures duquel on impose une différence de potentiel $V_A - V_B$ grâce à un générateur.

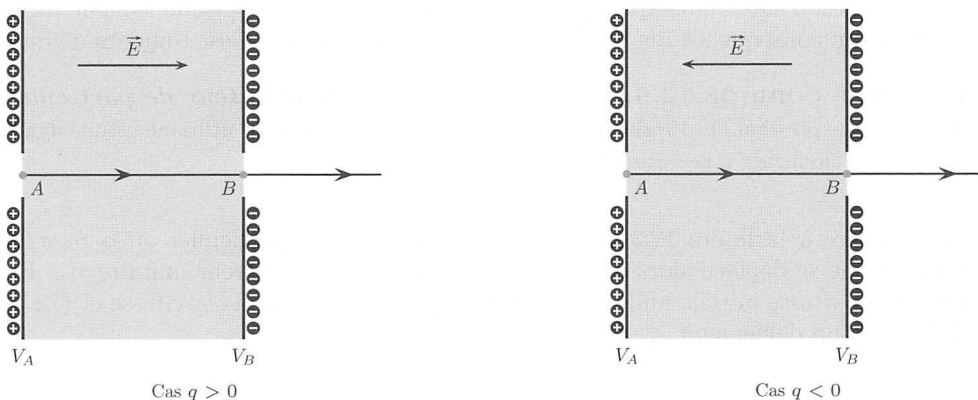


FIG. 12.5. Accélérateurs de particules chargées. Le champ électrique uniforme est produit par un condensateur plan. La particule accélère de A vers B. Le sens à imposer au champ dépend du signe des charges à accélérer.

Attention Signes pour les schémas

Pour faire le dessin, le signe de la charge est important. Par exemple, à gauche sur la figure 12.5, $U = V_A - V_B > 0$ (le champ est orienté vers la droite car il pointe toujours vers les potentiels faibles) et $q > 0$ (la charge est accélérée dans le sens du champ car $q\vec{E}$ pointe vers la droite).

Dans le référentiel du condensateur, la particule de charge q est soumise uniquement à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$, qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = qV$. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la particule entre les points A et B s'écrit

$$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = -[\mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A)] \iff \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = q \underbrace{(V_A - V_B)}_{\text{def } U}. \quad (12.9)$$

Le mot tension est synonyme de différence de potentiel. Dans le vocabulaire des accélérateurs de particules, U s'appelle la **tension accélératrice**. La relation (12.9), que l'on peut écrire en abrégé $\Delta\mathcal{E}_c = qU$, est à l'origine d'une unité d'énergie communément utilisée en physique des particules, l'électronvolt.

Définition 12.8. Électronvolt

Un *électronvolt* (symbole eV) correspond au gain d'énergie cinétique d'un électron ($q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C) accéléré sous une tension accélératrice de 1 volt ($U = -1,0$ V),

$$1 \text{ eV} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Souvent, la vitesse de départ v_A est négligeable devant la vitesse de sortie v_B . Dans ce cas, la relation (12.9) se simplifie et la vitesse en sortie de l'accélérateur s'écrit

$$v_B = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \quad (12.10)$$

Cette expression est valable quel que soit le signe de la charge puisque le signe de U est adapté en conséquence : le produit qU est positif et la racine est toujours définie.

EXERCICE CORRIGÉ 12.9.

Accélérateur de particules

Retrouver l'expression (12.10) de la vitesse en sortie d'accélérateur en utilisant l'étude dynamique générale menée à la section II.1, page 317.

Corrigé

On se réfère à la figure 12.3 de la page 318 dans le cas particulier où $\alpha = \pi/2$. La particule se déplace alors de manière rectiligne selon le vecteur unitaire \vec{u}_y . En prenant la vitesse initiale nulle ($v_0 = 0$), les expressions (12.6) de la vitesse et (12.7) de la position deviennent

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qE}{m} t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qE}{2m} t^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il faut éliminer le temps pour trouver la vitesse en sortie. On appelle d la distance entre les deux armatures du condensateur.

On traduit que $OM = d$ à l'instant final, noté t_f .

$$\frac{qEt_f^2}{2m} = d \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2md}{qE}}$$

En injectant cette valeur de temps dans l'expression de la vitesse, on obtient

$$\vec{v}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mais, dans le condensateur plan, la projection sur \vec{u}_y du champ électrique vérifie $E = \frac{V_A - V_B}{d}$, où $U = V_A - V_B$ est la tension entre les deux armatures. En remplaçant E par cette expression dans le vecteur vitesse de la particule, on trouve la norme de la vitesse à l'instant final, soit $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$, qui est bien la même expression que (12.10). Cette méthode est beaucoup plus longue que la méthode énergétique, qui fait d'emblée disparaître la variable temps des calculs.

Les vitesses atteintes par les particules en sortie d'accélérateur peuvent être très grandes. Par exemple, un électron soumis à une tension accélératrice $U = 1,0 \cdot 10^2 \text{ V}$ acquiert la vitesse

$$v \simeq \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,0 \cdot 10^2}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 6,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette vitesse est énorme : elle vaut 2 % de la célérité de la lumière $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Particule relativiste

Les lois de la mécanique classique cessent d'être valables si les vitesses deviennent comparables à la célérité de la lumière $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En pratique, il faut $\frac{v}{c} < 0,1$ pour que les lois de la mécanique classique soient applicables. Au-delà, il faut utiliser les lois de la relativité restreinte. Une particule qui a une vitesse s'approchant de c est dite relativiste.

Dans les tubes cathodiques des anciens téléviseurs ou oscilloscopes, un faisceau d'électrons vient frapper l'écran. Lors du choc avec l'écran, l'énergie cinétique des électrons est convertie en lumière, ce qui forme un point lumineux. Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons qui fonctionne sur le principe que nous venons d'étudier. Plus de détails seront donnés à la fin de cette section (voir figure 12.7).

II.2.2. Déviation de particules chargées

Nous avons vu que, si la vitesse initiale des électrons n'est pas parallèle au champ, la trajectoire est plane et parabolique. Un faisceau d'électrons qui passe entre les deux plaques d'un condensateur chargé est donc dévié. En faisant l'hypothèse simplificatrice que le champ est rigoureusement nul hors du condensateur et rigoureusement uniforme dans le condensateur, la trajectoire est une droite avant l'entrée dans le condensateur, un arc de parabole dans le condensateur, et à nouveau une droite en sortie. L'ensemble de ces trois portions de trajectoire est contenu dans le plan formé par la vitesse initiale et le champ électrostatique. L'angle entre la droite d'entrée dans le condensateur et la droite de sortie s'appelle l'angle de déviation, noté β sur la figure 12.6. Ce schéma

montre bien que les électrons, qui sont chargés négativement, sont repoussés par la plaque négative et attirés par la plaque positive.

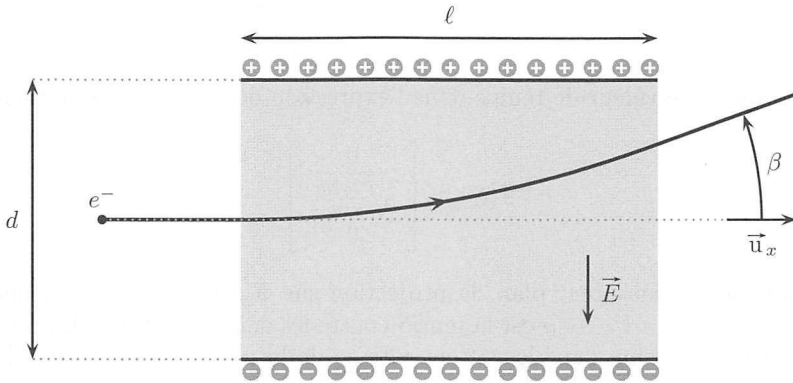


FIG. 12.6. Déviation d'un faisceau d'électrons par le champ électrique uniforme d'un condensateur.

L'étude expérimentale des faisceaux d'électrons montre que les électrons en faisceau ont la même trajectoire que s'ils étaient seuls. Cela signifie que l'on peut négliger les interactions entre électrons lors de l'étude d'un faisceau.

EXERCICE CORRIGÉ 12.10.

Déviation d'un faisceau d'électrons

Sur la figure 12.6, les électrons du faisceau entrent dans le condensateur avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. En adaptant les résultats de l'étude du mouvement d'un électron (voir expressions (12.6) et (12.7) page 318), établir la relation entre la déviation β du faisceau d'électrons en sortie du condensateur, la différence de potentiel U , la distance d entre les deux armatures et ℓ , la longueur des armatures. Le résultat fait également intervenir la charge q et la masse m des électrons.

Donner la valeur que doit avoir U pour obtenir un angle de déviation $\beta = 10^\circ$, sachant que $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $d = 5,0$ cm, $\ell = 10$ cm et $v_0 = 1,0 \cdot 10^6$ m \cdot s $^{-1}$.

Corrigé

En négligeant les interactions entre électrons dans le faisceau, tout se passe comme si chaque électron était seul dans le champ électrique créé par le condensateur. On peut donc utiliser les résultats de l'étude du mouvement d'un électron. Partons de l'expression de la vitesse (12.6) (voir page 318) dans le cas $\alpha = 0$,

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_0 \\ \frac{qU}{md} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'angle de déviation $\beta(t)$ correspond à l'angle que fait à chaque instant le vecteur vitesse avec le vecteur \vec{u}_x ,

$$\tan \beta(t) = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \frac{qUt}{mdv_0}.$$

Par ailleurs, l'instant t_s où l'électron étudié sort du condensateur se relie facilement à la vitesse initiale v_0 et à la longueur ℓ des armatures. En utilisant la composante

(constante) sur \vec{u}_x de la vitesse, $v_0 t_s = \ell$. En remplaçant t par cette expression t_s , on obtient l'angle de déviation β en sortie du condensateur,

$$\tan \beta_{\text{sortie}} = \frac{qU\ell}{mdv_0^2}. \quad (12.11)$$

Avec les valeurs proposées, $U = -0,50 \text{ V}$. C'était tout à fait réalisable dans les tubes cathodiques des anciens oscilloscopes (voir ci-après).

Synthèse

Déviation d'un faisceau de particules

La tangente de l'angle de déviation d'un faisceau de particules chargées par le champ électrique uniforme d'un condensateur plan est proportionnelle à la tension appliquée entre les armatures de ce condensateur (voir expression (12.11)).

Cette propriété a longtemps été mise à profit dans les oscilloscopes à tubes cathodiques (voir figure 12.7). Un *tube cathodique* est une ampoule de verre épais dans laquelle on a réalisé un vide très poussé pour que les électrons n'entrent pas en collision avec les molécules de gaz.

Un faisceau d'électrons est émis par un canon à électrons dont le principe est le suivant. Un filament parcouru par un courant chauffe une plaque métallique, appelée cathode, qui libère des électrons de faible vitesse (cette libération par échauffement s'appelle *effet thermoélectronique*). Ces électrons sont ensuite attirés vers l'anode de focalisation, qui est à un potentiel légèrement supérieur à celui de la cathode de manière à créer le champ attracteur. Cela rassemble les électrons émis au hasard par effet thermoélectronique, d'où le nom de focalisation, par analogie avec l'optique. Une tension accélératrice est appliquée entre l'anode de focalisation et l'anode d'accélération.

Une fois accéléré, le faisceau passe dans un réseau de deux condensateurs plans qui assurent la déviation avant que le faisceau ne frappe l'écran fluorescent pour former un spot lumineux.

- La déviation selon x est assurée par la paire de plaques (P_1, P'_1) . La tension entre les plaques P_1 et P'_1 est imposée de telle manière que le spot balaye l'écran périodiquement de gauche à droite, à vitesse constante. On l'appelle tension de balayage.
- La déviation selon y est assurée par la paire de plaques (P_2, P'_2) . La tension entre les plaques est, par construction de l'oscilloscope, proportionnelle à la tension U que l'on mesure et que l'on souhaite afficher.

On peut montrer par un calcul simple (voir exercice corrigé 12.10 page 322) que les coordonnées du spot sur l'écran sont respectivement proportionnelles aux tensions qui règnent entre les paires de plaques. Ainsi, l'ordonnée y est proportionnelle à la tension entre les plaques (P_2, P'_2) .

Grâce à cette propriété, le spot décrit sur l'écran une courbe paramétrée de la forme $(x = a \times t ; y = b \times U)$, où a et b sont des constantes réglables. Aux facteurs d'amplification a et b près, la courbe décrite est celle de la tension $U(t)$. Les coefficients a et b sont modifiés lors du réglage des calibres (base de temps pour x et sensibilité pour y) pour dilater plus ou moins la courbe en x ou en y .

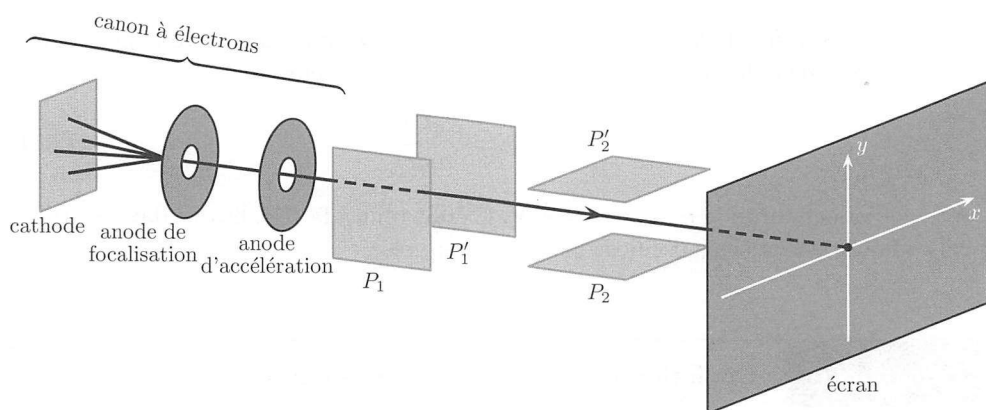


FIG. 12.7. Schéma de principe d'un tube cathodique d'oscilloscope. L'ampoule de verre n'est pas représentée. Le faisceau d'électrons est représenté en trait noir épais. Les générateurs qui imposent les différences de potentiel entre les électrodes ne sont pas représentés.

III. Particule dans un champ magnétique uniforme

Le poids de la particule étant négligeable, celle-ci est uniquement soumise à la force magnétique $\vec{F}_{\text{ma}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette force, en permanence orthogonale à la vitesse \vec{v} de la particule, change de direction si la direction de \vec{v} change. L'étude générale du mouvement n'est donc pas triviale, même si \vec{B} est uniforme et permanent.

III.1. Étude du mouvement

Conformément au programme, nous limitons l'étude du mouvement au cas où la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ de la particule (de masse m et charge q) est orthogonale au champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$. Dans ce cas, on constate expérimentalement que la trajectoire des particules est circulaire, contenue dans le plan orthogonal à \vec{B} et contenant la particule à l'instant initial. Le but est de déterminer le rayon du cercle en fonction des données du problème.

La norme de la vitesse est constante

La particule étant uniquement soumise à la force magnétique, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ma}} = \vec{F}_{\text{ma}} \cdot \vec{v} = \underbrace{(q\vec{v} \wedge \vec{B})}_{\perp \vec{v}} \cdot \vec{v} = 0. \quad (12.12)$$

La force magnétique fournissant une puissance nulle à la particule, celle-ci garde une énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ constante au cours de son mouvement, donc

$$\forall t, |\vec{v}(t)| = |\vec{v}_0|. \quad (12.13)$$

Une particule chargée soumise uniquement à la force magnétique garde une vitesse de norme constante au cours de son mouvement. L'effet du champ magnétique est donc seulement de changer la direction du vecteur vitesse. (Ce résultat est vrai que le champ magnétique soit uniforme ou non.)

Rayon de la trajectoire

Conformément à l'observation expérimentale, on admet que la trajectoire est circulaire lorsque \vec{v}_0 est orthogonale à \vec{B} . D'après la relation (12.13), le mouvement est donc *circulaire uniforme*. On travaille en coordonnées polaires centrées sur le centre du cercle, noté O .

Remarque À ce stade, on ne sait pas encore où est O , car le rayon du cercle n'est pas encore connu. On ne connaît que la position initiale de la particule. Le point O sera déterminé *a posteriori*.

- ▶ Le champ magnétique est $\vec{B} = B \vec{u}_z$ (B est positif ou négatif).
- ▶ On note $\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta$ le vecteur vitesse (v peut donc être positif ou négatif, selon le sens de parcours du cercle, inconnu *a priori*).
- ▶ Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon r ($r > 0$), l'accélération est $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r} \vec{u}_r$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule s'écrit, dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$,

$$\vec{F}_{\text{ma}} = m \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad q \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -\frac{v_0^2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -m \frac{v_0^2}{r} = qv_0 B.$$

Le rayon r (positif) de la trajectoire circulaire vérifie

$$r = -\frac{mv_0}{qB}.$$

Dans cette expression, les signes de v_0 , q et B doivent être tels que $r > 0$.

Méthode

Mouvement d'une particule dans \vec{B} uniforme

- ▶ Montrer que $|\vec{v}|$ est constante.
- ▶ Obtenir le rayon r de la trajectoire (mouvement circulaire uniforme).
- ▶ Placer le centre du cercle à la distance r de la position initiale de la particule, dans la direction indiquée par $\vec{F}_{\text{ma}} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ (car cette force est centripète). Cette direction se détermine facilement avec la règle des trois doigts. Attention : le vecteur $q\vec{v}_0$ a un sens dépendant du signe de q .
- ▶ L'orientation de la trajectoire doit être conforme au sens de \vec{v}_0 (voir figure 12.8).

L'exercice 6 (voir page 332) donne une preuve que la trajectoire est circulaire.

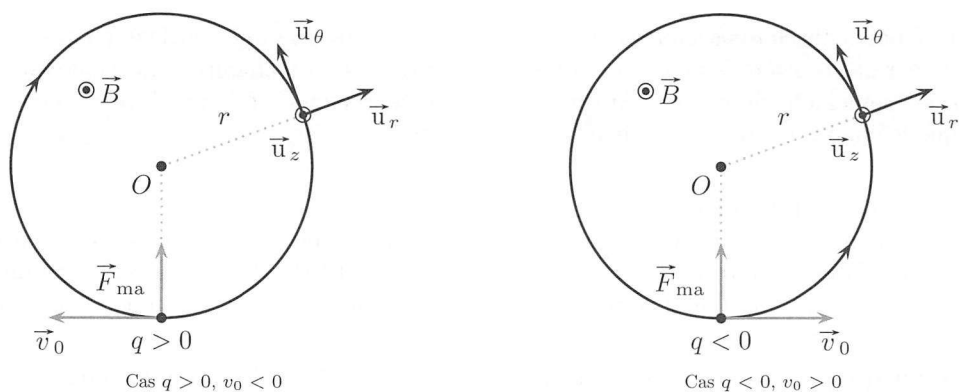


FIG. 12.8. Trajectoire circulaire de la particule. Le sens de parcours du cercle dépend du signe de B , du signe de la charge q et de la vitesse initiale de la particule. Sur les deux schémas, $B > 0$.

III.2. Applications physiques des champs magnétiques uniformes

III.2.1. Écran à tube cathodique

Certes, les écrans à tubes cathodiques des téléviseurs et ordinateurs ont quasiment disparu pour être remplacés par des écrans plats LCD ou à plasma. Cependant nous en avons tous vu. Un tube cathodique est une grosse ampoule dans laquelle on a fait un vide très poussé pour permettre aux électrons de se déplacer sans entrer en collision avec quoi que ce soit. Un canon à électrons (voir figure 12.9) émet un faisceau d'électrons ayant tous sensiblement la même vitesse (faisceau homocinétique). Le but est que le faisceau balaie tout l'écran à chaque nouvelle image : entre 50 et 100 fois par seconde, selon l'appareil, le point d'impact du faisceau d'électrons doit passer sur chacun des pixels de l'image. Pour cela, le faisceau est dévié de façon variable dans le temps par deux paires de bobines de Helmholtz.

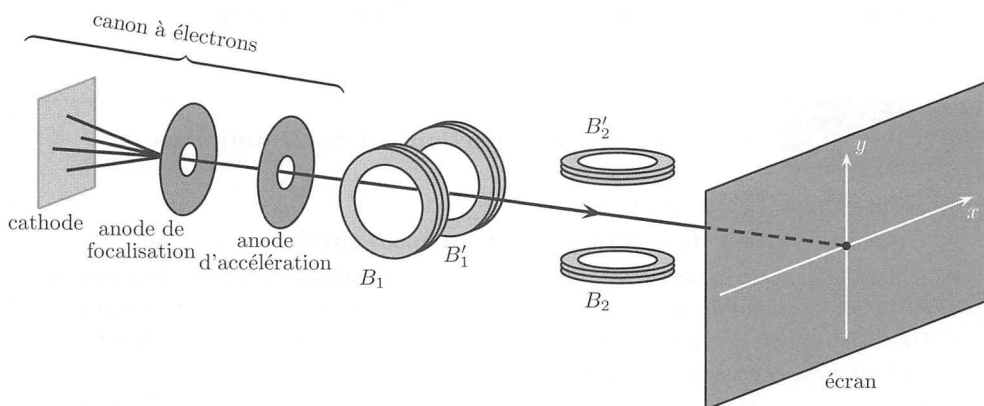


FIG. 12.9. Schéma de principe d'un tube cathodique de téléviseur. Les deux paires de bobines de Helmholtz (B_1, B'_1) et (B_2, B'_2) sont décalées sur le schéma. Dans la réalité, elles sont situées au même niveau.

- ▶ Une première paire de bobines (B_1, B'_1), d'axe horizontal, crée un champ magnétique horizontal qui dévie le faisceau verticalement : cela assure le balayage haut-bas de l'écran.
- ▶ Une seconde paire de bobines (B_2, B'_2), d'axe vertical, crée un champ magnétique vertical et assure la déviation horizontale du faisceau : cela assure le balayage gauche-droite de l'écran.

Une fois sortis de la zone des bobines de Helmholtz, les électrons se déplacent en ligne droite jusqu'à l'écran où ils frappent les luminophores (pixels). L'énergie cinétique des électrons est convertie en lumière lors du choc avec l'écran. Pour que l'intensité lumineuse soit assez grande, les électrons sont accélérés avec une tension d'environ 30 kV. Pour assurer les déviations nécessaires allant jusqu'à 60° , il suffit que les bobines de Helmholtz délivrent un champ magnétique de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}$ tesla, ce qui est tout à fait réalisable. Si on essayait de dévier les électrons en créant des champs électriques à l'aide de plaques chargées (condensateurs plans) occupant la place des bobines de Helmholtz, il faudrait imposer des différences de potentiel de l'ordre de 3 à 4 kV entre ces plaques, ce qui est réalisable, mais trop dangereux pour un usage domestique.

III.2.2. Spectrographe de masse

Un spectrographe de masse est un appareil destiné à séparer les isotopes d'un même élément. Par exemple, l'hélium 3 et l'hélium 4 sont les deux isotopes de l'hélium :

- ▶ le noyau de ${}^3_2\text{He}$ a deux protons et un seul neutron ;
- ▶ le noyau de ${}^4_2\text{He}$ a deux protons et deux neutrons.

Deux isotopes ayant exactement la même réactivité chimique, il est impossible de les séparer par des méthodes chimiques (formation de précipités, distillation, etc.). On a donc recours à des méthodes physiques, comme le spectrographe de masse. Les étapes de la manipulation sont décrites ci-après et résumées sur la figure 12.10.

1. On ionise le mélange des deux isotopes en le bombardant avec des électrons : les chocs entre les électrons et les atomes arrachent les électrons périphériques des atomes. On trie les ions à l'aide d'un dispositif approprié pour que tous les ions sortant de la chambre d'ionisation aient la même charge q (positive car déficit d'électrons).
2. On accélère les ions ainsi formés grâce à un champ électrique uniforme créé entre deux plaques parallèles portées à des potentiels différents.
3. Le faisceau parallèle d'ions ainsi formé arrive dans un déviateur, zone où règne un champ magnétique uniforme et orthogonal à la vitesse des particules entrantes. Chaque type d'ion prend alors une trajectoire circulaire dont le rayon dépend du rapport charge/masse ($\frac{q}{m}$). Or, deux isotopes ont des masses différentes. Comme ils ont été triés pour avoir la même charge, les trajectoires des deux isotopes ne sont pas les mêmes, ce qui permet de les séparer.

Comme le montre la figure 12.10, la distance entre les deux points d'arrivée des deux isotopes n'est autre que la différence entre les diamètres des deux cercles. Avec des champs magnétiques de valeurs usuelles, la distance M_1M_2 est de l'ordre du centimètre. Des fentes réglables placées au niveau de M_1 et M_2 permettent de récupérer ces isotopes et de connaître la quantité de chacun.

Les spectromètres de masse sont abondamment utilisés en laboratoire pour faire des analyses de matériaux. Par exemple, la police scientifique peut trouver par spectrométrie la provenance d'une trace de boue, car la composition isotopique de la terre varie d'un lieu à l'autre.

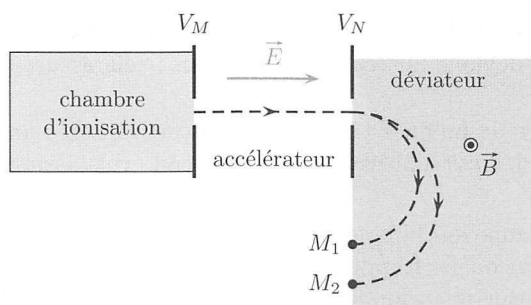


FIG. 12.10. Schéma de principe d'un spectromètre de masse.

III.2.3. Accélérateurs de particules

Pour étudier la structure des particules chargées (protons, etc.), on les accélère fortement avant de les faire entrer en collision les unes contre les autres pour les faire éclater en leurs composants internes. Les vitesses atteintes étant très grandes, il n'est pas envisageable d'avoir des accélérateurs linéaires, qui devraient être beaucoup trop longs. Dans un accélérateur de type **cyclotron** (voir figure 12.11), on incurve la trajectoire des particules à l'aide de champs magnétiques. La partie centrale, qui est l'accélérateur proprement dit, est le siège d'un champ électrique uniforme qui accélère la particule en ligne droite. Un champ magnétique \vec{B} fait faire demi-tour à la particule qui revient alors dans l'accélérateur, dans lequel on a pris soin entre-temps d'inverser le sens de \vec{E} , etc. Le rayon de courbure de la trajectoire $R = \frac{mv}{|q|B}$ augmente au fur et à mesure que v augmente. Les particules finissent par sortir du cyclotron. Les calculs de trajectoire sont les mêmes que dans les exemples précédents. Les calculs complémentaires spécifiques aux cyclotrons sont assez simples. Ils consistent à déterminer :

- ▶ quelle est l'évolution temporelle de la norme de vitesse de la particule ;
- ▶ quelle doit être la fréquence d'inversion de \vec{E} .

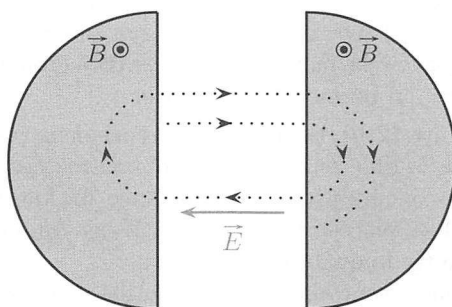


FIG. 12.11. Schéma de principe d'un cyclotron.

IV. Exercices

1. Principe d'un oscilloscope ★

(solution page 716)

On considère un ensemble de deux plaques parallèles (condensateur plan), séparées d'une distance d et entre lesquelles règne une tension U que l'on cherche à mesurer (voir figure 12.12). On considère que les effets de bords sont négligeables vis-à-vis du champ électrique \vec{E} créé (le champ est uniforme entre les plaques et nul ailleurs). Un canon envoie un faisceau d'électrons de vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, de masse m et de charge $q = -e$.

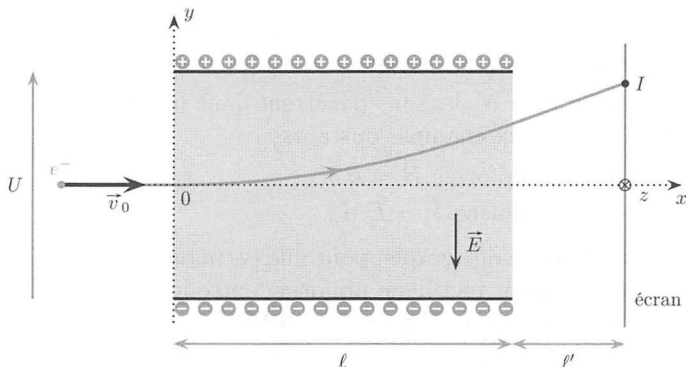


FIG. 12.12. Principe d'un oscilloscope.

1. Établir l'équation de la trajectoire d'un électron dans la zone où règne le champ électrique en fonction de v_0 , U , d et e .
2. En déduire l'équation de la trajectoire rectiligne en sortie de la zone de champ électrique. Faire apparaître dans l'expression les dimensions indiquées sur le schéma.
3. Montrer que l'ordonnée y du point d'impact I du faisceau avec l'écran est proportionnelle à la tension U . Quel est l'intérêt de cette propriété dans un oscilloscope ?
4. Donner l'allure de la tension $U(t)$ qu'il faut appliquer entre les plaques assurant la déviation horizontale du spot sur l'écran d'un oscilloscope pour garantir un balayage horizontal périodique et à vitesse constante de l'écran.

2. Sélecteur d'isotopes ★

(solution page 717)

À la sortie d'une chambre d'ionisation, des ions néon ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ et ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$, de masses respectives m_1 et m_2 , pénètrent avec une vitesse quasiment nulle par un trou M dans l'espace compris entre deux plaques métalliques verticales planes P_M et P_N , entre lesquelles est établie une différence de potentiel accélératrice $U = V_M - V_N$ (voir figure 12.13).

1. Les ions arrivent en N avec une vitesse horizontale. Établir l'expression littérale de cette vitesse. Calculer numériquement la vitesse des deux types d'ions à partir des données suivantes :

- ▶ $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- ▶ $U \simeq 2,0 \cdot 10^4 \text{ V}$;

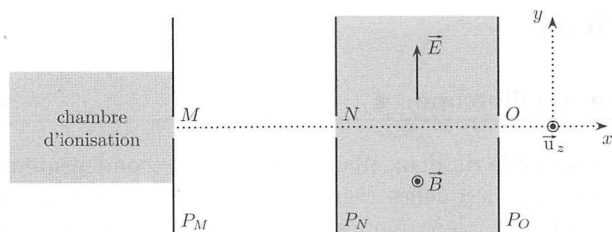


FIG. 12.13. Sélecteur d'isotopes.

► 1 u.m.a. $\simeq 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. L'unité de masse atomique (u.m.a.) est la masse d'un nucléon (proton et neutron ont sensiblement la même masse).

2. Après le passage du trou N , les ions pénètrent dans une région où ils sont soumis à l'action simultanée de deux champs constants :

- un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$;
- un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{u}_y$.

La valeur de B étant fixée, montrer que, pour une certaine valeur de \vec{E} , les ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ peuvent avoir un mouvement rectiligne uniforme entre les points N et O . Donner la valeur numérique de la norme de \vec{E} pour $B = 0,10$ T.

3. Qu'advient-il des ions ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$ dans ce cas ? Quelle est l'application du dispositif envisagé ?

3. Déflexion d'électrons ★

(solution page 718)

Dans cet exercice, tout se passe dans le vide. Le poids des particules sera négligé devant les autres forces. Des électrons de masse m et de charge q , ayant une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, arrivent au point O dans une région de longueur ℓ (déflecteur) où règne un champ électrostatique uniforme vertical $\vec{E} = E \vec{u}_y$ (voir figure 12.14).

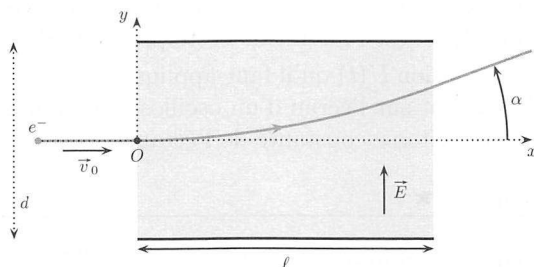


FIG. 12.14. Déflecteur d'électrons.

1. À la sortie de cette zone, les électrons ont une vitesse déviée d'un angle α par rapport à la vitesse d'entrée. Exprimer l'angle α en fonction des données.

2. Le champ électrostatique précédent est créé par un condensateur plan dont les armatures P_1 et P_2 sont séparées d'une distance d . Quelle différence de potentiel faut-il appliquer entre ces deux plaques dans les trois cas suivants : $\alpha = 10, 20$ ou 30 degrés ?

3. Si on veut réaliser la même déflexion grâce à un champ magnétique uniforme régnant dans le même volume de longueur ℓ que précédemment, comment doit être dirigé le champ magnétique et quelle doit être sa norme ?

Données : $q = -e \simeq -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m \simeq 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $v_0 \simeq 1,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\ell \simeq 5,0 \text{ cm}$; $d \simeq 5,0 \text{ cm}$.

4. Cyclotron ★

(solution page 720)

Dans un accélérateur de type cyclotron, on incurve la trajectoire des particules à l'aide de champs magnétiques uniformes dans deux zones en forme de « D », appelées « dés » en français ou « dees » en anglais (voir figure 12.15). Entre les dés se trouve une petite zone d'accélération où règne un champ électrostatique uniforme qui accélère la particule en ligne droite. Après une accélération, la particule entre dans un dé où elle parcourt un demi-cercle avant de revenir dans la zone d'accélération, dans laquelle on a pris soin entre-temps d'inverser le sens de \vec{E} , etc. Les rayons des arcs de cercle croissent jusqu'à ce que la particule quitte le cyclotron. La valeur du champ magnétique uniforme et constant dans les dés est $B = 1,0 \text{ T}$. L'amplitude de la tension sinusoïdale générant le champ électrostatique entre les dees est $U_m = 2,5 \cdot 10^3 \text{ V}$.

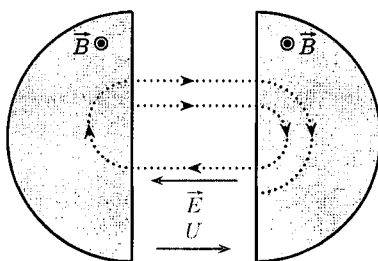


FIG. 12.15. Cyclotron.

1. Montrer que dans un dé, le mouvement du proton est circulaire et uniforme.
2. Exprimer le temps mis pour parcourir un demi-tour dans un dé. Ce temps dépend-il de la vitesse du proton ? Calculer sa valeur numérique.
3. En déduire la fréquence f de la tension à appliquer entre les dés pour que le champ accélère au mieux les protons (on considère que le temps de passage entre les deux dés est négligeable devant les autres temps). Cette fréquence s'appelle la fréquence cyclotron.
4. Exprimer, puis calculer numériquement (en joules et en électronvolts) l'augmentation d'énergie cinétique d'un proton à chaque accélération.
5. La vitesse d'injection du proton étant quasi nulle, on désire que sa vitesse atteigne $25 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le nombre de tours que doit faire le proton dans le cyclotron ainsi que le temps nécessaire à cette opération.
6. Quel est le rayon du dernier arc de cercle parcouru par les protons lorsqu'ils ont atteint cette vitesse ? Commenter la valeur obtenue.

Données :

- masse du proton : $m \simeq 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$;
- charge du proton : $q = +e \simeq 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

5. Modèle de l'atome de Thomson ★★

(solution page 721)

Joseph Thomson (1856-1940) a obtenu le prix Nobel en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 le modèle dit du pain aux raisins pour l'atome d'hydrogène (l'expérience de Rutherford, en 1911, a montré que ce modèle était impossible, mais il est académiquement intéressant).

Une boule, de rayon R et de centre O , porte une densité ρ positive uniforme de charge, qui crée un champ électrostatique dont l'expression (admise) est $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques centrées sur O . Dans cette boule se trouve un électron de charge $-q$, libre de se mouvoir sans frottement.

1. Montrer que l'électron peut décrire, dans la boule, une trajectoire circulaire uniforme centrée sur O . En notant $r_0 < R$ le rayon d'une telle trajectoire, déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ correspondante. On posera $\alpha = \frac{q\rho}{3\epsilon_0}$.

2. On suppose que le mouvement de l'électron est plan, mais pas exactement circulaire uniforme : r et θ peuvent varier au cours du temps.

a/ Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron, en coordonnées polaires centrées sur le centre de la boule.

b/ Vérifier que la projection sur \vec{u}_θ de l'équation obtenue traduit le fait que $r^2\dot{\theta} = \text{cte}$. Cette constante sera prise égale à $r_0^2\dot{\theta}_0$ dans la suite.

c/ En déduire une équation différentielle vérifiée par r seul.

d/ Pour étudier la stabilité de la trajectoire, on pose $r(t) = r_0[1 + \varepsilon(t)]$, où $\varepsilon(t) \ll 1$. En travaillant à l'ordre 1 en ε , établir une équation différentielle vérifiée par ε . Conclure sur la stabilité de la trajectoire.

3. Comment a été modifié le modèle de l'atome suite à l'expérience de Rutherford ? À partir de quelles considérations ?

6. Particule dans un champ magnétique ★★★

(solution page 722)

On étudie la trajectoire d'une particule de charge q et de masse m dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et permanent. Contrairement au cas du cours, on ne se limite pas au cas où la vitesse initiale \vec{v}_0 de la particule est orthogonale au champ magnétique. La direction de \vec{v}_0 peut être quelconque. Le but est de démontrer que la trajectoire est circulaire dans le cas où $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$.

1. Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.

2. On travaille en coordonnées cartésiennes. L'axe z est choisi parallèle au champ magnétique (uniforme), qui s'écrit $\vec{B} = (0, 0, B)$, et la vitesse de la particule est notée $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Qu'en déduit-on concernant la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique ?

3. On note désormais :

► $\vec{v}_\parallel \stackrel{\text{def.}}{=} (0, 0, \dot{z})$ la composante de la vitesse parallèle à \vec{B} ;

► $\vec{v}_\perp \stackrel{\text{def.}}{=} (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ la composante de la vitesse orthogonale à \vec{B} .

Montrer que $|\vec{v}_\perp|$ est constante.

4. L'étude de \vec{v}_\perp se résume donc à l'étude du mouvement d'une particule ayant une trajectoire contenue dans le plan (Oxy) perpendiculaire au champ magnétique et dont la vitesse initiale serait le \vec{v}_\perp initial de la véritable particule étudiée. Il faut des conditions initiales pour résoudre complètement le problème. Pour simplifier les

calculs, on choisit l'axe x parallèle à la composante dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) de la vitesse initiale de la particule. De plus, on choisit la position de la particule à l'instant initial comme origine du repère. En résumé,

$$\text{conditions initiales à } t = 0 : \vec{v} \stackrel{\text{déf.}}{=} (\dot{x}_0, 0, 0) \text{ et } x = 0 ; y = 0 ; z = 0. \quad (12.14)$$

Les deux équations vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$ sont couplées, ce qui complique les choses. Cependant on peut ramener ce problème à une équation facilement soluble, en effectuant la combinaison linéaire faisant apparaître la grandeur complexe $u \stackrel{\text{déf.}}{=} x + iy$, où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u et la résoudre, en faisant apparaître dans les calculs la grandeur $\omega \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{qB}{m}$, dont la dimension est à préciser. En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

5. En déduire que la trajectoire de la particule, en projection sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, est un cercle dont les caractéristiques (centre, rayon et sens de parcours) sont à préciser en fonction de \dot{x}_0 et ω .

6. Au vu des résultats de l'étude, donner les caractéristiques de la trajectoire générale d'une particule dans un champ magnétique uniforme. On peut s'aider d'un logiciel pour représenter qualitativement cette trajectoire.

Chapitre 13

MOMENT CINÉTIQUE ET APPLICATIONS

LES MOUVEMENTS de rotation, bien qu'ils puissent *a priori* être étudiés par application des lois de Newton ou des théorèmes énergétiques, gagnent à être décrits au moyen d'outils adaptés : le *moment cinétique* pour décrire le mouvement de rotation, le *moment des forces* pour les efforts conduisant à la mise en rotation.

Dans un hélicoptère en vol stationnaire, la somme (vectorielle) des vitesses des différents points des hélices en rotation sera en général nulle, pour des raisons de symétrie. On comprend pourtant l'importance de rendre compte de leur rotation globale, par exemple pour la stabilisation de l'appareil. C'est ainsi que, pour ne pas faire tourner l'habitacle, les moteurs doivent entraîner deux rotors de sustentation tournant en sens inverse (voir photo ci-contre) ou bien un rotor de queue pour compenser l'effet de rotation du rotor principal.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons d'abord à la mise en rotation d'un point matériel autour d'un centre de rotation arbitraire ; l'étude des systèmes rigides en rotation s'en déduira ultérieurement.



Hélicoptère (photo NASA)

I. Théorème du moment cinétique

I.1. Notion de moment

I.1.1. Moment cinétique

Considérons le point matériel M , de masse m , en mouvement relativement au référentiel (\mathcal{R}) . Pour caractériser un éventuel mouvement de rotation de M autour d'un point arbitraire A , on utilise son *moment cinétique* $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A$. Ce vecteur décrit notamment l'existence d'un angle différent de 0 [π] entre la vitesse de M dans (\mathcal{R}) et le vecteur \overline{AM} (voir figure 13.1).

Définition 13.1. *Moment cinétique*

Le moment cinétique d'un point M de masse m , de vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ relativement au référentiel (\mathcal{R}) , calculé au point A , est le vecteur noté $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A$ tel que

$$\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A = \overline{AM} \wedge m \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}. \quad (13.1)$$

L'unité SI du moment cinétique est le $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

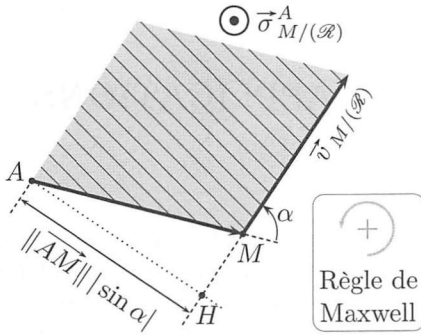


FIG. 13.1. Définition du moment cinétique.

I.1.2. Interprétation géométrique

Le moment cinétique est donc, par construction, *orthogonal* au plan défini par les vecteurs \overline{AM} et $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$; sa direction donne la perpendiculaire au plan local du mouvement autour de A , c'est-à-dire l'*axe de rotation* de M autour de A . Le sens de $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A$ donne le sens du mouvement de rotation, selon la règle d'orientation ordinaire déjà présentée (que nous appellerons dans ce qui suit règle de Maxwell) : un tire-bouchon tournant comme le mobile autour de A progresse dans le sens du vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A$. Cette règle se retrouve à l'identique dans le cours d'électromagnétisme¹ et, plus généralement, à chaque fois qu'il est nécessaire d'orienter des directions dans l'espace. La norme de ce moment cinétique s'écrit

$$\sigma = \|\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A\| = mrv|\sin \alpha|,$$

où $r = \|\overline{AM}\|$, $v = \|\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}\|$ et α est l'angle entre \overline{AM} et $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$. En particulier, le moment cinétique est nul lorsque \overline{AM} est colinéaire à $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$, c'est-à-dire lorsque $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pm\pi$.

On peut cependant aussi interpréter la grandeur $r|\sin \alpha|$ comme la distance ℓ entre les points H et A ; c'est la distance entre A et la droite qui sert de support au vecteur $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ (voir figure 13.1). Le moment cinétique est d'autant plus élevé que le vecteur vitesse de M est situé « loin » de A .

On sait aussi que le produit vectoriel de deux vecteurs mesure l'aire du parallélogramme qu'ils forment; le moment cinétique peut donc encore être interprété comme $\sigma = m\mathcal{A}$, où \mathcal{A} est l'aire du parallélogramme formé par \overline{AM} et $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$, hachuré et grisé sur la figure 13.1.

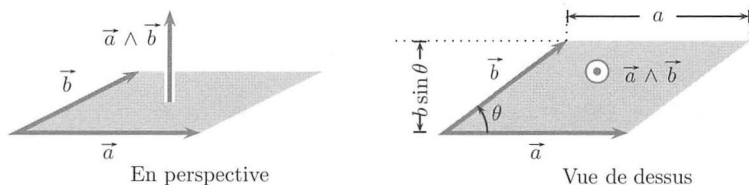
Attention Moment cinétique et produit vectoriel

Il est bien sûr indispensable de mémoriser la définition du moment cinétique, y compris l'ordre du produit vectoriel! Une erreur dans cet ordre conduit à une erreur de signe, donc à déterminer une rotation dans le mauvais sens. On se souviendra aussi que le calcul des produits vectoriels impose le choix d'une base orthonormée *directe*, les vecteurs de base devant être disposés dans l'espace dans le bon ordre.

1. La règle de Maxwell est équivalente à la règle des trois doigts de la main droite, aussi appelée simplement de règle de la main droite (voir figure 12.2 page 315 et figure 21.1 page 579).

Rappel Produit vectoriel

La figure ci-dessous présente le parallélogramme construit sur la base de deux vecteurs \vec{a} (de norme a) et \vec{b} (de norme b). La direction normale est orientée par l'une des « règles » déjà évoquées.



La surface est le produit de la base par la hauteur, soit $S = a b \sin \theta$. Le *produit vectoriel* $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ est le vecteur de norme $\|\vec{c}\| = S = a b \sin \theta$ et tel que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ soit un trièdre direct.

On retiendra le lien entre produit vectoriel et sinus de l'angle et ceci indépendamment du choix de l'orientation des angles,

$$|\sin(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}{a b}.$$

On remarque donc que la colinéarité de deux vecteurs peut être prouvée en montrant que leur produit vectoriel est nul, l'angle entre ces deux vecteurs étant 0 ou π .

On peut également donner une définition algébrique du produit vectoriel en donnant la règle de calcul des composantes dans une base orthonormée *directe*, c'est-à-dire orientée, par exemple, par la « règle du tire-bouchon ».

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

Le produit vectoriel est une opération linéaire dont il est nécessaire de connaître certaines propriétés pour résoudre certains problèmes de physique. Nous rappelons ici les plus utiles :

- antisymétrie

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a};$$

- linéarité par rapport à l'addition

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} &= \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}; \end{aligned}$$

- formule du double produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c};$$

- identité de Binet-Cauchy

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

I.1.3. Moment d'une force

Lorsqu'un point M est en mouvement dans un référentiel (\mathcal{R}) sous l'action d'une force \vec{F} , on peut définir le moment de cette force en un point A .

Définition 13.2. Moment d'une force

On appelle moment de la force \vec{F} exercée sur le point M , calculé au point A , le vecteur

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/M,(\mathcal{R})}^A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}. \quad (13.2)$$

Le moment d'une force s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}$, soit en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le référentiel d'étude, on peut alléger la notation et parler du moment $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/M}^A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$ de la force \vec{F} s'exerçant au point M par rapport au point A ; ce dernier point est parfois appelé « pivot ».

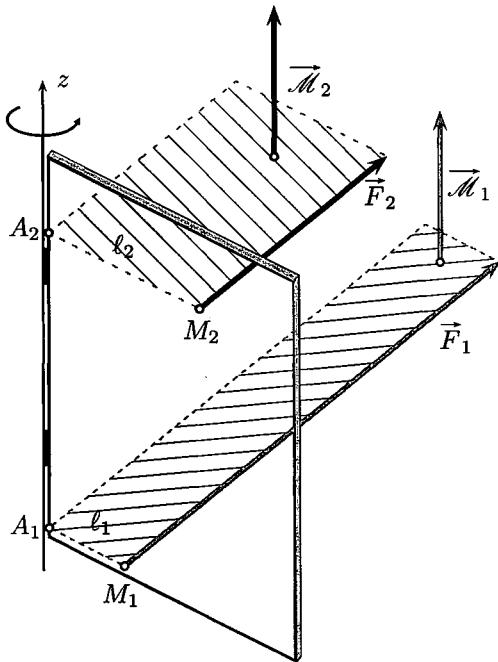


FIG. 13.2. Moments égaux de deux forces différentes.

La norme de $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/M}^A$ est le produit ℓF de la norme F de la force par la distance ℓ entre A et la droite support (ou *droite d'action*) de \vec{F} . La figure 13.2 illustre cette propriété dans le cas de deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , appliquées perpendiculairement à une porte transparente que l'on souhaite faire tourner autour de l'axe (Oz). Les points d'application M_1 et M_2 de ces deux forces passent respectivement aux distances ℓ_1 et ℓ_2 des points A_1 et A_2 pour lesquels on calcule les moments $\vec{\mathcal{M}}_1 = \overrightarrow{A_1M_1} \wedge \vec{F}_1$ et $\vec{\mathcal{M}}_2 = \overrightarrow{A_2M_2} \wedge \vec{F}_2$. Les surfaces grisées de la figure 13.2 représentent l'intensité des moments de ces deux forces, qui sont ici de même sens. Cette figure illustre donc que ces deux moments sont d'intensités comparables : la force \vec{F}_2 est moins intense que \vec{F}_1 mais elle est exercée à plus grande distance de l'axe de rotation. On dit souvent que le *bras de levier* de \vec{F}_2 est plus important que celui de \vec{F}_1 .

Les interprétations géométriques du moment cinétique et du moment d'une force sont finalement semblables; elles sont rappelées ci-après.

Synthèse

Interprétations des moments

► *Moment cinétique*

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ donne la direction et le sens de la rotation de M autour de A .

Sa norme $\sigma = m \cdot \ell \cdot v$ mesure le produit de la masse m , de la vitesse $v = \|\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}\|$ et de la distance ℓ entre A et la droite prolongeant la vitesse de M .

► *Moment d'une force*

Le moment $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/M}^A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$ en A de la force \vec{F} donne la direction et le sens de l'effet de rotation de M autour de A dû à \vec{F} .

Sa norme $\mathcal{M} = \ell \cdot F$ mesure le produit du bras de levier ℓ (distance entre A et la droite d'action de \vec{F}) par la norme F de la force.

I.2. Théorème du moment cinétique

Considérons le cas où le mouvement de M est étudié dans le référentiel galiléen (\mathcal{R}) sous l'action de diverses forces \vec{F}_i . Soit A un point fixe de (\mathcal{R}) , calculons la dérivée temporelle de $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A$. La dérivée d'un produit vectoriel se calcule comme celle de n'importe quel produit (« $(uv)' = u'v + uv'$ »), soit

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = m \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} + m \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_{M/(\mathcal{R})}.$$

On écrit alors que $\left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} - \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} - \vec{v}_{A/(\mathcal{R})}$. Le

point A est fixe dans (\mathcal{R}) , ainsi $\vec{v}_{A/(\mathcal{R})} = \vec{0}$; par définition, $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \vec{0}$; enfin dans le référentiel galiléen (\mathcal{R}) , le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m \vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = \sum_i \vec{F}_i$, on a donc

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{AM} \wedge \sum_i \vec{F}_i.$$

Dans cette relation, on voit donc apparaître les moments en A des forces \vec{F}_i .

Théorème 13.3. *Théorème du moment cinétique en un point fixe*

Lors du mouvement d'un mobile M relativement au référentiel galiléen (\mathcal{R}) , la dérivée temporelle du moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A$ de M par rapport à un point fixe A est la somme du moment $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_i/M}^A$ de toutes les forces en A .

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_i/M}^A \quad (13.3)$$

On prendra garde à ne pas appliquer ce théorème en un point mobile : si A se déplace dans (\mathcal{R}) , alors $\vec{v}_{A/(\mathcal{R})} \neq \vec{0}$, et il faut rajouter un terme correctif.

On évitera deux erreurs fréquentes :

► la ressemblance des deux définitions du moment d'une force et du moment cinétique ne doit pas amener à confondre ces deux grandeurs, qui n'ont pas la même unité. Le moment d'une force s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ alors que le moment cinétique s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$;

► les deux moments sont définis par des produits vectoriels, opération qui est :

◇ *antisymétrique* : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$,

◇ *non associative* : $\vec{a} \wedge [\vec{b} \wedge \vec{c}] \neq [\vec{a} \wedge \vec{b}] \wedge \vec{c}$,

et on prendra donc bien garde aux calculs de produits vectoriels en général.

L'unité du moment cinétique se confond avec le joule ; toutefois, le terme joule n'est utilisé que pour désigner l'unité d'un travail ou d'une énergie. La notion de moment d'une force peut être généralisée à un vecteur quelconque ; le moment cinétique apparaît alors comme le moment de la quantité de mouvement : c'est de cette propriété qu'il tire son nom. C'est aussi la raison pour laquelle les Anglo-Saxons parlent de moment linéaire pour la quantité de mouvement.

I.3. Applications

I.3.1. Mouvements plans

Dans un référentiel $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère un point matériel M qui évolue dans le plan $z = 0$. On choisit de repérer M par ses coordonnées polaires r et θ . Pour ce mouvement plan, $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$, le moment cinétique en O du mobile M s'écrit donc $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$. On constate qu'il est proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de rotation, mais aussi au carré de la distance du mobile M au point O choisi pour le calcul de ce moment cinétique. On retrouve bien ici le lien entre le sens de rotation de M et la direction de $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O$:

La composante $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O \cdot \vec{u}_z = mr^2 \dot{\theta}$ est positive si M tourne dans le sens direct ($\dot{\theta} > 0$) autour de l'axe (O, \vec{u}_z) , et négative dans le cas contraire.

Dans le cas d'un mouvement quelconque décrit en coordonnées cylindro-polaires, la relation $mr^2 \dot{\theta}$ représente toujours la composante sur l'axe Oz du vecteur moment cinétique. En effet, même si le point M n'est plus dans le plan, on aura toujours $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$ et $\vec{v}_{(\mathcal{R})}(M) = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$

La linéarité du produit vectoriel et une ligne de calcul permettent alors de voir que

$$\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O \cdot \vec{u}_z = mr^2 \dot{\theta}. \quad (13.4)$$

Remarque Ce résultat est utile ; il est important de le connaître *et* de savoir le retrouver. Attention aux confusions fréquentes avec $r^2 \dot{\theta}$ (moment cinétique massique ou constante des aires, voir théorème 13.7), avec $r^2 \dot{\theta}^2$ (c'est-à-dire v_θ^2 , intervenant dans l'énergie cinétique), ou enfin avec $r \dot{\theta}^2$ (grandeur qui n'a aucune signification physique simple mais que trop d'étudiants confondent, hélas, avec l'une des grandeurs précédentes).

I.3.2. Mouvements pendulaires

Considérons, en tant que cas particulier, le pendule simple représenté sur la figure 13.3 ; un point matériel M de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ_0 .

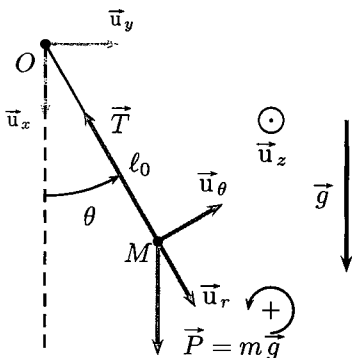


FIG. 13.3. Moment de rappel pour un pendule.

La force de tension \vec{T} du fil est colinéaire à celui-ci, $\vec{T} = -T\vec{u}_r$, et son moment en O est donc nul, $\vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$. Ainsi, l'application du théorème du moment cinétique en O pour un pendule permet-elle d'éliminer immédiatement la tension \vec{T} généralement non donnée. Seul subsiste dans les équations le poids \vec{P} , de moment

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/M}^O = \ell_0 \vec{u}_r \wedge mg (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

qui se simplifie en $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/M}^O = -mg\ell_0 \sin \theta \vec{u}_z$. Cette expression est celle d'un *moment de rappel*. En effet, si $\theta \in [0, \pi]$, alors $-mg\ell_0 \sin \theta$ est de signe contraire à θ : lorsque le pendule est soulevé vers la droite (comme sur la figure 13.3), le moment est négatif et tend donc à ramener M vers sa position d'équilibre en $\theta = 0$. Réciproquement, lorsque $\theta \in]-\pi, 0[$, alors $-mg\ell_0 \sin \theta > 0$ et le poids ramène aussi le pendule vers sa position d'équilibre.

Finalement, $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{E})}^O = m\ell_0^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ et $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/M}^O = -mg\ell_0 \sin \theta \vec{u}_z$, le théorème du moment cinétique appliqué au point O s'écrit donc $\frac{d}{dt} (m\ell_0^2 \dot{\theta}) = -mg\ell_0 \sin \theta$, soit encore

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_0}}. \quad (13.5)$$

Il s'agit de l'équation classique d'évolution des pendules. Dans le cas des petits mouvements, $\sin \theta \simeq \theta$, cette équation prend la forme linéaire simple $\ddot{\theta} \simeq -\omega_0^2 \theta$, qui correspond à un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 .

On remarquera qu'en multipliant l'équation (13.5) d'évolution des pendules par $\dot{\theta}$, elle s'intègre facilement pour donner $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = +\omega_0^2 \cos \theta + \text{cte}$. En multipliant par $m\ell_0$, on obtient alors la relation $\frac{1}{2} m\ell_0^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell_0 \cos \theta = \text{cte}$.

L'axe vertical est ici (Ox) orienté vers le bas et, à une constante additive près, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $\mathcal{E}_p = -mgx = -mg\ell_0 \cos \theta$. Comme $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m\ell_0^2 \dot{\theta}^2$, on peut donc reconnaître l'équation de conservation de l'énergie mécanique du pendule, $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m$.

On retiendra l'utilité du théorème du moment cinétique qui permet d'éliminer des équations les forces qui n'influencent pas sur la rotation du mobile, comme la tension du fil dans cet exemple.

Dans le cas idéal où toutes les forces sont de moment nul en permanence, le moment

cinétique est alors constant ; il forme une *intégrale première du mouvement*. C'est en particulier le cas des forces centrales que nous allons étudier à présent.

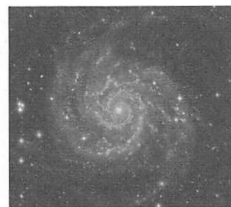
II. Mouvements à force centrale

II.1. Forces centrales

II.1.1. Définition

Dans une galaxie spirale, les étoiles sont soumises à des forces de nature gravitationnelle approximativement dirigées (au moins pour des raisons de symétrie) vers le centre de la galaxie, et c'est sous l'action de ces forces que les étoiles qui forment la galaxie tournent lentement autour de ce centre.

On rencontre fréquemment des situations analogues, à chaque fois qu'une force (par exemple de nature gravitationnelle, mais pas nécessairement) exercée sur un mobile ponctuel M est en permanence dirigée vers un point fixe du référentiel d'étude. On parle alors de force centrale.



La galaxie M74

Définition 13.4. Force centrale

On appelle force centrale une force \vec{F} exercée sur un point matériel M , constamment dirigée vers un certain point fixe O , appelé centre de force.

Remarque Le centre de force est en fait rarement fixe dans le cas des forces de gravitation : qu'il s'agisse du centre du Soleil ou du centre de la Galaxie, ces points sont en fait mobiles et les résultats développés ici ne s'appliquent qu'en première approximation, ou bien sur des échelles de temps suffisamment courtes.

Dans toute la suite, nous nous placerons exclusivement dans le cas où le référentiel (\mathcal{R}) est galiléen, et le centre de force fixe. Dans ce référentiel, le moment $\vec{\mathcal{M}}_{P/M}^O$ de la force centrale, calculé au centre de force O , est toujours nul car \vec{F} est colinéaire à \vec{OM} .

$$\vec{\mathcal{M}}_{P/M}^O = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad (13.6)$$

II.1.2. Exemples

- ▶ La tension \vec{T} exercée par un fil inextensible sur son extrémité M est en permanence dirigée vers le point d'attache O ; si ce point d'attache est fixe, la force de tension du fil est une force centrale. Il en va de même de la force de tension \vec{T} exercée par un ressort reliant le point M à un point fixe O ; la force est colinéaire à \overline{OM} , dirigée vers O si le ressort est étendu ou vers M si le ressort est comprimé. Le cas du fil peut d'ailleurs être obtenu comme un cas limite de ressort de raideur infinie.
- ▶ La force de gravitation $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mm'}{d^2} \vec{u}$ exercée par une masse m' fixe en O sur le point matériel M de masse m est en permanence colinéaire à la direction du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\overline{OM}}{OM}$; il s'agit donc aussi d'une force centrale.
- ▶ La force électrostatique exercée par une charge q' fixe en O sur le point matériel M de charge q est aussi une force centrale, dont l'expression est $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d^2} \vec{u}$, avec les mêmes notations que pour la force gravitationnelle.

Ces deux derniers exemples de forces centrales, proportionnelles à l'inverse du carré de la distance entre M et le point fixe O , portent le nom de *forces centrales newtoniennes*.

II.2. Propriétés des mouvements à force centrale

II.2.1. Conservation du moment cinétique

Dans toute la suite, nous étudions un mobile M de masse m en mouvement relativement au référentiel galiléen (\mathcal{R}) sous l'action d'une force \vec{F} centrale, de centre de force O . Le théorème du moment cinétique et le fait que le moment en O d'une force centrale est constamment nul permettent d'énoncer le résultat fondamental ci-après.

Théorème 13.5. Intégrale première du mouvement

Un point M soumis à une force centrale de centre O origine de (\mathcal{R}) possède un moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O$ constant lors de son mouvement.

II.2.2. Conséquences de la conservation du moment cinétique

Si le moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O = m \overline{OM} \wedge \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ est constant, le vecteur position \overline{OM} est en permanence orthogonal à un vecteur constant. Le vecteur \overline{OM} est donc astreint à ne pouvoir évoluer que dans un plan fixe passant par O . On en déduit la première conséquence fondamentale suivante.

Théorème 13.6. Mouvement plan

Dans un mouvement à force centrale de centre O , le mouvement de M s'effectue dans un plan fixe passant par le centre de force O et orthogonal au moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O$.

On choisira systématiquement de noter $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ le plan du mouvement, l'axe défini par le point O , et le vecteur $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O$ est alors confondu avec (O, \vec{u}_z) . On étudiera le mouvement de M dans le plan $z = 0$ en le repérant par ses coordonnées polaires $r = \|\overline{OM}\|$ et $\theta = (\vec{u}_x, \overline{OM})$.

On a vu dans ce cas que $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$. La masse d'un point est constante, ainsi la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ l'est aussi. Elle se mesure en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et porte le nom de *constante des aires*.

Théorème 13.7. Constante des aires

Dans un mouvement à force centrale de centre O , le mouvement de M est caractérisé, dans son plan, par la relation $C = r^2\dot{\theta}$, où la constante des aires C est une intégrale première du mouvement.

Notons bien que C est une grandeur algébrique, dont le signe dépend de l'orientation choisie pour le plan du mouvement et pour l'axe (O, \vec{u}_z) ; le signe de C est aussi celui de $\dot{\theta}$. Sur la figure 13.4, la trajectoire suivie par le point M a été représentée avec une constante des aires positive. Dans un mouvement à force centrale de centre O , le sens du mouvement est toujours le même, donné par le signe de la constante des aires

$$C = r^2\dot{\theta}. \quad (13.7)$$

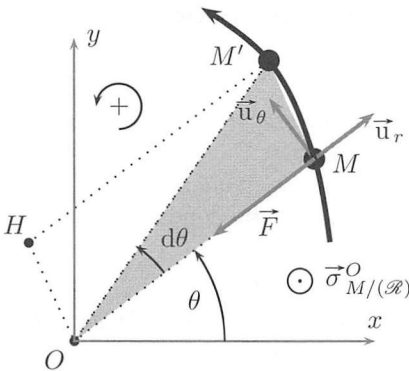


FIG. 13.4. Constante des aires d'un mouvement à force centrale.

Si $C > 0$, le mouvement se fait toujours dans le sens direct ($\dot{\theta} > 0$); si $C < 0$, il se fait toujours dans le sens rétrograde. La figure 13.4 concerne un mouvement dans le sens direct, avec $\dot{\theta} > 0$. Ainsi, les positions $M(t)$ et $M'(t + dt)$ occupées successivement par le mobile sur sa trajectoire sont bien dans le sens du schéma, en particulier $d\theta = \dot{\theta}dt > 0$.

Puisque dt est infinitésimal, on peut considérer que la trajectoire entre M et M' est le segment MM' . Dans ces conditions, la surface du triangle OMM' représente l'*aire balayée* par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ pendant la durée élémentaire dt . Cette surface $|d\mathcal{A}|$ est aussi la moitié de l'aire du parallélogramme $OMM'H$ construit sur la base des vecteurs $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $d\vec{r} = \overrightarrow{MM'}$.

On sait déterminer l'aire d'un parallélogramme à partir du produit vectoriel de deux de ses côtés, on a donc $|d\mathcal{A}| = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge d\vec{r}\|$, qui s'écrit aussi $|d\mathcal{A}| = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge d\vec{v}_{(\mathcal{R})}(M)\|dt$, soit finalement $|\frac{d\mathcal{A}}{dt}| = \frac{1}{2}|C|$. Cette relation est en fait algébrique et définit la vitesse aréolaire $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$:

- ▶ si $C > 0$, la *vitesse aréolaire* $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ est positive et signale le sens direct du mouvement ;
- ▶ si $C < 0$, alors $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ est négative et rappelle le sens rétrograde du mouvement.

Théorème 13.8. Loi des aires

La vitesse à laquelle le rayon vecteur \overrightarrow{OM} balaye l'aire menée depuis le centre O d'une force centrale est constante; cette vitesse dite aréolaire est égale à la moitié de la constante des aires.

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}C \quad (13.8)$$

La vitesse aréolaire s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Cette relation porte aussi le nom de *seconde loi de Kepler*; elle a été établie empiriquement par Johannes Kepler, dans le cas de l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil; Kepler² reprenait alors (au début du XVII^e siècle) les résultats observationnels accumulés durant toute sa vie par Tycho Brahé³. On l'exprime sous sa forme historique en affirmant que les aires balayées par le rayon vecteur (mené du centre de force au mobile ou, dans le cas historique de Kepler, du Soleil aux planètes), pendant des intervalles de temps égaux, sont égales.



Johannes Kepler

Attention**Étude des mouvements à force centrale**

Lorsqu'on reconnaît qu'un mouvement se fait *exclusivement* sous l'action des forces centrales, les résultats classiques ci-après doivent être établis rapidement et sans hésitation, *dans le bon ordre* :

- ▶ toutes les forces sont centrales, *donc* le moment cinétique est constant ;
- ▶ le moment cinétique est constant, *donc* le mouvement est plan ;
- ▶ dans un mouvement plan, la composante du moment cinétique selon la normale à ce plan ($\sigma_z = mr^2\dot{\theta}$) est conservée, *donc* le mouvement vérifie la loi des aires.

III. Forces centrales conservatives**III.1. Force centrale et énergie potentielle****III.1.1. Expression générale**

Considérons, dans un référentiel (\mathcal{R}), le point M sur lequel s'exerce une force centrale de centre O notée $\vec{F}_M = F\vec{u}_r$, en notant comme plus haut \vec{u}_r le vecteur unitaire de la direction \overrightarrow{OM} . Supposons de plus que la grandeur algébrique F ne dépende que de la distance $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, on dit aussi que la force est *invariante par rotation* autour de O . On a donc $\vec{F}_M = F(r)\vec{u}_r$. Dans le repérage sphérique, nous avons vu

2. Johannes Kepler (1571–1630) est un astronome allemand connu pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas en parcourant des cercles parfaits mais des ellipses.

3. Tycho Brahé (1546–1601) était un noble danois, surnommé l'astronome au nez d'or en référence au postiche doré qu'il arborait pour remplacer son appendice nasal perdu lors d'un duel!

que $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} \cdot \vec{u}_r = \dot{r}$, ainsi la puissance développée par cette force au cours d'un déplacement arbitraire de M s'écrit $\mathcal{P}_{\vec{F}_M/(\mathcal{R})} = \vec{F}_M \cdot \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = \dot{r}F(r)$. Supposons maintenant que la fonction $F(r)$ admette une primitive⁴ que l'on notera $-\mathcal{E}_p(r)$. On peut alors écrire

$$\mathcal{P}_{\vec{F}_M/(\mathcal{R})} = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dt},$$

ce qui montre que la force \vec{F}_M est conservative et dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$. On remarque que cette énergie potentielle est, comme toute primitive, définie à une constante près.

Théorème 13.9. Forces centrales conservatives

Toute force centrale de la forme $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ est conservative et dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ telle que

$$F(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{E}_p(r) = -\int F(r) dr. \quad (13.9)$$

Remarque En pratique, presque toutes les forces centrales sont conservatives, car il faudrait imaginer une situation non physique pour exhiber une force centrale dépendant d'une autre variable que r , par exemple du temps t ou de l'angle θ .

III.1.2. Exemples

Les forces newtoniennes (voir section IV.1.1 page 350) sont de la forme $\vec{F}_{\text{new}} = -\frac{\kappa}{r^2}\vec{u}_r$. Elles sont conservatives et dérivent d'une énergie potentielle. Ici $F(r) = -\frac{\kappa}{r^2}$, ainsi $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{\kappa}{r}$. En prenant l'origine des potentiels à l'infini, nous avons montré (voir chapitre 11 relations (11.9) et (11.11) page 301) que

$$\mathcal{E}_{p,\text{gr}} = -\mathcal{G} \frac{mm'}{r} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (13.10)$$

Remarque La force $\vec{F}_M = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\vec{u}_r$ est :

- ▶ *attractive* dans toute la région où $F(r) < 0$, qui correspond à l'intervalle sur lequel l'énergie potentielle est une fonction *croissante* de r ;
- ▶ *répulsive* dans toute la région où $F(r) > 0$, qui correspond à l'intervalle sur lequel l'énergie potentielle est une fonction *décroissante* de r .

Considérons maintenant la force exercée sur le point M par un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 fixé en O ; on peut écrire cette force $\vec{F} = -k(r - \ell_0)\vec{u}_r$, il s'agit donc d'une force centrale. La primitive de la fonction $F(r) = -k(r - \ell_0)$ peut s'écrire $-\mathcal{E}_p(r) = -\frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 + \text{cte}$. Cela correspond à l'expression établie (voir chapitre 11 relation (11.10)) pour l'énergie potentielle élastique en prenant comme origine des énergies potentielles la longueur à vide du ressort, soit

$$\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2. \quad (13.11)$$

4. Il suffit pour cela que la fonction $F(r)$ soit continue, ce qui n'est pas une grande restriction en physique.

III.2. Mouvements et forces centrales conservatives

III.2.1. Énergie potentielle effective

Reprenons la figure 13.4 décrivant le mouvement du point matériel M de masse m soumis à une force centrale \vec{F}_M conservative de centre O . Ce point évolue dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/(O)}$ est colinéaire à l'axe (O, \vec{u}_z) . En coordonnées cylindro-polaires dans le plan $z = 0$ de son mouvement, la vitesse de M s'écrit $\vec{v}_{M/(O)} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. On en déduit son énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ et la loi des aires $r^2\dot{\theta} = C$. En combinant ces deux expressions, on obtient $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2})$. La conservation de l'énergie mécanique totale s'écrit donc

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) + \mathcal{E}_p(r) = \text{cte}.$$

Cette énergie mécanique pourrait être celle d'une particule de masse m se déplaçant selon l'axe (O, \vec{u}_r) et possédant l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$. Ce système unidimensionnel possède en effet les mêmes caractéristiques énergétiques que le système *a priori* tridimensionnel formé par le point M évoluant sous l'influence de la force centrale \vec{F}_M . En fait, toutes les intégrales premières du système tridimensionnel⁵ le rendent formellement équivalent au système unidimensionnel. L'énergie potentielle qu'il faut « attribuer » au système unidimensionnel pour assurer cette équivalence est qualifiée d'*énergie potentielle effective*, elle est notée $\mathcal{E}_{p,\text{ef}}(r)$.

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{ef}}(r) = \mathcal{E}_m \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_{p,\text{ef}}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2} \quad (13.12)$$

Nous sommes donc ramenés au cas d'un mouvement unidimensionnel conservatif dont l'étude générale a été menée au chapitre 11 section IV page 302. Sans préciser plus avant la situation, notamment l'expression de l'énergie potentielle, nous ne pouvons pas dire beaucoup plus de choses que les généralités présentées dans cette section. La conservation du moment cinétique et la constante des aires qui en découle permettent cependant d'obtenir le petit résultat supplémentaire suivant : lorsque le point M se rapproche du centre de force O , la distance r diminue, donc $\dot{\theta}$ doit augmenter afin de préserver la valeur de la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$. La particule voit donc sa vitesse angulaire augmenter : le point M tourne de plus en plus vite autour de O .

Compte tenu de son importance fondamentale en physique, nous allons à présent étudier le cas du mouvement d'une particule dans un champ newtonien *attractif*. Ce cas correspond à celui du mouvement d'une particule de masse m dans le champ de gravitation d'une masse m' ou bien d'une particule de charge q dans le champ électrostatique d'une charge q' de *signe opposé* à q . Dans ces deux cas, l'énergie potentielle du problème tridimensionnel est de la forme⁶ $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{\kappa}{r}$ avec $\kappa > 0$ et l'énergie potentielle effective du problème unidimensionnel équivalent s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,\text{ef}}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

5. La conservation de l'énergie et du moment cinétique fait apparaître en tout quatre grandeurs conservées lors de l'évolution temporelle.

6. Le lecteur attentif aura noté que $\kappa = Gmm'$ dans le cas gravitationnel et $\kappa = -qq'(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ dans le cas électrostatique.

III.2.2. Classification des mouvements dans un champ newtonien attractif

On considère le mouvement d'une particule M soumise à une force newtonienne attractive. Comme nous venons de l'expliquer, un tel mouvement est équivalent à un problème n'ayant qu'un seul degré de liberté $r = \|\overline{OM}\|$ et possédant une énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,ef}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{mC^2}{2r^2} \quad \text{avec} \quad \kappa > 0.$$

L'origine des potentiels a été prise à l'infini, on a donc $\mathcal{E}_{p,ef}(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$. L'énergie potentielle effective est la somme de deux termes, dont l'un est croissant $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{\kappa}{r}$ et correspond au fait que la force en jeu est attractive, et l'autre $\mathcal{E}_{p,c} = \frac{mC^2}{2r^2}$ est décroissant et fait donc apparaître une force effective *répulsive*. L'étude de la fonction $\mathcal{E}_{p,ef}(r)$ est immédiate :

- ▶ d'une part, il est facile de montrer que $\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{E}_{p,ef}(r) = +\infty$;
 - ▶ d'autre part, un rapide calcul permet de montrer que la dérivée de $\mathcal{E}_{p,ef}(r)$ par rapport à r s'annule en $r_0 = \frac{mC^2}{\kappa}$. En cette valeur de r on a $\mathcal{E}_{p,ef}(r_0) = -\frac{\kappa^2}{2mC^2}$.
- On peut alors tracer l'allure de $\mathcal{E}_{p,ef}(r)$ sur la figure 13.5.

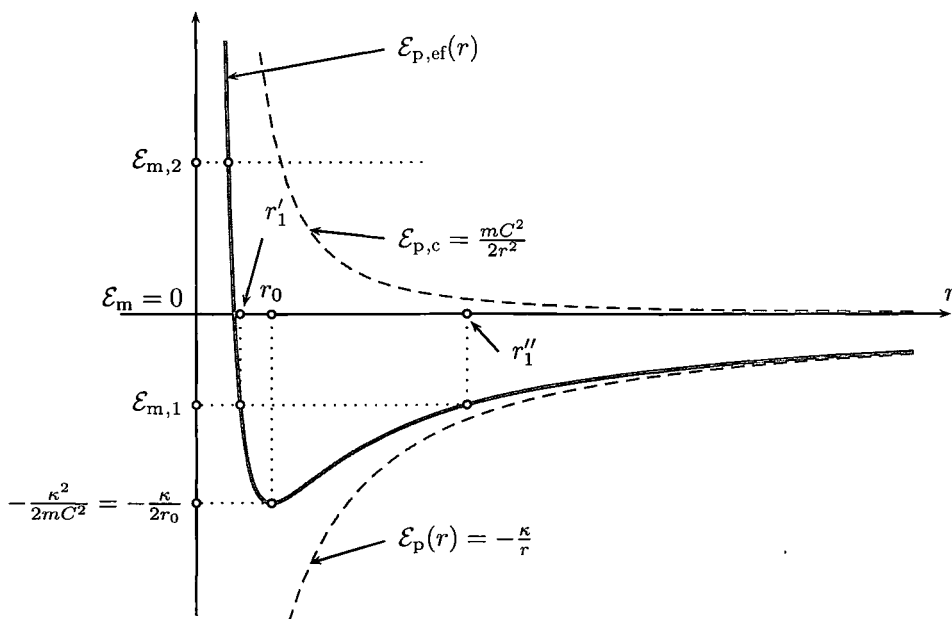


FIG. 13.5. Classification des mouvements newtoniens attractifs.

Considérons le mouvement d'un point M d'énergie mécanique \mathcal{E}_m . Puisque $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p,ef}(r) \geq 0$, on en déduit que le mouvement n'est possible que pour les valeurs de r pour lesquelles $\mathcal{E}_{p,ef}(r) \leq \mathcal{E}_m$. Suivant la valeur de \mathcal{E}_m , il existe donc plusieurs possibilités.

- ▶ Aucun mouvement n'est possible si \mathcal{E}_m est strictement inférieure à une certaine valeur minimale $\mathcal{E}_{p,ef}(r_0)$ négative. Cela ne veut pas dire que le point est immobile,

mais bien qu'il n'existe aucune solution mathématique des équations du mouvement telle que $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{p,ef}(r_0)$!

► Lorsque $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,ef}(r_0)$, le seul mouvement possible correspond à $r = r_0$: seul un mouvement circulaire de rayon r_0 est possible.

► Lorsque $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,1} < 0$, les seules valeurs de r possibles sont celles telles que $r'_1 \leq r \leq r''_1$. La trajectoire est alors forcément inscrite entre deux cercles et le point M ne peut jamais s'éloigner indéfiniment de O . On parle d'*état lié* pour le mouvement de M .

► Lorsque $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} \geq 0$, les valeurs de r sont bornées inférieurement mais pas supérieurement ; le point M ne peut pas entrer dans une sphère de rayon fixé et de centre O , mais il peut s'en éloigner indéfiniment. On parle alors de mouvement *libre*, ou d'*état de diffusion* pour le point M .

Synthèse

Mouvements newtoniens attractifs

Si on choisit l'énergie potentielle de sorte que $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p(r) = 0$, tout état d'énergie mécanique positive ou nulle est un état de diffusion, tout état d'énergie mécanique strictement négative est un état lié.

Le cas du mouvement sous l'influence d'une force newtonienne répulsive correspond à la situation dans laquelle le paramètre κ est négatif. C'est par exemple le cas entre deux charges électriques de même signe. L'énergie potentielle effective est alors la somme de deux termes positifs : la fonction $\mathcal{E}_{p,ef}(r)$ ne présente pas de minimum local, il n'y a que des états de diffusion. L'exemple physique classique correspondant à cette situation est la diffusion de Rutherford entre deux charges de même signe. Les particules se rapprochent jusqu'à une certaine distance minimale, puis s'éloignent indéfiniment. En 1911, Ernest Rutherford observa ce phénomène en bombardant une fine feuille de mica avec des particules alpha dont la nature était encore inconnue à l'époque. C'est en interprétant la diffusion observée comme étant celle entre les noyaux d'atomes d'hélium (constituant les particules alpha) et les noyaux des atomes constituant le mica que Rutherford prouva définitivement l'existence d'un noyau chargé positivement pour les atomes. Il proposa alors un premier modèle « planétaire » pour l'atome qui fut corrigé par Niels Bohr deux années plus tard. Ce modèle (voir exercice 3 page 368) de l'atome fut à la base du développement de la mécanique quantique.

Remarque Lorsque l'énergie potentielle ne tend pas vers 0 lorsque r tend vers l'infini, on peut observer des états liés d'énergie positive. C'est par exemple le cas d'une masse soumise uniquement à la force centrale de rappel d'un ressort (voir exercice 4 page 368).

IV. Trajectoires dans un champ newtonien

La découverte par Kepler des propriétés des trajectoires des planètes a permis l'établissement par Newton de la loi de la gravitation universelle, dans un des ouvrages fondateurs de la physique et des mathématiques modernes, *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (Principes mathématiques de la physique), publié en 1687.

Nous allons indiquer, sous une forme modernisée, quelques-uns des résultats de Newton. Ces résultats, pourtant vieux de plus de trois siècles, ont servi encore récemment à confirmer une théorie très moderne, avec la découverte d'un trou noir supermassif au centre de la Voie lactée, notre propre galaxie.

En 2002, des chercheurs de l'ESO (Observatoire européen austral) ont annoncé la découverte d'une étoile (dite S2) orbitant à courte distance d'une source radio proche du centre galactique. Les caractéristiques purement keplériennes de la trajectoire de S2 ont permis d'identifier à coup sûr le centre de force autour duquel orbite S2 : il s'agit d'un trou noir. La masse de ce dernier a pu être estimée à $2,6 \cdot 10^6$ fois la masse du Soleil ; la période orbitale de S2 est de 15,2 années. Au moment de la plus courte distance entre S2 et le centre galactique (en 2002), l'étoile S2 avait une vitesse orbitale de $5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et se trouvait à 18 milliards de kilomètres du trou noir.

IV.1. Définition et exemples

IV.1.1. Définition

On appelle force centrale newtonienne toute force centrale qui varie comme l'inverse du carré de la distance r entre le mobile M et le centre de force O . S'agissant d'une force centrale, nous avons vu que la trajectoire est plane ; utilisant dans ce plan les coordonnées polaires (r, θ) , on peut écrire l'expression de la force

$$\vec{F} = -\kappa \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = -\frac{\kappa}{r^2} \vec{u}_r, \quad (13.13)$$

où le coefficient κ est *positif* pour une force *attractive*, et *négatif* pour une force *répulsive*. Une telle force est conservative ; choisissant l'origine des énergies potentielles à distance infinie du centre de force O , on peut exprimer son énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{\kappa}{r}. \quad (13.14)$$

Dans toute la suite, nous étudierons le mouvement d'un point matériel M soumis à l'action de cette seule force, dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) .

IV.1.2. Exemples élémentaires

La force de gravitation exercée sur le point M , de masse m , par un autre point matériel situé en O et de masse M_0 peut s'écrire selon $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{M_0 m}{r^2} \vec{u}_r$; c'est donc une force newtonienne attractive, caractérisée par la valeur

$$\kappa = \mathcal{G} M_0 m > 0.$$

La force électrostatique exercée sur le point M , de charge q , par un point de charge Q_0 placé en O s'écrit de même $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 q}{r^2} \vec{u}_r$; c'est donc aussi une force newtonienne, avec maintenant

$$\kappa = -\frac{Q_0 q}{4\pi\epsilon_0}.$$

Si les charges sont de même signe, elle est répulsive, avec $\kappa < 0$; par contre, elle est attractive et $\kappa > 0$ si les charges sont de signes contraires.

IV.2. Point soumis à une force newtonienne attractive, cas d'une trajectoire circulaire

IV.2.1. Énergie d'un point ayant une trajectoire circulaire

On a déjà vu que la trajectoire est circulaire lorsque l'énergie du point mobile M est égale à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_m = (\mathcal{E}_{p,ef})_{\min}$; ce minimum n'existe que si la force d'interaction est attractive, c'est-à-dire si $\kappa > 0$.

Le rayon $r = r_0$ de cette trajectoire circulaire est tel que la dérivée de $\mathcal{E}_{p,ef}(r)$ s'annule en $r = r_0$. Sachant que $\mathcal{E}_{p,ef}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$ et $C = r^2\dot{\theta}$, il vient donc $r_0 = \frac{mC^2}{\kappa}$. L'expression (13.12) de l'énergie mécanique se simplifie dans le cas de la trajectoire circulaire, car $\dot{r} = 0$. On a donc pour cette trajectoire $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,ef}(r_0) = -\frac{\kappa}{r_0} + \frac{mC^2}{2r_0^2}$. En exprimant C en fonction de r_0 il vient donc

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\kappa}{2r_0}.$$

Le point M parcourt une trajectoire fermée, un cercle de rayon r_0 , avec une vitesse angulaire constante car $C = r_0^2\dot{\theta} = \text{cte}$. Cette trajectoire est donc *périodique* de période τ .

IV.2.2. Cas gravitationnel : relation entre période et rayon de la trajectoire

Dans le cas d'un point mobile M de masse m soumis à une force newtonienne attractive, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{E})}}{dt} = -\kappa \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} \quad \text{avec } \kappa > 0.$$

En coordonnées polaires dans le plan du mouvement, on a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. Si la trajectoire est circulaire de rayon $r = r_0$, alors $\vec{v}_{M/(\mathcal{E})} = r_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et donc

$$\vec{v}_{M/(\mathcal{E})} = -r_0\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r_0\ddot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

Le principe fondamental de la dynamique conduit donc à deux équations scalaires issues des projections sur les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ :

► la première est $mr_0\ddot{\theta} = 0$, on retrouve donc le fait que la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ est constante. Posons $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, la période τ du mouvement correspond à la valeur $\theta = 2\pi$ de l'angle polaire; un changement de variable permet donc d'écrire

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \omega \int_0^\tau dt \quad \text{soit } \omega = \frac{2\pi}{\tau};$$

► la seconde équation donne $mr_0\omega^2 = \frac{\kappa}{r_0^2}$ et donc $\frac{r_0^3}{\tau^2} = \frac{\kappa}{4\pi^2 m}$. Dans le cas de la force gravitationnelle $\kappa = \mathcal{G}M_0m$ et l'on peut écrire

$$\frac{\tau^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}. \quad (13.15)$$

Le carré de la période de révolution divisée par le cube du rayon de la trajectoire circulaire ne dépend pas du point mobile, mais uniquement de l'objet attracteur et de constantes universelles.

IV.2.3. Applications aux satellites géostationnaires

Un satellite est dit géostationnaire s'il semble immobile par rapport à un point à la surface de la Terre, c'est-à-dire s'il reste toujours à la verticale du même point terrestre (voir figure 13.6), propriété fondamentale utilisée pour en faire des satellites d'observation, de télécommunication, ou bien de télédiffusion.

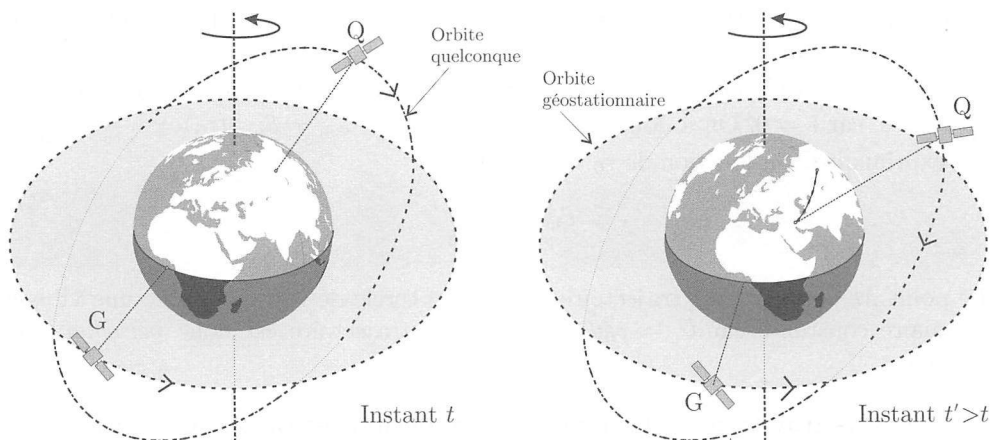


FIG. 13.6. Le satellite G est en orbite géostationnaire alors que le satellite Q ne l'est pas. Lorsque la Terre tourne sur son axe de rotation, le point situé sur la Terre sous G est fixe, alors que celui sous Q se déplace. Le schéma n'est pas à l'échelle.

Nous allons donner les caractéristiques de cette trajectoire. Dans un modèle simplifié de la Terre, on peut l'assimiler à une sphère de centre T et de rayon R_T . Dans un tel modèle, on montre que pour un point mobile M situé à une distance $r > R_T$, la Terre se comporte comme un point matériel situé en T , dont la masse M_T est celle de la Terre. On peut alors considérer que M est soumis à une force gravitationnelle newtonienne créée par le centre attracteur T de masse M_T . Le référentiel terrestre d'origine T est supposé galiléen.

- ▶ Toutes les trajectoires correspondant à des états liés sont des ellipses (ou des cercles) de foyer (ou de centre) T . Le plan contenant la trajectoire passe donc par le centre T de la Terre.
- ▶ Soit N le point de la Terre qui appartient à la droite (TM) . Pour que le point M soit toujours à la verticale de N , il faut que les deux points aient la même vitesse angulaire ; par conséquent, le plan de la trajectoire doit nécessairement être perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre.
- ▶ Le point N est sur la Terre, sa vitesse de rotation est donc constante et égale à celle de la Terre. Le mobile M a par conséquent une vitesse constante, sa trajectoire est donc un cercle.

Un satellite géostationnaire a une trajectoire circulaire dans le plan équatorial. Sa vitesse angulaire reste constante au cours de son déplacement.

La période d'un satellite géostationnaire est un jour. Le rayon de la trajectoire peut donc s'obtenir en utilisant la relation (13.15), avec $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et $\tau = 8,61 \cdot 10^3 \text{ s}$.

Numériquement, on trouve que $r_0 = 42,2 \cdot 10^3$ km. En notant $R_T = 6,38 \cdot 10^3$ km le rayon terrestre,

l'altitude h d'un satellite géostationnaire est donc $h = r_0 - R_T = 35,8 \cdot 10^3$ km.

Classiquement, on rencontrera dans la littérature qu'un tel satellite gravite à 36 000 km du sol. Compte tenu du fait que la vitesse est uniforme sur la trajectoire, la vitesse du satellite est $v_0 = r_0 \dot{\theta} = r_0 \frac{2\pi}{T}$, soit numériquement $v_0 = 3,08$ km \cdot s $^{-1}$.

Remarque Il n'est pas superflu d'insister sur le fait que le mouvement orbital d'un satellite (géostationnaire ou pas) est la conséquence du champ de gravité de la Terre dans lequel il baigne et tombe en permanence, comme l'avait si bien remarqué Newton : un satellite en orbite n'a plus besoin d'être propulsé ! Les moteurs et le carburant embarqué dans un satellite ne servent qu'à modifier ponctuellement sa trajectoire en cas de besoin, afin de pallier certaines dérives éventuelles.

IV.2.4. Vitesses cosmiques

En 1883, l'écrivain russe Konstantin Tsiolkovsky présentait dans son ouvrage *L'Espace libre* les concepts fondamentaux pour la construction de fusées à réaction comme unique moyen de quitter la gravité terrestre. Tsiolkovsky introduisait trois vitesses minimales théoriques, appelées respectivement première, deuxième et troisième vitesse cosmique. Nous allons définir et calculer les deux premières. Ces notions peuvent se généraliser à toute planète d'un système solaire.

► La *première vitesse cosmique* représente la vitesse minimale de satellisation autour de la Terre. Il s'agit de la vitesse minimale qu'il faut théoriquement communiquer à un corps, au départ de la Terre, pour le satelliser autour d'elle en orbite basse.

Pour cette détermination, on considère une orbite circulaire dont le rayon serait le rayon terrestre R_T . En coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire, le principe fondamental de la dynamique appliqué à un tel satellite s'écrit

$$mR_T \dot{\theta} \vec{u}_\theta - mR_T \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T^2} \vec{u}_r.$$

La trajectoire est parcourue de façon uniforme, car en considérant la projection sur \vec{u}_θ on trouve que $\ddot{\theta} = 0$. La première vitesse cosmique $v_1 = R_T \dot{\theta}$, constante, est celle du satellite sur cette trajectoire. Son expression est donnée par la projection du principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_r , soit $-mR_T \dot{\theta}^2 = -m \frac{v_1^2}{R_T} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T^2}$, soit encore

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} \simeq 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 28,5 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Cette vitesse est théorique, car dans la réalité l'atmosphère terrestre induit un frottement fluide se manifestant par une force qui finira par dissiper l'énergie du satellite et stopper sa course.

► La *deuxième vitesse cosmique* correspond à la vitesse de libération d'un corps quittant la Terre. C'est la vitesse minimale au-delà de laquelle un corps peut s'éloigner définitivement de la Terre, en tout cas tant que l'on néglige la présence du Soleil et de notre galaxie.

Le satellite doit être dans un état de diffusion, on doit donc lui fournir une énergie mécanique positive, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T} \geq 0$, soit $v \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$. La deuxième vitesse cosmique correspond à la vitesse initiale minimale dans cette configuration, soit

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2} v_1 \simeq 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 40,3 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Cette vitesse de libération augmente avec la compacité de l'astre attracteur, c'est-à-dire son rapport masse/rayon. Par exemple, la vitesse de libération sur Jupiter est de $59,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

La sonde *Luna 1* fut, en 1959, le premier objet construit par l'homme à atteindre la vitesse de libération terrestre lors de son trajet en direction de la Lune.

► La *troisième vitesse cosmique* est définie comme la vitesse de libération d'un corps quittant le système solaire depuis l'orbite terrestre,

dans un référentiel lié au système solaire et dans lequel la Terre est supposée en orbite circulaire de rayon $R_{ST} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ autour du Soleil. La vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil est d'environ $v_{TS} = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Il faut alors communiquer à la fusée une vitesse supplémentaire d'environ $v = 16,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ au départ de la Terre pour qu'elle puisse se soustraire à l'attraction du Soleil.

IV.3. Lois de Kepler

IV.3.1. Trajectoire d'un état lié

Dans le cas des forces attractives, les trajectoires des états liés sont des ellipses⁷. Le centre attracteur O occupe *un des foyers* de l'ellipse. La figure 13.7 représente le cas $O = F'$. La trajectoire circulaire déjà étudiée correspond au cas particulier $O = F$.

Attention

Ellipse

Il ne faut pas confondre le centre C de l'ellipse et ses deux foyers F et O qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à C . Pour se donner une idée des propriétés des foyers d'une ellipse, on peut se placer dans le domaine de l'optique : tout rayon lumineux émis à partir de l'un des foyers passe par l'autre foyer après réflexion spéculaire sur l'ellipse.

Sur la figure 13.7, la variable r représente la distance OM entre le centre attracteur et le point mobile M qui décrit l'ellipse. Pour un état lié, l'énergie est négative et r reste borné en variant entre les deux valeurs $r_{\min} = OP$ et $r_{\max} = OA$.

7. Une ellipse \mathcal{E} est formée par l'ensemble des points M d'un plan \mathcal{P} dont la somme des distances à deux points fixes (les foyers F et F') est constante.

$$\mathcal{E} = \{ M \in \mathcal{P} \text{ tel que } MF + MF' = \text{cte} \}$$

Cette constante est une distance $AP = 2a$ appelée grand axe de \mathcal{E} .

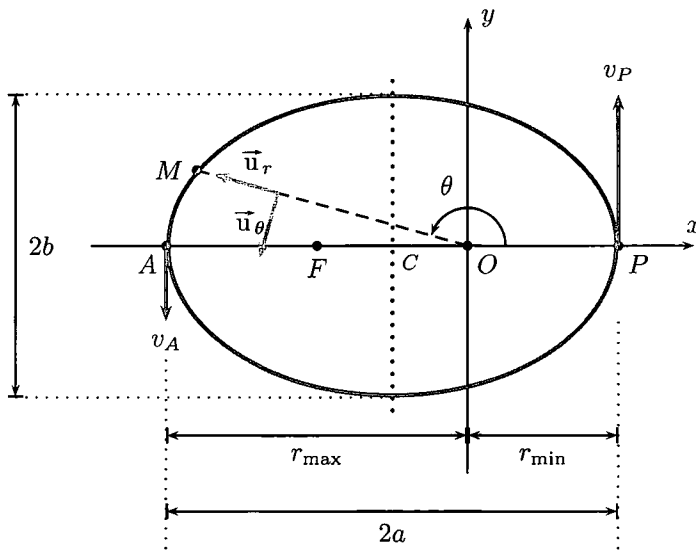


FIG. 13.7. Trajectoires elliptiques.

Le point P le plus proche du centre attracteur O porte le nom de *péricentre* ; on parle aussi de périgée pour une trajectoire de satellite terrestre, de périhélie pour un satellite du Soleil, de périastre autour d'un autre astre. Le point A le plus éloigné du centre attracteur porte le nom d'*apocentre* (respectivement apogée, aphélie ou apoastre). En ces deux points P et A , r est extrémal, donc $\dot{r} = 0$ et la vitesse est orthoradiale.

Soit $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{\kappa}{r}$, l'énergie mécanique constante du point M sur sa trajectoire elliptique, il est clair que

$$\frac{1}{2}mv_P^2 = \mathcal{E}_m + \frac{\kappa}{r_{\min}} > \mathcal{E}_m + \frac{\kappa}{r_{\max}} = \frac{1}{2}mv_A^2.$$

C'est donc en P que la vitesse de M est maximale et en A qu'elle est minimale. La distance $AP = 2a$ porte le nom de *grand axe de l'ellipse* ; on l'obtient aisément par la relation $2a = r_{\min} + r_{\max}$. On définit aussi un petit axe $2b$.

IV.3.2. Énergie d'un point lié

On se place ici dans le cas d'un point mobile soumis à une force newtonienne attractive et qui se trouve dans un état lié. Sa trajectoire est une ellipse de foyer O et de demi-grand axe a , le cercle étant un cas particulier avec $a = b = r_0$. On sait déjà que $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\kappa}{r}$. Lorsque l'on se place en $r = r_{\max}$ ou $r = r_{\min}$, alors $\dot{r} = 0$ et la relation devient

$$\mathcal{E}_m = \left(\frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\kappa}{r} \right)_{r_{\min}, r_{\max}}.$$

Cette relation montre que r_{\min} et r_{\max} sont les racines de l'équation du second degré $r^2 + \frac{\kappa}{\mathcal{E}_m}r - \frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m} = 0$. On en déduit que la somme des racines vérifie $r_{\min} + r_{\max} = -\frac{\kappa}{\mathcal{E}_m}$. On a vu par ailleurs que $r_{\min} + r_{\max}$ correspond au grand axe $2a$ de l'ellipse. On peut donc généraliser à tout état lié newtonien le résultat obtenu pour la trajectoire circulaire.

L'énergie d'un point mobile sur sa trajectoire elliptique est reliée au demi-grand axe par la relation

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\kappa}{2a}. \quad (13.16)$$

IV.4. Trajectoire elliptique en astronomie

L'étude, à la fin du XVI^e siècle par Tycho Brahé, des trajectoires des planètes autour du Soleil a été entièrement réalisée sans le secours d'aucun instrument d'optique ! Il s'agit donc d'un tour de force expérimental, dans lequel les observations devaient être compensées du fait du double mouvement (diurne et annuel) de l'observateur terrestre. De cette moisson observationnelle sans précédent, son collaborateur Kepler déduisit progressivement, et au bout de plusieurs dizaines d'années de recherches, trois lois du mouvement.

Loi 13.10. *Lois de Kepler*

- ▶ Première loi de Kepler : *les planètes parcourent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers.*
- ▶ Deuxième loi de Kepler : *ces trajectoires sont parcourues conformément à la loi des aires.*
- ▶ Troisième loi de Kepler : *les carrés τ^2 des périodes de ces trajectoires et les cubes a^3 des demi-grands axes sont dans un rapport constant, pour toutes les planètes du système solaire.*

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \text{cte} \quad (13.17)$$

L'hypothèse d'orbite circulaire pour l'orbite de la Terre autour du Soleil permet d'obtenir cette constante⁸. En notant τ_0 la période de la Terre dans son mouvement autour du Soleil et r_0 le rayon du cercle parcouru, nous avons en effet trouvé (voir la relation (13.15)) $\frac{\tau_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$. Pour toutes les planètes du système solaire, la troisième loi de Kepler affirme donc que

$$\left. \frac{\tau^2}{a^3} \right|_{\text{planètes}} = \left. \frac{\tau_0^2}{r_0^3} \right|_{\text{Terre}} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}. \quad (13.18)$$

Dans le cas particulier de la Terre, on peut utiliser le système international d'unités pour lequel $\tau_0 = 365,25$ j ou $3,16 \cdot 10^7$ s et $a_0 = 1,49 \cdot 10^{11}$ m, mais aussi les unités astronomiques courantes, l'année solaire et l'*unité astronomique* telles que $\tau_0 = 1$ an, $a_0 = 1$ UA.

Remarque La constante de cette troisième loi de Kepler n'est pas une constante fondamentale de la physique, car elle dépend de la masse de l'astre attracteur. La loi demeure tout de même applicable tant que l'on ne considère l'attraction gravitationnelle que d'un seul centre, comme pour Jupiter ou Saturne et leurs satellites, ou des exoplanètes autour d'autres étoiles que le Soleil.

8. Cette hypothèse est tout à fait réaliste, car l'ellipse parcourue par la Terre est telle que $\frac{a}{b} \simeq 1,00014$. Il est par contre un peu plus difficile de ne considérer qu'un Soleil ponctuel pour expliquer le mouvement de la Terre.

La justification théorique de ces trois lois empiriques est le travail de Newton qui les démontra en appliquant son principe fondamental à deux corps évoluant sous leurs influences gravitationnelles. Ce grand moment de l'histoire des sciences, pourtant vieux de plus de trois siècles, n'est plus au programme des CPGE.

Attention

Les trajectoires des planètes, étoiles ou satellites ne sont généralement ni circulaires ni elliptiques ni même planes, sauf dans certains cas et en première approximation. Tous ces corps ne sont en effet généralement pas soumis qu'à une seule interaction newtonienne et d'autres forces peuvent intervenir.

En 1846, l'astronome français Le Verrier découvre l'existence et les caractéristiques de la planète Neptune, avant même son observation directe, en analysant les anomalies de la trajectoire elliptique d'Uranus ; Pluton sera plus tard découverte de la même manière. En découvrant d'autres anomalies dans la trajectoire de Mercure, Le Verrier proposa aussi une explication basée sur la présence d'une planète supplémentaire (qu'il proposa de nommer Vulcain) ; cette explication se révéla cette fois inexacte et c'est à la théorie de la relativité générale d'Einstein qu'on doit l'explication correcte de la trajectoire de Mercure. Plus généralement, la simple description des trajectoires keplériennes constitue toujours la base sur laquelle se greffent divers termes correctifs pour expliquer par exemple les trajectoires effectives des satellites de la Terre : effet de l'aplatissement de la Terre, perturbations par d'autres astres, etc.



Urbain Le Verrier

V. Moment cinétique d'un système de points

V.1. Moment cinétique par rapport à un point

Par construction, le moment cinétique est une grandeur additive.

Définition 13.11. Moment cinétique d'un système de points

Le moment cinétique en A d'un système Σ formé de N points $M_{i=1, \dots, N}$, de masses m_i et possédant à l'instant t et dans le référentiel (\mathcal{R}) les vitesses $\vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})}$, est la somme des moments cinétiques en A de chacun de ces points,

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A = \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_{M_i/(\mathcal{R})}^A = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})}. \quad (13.19)$$

Le centre d'inertie G du système de points est tel que $\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$; en insérant l'origine O de (\mathcal{R}) dans cette relation et en notant m la masse totale de Σ , on obtient $\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i = m \overrightarrow{OG}$, puis en dérivant par rapport au temps

$$\sum_i m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} = m \vec{v}_{G/(\mathcal{R})}. \quad (13.20)$$

La linéarité du produit vectoriel, puis la relation (13.20) permettent maintenant d'écrire

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AG} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_{G/(\mathcal{R})} + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})}.\end{aligned}$$

En introduisant la quantité de mouvement $\vec{p}_{\Sigma/(\mathcal{R})} = m \vec{v}_{G/(\mathcal{R})}$ du système Σ , il vient

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{\Sigma/(\mathcal{R})} + \vec{\sigma}_{G/(\mathcal{R})}^A. \quad (13.21)$$

V.2. Théorèmes du moment cinétique d'un système de points

Un point du système Σ peut être soumis à deux types de forces :

- ▶ les forces exercées par d'autres points de Σ sont appelées *forces intérieures* au système Σ . Si les deux points considérés sont proches, on parle alors d'actions de contact (forces de cohésion, etc.). Si les deux points sont éloignés, on parle plutôt d'actions à distance (forces d'autogravitation, etc.). Dans tous les cas, si $i \neq j$, la force exercée par le point M_i sur le point M_j , notée $\vec{F}_{M_i \rightarrow M_j}$, est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_i M_j}$;
- ▶ les autres forces sont appelées *forces extérieures* au système Σ . Ce dernier peut par exemple évoluer dans le champ gravitationnel d'un autre système ou baigner dans un champ magnétique, etc. La somme de toutes ces forces extérieures exercées en chaque point M_i de Σ sera notée $\vec{F}_{i,ext}$.

V.2.1. Moment des forces intérieures à un système de points

Considérons deux forces intérieures au système Σ , exercées par le point M_i sur le point M_j et réciproquement (voir figure 13.8). En un point A quelconque, ces forces ont pour moments respectifs

$$\vec{\mathcal{M}}_{ij} = \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{M_i \rightarrow M_j} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{ji} = \overrightarrow{AM_j} \wedge \vec{F}_{M_j \rightarrow M_i}.$$

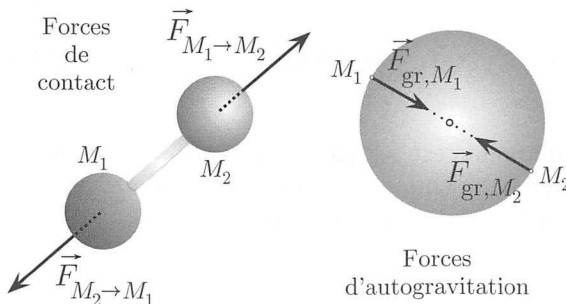


FIG. 13.8. Exemples de forces internes.

Le principe des actions réciproques permet d'affirmer que $\vec{F}_{M_i \rightarrow M_j} + \vec{F}_{M_j \rightarrow M_i} = \vec{0}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{ij} + \vec{\mathcal{M}}_{ji} &= \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{M_i \rightarrow M_j} + \overrightarrow{AM_j} \wedge \vec{F}_{M_j \rightarrow M_i} \\ &= \left(\overrightarrow{AM_i} - \overrightarrow{AM_j} \right) \wedge \vec{F}_{M_i \rightarrow M_j} \\ &= \overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{F}_{M_i \rightarrow M_j}. \end{aligned}$$

Cette somme est donc nulle car nous avons vu que $\vec{F}_{M_i \rightarrow M_j}$ est toujours proportionnelle à $\overrightarrow{M_j M_i}$. Les forces intérieures agissant toujours par couple de points, on en déduit que la somme des moments des forces intérieures à un système de points est nulle.

Théorème 13.12.

La résultante des moments des forces intérieures à un système de points est nulle.

V.2.2. Théorème du moment cinétique d'un système de points par rapport à un point fixe

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe A en un point M_i du système Σ , il vient

$$\frac{d\vec{\sigma}_{M_i/(\mathcal{R})}^A}{dt} = \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{i,\text{ext}} + \overrightarrow{AM_i} \wedge \sum_{j=1, \neq i}^N \vec{F}_{M_j \rightarrow M_i}.$$

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A$ du système Σ par rapport au point A est simplement la somme des $\vec{\sigma}_{M_i/(\mathcal{R})}^A$ sur tous les points de Σ . Le théorème du moment cinétique s'écrit donc

$$\frac{d\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A}{dt} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \sum_{j=1, \neq i}^N \vec{F}_{M_j \rightarrow M_i}.$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette dernière somme n'est autre que la résultante des moments des forces intérieures : ce terme est donc nul. En notant

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^A = \sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{i,\text{ext}}/M_i}^A = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{i,\text{ext}}$$

la résultante des moments des forces extérieures au système, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe d'un système de points.

Théorème 13.13. Théorème du moment cinétique d'un système de points en un point fixe

Lors du mouvement d'un système de points Σ relativement au référentiel galiléen (\mathcal{R}) , le moment cinétique $\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A$ de Σ relativement à un point fixe A n'évolue dans le temps qu'en fonction du moment $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^A$ en A de toutes les forces extérieures au système.

$$\frac{d\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^A \quad (13.22)$$

V.2.3. Théorème du moment cinétique d'un système de points par rapport à un axe fixe

Afin de déterminer l'aptitude des forces extérieures à faire tourner le système Σ autour d'un axe fixe Δ dirigé par le vecteur unitaire \vec{u}_Δ , il suffit de choisir le point A sur l'axe et de projeter les vecteurs intervenant dans le théorème 13.13 sur l'axe Δ . On note \vec{u}_Δ un vecteur unitaire de l'axe A ainsi que

$$\sigma_{\Sigma/\Delta}^A = \vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A \cdot \vec{u}_\Delta \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}^A = \mathcal{M}_{A,\text{ext}} \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Dans ces deux projections, il est important de remarquer que le choix de A importe peu pourvu qu'il soit sur l'axe. En effet, que ce soit le moment des forces ou le moment cinétique, le premier vecteur du produit vectoriel est toujours de la forme \overrightarrow{AM}_i . Ainsi en choisissant un autre point A' , toujours sur l'axe, on pourra écrire, d'après la relation (13.21),

$$\vec{\sigma}_{M_i/(\mathcal{R})}^A = \vec{\sigma}_{M_i/(\mathcal{R})}^{A'} + \overrightarrow{AA'} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/M_i,(\mathcal{R})}^A = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/M_i,(\mathcal{R})}^{A'} + \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{F}.$$

Si A et A' sont sur l'axe Δ , les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et \vec{u}_Δ sont colinéaires, ainsi

$$\vec{u}_\Delta \cdot \left(\overrightarrow{AA'} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} \right) = \vec{u}_\Delta \cdot \left(\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{F} \right) = 0.$$

En effectuant la somme sur tous les points M_i de Σ , puis en projetant sur Δ , on trouve donc que $\sigma_{\Sigma/\Delta}^A = \sigma_{\Sigma/\Delta}^{A'}$ et $\mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}^A = \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}^{A'}$. On peut donc se passer de préciser le point choisi sur l'axe, et ne parler que du *moment cinétique de Σ par rapport à Δ* et du *moment des forces extérieures à Σ par rapport à Δ* .

Définition 13.14. Moment par rapport à un axe fixe

On considère un système de points Σ et un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) ; on appelle :

- *moment cinétique de Σ par rapport à Δ* le produit scalaire de $\vec{\sigma}_{M_i/(\mathcal{R})}^A$ par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ de Δ , il est noté $\sigma_{\Sigma/\Delta}$;
- *moment des forces extérieures à Σ par rapport à Δ* le produit scalaire de $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^A$ par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ de Δ , il est noté $\mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}$.

Ces deux scalaires ne dépendent pas du point A , choisi arbitrairement sur l'axe Δ .

En projetant la relation (13.22), on obtient alors une version dite scalaire du théorème du moment cinétique d'un système de points par rapport à l'axe Δ .

Théorème 13.15. Théorème du moment cinétique d'un système de points par rapport à un axe

Lors du mouvement d'un système de points Σ relativement au référentiel galiléen (\mathcal{R}) , le moment cinétique $\sigma_{\Sigma/\Delta}$ de Σ relativement à un axe de direction fixe \vec{u}_Δ n'évolue dans le temps qu'en fonction du moment $\mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}$ par rapport à Δ de toutes les forces extérieures au système,

$$\frac{d\sigma_{\Sigma/\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}. \quad (13.23)$$

L'expression de ce théorème peut encore être simplifiée en considérant que le système Σ possède des propriétés particulières. Nous traiterons le cas du solide indéformable.

V.3. Notion de couple

Considérons le système de la figure 13.9, constitué de deux points matériels, soumis l'un à la force extérieure \vec{F}_A et l'autre à \vec{F}_B . On suppose que la résultante de ces forces est nulle, $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$, alors que la résultante de leurs moments en O est non nulle, $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^O = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_A/A}^O + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_B/B}^O \neq \vec{0}$.

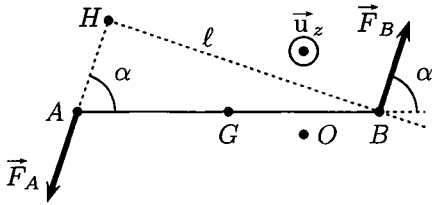


FIG. 13.9. Couple de forces.

C'est bien le cas dans cette situation, car le fait que $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^O &= (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge \vec{F}_B \\ &= \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = -F\ell \vec{u}_z.\end{aligned}$$

On remarque que $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^O$ est indépendant du point O . Le centre d'inertie G des deux points A et B est tel que $m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}$. En dérivant deux fois par rapport au temps cette relation et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, on trouve que $\vec{v}_{G/(\mathcal{R})} = \vec{0}$. Le point G a donc un mouvement rectiligne uniforme ou bien il est immobile dans (\mathcal{R}) s'il l'était à l'instant initial. Par contre, sous l'action du moment résultant $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^O$, le système sera en rotation autour d'un axe de direction \vec{u}_z . Cette rotation sera d'autant plus importante que α sera proche de $\frac{\pi}{2}$.

Définition 13.16. Couple

On appelle couple tout système d'actions mécaniques dont la résultante \vec{F}_{ext} est nulle et le moment résultant $\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}}$ par rapport à un point A est non nul. Ce moment est alors indépendant du point A . Par abus de langage, on appelle aussi couple l'intensité de ce moment.

Un exemple de couple est donné sur la figure 13.10.

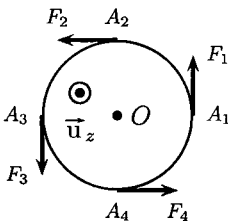


FIG. 13.10. Couple circulaire.

Quatre points $A_{i=1,\dots,4}$ sont disposés sur un cercle de rayon r et soumis aux forces extérieures $\vec{F}_{A_1} = -\vec{F}_{A_3} = f\vec{u}_y$ et $\vec{F}_{A_4} = -\vec{F}_{A_2} = f\vec{u}_x$. La résultante des forces est donc nulle, $\vec{F}_{A_1} + \vec{F}_{A_2} + \vec{F}_{A_3} + \vec{F}_{A_4} = \vec{0}$. En ce qui concerne les moments en O ,

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{A_1}/A_1}^O = \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_{A_1} = r\vec{u}_x \wedge f\vec{u}_y = rf\vec{u}_z. \quad \text{De même,}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{A_3}/A_3}^O = \vec{OA}_3 \wedge \vec{F}_{A_3} = (-r\vec{u}_x) \wedge (-f\vec{u}_y) = rf\vec{u}_z.$$

Un calcul analogue pour les deux autres moments montre finalement que $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^O = 4rf\vec{u}_z$. Nous sommes donc en présence d'un couple. L'intensité de ce moment résultant est souvent appelée *couple des forces* et notée Γ . Dans le cas de la figure 13.10, nous aurons donc $\Gamma = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^O \cdot \vec{u}_z = 4rf$. On constate que le couple est d'autant plus important que les forces s'exercent loin de l'axe de rotation (indiqué ici par r) ou bien que l'intensité des forces est importante.

V.4. Cas d'un solide indéformable

V.4.1. Moment cinétique par rapport à un axe ; moment d'inertie

Comme nous l'avons vu, le solide indéformable est le cas particulier d'un système de points $M_{i=1, \dots, N}$, de masses $m_{i=1, \dots, N}$ dont les distances mutuelles sont invariables. Nous étudierons ici le cas d'un solide, noté Σ , en rotation autour d'un axe fixe Δ dirigé par le vecteur unitaire \vec{u}_Δ . Précisons que cet axe n'a pas forcément d'intersection avec le solide. Le référentiel d'étude est toujours noté (\mathcal{R}) .

Nous avons vu au chapitre 9 page 265 que la vitesse de chaque point M_i du solide s'écrit dans ces conditions $\vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} = \dot{\theta}\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{H_iM_i}$, où le point H_i est la projection orthogonale de M_i sur l'axe de rotation Δ et $\dot{\theta}$ est la vitesse de rotation commune à tous les points du solide tournant autour de Δ .

En utilisant sa définition et la relation (13.19), nous pouvons alors calculer le moment cinétique de Σ par rapport à un point A quelconque dans (\mathcal{R}) ,

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i/(\mathcal{R})} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \left(\dot{\theta} \vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{H_iM_i} \right).$$

Rappel

Double produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$

D'après la formule du double produit vectoriel, on peut écrire

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\theta} \left[\left(\overrightarrow{AM_i} \cdot \overrightarrow{H_iM_i} \right) \vec{u}_\Delta - \left(\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{u}_\Delta \right) \overrightarrow{H_iM_i} \right].$$

Restreignons à présent l'étude au cas particulier d'un point A situé sur l'axe de rotation Δ . Il est clair alors que, d'une part,

$$\left(\overrightarrow{AM_i} \cdot \overrightarrow{H_iM_i} \right) \vec{u}_\Delta = \underbrace{\left(\overrightarrow{AH_i} \cdot \overrightarrow{H_iM_i} \right)}_{=0} \vec{u}_\Delta + \left(\overrightarrow{H_iM_i} \cdot \overrightarrow{H_iM_i} \right) \vec{u}_\Delta = r_i^2 \vec{u}_\Delta$$

où $r_i = \left\| \overrightarrow{H_iM_i} \right\|$ représente la distance du point M_i à l'axe Δ . D'autre part,

$$\left(\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{u}_\Delta \right) \overrightarrow{H_iM_i} = \left(\overrightarrow{AH_i} \cdot \vec{u}_\Delta \right) \overrightarrow{H_iM_i} + \underbrace{\left(\overrightarrow{H_iM_i} \cdot \vec{u}_\Delta \right)}_{=0} \overrightarrow{H_iM_i} = \ell_i \overrightarrow{H_iM_i}$$

où ℓ_i est la longueur algébrique du segment $\overline{AH_i}$ le long de l'axe Δ orienté par \vec{u}_Δ . En revenant au moment cinétique de Σ , nous obtenons finalement

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\theta} \left(r_i^2 \vec{u}_\Delta - \ell_i \overline{H_i M_i} \right).$$

À travers les longueurs ℓ_i , cette relation dépend toujours du point A choisi sur l'axe. À l'instar du calcul initié en fin de section V.2.3, il est temps de projeter sur l'axe Δ . Le produit scalaire par \vec{u}_Δ simplifie en effet le dernier terme, car pour chaque point M_i , il est clair que $\overline{H_i M_i} \perp \vec{u}_\Delta$; ainsi l'on peut écrire le théorème suivant.

Théorème 13.17. Solide en rotation – Moments cinétique et d'inertie

Soit un solide Σ en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (A, \vec{u}_\Delta)$ avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ (vecteur rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_\Delta$). Son moment cinétique par rapport à l'axe Δ est le scalaire $\sigma_{\Sigma/\Delta}$ tel que

$$\sigma_{\Sigma/\Delta} = J_\Delta \omega. \quad (13.24)$$

La quantité $J_\Delta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ est appelée moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ .

Remarque Le moment d'inertie J_Δ représente une sorte de moyenne des distances au carré des points du solide à l'axe de rotation pondérée par leur masse. Il dépend donc de la géométrie de Σ ainsi que de la position de l'axe de rotation. Dans le cadre du programme, l'expression de J_Δ sera toujours donnée.

À titre d'exemple, dans le tableau 13.1, nous donnons quelques valeurs de moments d'inertie de quelques solides simples. On remarquera que, comme attendu, pour un solide donné, la valeur du moment d'inertie varie suivant le choix de l'axe. Par ailleurs, il est clair que la somme discrète utilisée dans la définition du moment d'inertie sera remplacée par une intégrale dans le cas d'une distribution continue de matière, comme c'est souvent le cas pour des solides macroscopiques.

Une propriété importante du moment d'inertie d'un solide indéformable est qu'il ne varie pas au cours du temps. Ainsi, lorsque le solide est soumis à un ensemble de forces extérieures dont le moment par rapport à Δ est $\mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$, le théorème du moment cinétique par rapport à un axe obtenu pour un système de points se simplifie. En dérivant l'expression (13.24) et en injectant le résultat dans la relation (13.23), on obtient le résultat fondamental suivant :

Théorème 13.18. Théorème du moment cinétique pour un solide indéformable par rapport à un axe

Lors du mouvement de rotation d'un solide Σ autour d'un axe Δ , sa vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ n'évolue dans le temps qu'en fonction de son moment d'inertie par rapport à Δ et du moment $\mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$ par rapport à Δ de toutes les forces extérieures au système.

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \quad (13.25)$$

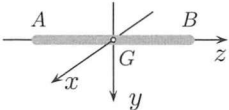
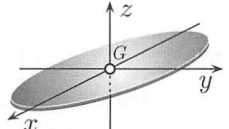
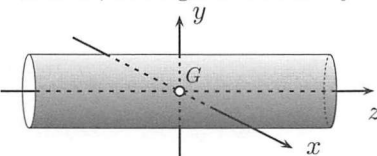
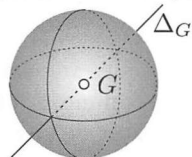
<p>Tige unidimensionnelle homogène de masse m et de longueur ℓ</p> 	$J_{(G, \vec{u}_x)} = J_{(G, \vec{u}_y)} = \frac{1}{12} m \ell^2$ $J_{(B, \vec{u}_x)} = J_{(B, \vec{u}_y)} = \frac{1}{3} m \ell^2$
<p>Disque plein homogène de masse m et de rayon R</p> 	$J_{(G, \vec{u}_z)} = \frac{1}{2} m R^2$ $J_{(G, \vec{u}_x)} = J_{(G, \vec{u}_y)} = \frac{1}{4} m R^2$
<p>Cylindre plein homogène de masse m, de longueur ℓ et de rayon R</p> 	$J_{(G, \vec{u}_z)} = \frac{1}{2} m R^2$ $J_{(G, \vec{u}_x)} = J_{(G, \vec{u}_y)} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m \ell^2$
<p>Sphère pleine homogène de masse m et de rayon R</p> 	$J_{\Delta_G} = \frac{2}{5} m R^2$

TABLEAU 13.1. Quelques moments d'inertie courants.

Ce résultat permet de comprendre l'importance relative des caractéristiques du solide dans les capacités relatives des forces qui lui sont appliquées à le mettre en rotation. On notera :

- ▶ l'importance de la répartition des masses sur le moment d'inertie qui, en modulant la valeur de J_{Δ} , influence la constante de temps intervenant dans le problème ;
- ▶ l'importance du bras de levier des actions extérieures qui module la valeur de $\mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$;
- ▶ l'aspect algébrique de cette relation : le signe de ω qui correspond au sens de rotation est imposé par le signe de $\mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$. Un couple positif est dit moteur, il augmente la vitesse de rotation, alors qu'un couple négatif est dit résistant et contribue à limiter l'augmentation de la vitesse de rotation.

Afin d'étudier sur un cas simple la mise en équation ainsi que les propriétés du mouvement de rotation d'un solide par rapport à un axe fixe, nous proposons de traiter l'exemple du pendule pesant représenté sur la figure 13.11 dans le cadre d'un exercice corrigé.

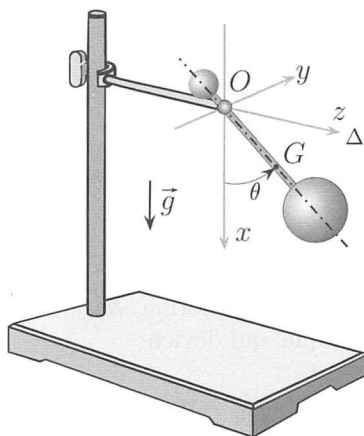


FIG. 13.11. Pendule pesant.

Ce pendule est un solide constitué d'une tige rigide aux extrémités de laquelle sont fixées deux masses. La position G du centre d'inertie de ce solide se situe sur la tige, à une distance ℓ du centre de rotation O que constitue la liaison pivot de fixation. Cette distance varie en fonction du rapport des masses des deux sphères. Le solide évolue dans le champ de pesanteur terrestre \vec{g} . Suivant la qualité du pivot de fixation, un couple résistant dû aux frottements peut ou non être considéré. L'axe de rotation Δ est confondu avec (O, \vec{u}_z) et le moment d'inertie du pendule par rapport à Δ est noté J_Δ .

EXERCICE CORRIGÉ 13.19.

L'haltère déséquilibré

On considère le pendule pesant de masse m de la figure 13.11, son centre d'inertie est noté G . Le pendule est maintenu dans le plan $z = 0$ grâce à une liaison en un point O de la tige telle que $\|\vec{OG}\| = \ell$. On repère l'axe de la tige par rapport à la verticale grâce à l'angle $\theta = \left(\vec{u}_x, \vec{OG} \right)$. À l'instant $t = 0$, le pendule est abandonné sans vitesse initiale depuis la position θ_0 . On note J_Δ le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_z)$.

1. On ne considère que l'action du champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{u}_x$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

2. Résoudre cette équation si à chaque instant t on peut considérer que $\theta(t) \ll 1$.

3. On prend en compte à présent l'effet d'inévitables frottements au niveau de la liaison en O . Ces effets se résument globalement en considérant l'existence de forces dont le moment par rapport à Δ s'écrit $\mathcal{M}_{\Delta, \text{dis}} = -\lambda\dot{\theta}$, où λ est un coefficient de frottement. Déterminer dans ce cas l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et étudier le régime des petites oscillations en fonction de la valeur du paramètre $\xi = \frac{\lambda}{2\sqrt{mg\ell J_\Delta}}$.

4. En utilisant Scilab, représenter le diagramme de phase $(\theta, \dot{\theta})$ de ces pendules avec et sans frottements, sans faire l'hypothèse des petites oscillations et en faisant varier les paramètres du système.

Corrigé

1. Le poids du solide est appliqué au point G . On note ℓ la distance entre O et G . Le moment du poids par rapport à l'axe Δ s'écrit donc

$$\mathcal{M}_{\Delta, \text{pes}} = (\ell \vec{u}_r \wedge mg \vec{u}_x) \cdot \vec{u}_z \text{ avec } \vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y.$$

On peut donc calculer $\mathcal{M}_{\Delta, \text{pes}} = (\ell \sin(\theta) \vec{u}_y \wedge mg \vec{u}_x) \cdot \vec{u}_z = -mg\ell \sin(\theta)$. Le poids est ici la seule force extérieure qui s'exerce sur le pendule. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème du moment cinétique au pendule par rapport à l'axe Δ , qui s'écrit $J_{\Delta} \dot{\theta} = -mg\ell \sin(\theta)$.

2. Si l'on se place dans le régime des petites oscillations, $\sin(\theta) \simeq \theta \ll 1$. L'équation du mouvement se linéarise et devient $J_{\Delta} \ddot{\theta} + \Omega_0^2 \theta = 0$ avec $\Omega_0^2 = \frac{mg\ell}{J_{\Delta}}$. La solution de cette équation est $\theta(t) = A \cos(\Omega_0 t) + B \sin(\Omega_0 t)$. Les constantes A et B s'identifient grâce aux conditions initiales : on nous dit que

$$\dot{\theta}(t=0) = B = 0 \text{ et que } \theta(t=0) = A = \theta_0.$$

La solution recherchée est donc $\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega_0 t)$. Il s'agit d'un régime sinusoïdal.

3. Si l'on prend en compte les frottements, un moment de la forme $\mathcal{M}_{\Delta, \text{dis}} = -\lambda \dot{\theta}$ vient se rajouter dans le théorème du moment cinétique, qui devient

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = -mg\ell \sin(\theta) - \lambda \dot{\theta},$$

et que l'on écrit sous la forme $\ddot{\theta} + 2\Omega_0 \xi \dot{\theta} + \Omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ avec $\xi = \frac{\lambda}{2\sqrt{mg\ell J_{\Delta}}}$. Dans le régime des petites oscillations, on peut remplacer $\sin(\theta)$ par θ et l'équation différentielle du mouvement devient linéaire à coefficients constants et sans second membre. Les trois régimes possibles sont décrits dans l'annexe B.

► Si $\xi > 1$, les solutions sont exponentiellement amorties, il s'agit du régime sur-critique, il n'y a pas d'oscillation et le pendule rejoint la position d'équilibre verticale sans osciller.

► Si $\xi = 1$, la solution est également exponentiellement amortie, c'est dans ce régime dit critique que le pendule rejoint le voisinage de la position d'équilibre le plus rapidement.

► Finalement, si $0 < \xi < 1$, il s'agit du régime sous-critique des oscillations amorties.

Dans chacun de ces régimes, le pendule sera proche de sa position verticale d'équilibre (correspondant à $\theta = 0$) dès que $t \gg \tau = \frac{1}{\xi \omega_0}$.

4. Pour résoudre l'équation différentielle dans le régime non linéaire des oscillations quelconques, on utilise une procédure Scilab qui met en œuvre l'algorithme Runge-Kutta (fonction ode45). Le programme permettant d'obtenir cette solution est présenté ci-dessous.

```
xi=1.5; omega_0=1;t_fin = 5*2*pi/omega_0; % parametres
y1_0 = 3.99*pi/4; y2_0 = 0;% conditions initiales
[t,y] = ode45('pendule', [0 t_fin], [y1_0 y2_0]);
plot(y(:,1),y(:,2))
function ypoint = pendule(t, y)
    global xi omega_0
    ypoint(1)=y(2); ypoint(2)=-omega_0^2*sin(y(1))-2*xi*omega_0*y(2);
```

Il est alors possible de tracer différentes courbes dans l'espace des phases $(\theta, \dot{\theta})$ du système. Sur la figure 13.12-a, nous avons étudié le système non linéaire sans frottement ($\xi = 0$) pour différentes conditions initiales et une valeur $\Omega_0 = 1$. Les valeurs de l'angle θ_0 de départ sont indiquées à côté de chaque trajectoire. On notera le caractère asynchrone dans les oscillations qui apparaît lorsque l'angle initial devient

grand. Cet aspect se traduit par l'aspect non circulaire de la trajectoire. Sur la figure 13.12-b nous avons représenté les trajectoires pour plusieurs valeurs de Ω_0 avec $\theta_0 = \pi$ et $\xi = 0,5$. On notera que contrairement au régime sans frottement, les trajectoires convergent vers l'origine $(0,0)$ qui est un point d'équilibre stable. La convergence est d'autant plus rapide que la valeur de Ω_0 est faible. On remarque qu'il s'agit d'oscillations amorties car les trajectoires convergent en spiralant. La figure 13.12-c correspond aux mêmes conditions que le cas b, mais avec une valeur $\xi = 1,5$. Le système a basculé dans le régime d'amortissement fort, la convergence vers l'origine est exponentielle : les oscillations ont disparu. Bien que non linéaire, le système étudié se comporte globalement de façon semblable au système linéarisé. L'asynchronisme qui apparaît sur la figure 13.12-a est caractéristique du régime non linéaire.

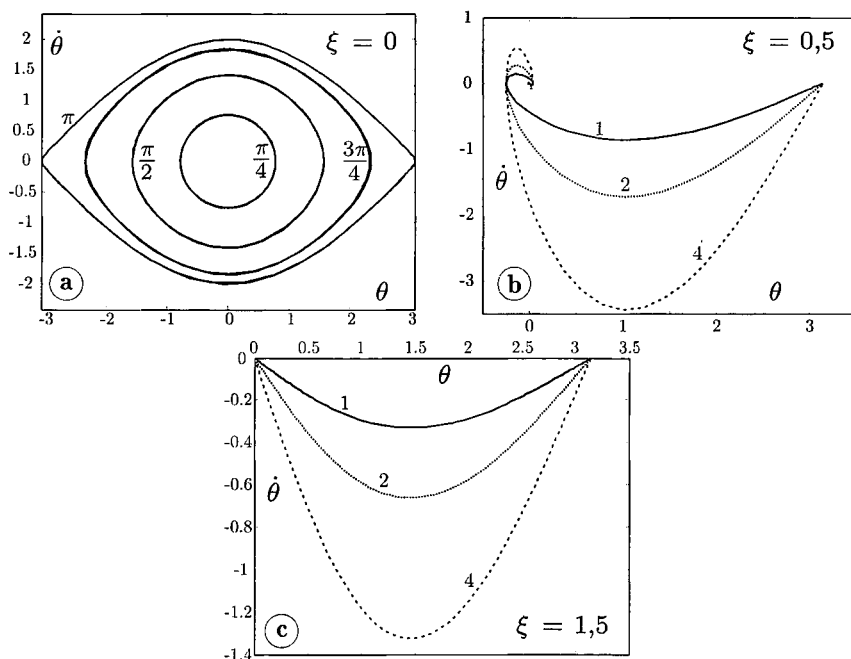


FIG. 13.12. Espace des phases du pendule pesant.

VI. Exercices

1. Ordre de grandeur

(solution page 725)

Nous allons calculer le moment cinétique dans deux situations importantes et ainsi obtenir quelques ordres de grandeur.

1. On considère tout d'abord un électron en mouvement circulaire uniforme autour du noyau d'un atome. On donne le rayon de sa trajectoire $r_e = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m, sa fréquence de rotation $f_e = 6,6 \cdot 10^{15}$ Hz ainsi que sa masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Calculer le moment cinétique de l'électron par rapport au centre du noyau.

2. On considère maintenant que la Lune est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. On donne le rayon de sa trajectoire $r_\ell = 3,8 \cdot 10^5$ km, sa période de révolution $T_\ell = 27,3$ jours, ainsi que la masse $m_\ell = 7,3 \cdot 10^{22}$ kg. Calculer le moment cinétique de la Lune par rapport au centre de la Terre.

2. Mouvement orbital de la Terre

(solution page 725)

On suppose que la Terre n'est soumise qu'à la seule attraction solaire et qu'elle décrit, dans son mouvement, une ellipse dont le foyer se trouve au centre du Soleil. Quand la Terre est à son aphélie, sa distance au Soleil vaut $r_{\max} = 1,52 \cdot 10^{11}$ m et sa vitesse orbitale $v_{\min} = 2,93 \cdot 10^4$ m · s⁻¹. Sachant qu'à son périhélie la Terre se trouve à la distance $r_{\min} = 1,47 \cdot 10^{11}$ m, trouver sa vitesse orbitale au périhélie.

3. Modèle de Bohr ★

(solution page 725)

Le premier modèle quantique de l'atome est dû à Niels Bohr⁹. Ce modèle représente l'atome d'hydrogène constitué par un proton ponctuel de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C autour duquel un électron, de charge $-e$ et de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg assimilé à un point M , est en orbite circulaire. On note O le centre de l'orbite occupé par le proton, r son rayon et v la vitesse orbitale de l'électron. On se place dans le référentiel (\mathcal{R}) du proton supposé galiléen! On néglige le poids de l'électron devant la force électrostatique qu'il reçoit de la part du proton.

1. Montrer que le moment cinétique orbital $\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O$ de l'électron se conserve. Exprimer $\sigma_M = \left\| \vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^O \right\|$ en fonction de v , r et m_e .
2. À l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, relier la vitesse v et la distance r .
3. Dans le modèle de Bohr, on postule la quantification du moment cinétique orbital, $\sigma_M = n\hbar$, où n est un entier positif et $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34}$ J.s. En déduire que le rayon est quantifié avec $r_n = n^2 r_1$, où r_1 est l'orbite de Bohr que l'on déterminera.

4. Rotation pour une masse soumise à un ressort ★★ (solution page 725)

On considère une table à coussin d'air horizontale sur laquelle peut se mouvoir, sans frottement, un mobile autoporteur ponctuel M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort (voir figure 13.13).

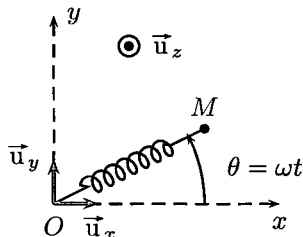


FIG. 13.13. Mobile ponctuel sur une table à coussin d'air horizontale (vue de dessus).

9. Né en 1885 à Copenhague, le Danois Niels Bohr est l'une des figures marquantes de la physique du xx^e siècle. Il est à la base de la théorie quantique avec son modèle atomique proposé en 1913 et en raison de l'influence qu'il aura plus tard sur les créateurs de la mécanique quantique comme Werner Heisenberg ou Wolfgang Pauli. Prix Nobel en 1922 et infatigable promoteur de la paix dans le monde, il est mort en 1962, à Copenhague.

La table forme le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, l'extrémité fixe du ressort est située en O . La table à coussin d'air permet de compenser le champ de pesanteur terrestre qui est dirigé le long de la verticale ascendante $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Le ressort possède une longueur à vide ℓ_0 et sa constante de raideur est notée k .

1. Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}_M^O$ du point M par rapport à O est conservé au cours du mouvement. On pourra l'exprimer en coordonnées cartésiennes ou cylindro-polaires.

2. À $t = 0$, le mobile M est abandonné en $A(x = \frac{6}{5}\ell_0, y = 0)$ sans vitesse initiale.

a/ Calculer $\vec{\sigma}_M^O$ et en déduire la nature de la trajectoire.

b/ Établir l'expression de $\vec{OM}(t)$ et indiquer dans quel intervalle varie la longueur du ressort.

3. On prend de nouvelles conditions initiales,

$$\vec{OM}(t = 0) = \ell_1 \vec{u}_x \text{ et } \vec{v}(t = 0) = \ell_1 \omega \vec{u}_y,$$

de manière à ce que le mobile autoporteur adopte un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{u}_z) .

a/ Exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}_M^O$ et montrer qu'il se conserve au cours du mouvement. On exprimera sa norme σ en fonction de m , ℓ_1 et ω .

b/ Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve au cours du mouvement et donner son expression.

c/ Montrer que cette énergie peut être écrite sous la forme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,ef}(r)$ où l'on exprimera $\mathcal{E}_{p,ef}(r)$ en fonction de r , σ , k , ℓ_0 et m .

d/ Tracer l'allure de la fonction $\mathcal{E}_{p,ef}(r)$ et en déduire pourquoi la masse ne peut pas s'éloigner du pôle d'attraction O .

5. Pendule incliné ★★★

(solution page 727)

On considère un système mécanique modélisé par un point matériel A , de masse m , accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ_0 , souple et de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixée à un point O d'un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Ce point A se déplace sur le plan incliné (voir figure 13.14).

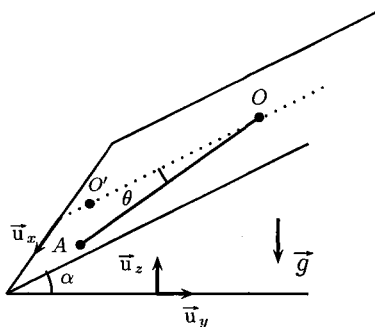


FIG. 13.14. Pendule pesant sur un plan incliné (vue en perspective).

1. On suppose dans un premier temps que le point A se déplace sans frottement sur le plan incliné. À $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et la vitesse est nulle.

a/ Quelle est la trajectoire du point A sur le plan incliné? Indiquer une base cylindro-polaire permettant de décrire simplement le mouvement du point mobile. Déterminer le vecteur vitesse ainsi que le moment cinétique en O du mobile dans ce repère.

b/ Déterminer l'équation différentielle du mouvement de A . Que devient cette équation dans le cas des petits mouvements? Quelle est la période du mouvement?

c/ Le pendule est lancé depuis sa position d'équilibre O' avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. Quel est l'angle maximal atteint (l'hypothèse des petites oscillations étant toujours valable)?

d/ Déterminer l'expression de la tension du fil. Que devient cette expression dans le cadre des petits mouvements?

2. On ne néglige plus le frottement entre le plan et A . Il est modélisé par un frottement de type solide caractérisé par un coefficient de frottement f . Le mobile A est lâché sans vitesse initiale dans une position sur le plan incliné caractérisée par l'angle $\theta_1 < 0$. Le point atteint la position repérée par l'angle $\theta_2 > 0$ avant de repartir dans l'autre sens.

a/ À quelle condition portant sur θ_1 , α et f le mobile n'adhère-t-il plus au plan?

b/ Montrer que $\ell_0 \dot{\theta}^2 + 2fg(\theta - \theta_1) \cos(\alpha) + 2g[\cos(\theta) - \cos(\theta_1)] \sin(\alpha)$ est une intégrale première du mouvement.

c/ En déduire une relation entre le coefficient de frottement f , α , θ_1 et θ_2 .

6. Le spin de l'électron ★

(solution page 729)

On peut assimiler l'atome d'hydrogène à un proton autour duquel un électron est en mouvement. Une image classique de ce mouvement est de considérer l'électron sur une orbite circulaire dont le rayon est de l'ordre de 10^{-10} m autour du proton situé à l'origine O d'un référentiel galiléen. Dans ce mouvement, le moment cinétique de l'électron calculé en O est appelé moment cinétique orbital, il est l'objet de l'exercice 3 page 368.

Certaines expériences, comme celle de Stern et Gerlach en 1922, montrent que l'électron possède également un moment cinétique *intrinsèque*, indépendant de ce mouvement orbital. On appelle *spin* ce moment cinétique qui est une caractéristique de toutes les particules élémentaires et dont l'ordre de grandeur est la constante de Planck $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Une image classique du spin est de considérer qu'il résulte de la rotation de la particule sur elle-même. Afin de tester certaines caractéristiques de cette image, nous allons supposer que l'électron est assimilable à une sphère de rayon $R = 10^{-15}$ m et de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, et qu'il tourne à la vitesse angulaire constante Ω autour de l'un de ses diamètres.

1. Déterminer, en ordre de grandeur, une expression de la vitesse d'un point de la sphère situé sur le cercle équatorial en fonction de \hbar , m et R .

2. Commenter la validité de l'image classique de la rotation propre pour expliquer l'existence du spin.

7. Collision avec un astéroïde ★★

(solution page 729)

Dans tout l'exercice on ne considère que l'influence gravitationnelle de la Terre, assimilée à une sphère de masse M_T et de rayon R_T . Un astéroïde A de masse m et de taille négligeable par rapport à celle de la Terre est repéré en M_0 , à une distance très grande de la Terre où on supposera que son influence gravitationnelle est négligeable. Dans cette position, le vecteur vitesse de l'astéroïde est $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$, porté par la droite (M_0, \vec{u}_x) telle que la distance minimale du centre de la Terre à cette droite est b , que l'on appelle paramètre d'impact (voir figure 13.15).

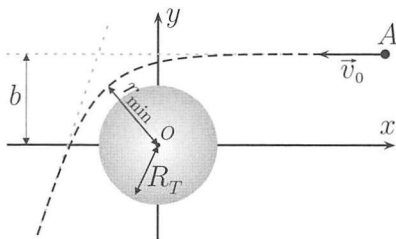


FIG. 13.15. Astéroïde approchant la Terre.

1. Donner deux intégrales premières du mouvement. On exprimera ces dernières en fonction des conditions initiales.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,ef}$ de l'astéroïde dans le champ gravitationnel de la Terre.
3. Exprimer la distance minimale r_{\min} à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre en fonction de \mathcal{G} , v_0 , M_T et b . En déduire une condition de non-collision.

8. Une machine tournante ★★

(solution page 729)

On considère une machine (tour, fraiseuse, etc.) dont une partie massive (l'outil) peut être mise en rotation autour d'un axe fixe Δ par l'action d'un couple moteur. L'outil possède un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ et sa vitesse angulaire de rotation autour de Δ est notée ω (voir figure 13.16).

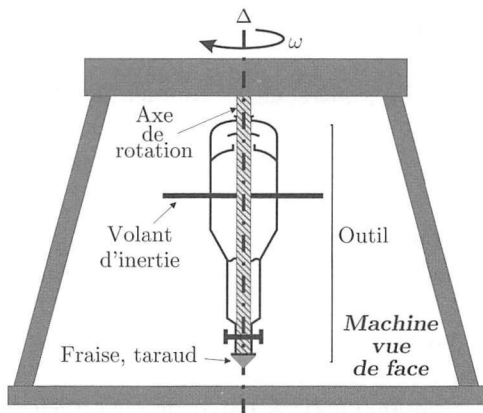


FIG. 13.16. Machine tournante.

On suppose finalement que l'ensemble des forces de frottement subies par l'outil peut être représenté par un moment par rapport à l'axe de la machine de la forme $\mathcal{M}_\Delta = -k\omega$, où k est une constante positive.

1. Initialement immobile, l'outil est soumis à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma = \Gamma_0$ constant.

a/ Déterminer l'équation du mouvement de l'outil vérifiée par $\omega(t)$.

b/ En résolvant cette équation, analyser le mouvement de l'outil en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent, puis le temps de relaxation τ_∞ du système correspondant à un écart relatif entre ω et ω_0 inférieur à 1%.

2. La présence de vibrations indésirables est inévitable sur ce genre de machine. Afin de les prendre en compte, on suppose que le couple moteur n'est plus constant mais modulé à la fréquence $\frac{\Omega}{2\pi}$ avec un taux de modulation η . Le moment par rapport à Δ de ce couple s'écrit donc $\Gamma(t) = \Gamma_0 (1 + \eta \cos(\Omega t))$.

a/ Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\epsilon(t)$ telle que $\omega(t) = \omega_0(1 + \epsilon(t))$.

b/ Montrer qu'au bout d'un temps suffisant, $\epsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme $\epsilon(t) = a \cos(\Omega t - \psi)$. On exprimera les constantes a et ψ en fonction des données η , Ω et τ .

3. À l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant d'inertie.

9. Un marcheur sur une poutre ★★★

(solution page 730)

Une poutre de masse $m_p = 60$ kg et de longueur $L = 5$ m repose sur deux supports A et B séparés par une distance $\ell = 3$ m. Un individu de masse $m_c = 80$ kg se déplace le long de la poutre en partant de son extrémité située à l'aplomb de A , il est repéré à chaque instant par le point C . Tous les contacts sont supposés ponctuels. L'ensemble du dispositif est représenté sur la figure 13.17.

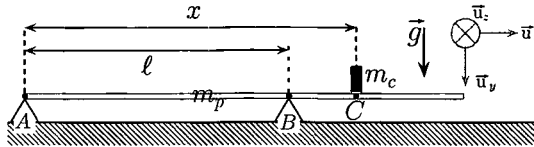


FIG. 13.17. Géométrie du problème.

On note f le coefficient de frottement entre la poutre et le contact en B , et $J_B = \frac{1}{9}m_p L^2$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (B, \vec{u}_z) . Cette poutre est homogène et son centre d'inertie G est situé à la distance $\frac{L}{2}$ de A . Enfin, on prendra $\frac{L}{\ell} = \frac{5}{3}$.

1. Exprimer la réaction du support A sur la poutre en fonction de x .
2. Calculer la distance maximale x_{\max} à laquelle peut s'éloigner l'individu tout en conservant la poutre parfaitement horizontale.
3. On suppose que l'individu se place à l'abscisse $x_{\max} + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ et que la poutre bascule autour du point B sans vitesse initiale et sans glissement. Déterminer la composante normale et tangentielle de la réaction en B . À partir de quel angle le glissement commence-t-il ?

Formulaire de mécanique

Produits scalaire et vectoriel

Pour deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , représentés dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ par

$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + b_3 \vec{u}_3 :$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

L'angle orienté $\alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ vérifie :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

$$|\sin(\alpha)| = \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Position, vitesse et accélération

Les bases des différents systèmes de coordonnées sont notées :

- ▶ \mathcal{K} en cartésiennes ;
- ▶ \mathcal{C} en cylindriques ;
- ▶ \mathcal{S} en sphériques.

Vecteur position :

$$\vec{r}_{M/\mathcal{K}} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{r}_{M/\mathcal{C}} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

$$\vec{r}_{M/\mathcal{S}} = r \vec{u}_r$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{K}} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{C}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{S}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\phi} \vec{u}_\phi$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{K}} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{C}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Principe fondamental de la dynamique

Pour un mobile ponctuel M de masse m constante, en mouvement relativement au référentiel galiléen (\mathcal{R}) , soumis à des forces \vec{F}_i :

$$m \vec{a}_{M/(\mathcal{R})} = m \left(\frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Interactions fondamentales

Force gravitationnelle exercée par un objet ponctuel ou à symétrie sphérique de masse m_1 situé en M_1 sur un mobile ponctuel M_2 de masse m_2 :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^2} \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Force électrostatique exercée par un objet ponctuel ou à symétrie sphérique de charge q_1 situé en M_1 sur un mobile ponctuel M_2 de charge q_2 :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^2} \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Force exercée par un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) sur un mobile M ponctuel, de charge q et de vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ (force de Lorentz) :

$$\vec{F} = q \left[\vec{E}(M) + \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} \wedge \vec{B}(M) \right]$$

Force exercée par le champ de pesanteur terrestre \vec{g} sur un mobile de masse m :

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

Lois de force phénoménologiques

Force de tension exercée sur un mobile fixé en M par un ressort linéaire $[OM]$, de raideur k et longueur à vide ℓ_0 , (loi de Hooke) :

$$\vec{F} = -k [OM - \ell_0] \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

Force de tension exercée par un fil $[OM]$ tendu sur un mobile attaché en M :

$$\vec{F} = -T \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \quad \text{avec } T > 0$$

La force de contact exercée par un support sur un mobile a deux composantes, normale et tangentielle à la surface de contact :

$$\begin{aligned} \vec{N} &\neq \vec{0}, \text{ sauf décollage du mobile} \\ \vec{T} &\neq \vec{0}, \text{ sauf absence de frottement} \\ \vec{T} \cdot \vec{v}_g &< 0 \text{ si glissement} \end{aligned}$$

Travail, puissance et énergie

Puissance exercée par la force $\vec{F}_{i \rightarrow M}$ dans le référentiel (\mathcal{R}) à l'instant t :

$$\mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}/(\mathcal{R})}(t) = \vec{F}_{i \rightarrow M}(t) \cdot \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}(t)$$

Travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}_{i \rightarrow M}$ au point M au cours du déplacement $d\vec{r}$:

$$\delta W_{\vec{F}_{i \rightarrow M}} = \mathcal{P}_{\vec{F}_{i \rightarrow M}/(\mathcal{R})} dt = \vec{F}_{i \rightarrow M} \cdot d\vec{r}$$

Énergie cinétique d'un mobile ponctuel M de masse m et de vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ dans le référentiel (\mathcal{R}) :

$$\mathcal{E}_{c,M/(\mathcal{R})} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}^2$$

Théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{d\mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})}}{dt} = \mathcal{P}_{\rightarrow M/(\mathcal{R})}(t)$$

Une force conservative \vec{F}_c fournit un travail $\delta W_{\vec{F}_c}$ indépendant du chemin suivi par le mobile. Elle dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p :

$$\delta W_{\vec{F}_c} = -d\mathcal{E}_p$$

Énergie potentielle :

- ▶ de pesanteur : $\mathcal{E}_{p,\text{poids}} = mgz$
- ▶ de gravitation : $\mathcal{E}_{p,\text{gr}} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$
- ▶ élastique : $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$
- ▶ électrostatique : $\mathcal{E}_{p,\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$

Énergie mécanique d'un mobile ponctuel dans le référentiel (\mathcal{R}) :

$$\mathcal{E}_{m/(\mathcal{R})} = \mathcal{E}_{c/(\mathcal{R})} + \Sigma \mathcal{E}_p$$

Variation temporelle de l'énergie mécanique d'un mobile ponctuel dans le référentiel (\mathcal{R}) :

$$\frac{d\mathcal{E}_{m/(\mathcal{R})}}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{F}_{\text{non conserv.}}}$$

Particule chargée dans un champ électromagnétique

Relation entre champ et potentiel :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Énergie potentielle d'une particule chargée :

$$\mathcal{E}_{p,\text{el}} = qV(M)$$

Vitesse d'une particule accélérée par une tension U :

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Rayon de la trajectoire circulaire d'une particule dans un champ magnétique :

$$R = \left| \frac{mv_0}{qB} \right|$$

Moment cinétique d'un point

Moment cinétique d'un point M de masse m , de vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$ relativement au référentiel (\mathcal{R}) , calculé au point A :

$$\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}_{M/(\mathcal{R})}$$

Moment de la force \vec{F} exercée sur le point M , calculé au point A :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F} \rightarrow M}^A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Théorème du moment cinétique en un point fixe A pour un mobile ponctuel M :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{M/(\mathcal{R})}^A}{dt} \right)_{(\mathcal{R})} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_i \rightarrow M}^A$$

Moment cinétique d'un système de points

Quantité de mouvement d'un système de points Σ de centre d'inertie G dans un référentiel (\mathcal{R}) :

$$\vec{p}_{\Sigma/(\mathcal{R})} = m \vec{v}_{G/(\mathcal{R})}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe A pour un système de points Σ :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^A$$

Moments scalaires par rapport à un axe $\Delta = (A, \vec{u}_\Delta)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma/\Delta} &= \vec{\sigma}_{\Sigma/(\mathcal{R})}^A \cdot \vec{u}_\Delta \\ \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} &= \vec{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} \cdot \vec{u}_\Delta \end{aligned}$$

Moment cinétique par rapport à l'axe Δ d'un solide Σ en rotation autour de Δ avec une vitesse angulaire ω :

$$\sigma_{\Sigma/\Delta} = J_\Delta \omega$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe Δ pour un solide indéformable en rotation autour de Δ :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$$

Troisième partie

THERMODYNAMIQUE

LA THERMODYNAMIQUE est l'étude des transferts de l'énergie au sein de systèmes macroscopiques. Cette science est née au XIX^e siècle, avec l'avènement de l'ère industrielle qui a révolutionné notre société. Pour améliorer le rendement des machines à vapeur apparues à la fin du XVIII^e siècle, les scientifiques ont eu besoin de comprendre les phénomènes physiques en jeu. Les bases de la thermodynamique ont été posées par le Français Sadi Carnot dans son ouvrage publié en 1824, *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*. Le caractère particulièrement non intuitif de la notion d'énergie et de ses transformations, notamment les transferts thermiques, a donné lieu à de nombreux tâtonnements. Par exemple, le terme de « chaleur », que l'on évitera d'utiliser, porte en lui la confusion entre une forme d'énergie contenue dans un système et un mode de transfert d'énergie d'un système vers un autre.

À l'aide d'une expérience célèbre consistant à élever la température de l'eau rien que par agitation mécanique, le physicien britannique James Prescott Joule a montré en 1845 l'équivalence entre le travail et le transfert thermique en tant que modes de transfert d'énergie. Par ailleurs, le caractère conservatif de l'énergie a été énoncé par le physicien allemand Julius von Mayer en 1841. Cela a donné lieu à l'énoncé du premier principe de la thermodynamique.

Si les transferts mécanique et thermique sont équivalents en termes énergétiques, ils sont fondamentalement dissymétriques : le transfert thermique s'effectue toujours des zones chaudes vers les zones froides. Cette dissymétrie, liée au caractère irréversible des évolutions spontanées, a entraîné l'énoncé du deuxième principe de la thermodynamique. Historiquement, celui-ci se décline sous plusieurs formes équivalentes. Le Britannique Kelvin et l'Allemand Clausius en ont donné un énoncé « industriel » dans le cadre de l'étude des machines thermiques.

Il a fallu attendre 1870 pour que la thermodynamique soit envisagée au niveau microscopique, avec le développement de la thermodynamique statistique par l'Écossais James Clerk Maxwell et l'Autrichien Ludwig Boltzmann. Par la suite, la thermodynamique a pris ses distances avec ses applications purement industrielles, pour devenir un objet d'étude général, trouvant des développements dans la plupart des branches de la physique et de la chimie. Le deuxième principe sera énoncé dans cet ouvrage sous une forme due au chimiste belge Ilya Prigogine (1917-2003), qui est à la base de la thermodynamique des systèmes hors d'équilibre.

En insistant sur les phénomènes physiques, le programme de première année des CPGE permet de donner un aperçu général de la thermodynamique tout en évitant les situations mathématiquement complexes.

Chapitre 14

DESCRIPTION D'UN SYSTÈME À L'ÉQUILIBRE

LA THERMODYNAMIQUE étudie les échanges d'énergie au sein de systèmes contenant un très grand nombre de particules (atomes, molécules, etc.). Il est évidemment exclu de décrire un système contenant plusieurs moles de particules (une mole contient $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ particules) en décrivant les trajectoires de chacune d'entre elles. L'objet de ce chapitre est d'apprendre à décrire un tel système à l'aide d'un petit nombre de variables, définies en se plaçant à une échelle d'observation adaptée.

I. Les différentes échelles de description

I.1. Échelle microscopique, libre parcours moyen

La matière, qui semble continue à notre échelle, est constituée de particules microscopiques : atomes, molécules... À l'échelle microscopique, elle est donc fortement discontinue.

Dans un système solide, l'échelle de longueur caractéristique est la distance entre les atomes au sein du solide ; l'ordre de grandeur est l'angström ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$).

Dans un fluide (liquide ou gaz), les particules ont des trajectoires désordonnées, sous l'effet de l'agitation thermique. Leurs interactions au cours de leur mouvement peuvent être modélisées par des chocs (ou collisions).

Définition 14.1. *Libre parcours moyen*

Le libre parcours moyen λ des particules dans un fluide est la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions successives.

Dans un gaz, le libre parcours moyen peut être de l'ordre de plusieurs centaines de diamètres moléculaires.

Dans un liquide, le libre parcours moyen est inférieur au diamètre des molécules : les molécules sont quasiment au contact.

Ordres de grandeur 14.2. *Libre parcours moyen*

- ▶ Dans un gaz à pression et température ambiantes, $\lambda \simeq 0,1 \text{ }\mu\text{m}$.
- ▶ Dans un liquide, $\lambda \simeq 1 \text{ nm}$.

Remarques

1. À température fixée, le libre parcours moyen dans un gaz diminue quand la pression augmente : la densité de molécules étant plus grande, chacune d'entre elles parcourt une distance plus faible avant de subir une collision. On montre que λ varie comme $\frac{1}{p}$: le libre parcours moyen est divisé par deux quand la pression est doublée.

2. Le libre parcours moyen dans un gaz dépend de la dimension des molécules : pour une pression p et une température T données (ce qui fixe la densité moléculaire $\frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$), plus les molécules sont grosses, plus elles vont entrer fréquemment

en collision, diminuant ainsi le libre parcours moyen. Dans les mêmes conditions de température et de pression, le libre parcours moyen du benzène (C_6H_6) est quatre fois plus court que celui de l'hélium (He).

I.2. Échelle macroscopique

L'échelle macroscopique est la dimension L caractéristique du système étudié : de l'ordre du centimètre pour l'étude d'un gaz dans une bouteille, de l'ordre du kilomètre pour l'étude de l'atmosphère.

À l'échelle macroscopique, la matière apparaît comme continue¹.

I.3. Échelle mésoscopique

Cette échelle est caractérisée par une longueur ℓ intermédiaire entre l'échelle macroscopique L et l'échelle microscopique λ .

Définition 14.3. Échelle mésoscopique

Un volume ℓ^3 à l'échelle mésoscopique est considéré comme :

- ▶ microscopiquement grand ($\ell^3 \gg \lambda^3$), de façon à ce qu'il contienne un grand nombre de particules microscopiques ;
- ▶ macroscopiquement petit ($\ell^3 \ll L^3$), de façon à ce qu'il puisse être considéré comme ponctuel à l'échelle d'observation du système.

L'échelle mésoscopique ℓ est donc telle que

$$\lambda \ll \ell \ll L.$$

L'échelle mésoscopique permet de définir des grandeurs **locales, continues** à l'échelle macroscopique : pression, température, masse volumique.

- ▶ Cette échelle de description est aussi utilisée en électromagnétisme, pour décrire les distributions de charges, et en mécanique des fluides.

II. Théorie cinétique du gaz parfait

La théorie cinétique des gaz s'appuie sur une description des gaz à l'échelle microscopique pour établir leurs propriétés macroscopiques comme la pression ou la température. Compte tenu de la complexité des systèmes étudiés, qui comporte un nombre énorme d'atomes ou de molécules, seule une description statistique est envisageable. Il ne s'agit dans ce chapitre que d'en donner un aperçu simplifié, l'objectif étant de donner une interprétation microscopique à la température, la pression et l'énergie interne d'un gaz dans le modèle du gaz parfait.

1. Les seules discontinuités que l'on peut rencontrer sont à des interfaces entre des phases différentes : bulles dans un liquide par exemple.

II.1. Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz

On se limite à l'étude d'un gaz parfait monoatomique à l'équilibre.

Définition 14.4. Gaz parfait monoatomique

Un gaz parfait monoatomique est constitué d'atomes rigoureusement ponctuels, sans interactions entre eux.

Le gaz parfait est un modèle théorique.

Dans le modèle du gaz parfait, on néglige la taille des molécules, ainsi que les interactions entre celles-ci. Seuls les chocs des atomes avec les parois du récipient sont prises en compte. Ce modèle, aussi simple qu'il puisse paraître, permet de décrire correctement le comportement d'un gaz réel quand sa pression n'est pas trop élevée. Les molécules d'un gaz semblent animées de mouvements désordonnés et aléatoires, tout en obéissant à certaines règles statistiques. Cependant, le physicien écossais James Maxwell (1831-1879) a montré en 1860 que les vitesses des molécules d'un gaz parfait à l'équilibre suivent une loi de répartition bien déterminée. Cette loi de distribution n'est pas au programme de CPGE.

Dans le modèle du gaz parfait adopté, on a supposé l'état d'équilibre thermodynamique atteint. Dans un tel état, les vitesses des molécules sont décorrélatées et indépendantes de leur position ; c'est l'hypothèse du **chaos moléculaire**.

Propriété 14.5. Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz

Dans l'hypothèse du chaos moléculaire dans un gaz parfait à l'équilibre, la loi de distribution des vitesses moléculaires du gaz est

- ▶ *homogène : la répartition des vitesses des molécules contenues dans un volume mésoscopique $d\tau$ est indépendante de la position de ce volume (la loi est invariante par translation d'espace) ;*
- ▶ *isotrope : les vitesses des molécules d'un volume $d\tau$ sont également réparties dans toutes les directions de l'espace. Il n'y a aucune direction privilégiée, c'est-à-dire aucun mouvement d'ensemble des molécules dans une direction particulière ;*
- ▶ *stationnaire : la répartition des vitesses ne dépend pas du temps ; cela découle de l'équilibre thermodynamique du gaz.*

On rappelle que la valeur moyenne d'un ensemble de N données x_i est définie par

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

On peut donc définir des grandeurs moyennes relatives aux N molécules contenues dans un volume mésoscopique $d\tau$.

Définition 14.6. Vitesse quadratique moyenne

La vitesse quadratique moyenne des molécules d'un gaz est définie par

$$u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

où $\langle v^2 \rangle$ désigne la valeur moyenne du carré de la vitesse des molécules du gaz.

Remarques

1. La vitesse quadratique moyenne n'est pas égale à la vitesse moyenne : $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \neq \langle v \rangle$.
2. La valeur moyenne $\langle x \rangle$ est définie comme moyenne en un instant donné de la valeur de cette grandeur pour un très grand nombre de particules. Cette moyenne sur N particules n'est pas définie comme la moyenne temporelle $\langle x \rangle_t$ de la grandeur relative à une particule sur une durée T :

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_i(t) dt.$$

Cependant, selon l'hypothèse ergodique, formulée par Ludwig Boltzmann pour un système à l'équilibre, les deux valeurs moyennes s'identifient dans la limite où $\langle x \rangle$ est calculée pour un très grand nombre N de particules, et où $\langle x \rangle_t$ est calculée sur une très longue durée T .

II.2. Pression cinétique

La pression dans un gaz est définie à partir de la force qu'exerce le fluide sur un solide, du fait des chocs de ses molécules sur la paroi du solide (voir page 536).

Définition 14.7. Pression d'un fluide

Soit dS_M l'aire d'une surface mésoscopique centrée en un point M d'un solide en contact avec un gaz. En notant $d\vec{F}$ la force moyenne exercée par le gaz sur la surface dS_M du solide, on définit la pression $p(M)$ dans le gaz par

$$d\vec{F} = p(M) dS_M \vec{n},$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire ($\|\vec{n}\| = 1$), normal à la surface du solide en M , dirigé du gaz vers le solide.

D'après la loi de la quantité de mouvement, la variation de la quantité de mouvement des molécules heurtant la paroi permet d'accéder à la force qu'elles subissent de la part de la paroi ; la troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques) conduit à la force exercée par le gaz sur la paroi, d'où l'on déduit la pression du gaz.

La distribution des vitesses étant isotrope, on adopte un modèle simplifié de la répartition des vitesses moléculaires dans l'espace :

1. toutes les particules ont une vitesse de module u , vitesse quadratique moyenne ;
2. les particules ne peuvent se déplacer que dans les directions \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z , dans les deux sens possibles (voir figure 14.1). Toutes les directions étant équiprobables, pour un grand nombre N de molécules :

- ▶ $\frac{N}{6}$ se déplacent selon $+\vec{u}_x$ avec une vitesse $u\vec{u}_x$;
- ▶ $\frac{N}{6}$ se déplacent selon $-\vec{u}_x$ avec une vitesse $-u\vec{u}_x$;
- ▶ $\frac{N}{6}$ se déplacent selon $+\vec{u}_y$ avec une vitesse $u\vec{u}_y$;
- ▶ $\frac{N}{6}$ se déplacent selon $-\vec{u}_y$ avec une vitesse $-u\vec{u}_y$;
- ▶ $\frac{N}{6}$ se déplacent selon $+\vec{u}_z$ avec une vitesse $u\vec{u}_z$;
- ▶ $\frac{N}{6}$ se déplacent selon $-\vec{u}_z$ avec une vitesse $-u\vec{u}_z$;

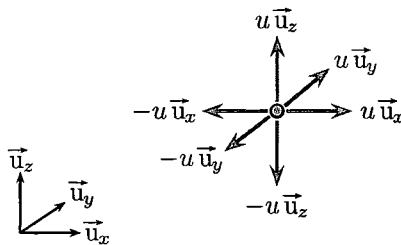
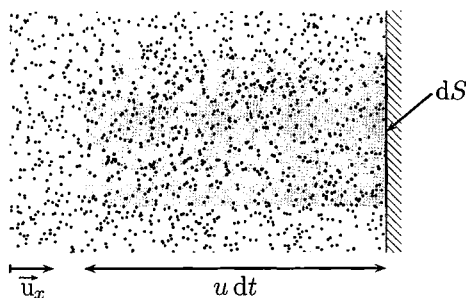


FIG. 14.1. Vitesses possibles d'une molécule.

La densité volumique de molécules (nombre de molécules par unité de volume), supposée uniforme, est notée n^* . Les molécules ont une masse m .

Considérons le système fermé constitué des molécules rencontrant la surface dS pendant une durée dt . Les molécules ayant une vitesse de norme u , seules celles situées à une distance inférieure à $u dt$ de la paroi subiront un choc pendant dt .

Les molécules ne pouvant se déplacer que selon $\pm \vec{u}_x$, $\pm \vec{u}_y$ ou $\pm \vec{u}_z$, celles qui sont en dehors du cylindre, grisé sur la figure 14.2, de section dS et de longueur $u dt$, ne rencontreront pas la surface dS de la paroi pendant dt .

FIG. 14.2. Chocs des particules sur une section dS .

Seules les molécules ayant la vitesse $+u \vec{u}_x$ heurtent la paroi. La quantité de mouvement de chacune d'entre elles avant le choc est

$$\vec{p} = mu \vec{u}_x.$$

Après le choc, chaque molécule, animée de la vitesse $-u \vec{u}_x$, possède la quantité de mouvement

$$\vec{p}' = -mu \vec{u}_x.$$

La variation de la quantité de mouvement de chaque molécule est donc

$$\vec{p}' - \vec{p} = -2mu \vec{u}_x.$$

Considérons les molécules qui heurtent la surface dS de la paroi pendant dt , et calculons la variation de la quantité de mouvement de ce système pendant dt .

Le cylindre, de volume $u dt dS$, contient $\delta n = n^* u dt dS$ molécules. D'après l'isotropie des vitesses, $\frac{\delta n}{6}$ particules ont la vitesse $u \vec{u}_x$ et rencontrent la paroi pendant dt . La variation de la quantité de mouvement de l'ensemble de ces molécules est donc

$$\frac{\delta n}{6} (\vec{p}' - \vec{p}) = \frac{1}{6} n^* u dt dS \times (-2mu \vec{u}_x) = -\frac{2}{6} n^* m u^2 dS dt \vec{u}_x.$$

Le taux de variation de la quantité de mouvement des particules ayant rencontré la paroi pendant dt est relié à la force $d\vec{F}_{\text{paroi/gaz}}$ exercée par la paroi sur les molécules du gaz selon le principe fondamental de la dynamique :

$$d\vec{F}_{\text{paroi/gaz}} = \frac{\delta n (\vec{p}' - \vec{p})}{dt} = -\frac{2}{6} n^* m u^2 dS \vec{u}_x.$$

D'après la troisième loi de Newton, la force exercée par le gaz sur la paroi vérifie $d\vec{F}_{\text{gaz/paroi}} = -d\vec{F}_{\text{paroi/gaz}}$, soit

$$d\vec{F}_{\text{gaz/paroi}} = \frac{1}{3} n^* m u^2 dS \vec{u}_x.$$

En identifiant avec la définition de la pression $d\vec{F}_{\text{gaz/paroi}} = p dS \vec{u}_x$, on en déduit l'expression de la pression :

$$p = \frac{1}{3} n^* m u^2.$$

Cette pression, construite sur des considérations de cinétique moléculaire, est appelée pression cinétique.

Loi 14.8. *Pression cinétique*

La pression cinétique d'un gaz parfait est donnée par

$$p = \frac{1}{3} n^* m u^2,$$

où n^* est la densité moléculaire du gaz, u la vitesse quadratique moyenne et m la masse des molécules.

II.3. Température cinétique

La température cinétique d'un gaz parfait est définie à partir de l'énergie cinétique moyenne des atomes.

Définition 14.9. *Température cinétique*

La température cinétique T d'un gaz parfait est définie par

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T,$$

où m est la masse d'un atome et u sa vitesse quadratique moyenne.

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

La température s'exprime en kelvins (K).

L'énergie cinétique moyenne d'un atome s'écrit en effet en fonction de sa vitesse quadratique moyenne :

$$\langle E_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m u^2.$$

La température est définie de façon statistique (*via* la vitesse quadratique moyenne) et n'a de sens que pour un grand nombre de particules.

Remarque Le facteur $\frac{3}{2}$ sera justifié à la section V.2 page 392.

La constante de Boltzmann est reliée à la constante des gaz parfaits R et au nombre d'avogadro \mathcal{N}_A selon

$$R = k_B \mathcal{N}_A.$$

Ordres de grandeur 14.10.

Constante des gaz parfaits : $R \simeq 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A \simeq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Le nombre d'Avogadro est le nombre d'entités contenues dans une mole, défini comme le nombre d'atomes de l'isotope ^{12}C du carbone dans 12 grammes de cet isotope.

EXEMPLE 14.11.

En considérant l'hélium comme un gaz parfait monoatomique de masse molaire $M = 4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, à la température $T = 300 \text{ K}$ (soit 27°C), la vitesse quadratique moyenne de ses molécules est donnée par

$$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

La masse molaire M de l'hélium s'écrit en fonction de la masse d'une molécule : $M = m\mathcal{N}_A$, d'où

$$u = \sqrt{\frac{3k_B \mathcal{N}_A T}{M}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8,31 \times 300}{4 \cdot 10^{-3}}} = 1,37 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

III. Description d'un système thermodynamique

III.1. Système thermodynamique

Définition 14.12. *Système thermodynamique*

Un système thermodynamique est une partie de l'univers délimitée par une surface fermée, appelée frontière, contenant un grand nombre de particules microscopiques.

- ▶ La frontière peut être une surface réelle (paroi d'un récipient) ou fictive.
- ▶ La frontière peut être mobile : le système peut se déformer.
- ▶ La frontière sépare le système de l'extérieur.

Définition 14.13. *Système ouvert, fermé, isolé*

Un système thermodynamique peut être :

- ▶ ouvert s'il échange de la matière avec l'extérieur ;
- ▶ fermé s'il n'échange pas de matière, mais peut échanger de l'énergie avec l'extérieur ;
- ▶ isolé s'il n'échange ni matière ni énergie avec l'extérieur.

Définition 14.14. Équilibre thermodynamique

Un système est à l'équilibre thermodynamique lorsque ses propriétés macroscopiques n'évoluent plus dans le temps.

En particulier, la température et la pression restent constantes. Par exemple, un bloc métallique chauffé qui refroidit lentement dans une pièce n'est pas à l'équilibre : sa température diminue au cours du temps.

III.2. Grandeur extensive, grandeur intensive

Considérons notre salle de classe et la salle voisine : les murs de chaque salle délimitent un système thermodynamique. Nous pouvons construire un troisième système comme la réunion des deux salles adjacentes. Certaines grandeurs ont la même valeur, que l'on considère une salle ou l'ensemble des deux salles : si la température est de 20 °C dans chaque salle, elle ne sera pas de 40 °C pour système défini par la réunion des deux salles. En revanche, le volume de l'ensemble des deux salles est la somme des volumes de chaque salle.

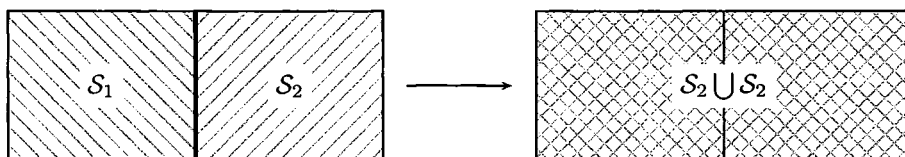


FIG. 14.3. Réunion de deux systèmes.

Il apparaît deux familles de grandeurs : les grandeurs intensives et les grandeurs extensives.

Définition 14.15. Grandeur extensive

Une grandeur est dite extensive lorsqu'elle est additive lors de la réunion de deux systèmes disjoints.

Exemples : le volume, la masse, la charge électrique sont des grandeurs extensives.

Définition 14.16. Grandeur intensive

Une grandeur est dite intensive lorsqu'elle est indépendante de la quantité de matière qui constitue le système.

Exemples : la température, la pression sont des grandeurs intensives.

Remarque Dans le cas où la grandeur intensive est uniforme pour le système considéré (c'est-à-dire a la même valeur en tout point), on peut parler de « la » grandeur du système. Par exemple, si la température est d'une pièce est uniforme, cela a un sens de parler de LA température de la pièce.

Les choses se compliquent dans le cas où la grandeur intensive n'est pas uniforme. Si l'on considère deux pièces de même dimension, l'une à la température uniforme de 20 °C, l'autre à la température uniforme de 30°C, on ne peut plus dire que la température est inchangée lors de la réunion des deux systèmes.

III.3. Construction d'une grandeur intensive

Soit X et Y deux grandeurs extensives relatives à un système \mathcal{S} .

Considérons le système $\mathcal{S}' = n\mathcal{S}$ obtenu par réunion de n systèmes identiques à \mathcal{S} . Les grandeurs extensives relatives au nouveau système sont alors $X' = nX$ et $Y' = nY$. Leur rapport est donc inchangé par la réunion des systèmes,

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{nY}{nX} = \frac{Y}{X}.$$

Le rapport de deux grandeurs extensives est une grandeur intensive.

Cette propriété est utilisée pour définir une grandeur intensive à partir d'une grandeur extensive. Considérons un volume mésoscopique $\delta\tau$ (grandeur extensive) centré en un point M . La grandeur X extensive relative à ce petit système est δX . Nous pouvons définir une grandeur intensive

$$x_v = \frac{\delta X}{\delta\tau}$$

qui est la grandeur X volumique associée.

Si δm est la masse (grandeur extensive) de ce petit système, nous pouvons définir la grandeur intensive massique associée,

$$x = \frac{\delta X}{\delta m}.$$

À partir d'une grandeur extensive, nous pouvons donc construire des grandeurs intensives locales (car définies sur un volume mésoscopique autour d'un point M).

- ▶ Une grandeur extensive est définie sur la totalité du système.
- ▶ Une grandeur intensive est définie localement, en un point du système.

Remarques

1. Une grandeur intensive est « plus générale » qu'une grandeur extensive car elle ne dépend pas de la taille du système considéré.
2. Une grandeur extensive étant définie sur la totalité du système considéré, cela n'a pas de sens de parler de grandeur extensive uniforme.

EXERCICE CORRIGÉ 14.17.

Construction de grandeurs intensives

1. On note M et V la masse et le volume d'un système. Construire deux grandeurs intensives et donner leur nom.
2. Soit une solution aqueuse de volume V , contenant n moles d'un soluté. Construire une grandeur intensive usuellement utilisée en chimie.

Corrigé

1. Les grandeurs M et V sont extensives. Leur rapport permet de construire deux grandeurs intensives : la masse volumique $\rho = \frac{M}{V}$ (en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) et le volume massique $v = \frac{V}{M}$ (en $\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$).

Remarque Dans le cas où la répartition de masse n'est pas uniforme au sein du système, $\frac{M}{V}$ définit une masse volumique moyenne. Il faut considérer une volume

mésoscopique δV_P centré en un point P , de masse δM , pour définir la masse volumique locale $\rho(P) = \frac{\delta M}{\delta V_P}$. On définit ainsi un champ scalaire de masse volumique².

2. La quantité de matière est une grandeur extensive. On construit une grandeur intensive $c = \frac{n}{V}$ (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$), concentration molaire.

Il existe des grandeurs qui ne sont ni intensives, ni extensives. Reprenons l'exemple de la figure 14.3 page 386. Considérons comme grandeur la surface Σ de la frontière du système, c'est-à-dire de la surface des murs en contact avec l'extérieur. Cette grandeur n'est pas intensive : elle n'est clairement pas indépendante de la taille de la salle ! Elle n'est cependant pas extensive non plus : la surface de la frontière de la réunion des deux salles n'est pas égale à la somme des surfaces de chaque frontière : il faut retirer la cloison commune qui est intérieure au système total, et donc n'est plus considérée comme faisant parti de sa frontière. On parle d'écart à l'extensivité.

De façon plus générale, une grandeur définie sur la totalité du système ne sera pas rigoureusement extensive si elle est fonction de la surface de la frontière du système, c'est-à-dire si elle prend en compte des phénomènes physiques se produisant à travers la frontière du système (nous le verrons dans le chapitre traitant de l'énergie interne).

III.4. Bilan d'une grandeur extensive

Soit X une grandeur extensive relative à un système \mathcal{S} . On note $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$ la variation de cette grandeur entre deux instants t_1 et t_2 .

L'écriture générale du bilan d'une grandeur extensive fait apparaître deux causes de variation : un terme de création de cette grandeur au sein du système, et un terme d'échange à travers la frontière.

Propriété 14.18. Bilan d'une grandeur extensive

La variation $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$ d'une grandeur extensive X relative à un système \mathcal{S} entre les instants t_1 et t_2 s'écrit sous la forme du bilan

$$\Delta X = X_{\text{reçu}} + X_{\text{créé}}$$

où $X_{\text{reçu}}$ est la quantité de la grandeur X reçue par le système à travers sa frontière et $X_{\text{créé}}$ est la quantité de la grandeur X créée au sein du système.

Remarques

1. Les termes $X_{\text{reçu}}$ et $X_{\text{créé}}$ sont algébriques ; par convention³, ils sont positifs si la grandeur X est effectivement reçue par le système (par création en son sein ou par échange à travers la frontière).

2. On note avec le symbole Δ la variation d'une grandeur entre deux instants, qui s'écrit donc comme la différence de deux termes : $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$ (« grandeur finale » - « grandeur initiale »).

En revanche, les termes $X_{\text{reçu}}$ et $X_{\text{créé}}$ ne sont pas des variations de la grandeur X mais des quantités de grandeur X ; on les note donc⁴ sans le symbole Δ .

3. Cette convention est générale à la thermodynamique : on compte positivement ce qui est reçu par le système.

4. C'est le cas du travail W et du transfert thermique Q : voir chapitre 15 page 421.

Prenons un exemple qui certes s'écarte de la physique, mais est très concret : considérons comme système un pays (comme en thermodynamique, il est bien défini par sa frontière), et comme grandeur extensive N le nombre d'habitants⁵ en un instant donné.

On peut distinguer plusieurs causes de variation du nombre d'habitants : les naissances, les décès, l'immigration et l'émigration.

Entre deux instants t_1 et t_2 , le nombre d'habitants algébriquement « créés » au sein du pays s'écrit $N_{\text{créé}} = N_{\text{naissances}} - N_{\text{décès}}$. Le nombre d'habitants algébriquement reçus par le pays pendant cette durée s'écrit $N_{\text{reçu}} = N_{\text{immigrés}} - N_{\text{émigrés}}$.

Le bilan explicitant la variation $\Delta N = N(t_2) - N(t_1)$ s'écrit alors

$$\Delta N = N_{\text{reçu}} + N_{\text{créé}} = [N_{\text{immigrés}} - N_{\text{émigrés}}] + [N_{\text{naissances}} - N_{\text{décès}}].$$

On peut constater sur cet exemple que le terme $N_{\text{créé}}$ ne peut s'écrire comme la variation d'une grandeur : cela n'a aucun sens de dire que, par exemple, le nombre d'habitants nés pendant une année est égal au nombre d'habitants nés le 31 décembre moins le nombre d'habitants nés le 1^{er} janvier. Il s'agit bien de la quantité de personnes nées pendant la durée considérée.

Parmi les grandeurs extensives, on distingue une catégorie de grandeurs particulières : les grandeurs conservatives.

Définition 14.19. Grandeur extensive conservative

Une grandeur X extensive est dite conservative si son terme de production est nul en toutes circonstances :

$$X_{\text{créé}} = 0.$$

Le bilan d'une grandeur extensive conservative s'écrit alors sous la forme générale

$$\Delta X = X_{\text{reçu}}.$$

Si une grandeur conservative relative à un système varie, ce ne peut être que par échange avec l'extérieur à travers la frontière ; une telle grandeur ne peut être créée ou ne peut disparaître au sein du système.

La charge électrique Q et l'énergie \mathcal{E} sont des grandeurs extensives conservatives.

Remarques

1. Le caractère conservatif de l'énergie est l'objet du chapitre 16.
2. En physique des particules, il est possible de « faire disparaître » de la masse (annihilation de particules), qui n'est donc pas une grandeur conservative. Cependant, dans le cadre de la physique classique, on peut considérer la masse comme une grandeur conservative ; c'est dans ce contexte que seront écrits les bilans de masse en mécanique des fluides en seconde année.
3. Dans l'exemple du pays traité précédemment, le nombre d'habitants n'est pas une grandeur conservative. Il est important de préciser que le terme de création est nul *en toutes circonstances* pour une grandeur conservative : on peut toujours trouver une petite durée pour laquelle il n'y a ni naissance ni décès pour le pays considéré ; cela ne fait pas pour autant du nombre d'habitants une grandeur conservative.

5. On vérifie facilement l'extensivité de cette grandeur : elle est définie pour la totalité du pays, et additive lors de la réunion de deux pays.

IV. Équation d'état

IV.1. Équation d'état d'un fluide homogène

L'état d'équilibre d'un système thermodynamique est complètement défini par la donnée d'un petit nombre de grandeurs appelées **variables d'état**.

Définition 14.20. *Fluide homogène*

Un fluide est dit homogène lorsque ses grandeurs intensives, en particulier sa masse volumique, sont uniformes.

L'état d'un système constitué de n moles d'un fluide homogène est défini par la donnée de sa pression p , de sa température T et de son volume V .

Le volume étant une grandeur extensive, il est plus général d'utiliser le volume molaire $V_m = \frac{V}{n}$ qui est une grandeur intensive⁶ (rapport de deux grandeurs extensives) : le système fluide est décrit par les trois grandeurs d'état intensives (p, V_m, T) .

Définition 14.21. *Équation d'état*

Une équation d'état d'un système à l'équilibre est une relation entre ses variables d'état.

Pour un fluide homogène, elle est de la forme $f(p, V, T) = 0$.

IV.2. Exemple du gaz parfait

La pression cinétique est reliée à la vitesse quadratique moyenne des molécules selon $p = \frac{1}{3}n^*mu^2$; la température cinétique est reliée à cette vitesse quadratique par $mu^2 = 3k_B T$. On en déduit $p = n^*k_B T$.

En notant n la quantité de gaz en moles, le nombre de molécules vaut nN_A et la densité volumique s'écrit $n^* = \frac{nN_A}{V}$, d'où $p = \frac{nN_A}{V}k_B T = \frac{nR}{V}T$ avec $N_A k_B = R$.

Loi 14.22. *Équation d'état du gaz parfait*

La pression et la température du gaz parfait sont reliées par son équation d'état

$$pV = nRT$$

où V est le volume occupé par le gaz et n la quantité de gaz exprimée en moles.

Remarques

1. Dans cette relation, la pression est exprimée en pascals (Pa), la température en kelvins (K) et le volume en mètres cube (m^3).

2. L'équation d'état du gaz parfait peut s'écrire en n'utilisant que des grandeurs intensives : $pV_m = RT$, où $V_m = \frac{V}{n}$ est le volume molaire du gaz.

3. L'équation d'état du gaz parfait est universelle : elle ne fait intervenir aucune caractéristique propre au gaz, comme la masse ou la structure de ses molécules. En particulier, elle garde la même forme pour les gaz poly-atomiques⁷.

6. Une grandeur intensive est définie localement, ce qui permet de s'affranchir de la taille du système.

7. La pression cinétique et la température cinétique ne font intervenir que le mouvement de translation des atomes. Dans le cas d'un gaz poly-atomiques, ses molécules peuvent être animées de plus de mouvements de rotation ou de vibration (voir section V.2.1 page 392) qui n'affectent pas leur translation.

IV.3. Exemple d'une phase condensée indilatable et incompressible

Contrairement au gaz, constitué d'atomes ou de molécules de dimensions très faibles devant le libre parcours moyen, les phases condensées sont un état de la matière très peu compressible, dans lequel les distances interatomiques (ou intermoléculaires) sont de l'ordre de la taille des atomes (ou des molécules).

Définition 14.23. *Phase condensée incompressible et indilatable*

Une phase condensée est dite :

- ▶ *incompressible si son volume ne varie pas sous l'effet d'une variation de pression ;*
- ▶ *indilatable si son volume ne varie pas sous l'effet d'une variation de température.*

On peut donc considérer le volume V d'un tel corps comme constant ; il en est de même de son volume molaire $V_m = \frac{V}{n}$.

Loi 14.24. *Équation d'état d'une phase condensée indilatable et incompressible*

Le volume molaire d'une phase condensée indilatable et incompressible vérifie

$$V_m \simeq \text{cte.}$$

Dans la pratique, le volume molaire d'une phase condensée, comme un liquide, varie très faiblement avec la température et la pression. Par exemple, il faut une pression 200 fois plus élevée que la pression atmosphérique pour que volume molaire de l'eau liquide diminue de 1 %.

V. Énergie interne d'un système

V.1. Définition

Considérons un système thermodynamique macroscopiquement au repos dans un référentiel donné (la vitesse de toute partie mésoscopique de ce système est nulle). À l'échelle microscopique, les particules qui le constituent sont animées d'un mouvement d'agitation thermique désordonné conférant à chacune d'entre elles une énergie cinétique $e_{c,i} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$. La somme des énergies cinétiques des particules dans le référentiel où le système est repos définit l'énergie cinétique microscopique du système :

$$e_c = \sum_{i=1}^N e_{c,i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Définition 14.25. *Énergie cinétique microscopique*

L'énergie cinétique microscopique e_c d'un système est la somme des énergies cinétiques des particules qui le constituent dans le référentiel dans lequel le fluide est au repos.

Remarque S'il n'existe pas de référentiel dans lequel le système est au repos (c'est le cas pour un fluide siège de mouvements internes), on le découpe en volumes

mésoscopiques ; on peut alors définir l'énergie cinétique de chaque élément mésoscopique en se plaçant dans le référentiel dans lequel il est au repos. L'énergie cinétique microscopique du système est alors la somme des énergies cinétiques microscopiques des éléments mésoscopiques qui le constituent.

On admet le résultat suivant, que l'on peut montrer par des arguments de mécanique hors programme.

L'énergie cinétique microscopique du système ne dépend pas du référentiel d'étude.

Dans un système réel, il existe des interactions entre les particules qui le constituent : interactions électrostatiques le plus souvent.

En physique, on *postule* que toutes les interactions entre constituants élémentaires dérivent d'une énergie potentielle.

Ce postulat est très bien vérifié par toutes les expériences de physique des particules.

Définition 14.26. Énergie potentielle interne

L'énergie potentielle interne e_p d'un système est la somme des énergies potentielles de toutes les interactions entre les constituants microscopiques du système. Elle ne dépend pas du référentiel d'étude.

On peut alors définir l'énergie interne d'un système en prenant en compte toutes les contributions à l'échelle microscopique à son énergie.

Définition 14.27. Énergie interne

L'énergie interne U d'un système est la somme de son énergie cinétique microscopique (agitation thermique) et de son énergie potentielle interne :

$$U = e_c + e_p.$$

Elle est indépendante du référentiel d'étude.

V.2. Cas du gaz parfait monoatomique

V.2.1. Énergie interne du gaz parfait

Dans le modèle du gaz parfait, les particules du gaz sont sans interactions. L'énergie potentielle microscopique est donc nulle : $e_p = 0$.

L'énergie interne du gaz parfait se réduit donc à son énergie cinétique microscopique, soit

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{1}{2} m N u^2$$

compte tenu de la définition de la vitesse quadratique moyenne $u^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$. D'après la définition de la température cinétique, on en déduit

$$U = \frac{3}{2} N k_B T.$$

On obtient l'expression de l'énergie interne en fonction de la quantité du gaz exprimée en moles, $n = N \mathcal{N}_A$, en utilisant la relation $R = \mathcal{N}_A k_B$.

Propriété 14.28. Énergie interne du gaz parfait monoatomique

L'énergie interne de n moles d'un gaz parfait monoatomique ne dépend que de la température de ce gaz :

$$U(T) = \frac{3}{2}nRT.$$

Le facteur $\frac{3}{2}$ dans l'expression de l'énergie interne s'explique grâce au théorème de l'équipartition de l'énergie, dû principalement à James Clerk Maxwell : à chaque degré de liberté du mouvement des molécules, on associe l'énergie cinétique moyenne $\frac{1}{2}k_B T$ par molécule.

Un atome possède trois degrés de liberté : il peut se translater selon les trois directions de l'espace. L'énergie interne du gaz parfait monoatomique s'écrit alors

$$U = 3 \times \frac{1}{2}Nk_B T.$$

Le modèle du gaz parfait considère des particules rigoureusement ponctuelles, ce qui est adapté au cas des gaz monoatomiques. Dans le cas gaz constitué de molécules, il faut extrapoler le modèle du gaz parfait :

- les molécules sont considérées comme sans interaction, d'où $e_p = 0$;
- le terme d'énergie cinétique doit par contre être modifié pour prendre en compte les mouvements supplémentaires permis par la structure de la molécule.

Une molécule diatomique possède deux degrés de liberté supplémentaires, décrivant sa rotation selon les deux directions perpendiculaires à son axe. Le nombre total de degrés de liberté est alors 5, et l'énergie interne vaut $U = 5 \times \frac{1}{2}Nk_B T$.

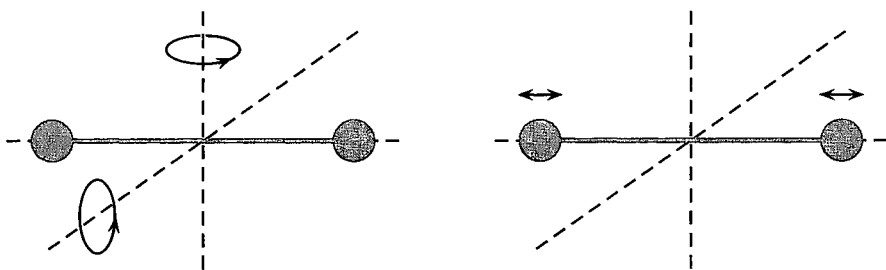


FIG. 14.4. Degrés de liberté de rotation et de vibration d'une molécule diatomique.

Si on tient compte du caractère non rigide de la liaison entre les deux atomes d'une molécule diatomique, il faut ajouter deux degrés de liberté supplémentaires (voir figure 14.4) pour décrire le mouvement de vibration de chaque atome. Le nombre total de degrés de liberté est alors 7, et l'énergie interne vaut $U = 7 \times \frac{1}{2}Nk_B T$.

Le nombre f de degrés de liberté à prendre en compte dans le cas d'un gaz parfait diatomique dépend de la température : aux « basses » températures ($T < T_{\text{rot}}$), seuls les mouvements de translation sont observés et $f = 3$; à des températures plus élevées ($T_{\text{rot}} < T < T_{\text{vib}}$), les mouvements de rotation sont observés et $f = 3 + 2 = 5$. Pour $T > T_{\text{vib}}$, les mouvements de vibration sont observés et $f = 5 + 2 = 7$.

Cet effet de seuil dans l'apparition de degrés de liberté supplémentaires dans le mouvement de la molécule est purement quantique : l'énergie thermique proportionnelle à $k_B T$ doit être supérieure à l'écart entre les niveaux d'énergie correspondant pour

exciter le degré de liberté correspond. Au-dessous de ce seuil, le degré de liberté est dit « gelé ».

Loi 14.29. Première loi de Joule

On dit qu'un système thermodynamique obéit à la première loi de Joule si son énergie interne ne dépend que de la température, $U(T)$.

► *Le gaz parfait obéit à la première loi de Joule.*

Remarque L'énergie interne du gaz parfait ne dépend que d'une grandeur d'état du système (sa température T) ; c'est donc une **fonction d'état**. Cette notion importante sera utilisée par la suite : la variation de l'énergie interne entre deux états ne dépend que de l'état initial et de l'état final, mais pas de ce qui s'est passé entre ces deux états.

V.2.2. Capacité thermique à volume constant du gaz parfait

Définition 14.30. Capacité thermique à volume constant

La capacité thermique à volume constant d'un système qui obéit à la première loi de Joule est définie par

$$C_v = \frac{dU}{dT}.$$

Elle s'exprime en $J \cdot K^{-1}$.

C'est une grandeur extensive, construite comme le rapport d'une grandeur extensive (U) sur une grandeur intensive (T).

Remarque La dénomination « à volume constant » ne sera pas justifiée dans le cadre du programme ; elle permet d'affiner la définition de C_v dans le cas (qui ne sera pas rencontré cette année) où l'énergie interne dépend aussi du volume du système : $U(T, V)$.

Propriété 14.31. Capacité thermique à volume constant du gaz parfait

La capacité thermique à volume constant du gaz parfait monoatomique a pour expression

$$C_v = \frac{3}{2}nR.$$

La capacité thermique à volume constant du gaz parfait diatomique dépend de la température, en fonction du nombre de degrés de liberté excités des molécules.

Température	$T < T_{rot}$	$T_{rot} < T < T_{vib}$	$T > T_{vib}$
Nombre de degrés de liberté	3	5	7
Énergie interne	$U = \frac{3}{2}nRT$	$U = \frac{5}{2}nRT$	$U = \frac{7}{2}nRT$
C_v	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$

La figure 14.5 représente l'allure de la variation de C_v en fonction de la température pour un gaz parfait monoatomique.

Dans le cas du diazote, on a $T_{rot} = 2,9$ K et $T_{vib} = 3374$ K. À très basse température, les degrés de liberté de rotation et de vibration sont gelés et la capacité thermique

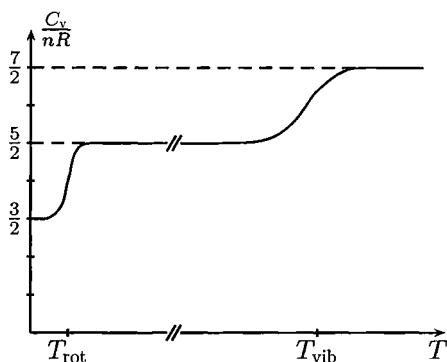


FIG. 14.5. Capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait monoatomique en fonction de la température.

à volume constant est identique à celle d'un gaz parfait monoatomique. Dès 3 K, on atteint un palier pour lequel $C_v = \frac{5}{2}nR$. La transition entre les paliers n'est pas brutale : à partir de 400 K, la capacité thermique augmente vers la valeur $C_v = \frac{7}{2}nR$.

Ordres de grandeur 14.32. Capacité thermique de l'air

Pour certains gaz diatomiques, comme le diazote, le dioxygène, on a $C_v = \frac{5}{2}nR$ aux températures usuelles.

Aux températures usuelles, la capacité thermique à volume constant de l'air est

$$C_v = \frac{5}{2}nR.$$

L'air est en effet principalement constitué de deux gaz diatomiques (O_2 et N_2).

On définit deux grandeurs intensives :

- ▶ la capacité thermique molaire à volume constant $C_{v,m} = \frac{C_v}{n}$ pour un système contenant n moles de molécules ;
- ▶ la capacité thermique massique à volume constant $c_v = \frac{C_v}{m}$ pour un système de masse m .

V.3. Cas d'une phase condensée indilatable et incompressible

Dans le cas général, l'énergie interne dépend de la température T et du volume V du corps. Si la phase condensée est supposée incompressible et indilatable, son volume reste constant ; son énergie interne ne dépend alors que de la température du corps.

Propriété 14.33. Énergie interne d'une phase condensée incompressible et indilatable

L'énergie interne molaire d'une phase condensée incompressible et indilatable ne dépend que de sa température, $U_m = U_m(T)$.

- ▶ Une telle phase condensée vérifie la première loi de Joule.

Cette propriété est approximative, comme le montre l'exemple du cuivre ci-après.

Un modèle statistique et quantique (le modèle de Debye) permet d'obtenir une expression de C_v en bon accord avec l'expérience. La courbe obtenue est présentée figure 14.6. Quand la température est supérieure à une valeur seuil T_D , appelée température de Debye du solide, la capacité thermique à volume constant peut être considérée comme constante. Par exemple, le cuivre est caractérisé par $T_D = 315$ K (soit environ 40 °C) ; on peut voir d'après la courbe $C_v(T)$ qu'il est raisonnable de considérer la capacité thermique du cuivre constante aux températures usuelles, approximation souvent faite dans les exercices.

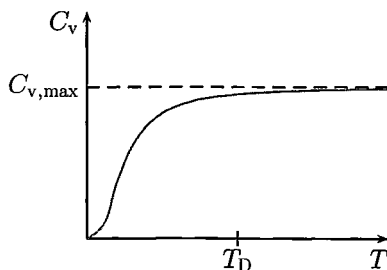


FIG. 14.6. Capacité thermique à volume constant d'un solide en fonction de la température (modèle de Debye).

VI. Les fluides réels

VI.1. Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables

Le modèle des phases condensées incompressibles et indilatables conduit à l'équation d'état $V_m = \text{cte}$. En réalité, les liquides sont très peu compressibles (leur volume molaire varie faiblement quand la pression varie) et très faiblement dilatables (leur volume molaire varie légèrement quand la température varie).

Au voisinage d'un état caractérisé par (T_0, p_0) , on peut adopter en première approximation comme équation d'état d'un liquide réel

$$V(T, p) = V(T_0, p_0) [1 + \alpha_0(T - T_0) - \chi_0(p - p_0)]$$

où α_0 et χ_0 sont des coefficients caractérisant la compressibilité et la dilatabilité du liquide.

EXERCICE CORRIGÉ 14.34. Dilatabilité et compressibilité de l'eau liquide

On donne l'équation d'état d'un liquide au voisinage du point (T_0, p_0) :

$$V(T, p) = V(T_0, p_0) [1 + \alpha_0(T - T_0) - \chi_0(p - p_0)] .$$

1. Quelles sont les dimensions des constantes α_0 et χ_0 ?
2. Comment peut-on interpréter ces constantes ? À quel signe peut-on s'attendre pour α_0 et pour χ_0 ?
3. Pour l'eau, dans les conditions usuelles de température et de pression, on donne en unité S.I. $\alpha_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ et $\chi_0 = 5 \cdot 10^{-10}$.

Déterminer la variation relative de volume consécutive à une augmentation de pression de 1 atmosphère, partant de la pression ambiante, la température étant maintenue constante. Comparer avec le gaz parfait.

Déterminer la variation relative de volume consécutive à une variation de température de 10 °C partant de $T_0 = 300$ K, la pression étant maintenue constante. Comparer avec le gaz parfait.

Corrigé

1. Le terme $\alpha_0(T - T_0)$ étant sans dimension, α_0 a la dimension de l'inverse d'une température et s'exprime en K^{-1} .

Le terme $\chi_0(p - p_0)$ étant sans dimension, χ_0 a la dimension de l'inverse d'une pression et s'exprime en Pa^{-1} .

2. Si la pression est maintenue constante, égale à p_0 , le volume du liquide est donné par

$$V(T, p_0) = V(T_0, p_0) [1 + \alpha_0(T - T_0)] .$$

Une variation $T - T_0$ de température entraîne donc une variation relative

$$\frac{V(T, p_0) - V(T_0, p_0)}{V(T_0, p_0)} = \alpha_0(T - T_0) .$$

Le coefficient α_0 renseigne sur la variation relative de volume due à une variation de température (ce coefficient est appelé « coefficient de dilatation isobare »). La plupart des corps se dilatent (leur volume augmente) lorsque leur température augmente, on prévoit $\alpha_0 > 0$.

Remarque Quelques corps présentent, sur un certain domaine de température, un coefficient $\alpha_0 < 0$; c'est en particulier le cas de l'eau entre 0 °C et 4 °C, qui voit son volume diminuer lorsque sa température augmente.

Si la température est maintenue constante égale à T_0 , l'équation d'état devient $V(T, p_0) = V(T_0, p_0) [1 - \chi_0(p - p_0)]$; la variation relative du volume due à une variation $p - p_0$ de pression est alors donnée par

$$\frac{V(T, p_0) - V(T_0, p_0)}{V(T_0, p_0)} = -\chi_0(p - p_0) .$$

Le coefficient χ_0 renseigne sur la variation relative de volume due à une variation de pression (ce coefficient est appelé « coefficient de compressibilité isotherme »). Les corps se comprimant (leur volume diminue) lorsque leur pression augmente, on a $\chi_0 > 0$. Ce résultat peut se démontrer en étudiant la stabilité du corps.

3. On note $V_0 = V(T_0, p_0)$.

Une variation de pression $p - p_0 = 10^5$ Pa entraîne une variation relative de volume $\left| \frac{V - V_0}{V_0} \right| = 5 \cdot 10^{-10} \times 10^5 = 5 \cdot 10^{-5} = 0,005$ %.

Le gaz parfait vérifiant $pV = nRT_0 = \text{cte}$ quand la température est constante, si la pression double (de 1 à 2 atmosphères), le volume est divisé par deux, soit une variation relative de 50 %. On peut considérer l'eau comme incompressible par rapport au gaz parfait.

Une variation de température $T - T_0 = 10$ K entraîne une variation relative de volume $\left| \frac{V - V_0}{V_0} \right| = 2 \cdot 10^{-4} \times 10 = 2 \cdot 10^{-3} = 0,2$ %.

Pour le gaz parfait, $V = \frac{nR}{p_0} T$, d'où $V - V_0 = \frac{nR}{p_0} (T - T_0)$. La variation relative de volume est $\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{nR}{p_0 V_0} (T - T_0) = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{10}{300} \approx 3$ %.

VI.2. Du gaz réel au gaz parfait

Le gaz parfait est caractérisé par l'équation d'état $pV = nRT$, soit $pV_m = RT$ où $V_m = \frac{V}{n}$ est le volume molaire.

En coordonnées de Clapeyron (p, V_m), les isothermes ont pour équation $pV_m = nRT_0$: ce sont des hyperboles⁸.

L'expérience montre que pour un gaz réel, pV_m n'est pas constant pour une isotherme (c'est-à-dire quand on fait varier la pression en maintenant la température constante).

On a vu que l'énergie interne d'un gaz est la somme de l'énergie potentielle d'interaction entre ses molécules et de son énergie cinétique microscopique : $U = e_c + e_p$. Dans le modèle du gaz parfait, les molécules sont sans interaction : $e_p = 0$. Un gaz réel pourra être considéré comme parfait si $e_p \ll e_c$. À quel type de conditions pratiques cette hypothèse pourra-t-elle être réalisée ?

L'énergie cinétique microscopique e_c est proportionnelle à la température T .

L'énergie potentielle d'interaction e_p est d'autant plus faible que la distance entre les molécules est grande (l'intensité de l'interaction entre deux molécules décroît lorsque leur distance augmente). Le terme e_p est donc d'autant plus petit que la densité (le nombre de molécules par unité de volume) $\frac{n}{V} = \frac{1}{V_m}$ est petit.

► À densité fixée, un gaz se rapproche du gaz parfait si la température est suffisamment élevée (le terme e_c devient grand devant e_p).

► À température fixée, un gaz se rapproche du gaz parfait si la pression est suffisamment faible (le terme e_p devient négligeable devant e_c). En particulier, pour tous les gaz :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{pV}{nT} = R.$$

Pour étudier l'écart d'un gaz par rapport au gaz parfait, on représente usuellement des isothermes dans les coordonnées d'Amagat (p, pV), comme sur la figure 14.7. Dans le cas du gaz parfait, $pV = nRT_0 = \text{cte}$: les isothermes sont des droites horizontales. Il est donc plus aisé de voir si une courbe s'écarte d'une droite horizontale plutôt que d'une hyperbole, qui est la représentation d'une isotherme dans les coordonnées de Clapeyron (p, v).

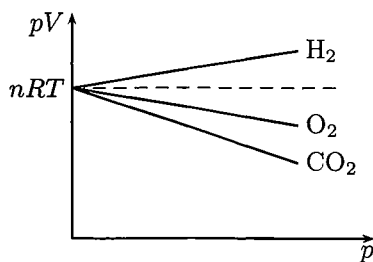


FIG. 14.7. Diagramme d'Amagat de gaz réels à basse pression et à 273 K, le modèle du gaz parfait est en pointillé.

8. Une hyperbole équilatère a pour équation $xy = \text{cte}$ dans le plan (x, y) .

VII. Corps pur diphasé en équilibre

VII.1. Corps pur sous plusieurs phases

Définition 14.35. *Corps pur*

Un corps est dit pur lorsqu'il est constitué d'un seul type de constituant chimique.

Un constituant chimique est une entité représentée par une formule chimique (atome, ion, molécule, cristal).

Par exemple, l'eau liquide est un corps pur (H_2O est une molécule), de même qu'un système composé d'eau liquide et de glace. Le sel de cuisine $NaCl$ est un cristal, donc un corps pur.

On parle de corps pur par opposition aux mélanges. Par exemple, un liquide contenant de l'eau et de l'alcool est un mélange (deux types de molécules). L'étude des changements d'état des mélanges est beaucoup plus complexe que celle des corps purs : les températures de fusion et d'ébullition d'un mélange dépendent des proportions du mélange. Cette difficulté explique la restriction du programme à l'étude des corps purs.

Définition 14.36. *Phase*

Une phase d'un corps pur est une région de l'espace dans laquelle toutes les grandeurs intensives décrivant le corps pur sont des fonctions continues des coordonnées de l'espace.

Exemples

- ▶ De l'eau liquide constitue une unique phase car la masse volumique, la température et la pression y sont des fonctions continues de l'espace.
- ▶ Un système constitué d'eau liquide et d'un glaçon est un système **diphasique**, c'est-à-dire constitué de deux phases. En effet, le champ de masse volumique subit une discontinuité à l'interface liquide-glace.
- ▶ Deux liquides non miscibles⁹, comme l'eau et l'huile, forment un système diphasique : on observe une couche d'huile et une couche d'eau distinctes ; la masse volumique subit une discontinuité quand on passe d'une couche à une autre.

Remarque Quand on mélange énergiquement un peu d'huile dans de l'eau, on obtient un liquide qui semble macroscopiquement homogène ; ce n'est pourtant pas un système constitué d'une seule phase. On a formé une émulsion, dans laquelle l'huile est dispersée dans la phase aqueuse (l'eau) sous forme de minuscules gouttelettes. Les émulsions sont fréquemment rencontrées dans le domaine alimentaire (vinaigrette, mayonnaise) et dans le domaine des cosmétiques.

VII.2. Les états de la matière

La matière usuelle peut exister sous trois phases : solide, liquide et gaz.

État solide Les atomes ou molécules de la matière ne font que vibrer autour d'une position moyenne (agitation thermique). En moyenne dans le temps, ils sont immobiles les uns par rapport aux autres. Un solide a donc une forme constante¹⁰.

9. Qui ne se mélangent pas.

10. Un solide peut se dilater ou se contracter si la température varie ou sous l'effet d'une contrainte mécanique.

États liquide Les atomes ou molécules sont libres de se déplacer les uns par rapport aux autres, mais restent quasiment au contact : les interactions entre elles demeurent importantes. Un liquide peut s'écouler, c'est-à-dire prendre des déformations aussi grandes que l'on veut sous l'effet de forces aussi petites que l'on veut. La matière à l'état liquide est très peu compressible.

État gazeux Les interactions entre les atomes ou molécules sont très faibles (nulles dans le modèle du gaz parfait), les distances interatomiques (ou intermoléculaires) sont très grandes devant les dimensions atomiques (ou moléculaires). Un gaz occupe tout le volume disponible. La matière à l'état gazeux est très compressible.

Les états liquide et gazeux constituent l'état fluide, caractérisé par l'aptitude qu'a la matière à s'écouler.

Les états solide et liquide sont appelées phases condensées, car la matière est très peu compressible dans ces états.

Quand un corps pur change de phase, on dit indifféremment qu'il subit un changement d'état (voir figure 14.8), un changement de phase ou une transition de phase.

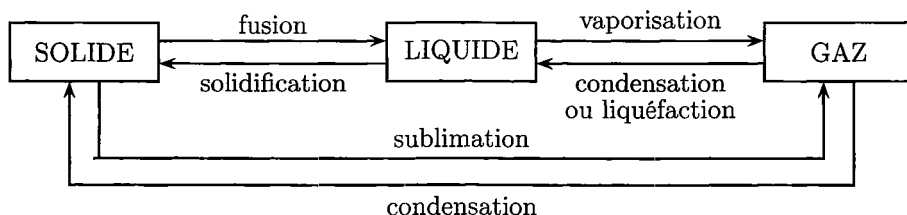


FIG. 14.8. Nomenclature des transitions de phase.

Remarques

1. Lorsqu'une solidification se fait avec formation de cristaux, on parle de cristallisation.
2. Le mot condensation fait référence à une évolution vers une phase condensée (liquide ou solide). Par exemple dans la vie courante, on parle de condensation d'eau lors de la formation de buée sur une vitre. Pour éviter la confusion entre les deux types de condensation, on parle parfois de « condensation solide » pour la transition inverse de la sublimation.

VII.3. Diagramme de phases (p, T)

On considère un récipient étanche contenant un constituant chimique pur. La température y est imposée par un thermostat et la pression¹¹ qui y règne est réglable (grâce à un piston faisant varier le volume du récipient). Le système considéré est le corps pur contenu dans le récipient (système fermé). À chaque changement de T ou p que l'on effectue, on attend que l'équilibre s'établisse. Selon les valeurs de (p, T) choisies, on constate expérimentalement qu'il peut exister une ou deux phases lorsque l'équilibre est atteint.

11. Pour parler de LA pression qui règne dans le récipient, il faut que celle-ci soit uniforme. Nous négligeons donc ici l'influence de la gravité qui est responsable de la non-uniformité du champ de pression à cause de la loi de la statique des fluides $-\text{grad } p + \rho \vec{g} = \vec{0}$, qui sera vue ultérieurement dans la filière PCSI. Cette approximation est légitime tant que le récipient est de petite taille.

Par exemple :

- ▶ à $p = 1,013$ bar et $T = 30$ °C, l'eau est entièrement liquide (une seule phase) ;
- ▶ à $p = 1,013$ bar et $T = 100$ °C, l'eau liquide et l'eau vapeur coexistent (deux phases) dans des proportions qui dépendent du volume ;
- ▶ à $p = 1,013$ bar et $T = 120$ °C, l'eau est entièrement sous forme gazeuse (une seule phase).

Définition 14.37. Vapeur sèche, vapeur saturante

Lorsque la phase gazeuse ne cohabite pas avec une des deux autres phases correspondantes, on parle de **gaz** ou de **vapeur sèche**.

Lorsque la phase gazeuse est en équilibre avec le liquide ou le solide, on parle de **vapeur saturante**.

Remarque Dans tous les cas, on peut parler indifféremment de vapeur ou de gaz. De même, on parle d'équilibre liquide-gaz ou d'équilibre liquide-vapeur.

Expérimentalement, on peut balayer le plan (p, T) et tracer le **diagramme de phase** du corps pur étudié : on indique sur le diagramme la nature de la phase ou des phases existant au point (p, T) considéré.

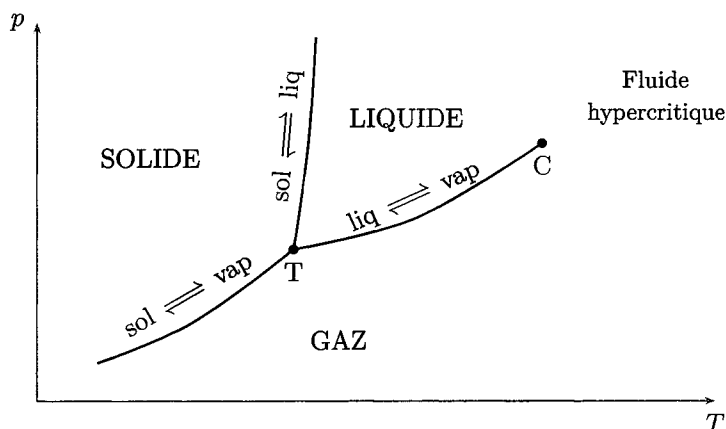


FIG. 14.9. Allure du diagramme de phases d'un corps pur en coordonnées (p, T) .

De l'allure (à connaître) du diagramme représenté figure 14.9, il ressort que :

- ▶ le domaine du solide se trouve aux basses températures et aux hautes pressions (si on abaisse la température d'un corps pur tout en le comprimant, ses molécules constitutives se regroupent et forment un solide) ;
- ▶ à l'opposé, le domaine du gaz se trouve aux hautes températures et basses pressions ;
- ▶ le liquide ne peut être que dans le troisième domaine.

Chaque domaine représentant une phase pure (liquide, solide ou gaz) correspond à une région du plan (p, T) . Cela signifie que l'on peut modifier p et T indépendamment l'une de l'autre. Puisque l'opérateur peut modifier deux variables intensives indépendantes

sans modifier la nature du système, on dit que ces domaines sont **divariants**¹² : l'opérateur a deux degrés de liberté.

Courbes d'équilibre ou courbes de saturation

Chaque domaine est séparé de son voisin par une courbe que l'on peut appeler **courbe d'équilibre** où deux phases coexistent. On distingue trois courbes :

- ▶ courbe d'équilibre liquide \rightleftharpoons vapeur ;
- ▶ courbe d'équilibre liquide \rightleftharpoons solide ;
- ▶ courbe d'équilibre solide \rightleftharpoons vapeur.

Les variables d'état T et p ne sont pas indépendantes l'une de l'autre lorsqu'il y a équilibre entre deux phases.

La coexistence de deux phases en équilibre se traduit par une relation $p(T)$ représentée par une courbe dans le diagramme de phases (p, T) .

Les courbes d'équilibre sont qualifiées de domaines **monovariants** car l'opérateur ne peut choisir qu'une des variables p ou T , l'autre variable étant alors imposée par l'existence de l'équilibre entre les deux phases.

Définition 14.38. Pression de vapeur saturante

La pression d'une vapeur en équilibre avec la phase condensée du corps pur à une température T est appelée pression de vapeur saturante, $p_{\text{sat}}(T)$.

La courbe représentant $p_{\text{sat}}(T)$ dans le diagramme (p, T) est appelée courbe de saturation, ou courbe d'équilibre.

À une température T donnée :

- ▶ si la pression du gaz est telle que $p < p_{\text{sat}}(T)$, on est en présence de vapeur sèche ;
- ▶ si la vapeur est saturante (coexistence du liquide), on a $p = p_{\text{sat}}(T)$;
- ▶ on ne peut observer de vapeur pour $p > p_{\text{sat}}(T)$: seule la phase liquide existe.

La pression de vapeur saturante apparaît donc comme la pression maximale de la vapeur sèche.

Définition 14.39. Point triple

Le point triple T est l'unique point où les phases solide, liquide et vapeur coexistent.

Il est situé à l'intersection des trois courbes d'équilibre solide-liquide, solide-vapeur et liquide-vapeur.

Le point triple de l'eau a pour coordonnées $T_{\text{T}} = 273,16$ K et $p_{\text{T}} = 611$ Pa. Il est utilisé pour définir l'échelle Celsius de température.

Définition 14.40. Point critique

Le point critique C est l'extrémité de la courbe d'équilibre liquide-vapeur au-delà de laquelle on ne peut plus observer de transition liquide-vapeur.

Au-delà du point critique, on parle de fluide hypercritique ou supercritique.

Le fluide hypercritique a des propriétés intermédiaires entre un gaz et un liquide ; on ne peut plus distinguer les deux phases gazeuse et liquide, qui se confondent alors en une seule phase.

12. Une région du plan est bien une portion d'espace à deux dimensions.

Le point critique de l'eau a pour coordonnées $T_C = 647 \text{ K} = 374 \text{ °C}$ et $p_C = 221 \text{ bar}$.

Remarque Le physicien et chimiste britannique Thomas Andrews (1813-1885) découvrit l'existence du point critique du dioxyde de carbone ($T_C \simeq 31 \text{ °C}$ et $p_C \simeq 74 \text{ bar}$) en constatant que, pour $T > T_C$, le CO_2 ne pouvait plus être liquéfié par compression. Il postula alors l'existence d'un point critique pour tous les gaz. Pour beaucoup de gaz, le point critique est très éloigné des conditions ambiantes. Par exemple, il fallut attendre 1878 pour que l'oxygène puisse être liquéfié car $p_C \simeq 50 \text{ bar}$ et $T_C \simeq -119 \text{ °C}$, ce qui représentait une très basse température à atteindre.

Courbe d'équilibre liquide-solide

La courbe d'équilibre liquide-solide est presque verticale (pente très grande en valeur absolue), ce qui traduit le fait que la pression a un rôle en général peu important sur la température de fusion d'un solide. On peut démontrer (voir exercice) que la pente de cette courbe est du signe de $v_{\text{liq}} - v_{\text{sol}}$, la différence des volumes massiques du liquide et du solide. Pour la plupart des corps purs, cette pente est positive car le liquide est moins dense que le solide. Cependant l'eau fait figure d'exception car l'eau liquide est plus dense que la glace¹³, donc $v_{\text{liq}} - v_{\text{sol}} < 0$ et la pente de la courbe $\text{liq} \rightleftharpoons \text{sol}$ est négative.

VII.4. Cas de l'équilibre liquide-vapeur

VII.4.1. Diagramme de Clapeyron (p, v)

Afin d'étudier l'équilibre liquide-vapeur d'un corps pur, on dispose d'un récipient de volume V variable, thermostaté à une température T réglable (voir figure 14.10). Ce récipient contient au départ une certaine masse m d'eau et les conditions sont telles que l'eau est entièrement sous forme de gaz.

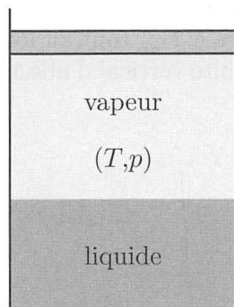


FIG. 14.10. Étude de l'équilibre liquide-vapeur. Thermostat à T .

On comprime alors ce gaz très lentement pour que l'équilibre avec le thermostat à la température T ait toujours lieu (évolution quasi stationnaire). On mesure la pression tout au long de l'opération. On représente p en fonction du volume massique moyen (entre les deux phases) $v = \frac{V}{m}$.

13. La faible densité de la glace vient de sa structure cristalline. Les liaisons hydrogène (de nature essentiellement électrostatique) entre les molécules d'eau sont assez intenses. Elles imposent dans le cristal de glace une disposition des molécules d'eau qui rend le cristal peu compact (beaucoup de vide entre les molécules). La densité de la glace sous 1 bar est 0,917.

Définition 14.41. Diagramme de Clapeyron

Le diagramme de Clapeyron d'un système est la représentation de la pression en fonction du volume massique, $p(v)$.

L'évolution de la pression en fonction du volume massique est représentée figure 14.11.

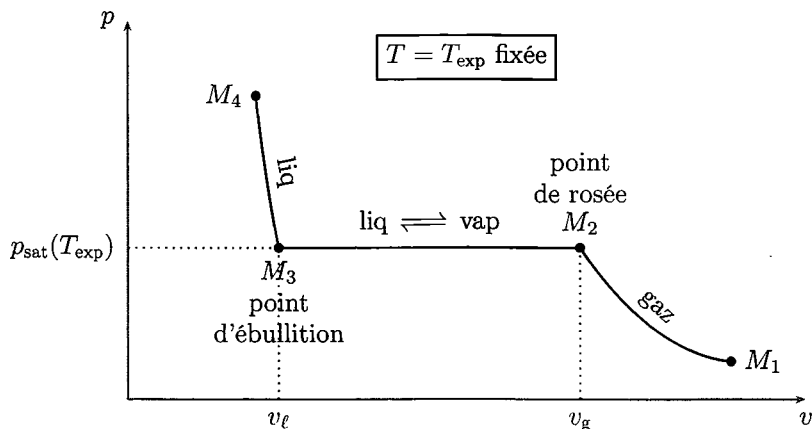


FIG. 14.11. Évolution dans le diagramme de Clapeyron de la pression lors d'une compression isotherme d'un corps pur.

Pour bien comprendre les différentes étapes de cette évolution, on représente figure 14.12 le chemin suivi par le point figuratif du système en coordonnées (p, T) . La température étant constante, fixée à T_{exp} tout au long de l'expérience, l'évolution est représentée par un segment de droite vertical d'abscisse T_{exp} dans le diagramme (p, T) .

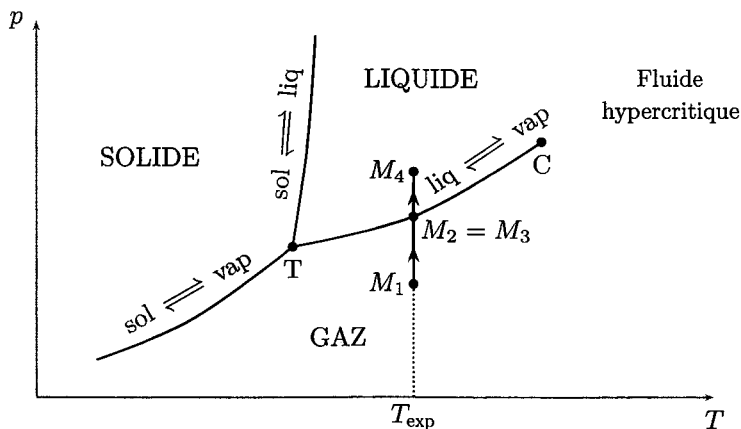


FIG. 14.12. Allure du diagramme de phases d'un corps pur en coordonnées (p, T) .

Étape $M_1 \rightarrow M_2$

Au départ (point M_1), l'eau est complètement sous forme gazeuse. Il s'agit donc de la compression isotherme d'un gaz, que l'on considère comme parfait ; la pression augmente jusqu'à atteindre la pression de vapeur saturante $p_{\text{vap}}(T_{\text{exp}})$ au point M_2 . L'évolution $M_1 \rightarrow M_2$ est représentée par une portion d'hyperbole en diagramme de Clapeyron (pour l'évolution isotherme d'un gaz parfait, on a $pV = nRT = \text{cte}$, soit $pv = \text{cte}$, qui est l'équation d'une hyperbole).

Étape $M_2 \rightarrow M_3$

Si l'on diminue le volume du récipient, on ne peut plus être en présence de gaz seul : la pression serait alors supérieure à p_{sat} , ce qui est incompatible avec l'existence d'une vapeur sèche. On observe alors une liquéfaction progressive : le corps pur passe de la phase gazeuse à la phase liquide ; tout au long de cette évolution, les phases vapeur et liquide coexistent : la pression reste alors constante, égale à la pression de vapeur saturante.

Dans le diagramme de Clapeyron, cette évolution est représentée par un palier de liquéfaction. Le point M_2 , qui correspond à l'apparition de la première goutte de liquide, est appelé **point de rosée**.

En coordonnées (p, T) , le point représentatif du système reste inchangé (sur la courbe de vaporisation) tant que les deux phases coexistent.

Étape $M_3 \rightarrow M_4$

En M_3 , tout le gaz a été transformé en liquide. Une diminution du volume se traduit alors par une augmentation de pression ($p > p_{\text{sat}}$). On a vu (section VI.1 page 396) qu'un liquide est faiblement compressible ; une petite diminution de volume se traduit alors par une augmentation importante de la pression. La compression isotherme du liquide est représentée par une courbe de pente très importante dans le diagramme de Clapeyron.

Le point M_3 , extrémité gauche du palier de liquéfaction, est appelé **point d'ébullition**. Pour comprendre ce nom, décrivons la manipulation lorsqu'elle est effectuée dans le sens $M_4 \rightarrow M_3 \rightarrow M_2$. De M_4 à M_3 , le liquide pur se détend : la pression diminue et atteint p_{sat} au point M_3 . À partir de ce point, le liquide coexiste avec la vapeur ; on parle de **liquide saturant**. Le point M_3 correspond à l'apparition des premières bulles de vapeur : c'est le phénomène d'ébullition.

Remarques

1. Le palier de liquéfaction est représenté par un unique point sur le diagramme (p, T) . Quand on se déplace le long de ce palier, la proportion des phases liquide et vapeur évolue ; le diagramme de phases (p, T) ne permet donc pas de savoir quelles sont les proportions de chaque phase d'un corps pur lorsqu'il y a équilibre.
2. Qualitativement, on peut découper par la pensée chaque petit morceau de l'évolution $M_2 \rightarrow M_3$ en deux étapes.

► L'ensemble du système {liquide + gaz} étant en équilibre, il a la pression $p = p_{\text{sat}}(T)$. L'opérateur enfonce un tout petit peu le piston, ce qui fait légèrement augmenter la pression, qui devient alors supérieure à $p_{\text{sat}}(T)$.

► Le système condense alors quelques molécules d'eau pour faire redescendre la pression de la phase gazeuse à sa valeur maximale autorisée qui est $p_{\text{sat}}(T)$.

Si l'opérateur procède de façon assez lente, ces deux étapes se font toujours simultanément tout le long du palier de liquéfaction¹⁴.

14. Si l'opérateur veut aller trop vite, alors le système n'a pas le temps d'effectuer la condensation au fur et à mesure : le système est hors équilibre et $p > p_{\text{sat}}(T)$.

3. De même, partant du point M_3 , lorsque l'opérateur augmente encore le volume, la pression passe en dessous de p_{sat} . Le liquide devient thermodynamiquement instable et essaie de passer en phase gaz pour faire remonter la pression jusqu'à p_{sat} : c'est le phénomène d'ébullition au cours duquel des bulles se forment partout dans la phase liquide. Si on procède vite, l'ébullition est violente. En effectuant la détente de façon très lente, mais cela demande beaucoup de soin, on peut atténuer ce phénomène d'ébullition.

En recommençant cette expérience pour différentes valeurs de la température, on peut tracer une famille de courbes isothermes appelées **isothermes d'Andrews**. L'allure des isothermes d'Andrews dans le diagramme de Clapeyron (p, v) (à connaître) est donnée sur la figure 14.13.

Définition 14.42. Courbe de saturation

La courbe de saturation est définie par l'ensemble des extrémités des paliers de liquéfaction. Elle est constituée de deux parties :

- ▶ la courbe de rosée, joignant les points de rosée (partie droite) ;
- ▶ la courbe d'ébullition, joignant les points d'ébullition (partie gauche).

Le domaine sous la courbe de saturation correspond à la coexistence du liquide et de la vapeur (vapeur saturante) à l'équilibre.

Au-dessous de l'isotherme critique T_C , la partie à droite de la courbe de rosée correspond au domaine de la vapeur sèche, et la partie à gauche de la courbe d'ébullition correspond au domaine du liquide.

Au-dessus de l'isotherme critique se trouve le domaine du fluide hypercritique.

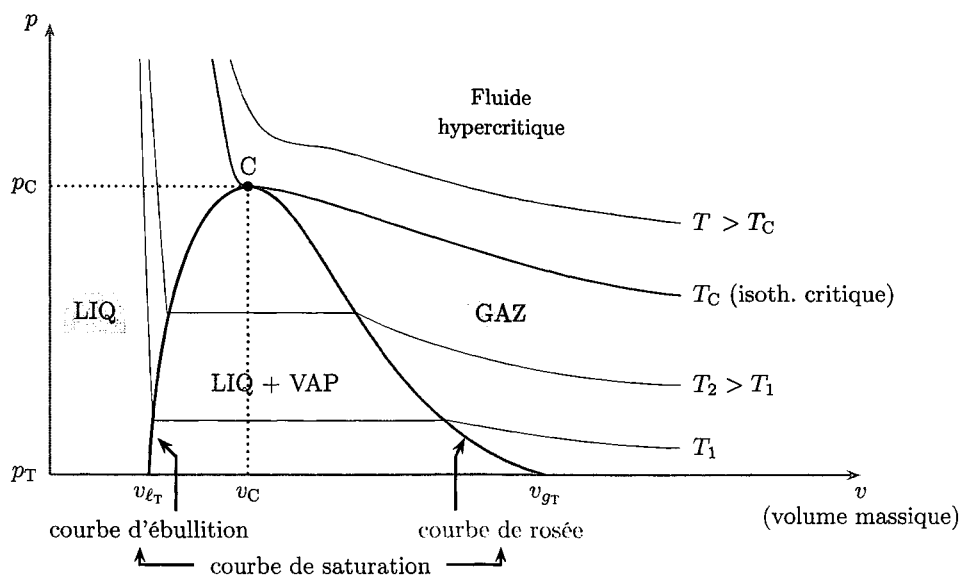


FIG. 14.13. Famille d'isothermes d'Andrews pour un corps pur.

Remarque Sur la figure 14.13, la portion de l'axe des abscisses sous la courbe de saturation est représentée dans le diagramme (p,T) par le point triple T (température T_T , pression p_T). Le domaine situé au-dessous correspond à la coexistence du solide et du liquide.

Application au stockage des fluides Quand un fluide est dans état d'équilibre liquide-vapeur à une température T donnée, la pression du gaz reste constante, égale à la pression de vapeur saturante $p_{\text{sat}}(T)$ tant que les deux phases sont en présence. Cette propriété est mise à profit pour stocker les fluides.

Par exemple, pour le butane, $p_{\text{sat}} = 2,1$ bar à 20°C . Une bouteille de butane contient un mélange diphasé liquide-vapeur. À la température ambiante, la pression y est supérieure à la pression atmosphérique : on peut donc soutirer du gaz sans utiliser de dispositif d'extraction (pompe). Au fur et à mesure que du gaz est consommé, une partie de la phase liquide se vaporise pour maintenir la pression constante dans la bouteille, égale à p_{sat} .

Une augmentation de température accidentelle modifiera la pression jusqu'à la pression de vapeur saturante à cette nouvelle température. Par exemple dans le cas du butane, $p_{\text{sat}}(30^\circ\text{C}) = 2,8$ bar et $p_{\text{sat}}(50^\circ\text{C}) = 4,9$ bar. L'augmentation de pression est nettement plus faible que s'il on était en présence de la phase liquide seule.

VII.4.2. Titre en vapeur

Si un point représentatif sur la courbe d'équilibre liquide-vapeur dans le diagramme (p,T) ne permet pas de déterminer les proportions de chaque phase du corps pur étudié, il n'en est pas de même dans le diagramme de Clapeyron : chaque point d'un palier d'équilibre correspond à des proportions fixées de liquide et de vapeur.

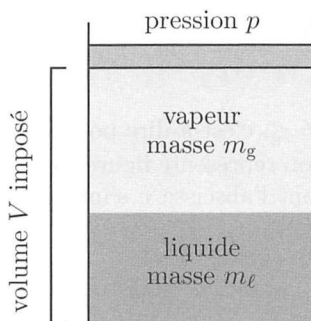


FIG. 14.14. Système diphasé à l'équilibre. Thermostat à T_{exp} .

Le système étudié, représenté figure 14.14, est décrit par les notations suivantes :

- ▶ M , la masse (connue) du système {liquide + solide} de corps pur considéré ;
- ▶ V , le volume (connu) du système ;
- ▶ v_ℓ et v_g , les volumes massiques respectifs du liquide saturant et de la vapeur saturante (qui sont des données) ;
- ▶ m_ℓ et m_g , les masses respectives de liquide et de vapeur (que l'on cherche).

Déterminer la composition du système revient à déterminer les deux inconnues m_ℓ et m_g ; deux équations indépendantes sont donc nécessaires.

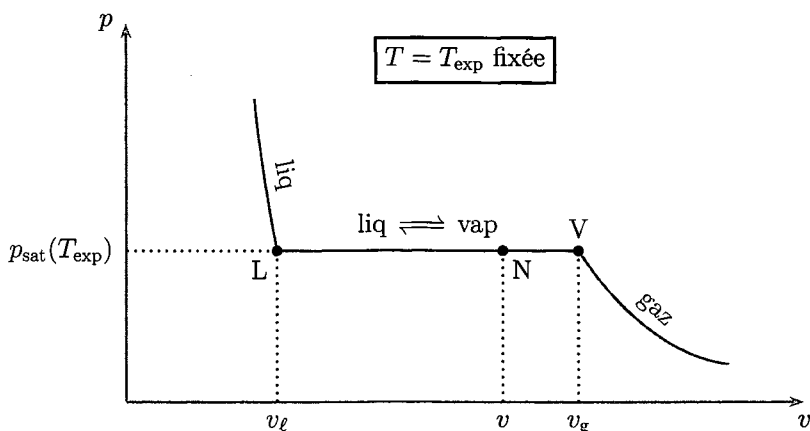


FIG. 14.15. Composition d'un système diphasé dans le diagramme de Clapeyron.

La première est l'expression du volume total du système,

$$m_\ell v_\ell + m_g v_g = V,$$

la seconde est l'expression de la masse totale du système,

$$m_\ell + m_g = M.$$

La solution de ce système est

$$m_g = \frac{V - Mv_\ell}{v_g - v_\ell} \quad \text{et} \quad m_\ell = \frac{V - Mv_g}{v_\ell - v_g}.$$

Cette solution existe¹⁵ si $v_\ell \neq v_g$, c'est-à-dire pour $T < T_C$.

Sur le diagramme de Clapeyron représenté figure 14.15, l'état du système diphasé est représenté par le point N , dont l'abscisse v s'interprète comme le volume massique moyen du système :

$$v = \frac{V}{M}.$$

La température étant fixée à T_{exp} , l'évolution du système suit le palier LV , où L est le point d'ébullition et V le point de rosée. Avec $V = Mv$, les expressions de m_g et m_ℓ s'écrivent

$$m_g = M \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} \quad \text{et} \quad m_\ell = M \frac{v - v_g}{v_\ell - v_g}.$$

On définit le titre massique en vapeur $x_g = \frac{m_g}{M}$. Par construction, $0 \leq x_g \leq 1$, où $x_g = 1$ correspond à la limite entre la vapeur sèche et la vapeur saturante (point V du palier) et $x_g = 0$ au liquide pur (point L du palier). D'après l'expression de m_g , on obtient

$$x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell}.$$

15. Le dénominateur de chaque expression ne doit pas s'annuler.

La composition du système peut se déterminer de la lecture des abscisses v_ℓ , v et v_g des points L , N et V du palier correspond à la température du système.

Loi 14.43. Règle des moments

Le titre massique en vapeur d'un mélange diphasé liquide-vapeur peut se déduire graphiquement à partir du diagramme de Clapeyron ; son expression est donnée par la règle des moments

$$x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{LN}{LV}.$$

Le titre massique en liquide est donné par¹⁶ $x_\ell = 1 - x_g$, soit

$$x_\ell = 1 - \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{v_g - v}{v_g - v_\ell} = \frac{VN}{VL}.$$

Remarques

1. Les titres massiques sont identiques aux titres molaires : le corps pur ayant la même masse molaire M_{cp} sous les deux phases, les quantités de matière sont données par $n_g = \frac{m_g}{M_{cp}}$ (vapeur) et $n_\ell = \frac{m_\ell}{M_{cp}}$ (liquide). En notant $n = n_g + n_\ell = \frac{M}{M_{cp}}$ la quantité de matière totale du corps pur, la fraction molaire de la vapeur s'écrit

$$x_{m,g} = \frac{n_g}{n} = \frac{m_g}{M} = x_g.$$

On vérifie de même que $x_{m,\ell} = x_\ell$.

2. On peut écrire les fractions massiques en fonction des mesures algébriques des segments sur le palier :

$$x_g = \frac{\overline{NL}}{\overline{VL}} \quad \text{et} \quad x_\ell = \frac{\overline{VN}}{\overline{VL}}.$$

On a donc $\overline{VL} = \frac{\overline{NL}}{x_g} = \frac{\overline{VN}}{x_\ell}$, d'où

$$x_\ell \overline{NL} + x_g \overline{NV} = 0. \quad (14.1)$$

La règle des moments est nommée ainsi par analogie avec l'équation de l'équilibre d'une balance (voir figure 14.16).

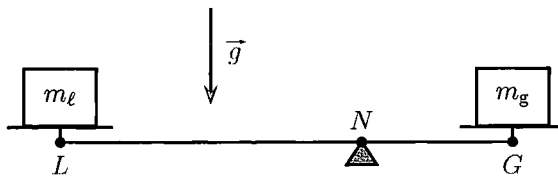


FIG. 14.16. Équilibre d'une balance et règle des moments.

L'équilibre se traduit en écrivant que la somme des moments des forces par rapport à l'axe passant par N est nulle : $m_g \overline{NG} + m_\ell \overline{NL} = 0$. À une division par la masse totale M près et au facteur g de pesanteur près, c'est exactement l'expression (14.1). Historiquement, la règle des moments s'appelle aussi règle des leviers.

16. Il est défini par $x_\ell = \frac{m_\ell}{M}$; il suffit d'écrire $m_\ell + m_g = M$ pour obtenir la relation donnée.

VIII. Équilibre liquide-vapeur de l'eau en présence d'une atmosphère inerte

Ébullition d'un corps pur seul

Jusqu'à présent, le système étudié était un corps pur, placé seul dans un réservoir clos. On a vu qu'à une température T_{exp} donnée, on ne pouvait observer l'équilibre entre le liquide et la vapeur que si la pression est égale à la pression de vapeur saturante du corps pur : $p_{\text{exp}} = p_{\text{sat}}(T_{\text{exp}})$, cet état est représenté par un point situé sur la courbe de saturation dans le diagramme (p, T) .

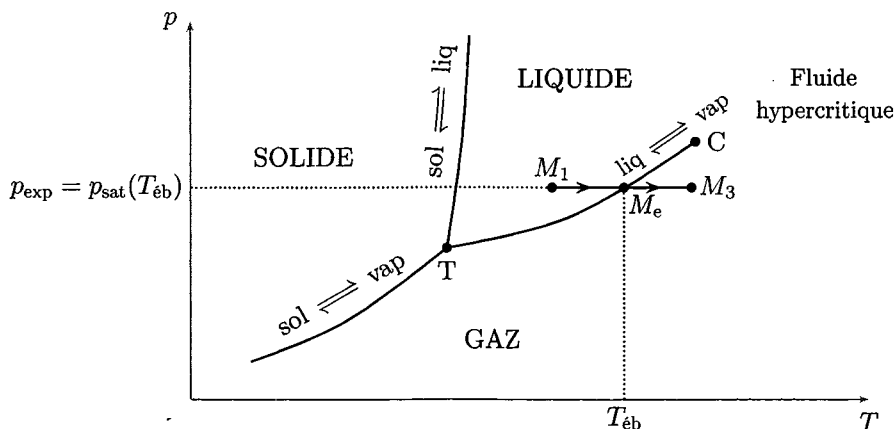


FIG. 14.17. Ébullition d'un corps pur seul.

Considérons un corps pur seul, dans la phase liquide, représenté par le point M_1 sur la figure 14.17.

► Si on augmente la température en maintenant la pression p_{exp} constante, l'ébullition commence quand la température atteint la valeur $T_{\text{éb}}$ pour laquelle $p_{\text{exp}} = p_{\text{sat}}(T_{\text{éb}})$ (point M_e). On observe alors une ébullition du liquide. Le point figuratif reste M_1 tant qu'il reste du liquide. Quand tout le liquide a disparu, on observe bien une augmentation de la température de la vapeur sèche : le point représentatif se déplace dans le domaine du gaz selon un segment horizontal (la pression est maintenue constante) jusqu'au point M_3 .

► Si on diminue la pression en maintenant la température T_{exp} constante, des bulles de vapeur apparaissent dans le liquide quand la pression atteint la pression de vapeur saturante à la température considérée : $p = p_{\text{sat}}(T_{\text{exp}})$ (point M'_e de la figure 14.18). Ce cas particulier d'ébullition est appelé cavitation¹⁷. Quand tout le liquide a disparu, on observe bien une diminution de la pression de la vapeur sèche : le point représentatif se déplace dans le domaine du gaz selon un segment vertical (la température est maintenue constante) jusqu'au point M_2 .

Remarque On montre que la pression au sein d'un fluide diminue quand la vitesse de l'écoulement augmente ; le phénomène de cavitation est observé dans les sillages des hélices de navire ou de sous-marins, ce qui pose plusieurs problèmes : l'implosion des bulles détériore les hélices et est la source d'une émission sonore pouvant être gênante dans le cas d'un sous-marin militaire que l'on souhaite furtif.

17. Ce phénomène sera étudié plus en détail en mécanique des fluides, dans les filières PC et PSI.

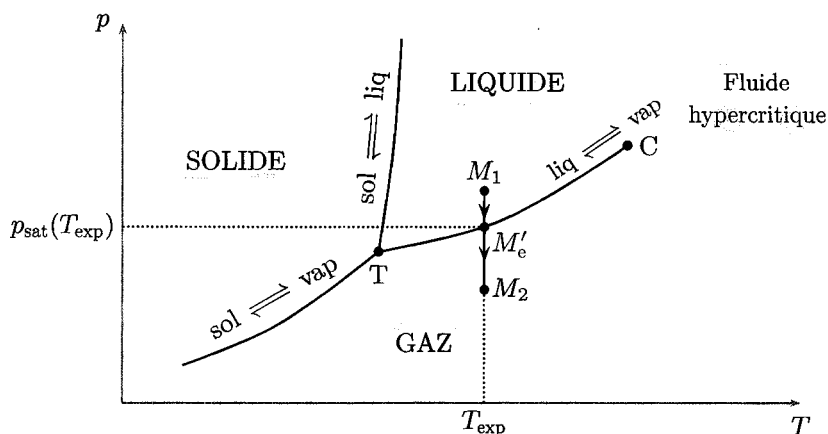


FIG. 14.18. Cavitation dans un corps pur seul.

Lorsqu'un corps pur *seul* est dans un état d'équilibre liquide-vapeur, la pression est la même dans les phases liquide et vapeur, égale à la pression de vapeur saturante $p_{sat}(T)$ à la température considérée.

Corps pur en présence d'une atmosphère inerte

On appelle atmosphère inerte une phase gazeuse qui ne change pas d'état et qui ne réagit pas avec les autres corps en présence.

Considérons maintenant un corps pur en présence d'une telle atmosphère : le corps pur peut exister sous les états liquide et vapeur, tandis que le corps constituant l'atmosphère ne peut exister (dans les domaines de pression et de température en jeu) que sous la forme gazeuse.

Prenons comme exemple représentatif d'une telle situation un récipient rempli d'eau placé à l'air libre : le corps pur considéré est l'eau, qui peut être sous forme liquide, ou sous forme de vapeur dans l'air (qui constitue l'atmosphère inerte).

Si p_{atm} est la pression totale de l'atmosphère, alors

$$p_{atm} = p_{eau} + p_{air}$$

où p_{eau} est la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'atmosphère et p_{air} la pression partielle de l'air dans l'atmosphère¹⁸.

La pression dans l'eau liquide est égale à la pression totale de l'atmosphère. On n'a donc pas égalité entre les pressions de l'eau liquide et de la vapeur d'eau. L'interprétation de l'état du système peut se faire à l'aide du diagramme (p, T) de l'eau, à condition d'utiliser la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'atmosphère.

18. La pression totale est la somme des pressions partielles car les forces exercées par les deux gaz sur la paroi du récipient s'additionnent.

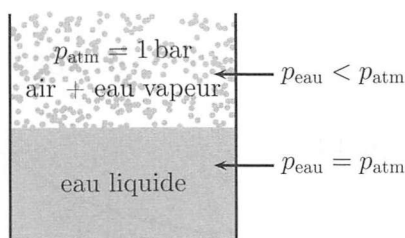


FIG. 14.19. Récipient contenant de l'eau liquide à l'air libre.

Attention Pression partielle

Dans le cas de l'eau en présence d'une atmosphère inerte, il faut considérer la pression *partielle* de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse pour mener l'étude thermodynamique.

Ainsi, dans un diagramme (p, T) d'un corps pur, l'ordonnée est la pression partielle en ce corps pur. La pression partielle d'une éventuelle atmosphère inerte ne figure pas sur le graphe.

Il faut distinguer ébullition et évaporation.

Définition 14.44. Ébullition

L'ébullition est la formation de bulles de vapeur d'eau au sein de la phase liquide. Elle se produit :

- ▶ quand la température dans le liquide devient supérieure à la température d'équilibre diphasé $T_{\text{éq}}$ pour la pression considérée¹⁹ (voir figure 14.17 page 410) ;
- ▶ quand la pression dans le liquide devient inférieure à la pression de vapeur saturante $p_{\text{sat}}(T)$ à la température T considérée (voir figure 14.18 page 411).

Ce phénomène est observé quand la phase liquide devient instable dans les conditions de température et de pression considérées.

Il faut donc que le point figuratif de la phase liquide tente de dépasser la courbe de saturation dans le diagramme (p, T) pour que l'ébullition se produise. La pression dans le liquide devient en effet inférieure à $p_{\text{sat}}(T)$; la phase liquide est alors instable et tout point du liquide tend à devenir du gaz pour rétablir l'équilibre en augmentant la pression. On observe alors la formation de bulles partout dans le liquide.

L'eau étant à la pression ambiante p_{atm} , l'ébullition se produit au voisinage des points où $T > T_{\text{éb}}$, température pour laquelle $p_{\text{sat}}(T_{\text{éb}}) = p_{\text{atm}}$. On a alors formation de vapeur d'eau ; tant qu'il reste de l'eau liquide, la température du liquide reste égale à $T_{\text{éb}}$.

Remarque L'ébullition est un phénomène hors d'équilibre ; on ne peut représenter l'état du système dans le diagramme (p, T) , la pression et la température n'étant d'ailleurs pas uniformes au sein du système.

19. C'est ce qui se passe aux points très chauds, par exemple au fond d'une casserole, ou au contact de la résistance chauffante d'une bouilloire.

- Pour l'eau, $p_{\text{sat}}(T_{\text{éb}}) = 1 \text{ bar}$ quand $T_{\text{éb}} = 100 \text{ °C}$; tout le monde sait qu'à la pression ambiante, « l'eau bout à 100 °C ».
- À 4000 m d'altitude, $p_{\text{atm}} = 0,8 \text{ bar}$; or, pour l'eau, $p_{\text{sat}}(T_{\text{éb}}) = 0,8 \text{ bar}$ pour $T_{\text{éb}} = 85 \text{ °C}$, donc l'eau bout à 85 °C à cette altitude.
- Dans un autocuiseur, la pression peut monter jusqu'à $1,5 \text{ bar}$ avant l'ouverture de la soupape. On a $p_{\text{sat}}(T_{\text{éb}}) = 1,5 \text{ bar}$ pour $T_{\text{éb}} = 110 \text{ °C}$: la température y est supérieure à celle obtenue dans une casserole, ce qui réduit les temps de cuisson.

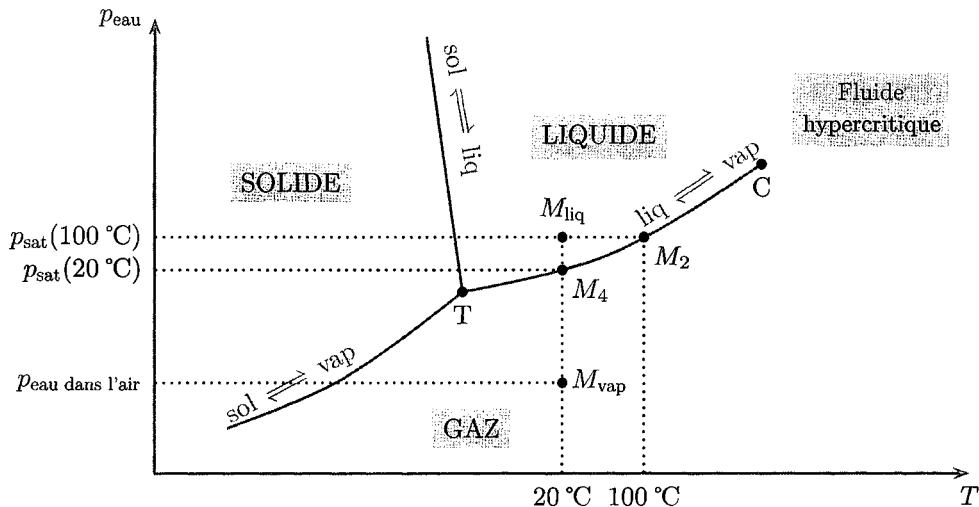


FIG. 14.20. Ébullition et évaporation l'eau : pression partielle en eau en fonction de la température.

Tout le monde sait que si de l'eau liquide est laissée à l'air libre dans un récipient, elle finit par se transformer en vapeur, alors que la température ambiante est notablement inférieure à la température d'ébullition de l'eau. Ce phénomène d'évaporation est d'autant plus rapide que la surface du liquide au contact avec l'atmosphère est grande.

Définition 14.45. Évaporation

L'évaporation est un phénomène de changement d'état qui a lieu à la surface libre d'un liquide en présence d'une atmosphère inerte, à une température inférieure à la température d'ébullition.

Considérons le récipient représenté figure 14.19, à la température ambiante $T = 20 \text{ °C}$. À cette température, la pression de vapeur saturante de l'eau vaut $p_{\text{sat}} = 0,023 \text{ bar}$. La pression dans l'eau liquide vaut $p_{\text{atm}} = 1 \text{ bar}$; le point représentatif de l'eau liquide dans le diagramme²⁰ de la figure 14.20 est M_{liq} .

L'atmosphère, à la température $T = 20 \text{ °C}$, contient un peu de vapeur d'eau. En choisissant par exemple une pression partielle en vapeur d'eau $p_{\text{eau}} = 0,005 \text{ bar}$, le point représentatif de la vapeur d'eau est M_{vap} . Comparons les pressions en jeu dans les deux phases.

- Dans la phase liquide, on a $p_{\text{eau}} > p_{\text{sat}}$: le point représentatif de l'eau liquide est M_{liq} (voir figure 14.20), dans le domaine du liquide. Il n'apparaît pas de bulles de vapeur.

20. Ce point est situé à la même ordonnée que M_2 car $p_{\text{atm}} = p_{\text{sat}}(100 \text{ °C})$.

► Dans la phase gazeuse, on a $p_{\text{vap}} < p_{\text{sat}}$: le point représentatif de la vapeur d'eau est M_{vap} , dans le domaine de la vapeur sèche.

On voit que les conditions sont incompatibles avec une coexistence d'eau liquide et de vapeur dans une situation d'équilibre : les points représentatifs ne sont pas sur la courbe de saturation. Tant que $p_{\text{vap}} < p_{\text{sat}}$ (à 20°C), l'eau liquide du récipient va s'évaporer lentement pour « essayer » d'augmenter la pression partielle p_{vap} de la vapeur d'eau dans l'atmosphère, ce qui se traduit par un déplacement du point M_{vap} vers le point M_A .

Tant qu'il reste de l'eau liquide, le point M_{liq} reste inchangé : la pression dans l'eau du récipient est toujours égale à la pression atmosphérique.

Humidité

Lorsque la pression partielle en vapeur d'eau dans l'atmosphère est égale à la pression de vapeur saturante de l'eau ($p_{\text{vap}} = p_{\text{sat}}$), on dit que l'atmosphère est saturée en vapeur d'eau, ou encore qu'il y a 100 % d'humidité dans l'air. On définit l'humidité relative de l'air par $\frac{p_{\text{vap}}}{p_{\text{sat}}}$. Dans l'exemple envisagé, on a une humidité relative de $\frac{0,005}{0,023} = 0,217 = 21,7 \%$.

Remarques

1. Quand l'humidité relative est de 100 %, le point figuratif de la vapeur d'eau est sur la courbe de saturation : la vapeur est en équilibre avec l'eau liquide, et il n'y a plus d'évaporation.
2. Si on essaie d'augmenter la pression partielle de la vapeur d'eau au-delà de p_{sat} , il y a condensation : la vapeur se liquéfie, formant un brouillard.
3. La vapeur d'eau est un gaz incolore : on ne peut pas la voir à l'œil nu. Les « nuages » que l'on voit s'élever au-dessus d'un liquide chaud ou en ébullition sont en réalité un brouillard, c'est-à-dire de fines gouttelettes d'eau liquide en suspension dans l'air, résultant de la condensation de la vapeur d'eau au contact de l'air plus froid. Les propriétés optiques des gouttelettes d'eau étant différentes de celles des gaz atmosphériques, elles sont visibles. De même, les nuages résultent de la formation de gouttelettes d'eau lorsque des masses d'air humide arrivent dans des zones froides, où la température est telle que $p_{\text{sat}}(T) < p_{\text{vap}}$.

Interprétation microscopique de l'évaporation

Les molécules d'eau, du fait de l'agitation thermique, sont animées d'un mouvement désordonné correspondant à une énergie cinétique moyenne par molécule $\frac{3}{2}k_B T$, que ce soit dans le liquide ou la vapeur. La répartition des vitesses des molécules suit une loi statistique : certaines sont plus lentes, d'autres plus rapides. Si l'énergie cinétique d'une molécule du liquide proche de la surface libre est supérieure à l'énergie potentielle d'interaction de la molécule, cette dernière est arrachée à l'attraction de ses voisins et passe dans l'atmosphère. Inversement, une molécule d'eau de l'atmosphère s'approchant de la surface libre peut être « capturée » par le liquide.

Quand le nombre de molécules arrachées par unité de temps est supérieur à celui des molécules capturées, il y a évaporation ; dans le cas contraire, il y a condensation.

21. On peut voir sur le diagramme (p , T) que $p_{\text{sat}}(T)$ diminue quand la température décroît.

Remarque Ce sont les molécules les plus rapides qui passent de la phase liquide à la phase gazeuse par évaporation. Ce phénomène abaisse dont l'énergie cinétique moyenne des molécules du liquide, c'est-à-dire sa température. L'évaporation est associée à une sensation de froid, que l'on peut ressentir en sortant d'une douche chaude : si on reste dans la salle de bain humide, il n'y a pas d'évaporation car l'air est saturé en vapeur d'eau. Si on passe dans une pièce plus sèche, l'eau sur notre corps s'évapore, produisant une sensation de froid.

C'est d'ailleurs ce principe est à la base de la transpiration : l'évaporation de la sueur à la surface de la peau entraîne un abaissement de la température corporelle.

Cette étude sera approfondie d'un point de vue énergétique à la section IV

IX. Exercices

1. Cinétique des gaz ★

(solution page 415)

On considère un gaz parfait en équilibre à la température T .

1. Exprimer la vitesse quadratique moyenne des molécules de ce gaz en fonction de la pression p et de la masse volumique μ du gaz.

2. L'air est assimilé à un gaz parfait. Déterminer la vitesse quadratique moyenne des molécules qui le constituent, sachant qu'à 20,0 °C et sous une pression de 1,00 bar, la masse volumique de l'air est $\mu = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Sachant que l'air est constitué de 80 % de diazote et de 20 % de dioxygène (en nombre de molécules), commenter le résultat précédent. On donne $M(\text{O}) = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M(\text{N}) = 14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3. On considère de l'hélium He à la même température $T = 20,0 \text{ °C}$. Sans calcul, comparer la vitesse quadratique des molécules d'hélium à celle des molécules de l'air. Faire le calcul avec $M(\text{He}) = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2. Vers le zéro absolu ★

(solution page 415)

On considère un gaz parfait monoatomique constitué d'atomes de masse m , en équilibre thermique à la température T .

1. Exprimer la vitesse quadratique moyenne u des atomes en fonction de la température T du gaz. Comment interpréter la limite du zéro absolu ? Quel résultat de la mécanique quantique se trouve alors contredit ?

2. On a montré en physique quantique (voir chapitre 4) que la longueur d'onde de de Broglie associée à une particule de quantité de mouvement p s'écrit $\lambda = \frac{h}{p}$, où h est la constante de Planck.

Exprimer λ (appelée aussi longueur d'onde thermique) en fonction entre autres de la température T du gaz.

3. En notant n la densité de particules (nombre d'atomes par unité de volume), la distance moyenne d entre deux atomes est telle que $n = \frac{1}{d^3}$.

En comparant λ et d , discuter de la validité de la relation entre u et T . On mettra en évidence une température seuil T_s .

4. En considérant l'hélium liquide de masse volumique $\mu = 125 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, estimer la valeur de T_s en-dessous de laquelle les effets quantiques ne peuvent être négligés.

La masse molaire de l'hélium est $M = 4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On donne $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ et $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

3. Enrichissement de l'uranium ★★

(solution page 416)

Il existe deux isotopes de l'uranium : ^{235}U et ^{238}U . Dans la nature, l'uranium contient 0,71 % de l'isotope 235 ; or seul cet isotope est fissile. Il est donc nécessaire d'enrichir le minerai en uranium 235 afin de l'utiliser comme combustible nucléaire.

Les réacteurs nucléaires utilisent comme combustible de l'oxyde d'uranium UO_2 , dont la teneur en uranium 235 doit atteindre un seuil de 4 %. En proportion insuffisante dans l'uranium naturel, il convient d'enrichir cet uranium en isotope 235.

L'enrichissement par effusion gazeuse est le premier procédé industriel de séparation isotopique. Ce procédé met à profit la (faible) différence de masse des isotopes de l'hexafluorure d'uranium UF_6 pour séparer sélectivement les molécules par passage au travers d'une paroi poreuse.

Le diffuseur est constitué de deux compartiments de même volume V et maintenus à la température T . Le compartiment (1) contient N molécules d'un gaz parfait quelconque alors que le compartiment (2) est vide. À $t = 0$, un très petit orifice de surface S est percé entre les deux compartiments, permettant ainsi le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2) : c'est le phénomène d'effusion gazeuse.

L'espace est rapporté au trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, où \vec{u}_z est la normale au trou orientée vers le compartiment (2).

Afin d'obtenir un ordre de grandeur du phénomène, adoptons le modèle simplifié suivant :

- ▶ le trou est petit et le gaz se détend lentement en restant au repos (tout mouvement macroscopique est négligé) ;
- ▶ $N_1(t)$ et $N_2(t)$ représentent le nombre de molécules occupant, à l'instant t , de manière uniforme respectivement les compartiments (1) et (2) ;
- ▶ les vitesses de toutes les molécules ne sont orientées que selon $\pm\vec{u}_x$, $\pm\vec{u}_y$ et $\pm\vec{u}_z$, avec une norme v identique et égale à la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{3RT/M}$, où M désigne la masse molaire des molécules ;
- ▶ la répartition de ces six directions est isotrope et, statistiquement, seule la fraction 1/6 des molécules se dirige suivant \vec{u}_z avec une vitesse $u = v_z > 0$.

On donne $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Exprimer le nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2) pendant la durée dt . Exprimer de même le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules du compartiment (2) traversant, pendant la même durée dt , la surface S vers le compartiment (1).

En déduire $\frac{dN_1}{dt}$ et $\frac{dN_2}{dt}$ en fonction de $N_1(t)$, $N_2(t)$, S , u et V .

2. Établir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du nombre N de molécules et d'une constante de temps τ caractéristique du phénomène d'effusion observé.

Calculer τ sachant que l'effusion s'effectue à 403 K au travers d'un pore cylindrique de rayon $r = 0,01 \text{ } \mu\text{m}$, chaque compartiment possède un volume $V = 32 \text{ L}$ et le gaz utilisé a pour masse molaire $M = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Conclure.

3. Déterminer le nombre Φ de particules traversant l'orifice de surface S en une seconde. L'exprimer en fonction de N , V , S et u , puis en fonction de M , T , R , S et de la densité moléculaire initiale n^* du gaz introduit dans l'enceinte.

4. Le compartiment (1) contient, à l'instant $t = 0$, deux gaz $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ de masses molaires et de densités moléculaires M_5 , n_5^* et M_8 , n_8^* . Dans la suite, les grandeurs associées à ces deux gaz sont respectivement repérées par les indices 5 et 8. La masse molaire du fluor est de $19 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

a/ Calculer le rapport des temps d'effusion τ_8/τ_5 . Commenter ce résultat en expliquant brièvement comment il est possible d'enrichir en $^{235}\text{UF}_6$ un mélange de $^{238}\text{UF}_6$ et $^{235}\text{UF}_6$ par effusion gazeuse.

b/ Le taux d'enrichissement η_e en isotope 235 se définit comme le rapport des coefficients de richesse dans le gaz diffusé $R_d = \Phi_5/\Phi_8$ et dans le gaz initial $R_o = n_5^*/n_8^*$. Exprimer ce rapport $\eta_e = R_d/R_o$ et commenter.

c/ Une cascade est réalisée en plaçant p étages d'enrichissement en série, le gaz enrichi de l'étage k alimentant l'entrée de l'étage $k + 1$. Déterminer le nombre p de passages nécessaires à travers les parois poreuses pour arriver à la proportion finale de 4% en isotope 235 partant d'un titre initial de 0,71%. On supposera que η_e est le taux d'enrichissement en isotope 235 de chaque étage.

4. Remplissage d'une bouteille de plongée ★ (solution page 417)

Afin d'effectuer le remplissage d'une bouteille à parois indéformables, de volume V_b , on utilise un compresseur constitué d'un cylindre, de deux soupapes S et S' et d'un piston, mobile sans frottement entre les positions extrêmes AA' et BB' (voir figure 14.21). Lors de l'aller (phase d'aspiration), la soupape S est ouverte alors que S' est fermée; on a alors admission de l'air atmosphérique dans le cylindre à la pression p_{atm} . Lors du retour (phase de compression), l'air dans le cylindre est comprimé de la pression p_a à la pression p_b ; la soupape S est fermée alors que la soupape S' s'ouvre dès que la pression dans le cylindre devient supérieure à celle de la bouteille p_b .

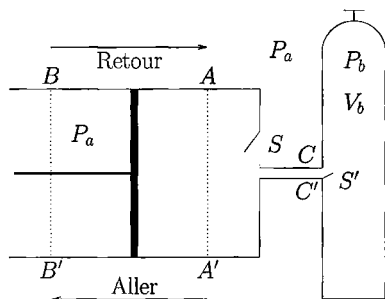


FIG. 14.21. Dispositif de remplissage d'une bouteille de plongée.

Quand le piston est en AA' , le volume limité par le piston et la section CC' est V_{\min} ; quand le piston est en BB' , ce volume est égal à V_{\max} . Les transformations de l'air sont isothermes (les températures dans le cylindre et dans la bouteille sont identiques, égales à la température T_a de l'atmosphère); l'air est toujours considéré comme un gaz parfait.

1. La pompe n'ayant pas encore fonctionné, l'état initial du système est le suivant :

- bouteille : pression $p_b = p_{\text{atm}}$, température $T_b = T_a$,
- cylindre : pression p_{atm} , température T_a , position du piston AA' .

Le piston fait un aller-retour. Déterminer la pression p_b à l'intérieur de la bouteille à la fin de cette transformation; en déduire, sous l'hypothèse $V_{\min} \ll V_b$, la variation Δn du nombre de moles contenues dans la bouteille.

Numériquement, $V_b = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $V_{\min} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, $V_{\max} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $T_a = 293 \text{ K}$ et $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2. Le compresseur ayant fonctionné, on considère qu'à un instant t donné, la soupape S est ouverte alors que la soupape S' est fermée; l'état du système est alors le suivant,

- bouteille : pression $p_b = p$, température $T_b = T_a$,
- cylindre : pression p_{atm} , température T_a , position du piston AA' .

Le piston fait un aller-retour. Déterminer le volume d'air V' dans le cylindre lorsque la soupape S' s'ouvre, puis, en fonction de p , V_b , p_{atm} , V_{min} et V_{max} la pression p' dans la bouteille à la fin de cette opération.

En déduire, en fonction des mêmes grandeurs, la variation Δp de la pression à l'intérieur de la bouteille. Déterminer la pression maximale p_{max} que l'on peut obtenir par ce procédé et interpréter le résultat obtenu.

3. Calculer Δp et p_{max} pour $p = 0,2 \cdot 10^7$ Pa, et en conservant les données numériques antérieures.

4. On considère l'instant t de la question 2, l'état du système étant identique. Le piston fait α allers-retours par seconde, la durée de chaque aller-retour est notée $\Delta t = 1/\alpha$. Établir l'équation différentielle liant p et dp/dt (on assimilera $\Delta p/\Delta t$ à dp/dt).

5. Le compresseur ayant démarré à l'instant $t = 0$, les conditions initiales étant celles qui ont été définies à la question 1, déterminer la pression $p(t)$ à un instant t quelconque. Compte tenu de l'inégalité $V_{min} \ll V_b$, on pourra poser $\tau = V_b/(\alpha V_{min})$. Pour $\alpha = 4$ allers-retours par seconde, calculer le temps T au bout duquel la pression p dans la bouteille est égale à $0,5 \cdot 10^7$ Pa.

5. Équilibre diphasé dans une chaudière ★ (solution page 418)

Une chaudière est constituée d'un cylindre vertical de section S et de hauteur L , contenant de l'eau de masse molaire M sous forme liquide, de masse volumique ρ et supposé incompressible, et sous forme gazeuse. Initialement, l'ensemble est à l'équilibre à 100°C , et le liquide atteint alors la hauteur h (voir figure 14.22). On porte l'ensemble à 200°C .

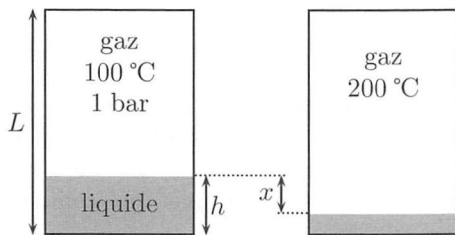


FIG. 14.22. Schéma simplifié d'une chaudière.

1. Le niveau initial de liquide est $h = 10$ cm. En supposant qu'il reste du liquide, calculer la baisse x du niveau sachant que pour $100^\circ\text{C} \leq T \leq 200^\circ\text{C}$, la pression de vapeur saturante de l'eau est donnée par la formule empirique approximative de Duperray, $p_{sat} = \left(\frac{T(^{\circ}\text{C})}{100}\right)^4$ en bar.

2. Déterminer l'état final lorsque le niveau initial de liquide est $h = 5,0$ mm.

On donne $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $L = 1,0 \text{ m}$.

Le gaz parfait est un modèle théorique, qui tend à décrire le comportement des gaz réels dans le cas limite où on peut négliger les interactions entre les molécules du gaz. On cherche à déterminer dans quelles conditions un gaz réel peut être assimilé à un gaz parfait. Le facteur de compressibilité Z d'un gaz est la grandeur qui dépend *a priori* de la pression et de la température

$$Z(p, T) = \frac{pV}{nRT}.$$

1. Quelle est la dimension de Z ? Quelle est la valeur de Z pour un gaz parfait?

Exprimer Z en fonction du volume molaire Z_m du gaz, et le volume molaire $Z_{m,GP}$ du gaz parfait dans les mêmes conditions de température et de pression.

2. On se place à une température T_0 fixée, et on fait subir au gaz une compression, l'amenant de la pression p_1 à la pression $p_2 > p_1$.

En considérant l'évolution du volume molaire du gaz, en étudiant $\frac{V_{m,2}}{V_{m,1}}$, que peut-on dire de la compressibilité du gaz réel par rapport au gaz parfait en fonction de l'allure de la variation de $Z(p, T_0)$ en fonction de p ?

3. La figure 14.23 page 420 représente l'évolution du facteur de compressibilité de divers gaz en fonction de la pression réduite, pour différentes températures. La pression réduite (en abscisse) est définie par $p_r = \frac{p}{p_c}$ et la température réduite par $T_r = \frac{T}{T_c}$, où p_c et T_c sont la pression et la température du gaz au point critique.

Exploiter ce document pour discuter du comportement des gaz, et de la validité du modèle du gaz parfait.

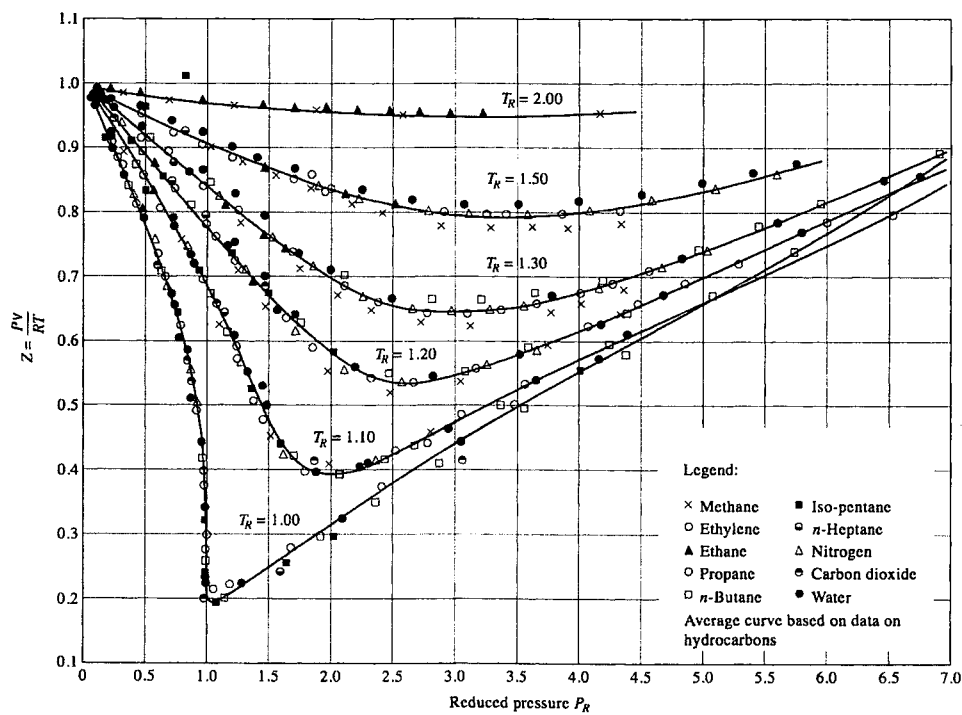


FIG. 14.23. Évolution du facteur de compressibilité de différents gaz en fonction de leur pression réduite.

Chapitre 15

ÉCHANGES D'ÉNERGIE AU COURS D'UNE TRANSFORMATION

LA THERMODYNAMIQUE visant à l'étude des échanges d'énergie, l'objectif de ce chapitre est de détailler les deux modes de transfert d'énergie entre un système et l'extérieur : le travail et le transfert thermique. Historiquement, ces deux grandeurs étaient considérées comme indépendantes :

- ▶ le travail¹, défini comme le produit d'une force par une distance, est exprimé en joules ;
- ▶ le transfert thermique (autrefois appelé « chaleur »), est exprimé en calories.

Jusqu'au XIX^e siècle, les scientifiques pensaient que la chaleur était un fluide (le calorique), qui pouvait circuler. C'est en 1845 que le physicien anglais James Prescott Joule (1818-1889) a établi que le travail et la chaleur sont équivalents : ce sont deux quantités d'énergie. On les exprime toutes deux en joules.

La dénomination désuète de « chaleur » est remplacée par celle de « transfert thermique » ; cela permet d'éviter la confusion fréquente entre chaleur et température, et d'insister sur le fait qu'il s'agit d'une quantité d'énergie échangée pendant une certaine durée et non d'une énergie ayant une valeur en un instant donné.

I. Transformation thermodynamique subie par un système

I.1. Introduction

Considérons un gaz dans un cylindre fermé par un piston mobile sans frottements. Le système {gaz} étudié est délimité par le cylindre et la paroi du piston. Il est :

- ▶ fermé (il n'échange pas de matière avec l'extérieur) ;
- ▶ déformable (le piston est mobile) ;
- ▶ non isolé (il peut échanger de l'énergie avec l'extérieur).

L'objet de ce chapitre est d'étudier les échanges d'énergie entre le système et l'extérieur, en distinguant deux modes différents.

L'état initial est un état d'équilibre (voir figure 15.1) : si le piston a une masse m et une surface S , l'équilibre mécanique du piston s'écrit, en projection selon \vec{u}_z ,

$$0 = p_i S - p_0 S - mg.$$

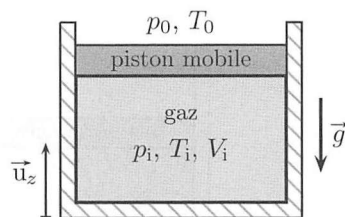


FIG. 15.1. État initial.

1. Cette notion a été introduite par le mathématicien et ingénieur français Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843), qui a proposé le terme « travail » en 1826 et a défini le travail élémentaire comme $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

La pression dans le gaz à l'équilibre est alors uniforme, égale à $p_i = p_0 + \frac{mg}{S}$.
 Décrivons deux types d'évolutions envisageables pour un tel système.

Premier exemple

Perturbons l'état initial en ajoutant une masse M sur le piston (voir figure 15.2). Nous supposons dans cet exemple que les parois ne permettent pas de transfert thermique avec l'extérieur².

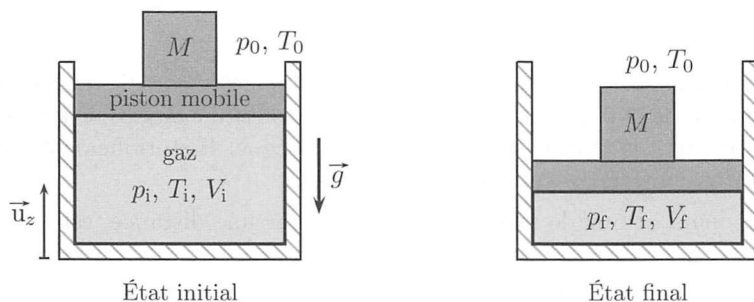


FIG. 15.2. Transformation subie par le système.

Au moment où on pose la masse M , l'équilibre mécanique n'est plus réalisé car la résultante des forces exercées sur l'ensemble {piston + masse M } est non nulle, compte tenu de l'expression de p_i ,

$$[Sp_i - (m + M)g + Sp_0] \vec{u}_z = -Mg\vec{u}_z \neq \vec{0}.$$

Le volume du système va diminuer et la pression p_i va augmenter. On constate expérimentalement que la température T_i augmente également³. La pression finale se détermine en écrivant l'équilibre mécanique de l'ensemble {piston + masse M } soit, en projection selon \vec{u}_z , $-(m + M)g - p_0S + p_fS = 0$, d'où $p_f = p_0 + \frac{(M+m)g}{S}$. Nous verrons par la suite comment déterminer les autres grandeurs T_f et V_f .

Second exemple

Nous supposons maintenant que les parois permettent les échanges thermiques avec l'extérieur. Dans l'état initial, on impose au milieu extérieur une température $T_1 > T_i$.

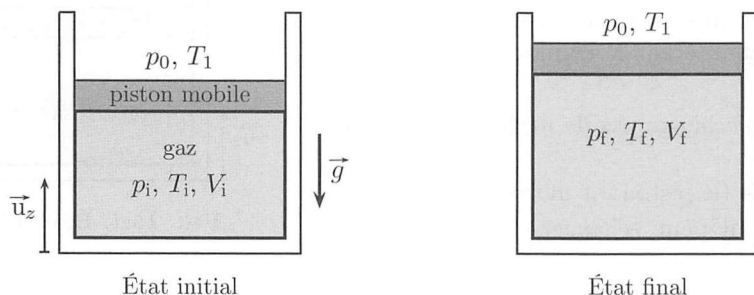


FIG. 15.3. Transformation subie par le système.

L'équilibre thermique entre le système {gaz} et l'extérieur n'est plus réalisé. Le système {gaz} va voir sa température augmenter, jusqu'à égaler la température extérieure, $T_f = T_1$ (voir figure 15.3).

2. Ce point sera approfondi par la suite.

3. Ce dernier point sera établi dans le chapitre suivant, lors de l'étude de la compression adiabatique.

Dans ces deux cas, le système {gaz} a subi une transformation : partant d'un état d'équilibre initial, nous avons modifié une contrainte extérieure ; ce système n'étant alors plus dans un état d'équilibre, il a évolué vers un état d'équilibre final, compatible avec les nouvelles contraintes extérieures.

Définition 15.1. Transformation thermodynamique

Lorsque les variables d'état d'un système varient au cours du temps, on dit que ce système subit une transformation.

Dans le cas d'un système fluide, au moins une des grandeurs parmi sa température T , sa pression p et son volume V varie lors d'une transformation.

On appelle « chemin suivi par le système » l'ensemble des états intermédiaires du système lors de la transformation.

Nous étudierons principalement dans ce chapitre des systèmes constitués de récipients comprenant éventuellement des parties mobiles (piston), et renfermant un gaz le plus souvent considéré comme parfait.

I.2. Détermination de l'état d'équilibre final

Un système cesse d'évoluer lorsqu'il est dans un état d'équilibre thermodynamique : il atteint alors l'état final de la transformation qu'il subit. L'état final d'une transformation est donc un état :

- ▶ d'équilibre mécanique interne (pression du fluide uniforme) et avec l'extérieur (équilibre mécanique des parties mobiles) ;
- ▶ d'équilibre thermique interne (température du fluide uniforme) et avec l'extérieur si les échanges thermiques le permettent.

Lorsqu'un système évolue vers un état d'équilibre, la connaissance des conditions imposées par le milieu extérieur permet donc de déterminer (partiellement ou en totalité⁴) l'état final.

Méthode

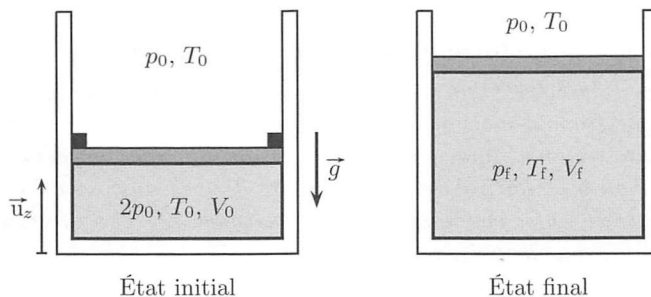
Déterminer l'état final (système gazeux)

- ▶ L'équilibre mécanique des parties mobiles permet de déterminer la pression finale au sein du système.
- ▶ L'équilibre thermique, quand il est réalisé, permet de déterminer la température finale, qui doit être égale à la température extérieure. L'équilibre thermique est réalisé si les échanges thermiques avec l'extérieur sont possibles ; ce n'est pas le cas si les parois sont calorifugées.
- ▶ Le système étant en équilibre interne dans l'état final, l'équation d'état du gaz parfait permet de relier alors pression, température et volume, la quantité de matière étant constante si le système est fermé.

4. Dans certains cas, il faut faire un bilan énergétique pour déterminer complètement l'état final ; c'est l'objet du chapitre suivant.

EXERCICE CORRIGÉ 15.2.*Déterminer l'état final*

Un cylindre vertical de section S contient de l'air, assimilé à un gaz parfait. Un piston de masse négligeable coulisse sans frottements le long des parois, qui permettent les échanges thermiques avec l'extérieur.



Le piston est initialement bloqué, maintenant une pression $2p_0$ à l'intérieur du cylindre; la température de l'air dans le cylindre est égale à la température extérieure T_0 . On libère le piston.

- Déterminer la pression et la température finales dans le cylindre.
- Le piston, de section $S = 10,0 \text{ cm}^2$, a une masse $m = 100 \text{ g}$; est-il justifié de la négliger? On prendra $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Corrigé

- L'équilibre mécanique, dans le cas d'un piston de masse négligeable, conduit à $p_f = p_0$. L'équilibre thermique conduit à $T_f = T_0$. L'équation d'état permet d'écrire, la température étant inchangée, $2p_0V_0 = p_0V_f$, d'où $V_f = 2V_0$.
- L'équilibre mécanique du piston s'écrit, en projection selon \vec{u}_z ,

$$0 = p_f S - p_0 S - mg,$$

d'où $p_f = p_0 + \frac{mg}{S} = 10^5 + \frac{0,1 \times 9,81}{10 \cdot 10^{-4}} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. L'erreur faite en négligeant la masse du piston est de l'ordre de 1 %; cette hypothèse est légitime.

I.3. Quelques transformations particulières

Transformation	Définition	Commentaire
Isochore	$V = \text{cte}$	Le volume du système reste constant
Isotherme	$T = \text{cte}$	La température du système reste constante
Isobare	$p = \text{cte}$	La pression du système reste constante
Monobare	$p_{\text{ext}} = \text{cte}$	La pression extérieure reste constante

Nous pouvons parler de « la » température ou de « la » pression du système si ces deux grandeurs intensives sont uniformes : elles ont alors la même valeur en tout point du système.

II. Échange d'énergie mécanique avec l'extérieur : travail des forces de pression

II.1. Travail mécanique

L'existence d'une grandeur qui peut être constante (sous certaines conditions) au cours du mouvement était supposée depuis l'Antiquité. C'est Leibniz (1646-1716) qui, reprenant les travaux de Huygens en 1669, a proposé pour la première fois vers 1670 une grandeur appelée *vis viva* (force vive du système) proportionnelle à la masse et à la vitesse au carré. Le physicien français Lagrange (1736-1813) a montré que, pour une masse en chute libre, la quantité $\frac{1}{2}mv^2 + mgz$ était constante. Dans son *Théorème des forces vives* publié en 1788, les concepts d'énergie cinétique ($\frac{1}{2}mv^2$) et de travail ($\delta W = -mg dz$) étaient nés. C'est l'Anglais Thomas Young (1773-1829) qui a utilisé pour la première fois le mot énergie en 1807. Énergie vient du grec *energeia* et signifie « force en action », ce qui renvoie bien à l'idée de travail mécanique : force \times déplacement.

Depuis l'Antiquité, les physiciens ont essayé d'utiliser la pression de la vapeur pour créer des moteurs. Le Français Denis Papin (1647-1714) est le premier à avoir vraiment réussi : la vapeur d'eau chauffée dans un cylindre exerce une intense force de pression sur un piston qu'elle déplace, fournissant ainsi un travail. Malheureusement, ces machines étaient peu efficaces et les très fortes pressions provoquaient parfois des explosions faisant des victimes.

L'Anglais James Watt (1736-1819) a nettement amélioré le concept jusqu'à le rendre utilisable dans l'industrie. En 1784, il a déposé un brevet de locomotive à vapeur. Watt était très bon en marketing : pour mieux vendre ses machines à vapeur, il inventa une unité de puissance parlante, le cheval-vapeur (*horsepower*, hp), censée représenter le travail mécanique par unité de temps qu'un cheval peut fournir. Dans le système SI, un cheval-vapeur vaut environ 736 W. Cette unité est encore utilisée de nos jours pour le commerce des voitures : une voiture dont la puissance est de « 100 chevaux » a un moteur qui délivre une puissance mécanique de 73,6 kW.

II.2. Travail des forces de pression lors d'une évolution élémentaire

Dans le référentiel d'étude du système, une force \vec{F} qui s'applique sur un point M dont le déplacement élémentaire est $\vec{d\ell}_M$ fournit au système le travail élémentaire

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{d\ell}_M.$$

Cette grandeur algébrique représente l'énergie reçue par le système de la part de la force \vec{F} .

Conventionnellement, en thermodynamique, on compte positivement une énergie effectivement reçue par le système, et négativement une énergie effectivement cédée à l'extérieur.

En thermodynamique, nous serons souvent amenés à étudier des systèmes dont le volume varie sous l'action de forces localement orthogonales à leur paroi.

Deux exemples courants sont :

- ▶ les actions qu'exerce l'air ambiant sur un système ;
- ▶ l'action d'un opérateur qui enfonce le piston d'une seringue avec son doigt.

Nous appellerons « actions de pression » toutes les actions extérieures qui s'exercent orthogonalement à la paroi d'un système.

EXEMPLE 15.3.

Dans le cas de la figure 15.3 (voir page 422), le piston de surface S est soumis à la force de pression atmosphérique $-p_0 S \vec{u}_z$ et au poids $-Mg \vec{u}_z$; la résultante des forces extérieures au système {gaz+piston} est $\vec{F} = -(p_0 S + Mg) \vec{u}_z$. La « pression extérieure » définie par $\vec{F} = -p_{\text{ext}} S \vec{u}_z$ est donc donnée par

$$p_{\text{ext}} = p_0 + \frac{Mg}{S}.$$

Dans un premier exemple, considérons un piston mobile de section S . Sur sa face externe s'exerce une force extérieure $\vec{F}_{\text{ext}} = -F_{\text{ext}} \vec{u}_x$ (voir figure 15.4).

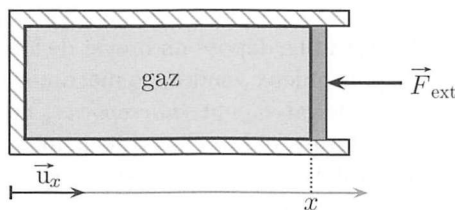


FIG. 15.4. Travail des forces extérieures s'exerçant sur un piston.

Nous pouvons considérer que le piston subit la pression extérieure $p_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}/S$. Lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x$ du piston, le travail fourni par la force extérieure au piston s'écrit

$$\delta W = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = -F_{\text{ext}} dx = -p_{\text{ext}} S dx.$$

Nous remarquons qu'un déplacement dx du piston entraîne une variation $dV = S dx$ du volume du cylindre ; nous pouvons donc écrire

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV.$$

Ce terme représente l'énergie reçue par le système {gaz+piston} de la part des forces de pression extérieures lorsque son volume varie de dV . Nous admettrons que ce résultat, établi pour un système de géométrie très simple, peut être généralisé à un système quelconque.

Synthèse

Travail des forces de pression

Si la pression extérieure s'appliquant sur les parois du système est uniforme, le travail fourni au système {gaz + parois} par cette action de pression lors d'une évolution infinitésimale s'écrit

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV,$$

où dV est la variation de volume du système.

- ▶ Le système doit comprendre le gaz **et** la paroi mobile pour obtenir cette expression du travail reçu.
- ▶ Le travail étant une quantité d'énergie, une pression est homogène à une énergie par unité de volume, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.
- ▶ Lors d'une détente ($dV > 0$), le travail fourni au système par les forces de pression extérieures est négatif. Le système fournit donc un travail positif à l'extérieur (il se comporte comme un moteur vis-à-vis de l'extérieur).
- ▶ Lors d'une compression ($dV < 0$), le travail des forces de pression est positif : le système reçoit de l'énergie mécanique de la part de l'extérieur (il se comporte comme un récepteur vis-à-vis de l'extérieur).

Nous sommes confrontés à ces situations dans la vie quotidienne : il faut fournir de l'énergie pour regonfler le pneu de son vélo ! L'énergie qui fait avancer notre voiture est cédée aux pistons par le gaz qui se détend dans les cylindres du moteur.

II.3. Travail des forces de pression lors d'une évolution non élémentaire : cas particuliers

Une évolution est dite non élémentaire si l'état final du système ne diffère pas de son état initial uniquement par des variations élémentaires (très petites) de chacune des variables. C'est le cas par exemple si on double la température du système, ou si on divise son volume par deux.

Une évolution non élémentaire se décompose en une succession d'évolutions élémentaires ; pour chacune d'entre elles, tout point M de la frontière subit un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_M$, et le volume du système varie de dV . Le système reçoit alors un travail élémentaire δW . Le travail total W s'obtient en faisant la somme⁵ des travaux élémentaires δW .

II.3.1. Transformation isochore

Lors d'une transformation isochore, le volume du système reste constant, donc $dV = 0$ et $\delta W = 0$. Le travail total est nul.

Les forces extérieures de pression ne travaillent pas lors d'une transformation isochore, $W = 0$.

5. On effectue une somme continue, représentée par une intégrale.

II.3.2. Transformation monobare

Lors d'une transformation monobare, la pression extérieure reste constante tout au long de l'évolution du système. Lorsque le volume varie d'une valeur initiale V_1 à une valeur finale V_2 , le travail fourni au système par les forces extérieures de pression s'écrit

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV = -p_{\text{ext}} \int_{V_1}^{V_2} dV = -p_{\text{ext}} [V_2 - V_1].$$

Lors d'une transformation monobare, le travail fourni au système par les forces extérieures de pression est donné par

$$W_{1 \rightarrow 2} = -p_{\text{ext}} [V_2 - V_1].$$

II.4. Principe du calcul du travail pour une transformation quasi stationnaire

Dans les exemples précédents, nous n'avons pas considéré la pression au sein du système. Lorsqu'une paroi (par exemple, un piston) se déplace avec une vitesse v , la pression du gaz est localement modifiée au voisinage de la paroi (surpression en cas de compression, dépression en cas de détente). Ensuite, la pression s'uniformise au sein du système : au bout d'un certain temps caractéristique τ , le système a relaxé vers un état d'équilibre interne où sa pression est uniforme. Cette homogénéisation se fait par le biais d'ondes de pression qui se propagent dans le système, à la célérité c (vitesse du son dans le gaz). Si L est la dimension caractéristique du système (longueur d'un cylindre, par exemple), le temps caractérisant l'uniformisation de la pression a pour ordre de grandeur $\tau \approx \frac{L}{c}$.

Si le déplacement du piston est négligeable pendant la durée τ de relaxation vers l'équilibre mécanique interne, on peut considérer que le système est en équilibre mécanique interne tout au long de son évolution ; il faut donc $v\tau \ll L$, soit $v \ll c$.

Si les parois d'un système se déplacent à une vitesse très inférieure à la vitesse du son dans le gaz, on peut considérer que la pression est uniforme à chaque instant de l'évolution. On dit alors que le système évolue dans l'approximation des états quasi stationnaires pour les ondes de pression.

Dans le cas d'une évolution quasi stationnaire, le piston est soumis à la pression intérieure p et à la pression extérieure p_{ext} (voir figure 15.5), c'est-à-dire à la résultante $\vec{F} = (p - p_{\text{ext}})S\vec{u}_x$.

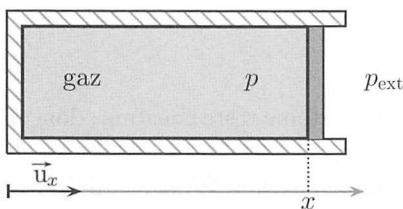


FIG. 15.5. Transformation quasi stationnaire d'un système.

Le système considéré est le gaz contenant dans le cylindre. Il exerce sur le piston la force $\vec{F}_{\text{gaz/piston}} = pS\vec{u}_x$. D'après le principe des actions réciproques, le piston exerce

sur le gaz la force $\vec{F}_{\text{piston/gaz}} = -\vec{F}_{\text{gaz/piston}} = -pS\vec{u}_x$. Le travail reçu par le gaz⁶ lors d'une variation dV de son volume est alors

$$\delta W = -p dV.$$

On en déduit le travail total par intégration de l'état initial à l'état final.

Lors d'une évolution quasi stationnaire, le travail des forces de pression reçu par le système {gaz} s'exprime en fonction de la pression au sein du système au cours de l'évolution,

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (15.1)$$

Pour mener le calcul, il faut connaître l'expression de p en fonction de V .

Jusqu'à présent, nous avons étudié le travail des forces extérieures de pression sur le système {gaz + piston}. En envisageant le cas des transformations quasi stationnaires où la pression du gaz est définie à chaque instant, nous avons établi le travail reçu par le système {gaz}. Qu'en est-il alors du travail reçu par le système {gaz + piston} ?

Ce travail est toujours donné par

$$W'_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV.$$

Dans quel cas peut-on identifier ce travail $W'_{1 \rightarrow 2}$ avec le travail $W_{1 \rightarrow 2}$ reçu par le système {gaz} ?

Tout d'abord, il convient de remarquer qu'un piston ne transmet pas la pression : le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston s'écrit

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x = (p - p_{\text{ext}}) S \vec{u}_x, \quad (15.2)$$

donc dans le cas général $p \neq p_{\text{ext}}$. C'est seulement dans le cas où le terme $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ est négligeable⁷ dans l'équation (15.2) que $p = p_{\text{ext}}$, ce qui permet d'écrire

$$-p dV = -p_{\text{ext}} dV.$$

Le travail élémentaire reçu par le système {gaz} s'identifie donc au travail élémentaire reçu par le système {gaz + piston}.

Dans le cas où le terme $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ n'est pas négligeable dans l'équation (15.2), le travail élémentaire reçu par le système {gaz} n'est pas égal au travail élémentaire reçu par le système {gaz + piston},

$$-p dV \neq -p_{\text{ext}} dV. \quad (15.3)$$

En multipliant scalairement l'équation (15.2) par $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x$, on obtient le théorème de l'énergie cinétique appliqué au piston pendant un déplacement élémentaire,

$$dE_c = \vec{F} \cdot dx \vec{u}_x = (p - p_{\text{ext}}) S dx = (p - p_{\text{ext}}) dV. \quad (15.4)$$

6. Travail de la force exercée par le piston sur le gaz pour un déplacement $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x$ du piston.

7. C'est toujours le cas si le piston a une masse nulle, ce qui arrive si la surface délimitant le système est une paroi fictive.

Dans le cas d'une évolution d'un état initial (1) où le piston est au repos ($E_{c,1} = 0$) à un état final (2) où le piston est aussi au repos ($E_{c,2} = 0$), la sommation de la relation (15.4) le long de l'évolution s'écrit

$$\int_{E_{c,1}}^{E_{c,2}} dE_c = E_{c,2} - E_{c,1} = 0 = \int_{V_1}^{V_2} p dV - \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV.$$

Nous pouvons alors identifier le travail des forces de pression reçu par le système {gaz + piston} et le travail reçu par le système {gaz},

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV = - \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (15.5)$$

Malgré la relation (15.3), les conditions initiale et finale particulières envisagées permettent d'écrire l'égalité (15.5). Le tableau suivant résume ces résultats.

Piston tel que $m\ddot{x}$ négligeable	$p = p_{\text{ext}}$	$-p dV = -p_{\text{ext}} dV$	$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$
Vitesses initiale et finale du piston nulles	$p \neq p_{\text{ext}}$	$-p dV \neq -p_{\text{ext}} dV$	$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$

Lors d'une évolution quasi stationnaire d'un état initial où le piston est au repos à un état final où le piston est au repos, le travail fourni au système {gaz} par les forces extérieures de pression s'exprime en fonction de la pression au sein du système au cours de l'évolution,

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

EXEMPLES 15.4.

Évolution isobare

La pression reste constante au sein du système tout au long de l'évolution, $p = p_0$. Le travail fourni par les actions de pression au système {gaz} est donc donné par

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p_0 dV = -p_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = -p_0[V_2 - V_1].$$

Le système étant fermé, la quantité de gaz n est constante, d'où $p_0 V_1 = nRT_1$ et $p_0 V_2 = nRT_2$; le travail peut alors s'écrire $W_{1 \rightarrow 2} = -nR(T_2 - T_1)$.

Évolution isotherme d'un gaz parfait

La température reste constante au sein du système tout au long de l'évolution, $T = T_0$. La pression est donc donnée par l'équation d'état des gaz parfaits $p = \frac{nRT_0}{V}$; le travail reçu par le gaz s'écrit

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_0}{V} dV = -nRT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Comme $p_1 V_1 = p_2 V_2$, le travail peut s'exprimer en fonction des volumes ou des pressions,

$$W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_0 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Synthèse

Expressions du travail des forces de pression

Les résultats du tableau suivant représentent le travail reçu par le système {gaz} dans le cas où le piston a une vitesse nulle dans l'état initial et dans l'état final.

Transformation	Propriété	Travail reçu par le gaz de (1) à (2)
Isochore	$V = \text{cte}$	$W = 0$
Monobare	$p_{\text{ext}} = \text{cte}$	$W = -p_{\text{ext}}(V_2 - V_1)$
Isobare	$p = p_0 = \text{cte}$	$W = -p_0(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)$
Isotherme	$T = T_0 = \text{cte}$	$W = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT_0 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$

II.5. Lien avec le diagramme de Clapeyron

Lors de l'évolution quasi stationnaire d'un système fermé fluide, la pression p est uniforme – donc définie pour le système – à tout instant. Nous pouvons donc représenter son évolution en fonction d'un autre paramètre.

Définition 15.5. Diagramme de Clapeyron

Le diagramme de Clapeyron (voir figure 15.6) est la représentation graphique de la pression en fonction du volume massique, $p(v)$.

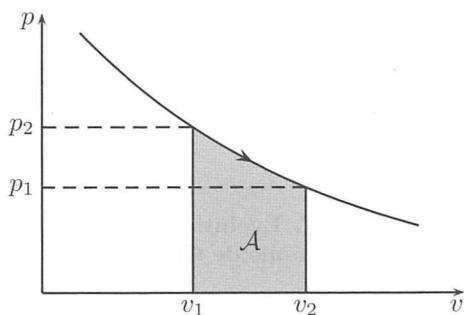


FIG. 15.6. Représentation d'une évolution dans le diagramme de Clapeyron.

En notant m la masse de gaz contenue dans le système, l'aire sous la courbe est donnée par

$$\mathcal{A} = \left| \int_{v_1}^{v_2} p \, dv \right| = \left| \int_{V_1}^{V_2} p \frac{dV}{m} \right| = \frac{|W_{1 \rightarrow 2}|}{m}.$$

Dans un diagramme de Clapeyron, l'aire \mathcal{A} sous la courbe $p(v)$ représentant une évolution quasi stationnaire est la valeur absolue du travail des actions de pression reçu par l'unité de masse du gaz.

1. Lors d'une détente, $V_2 > V_1$, donc $W_{1 \rightarrow 2} < 0$ et $W_{1 \rightarrow 2} = -m\mathcal{A}$.
2. Lors d'une compression, $V_2 < V_1$, donc $W_{1 \rightarrow 2} > 0$ et $W_{1 \rightarrow 2} = +m\mathcal{A}$.

Remarques

1. Une évolution isochore est représentée par un segment vertical dans le diagramme de Clapeyron.
2. Une évolution isobare est représentée par un segment horizontal dans le diagramme de Clapeyron.

Attention

Diagramme de Watt ou de Clapeyron ?

On représente souvent l'évolution quasi stationnaire d'un système fermé en coordonnées (p, V) , où V est le volume du système (à ne pas confondre avec v , le volume massique) : c'est le diagramme de Watt. L'aire sous la courbe $p(V)$ représente alors directement la valeur absolue du travail reçu par le système lors de la transformation correspondante.

II.6. Cas d'une transformation cyclique

Définition 15.6. Transformation cyclique

Un système subit une transformation cyclique si l'état final est identique à l'état initial. La représentation d'une transformation cyclique dans le diagramme de Clapeyron est une courbe fermée.

Nous verrons l'importance que revêt ce type de transformation lors de l'étude des machines thermiques.

Considérons une transformation telle que le cycle soit parcouru dans le sens rétrograde (voir figure 15.7).

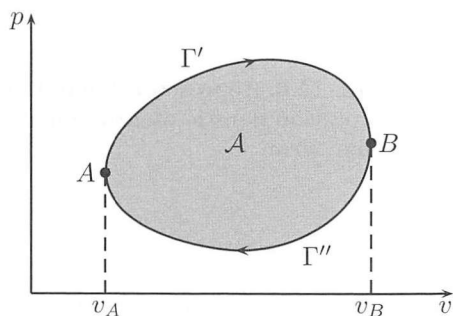


FIG. 15.7. Évolution cyclique dans le diagramme de Clapeyron.

Décomposons l'évolution en deux étapes : de A à B le long du chemin Γ' , puis de B à A le long du chemin Γ'' (voir figure 15.8).

L'aire \mathcal{A}' sous la courbe Γ' est donnée par

$$\mathcal{A}' = \int_{v_A(\Gamma')}^{v_B} p \, dv = \frac{1}{m} \int_{v_A(\Gamma')}^{v_B} p \, dV = -\frac{W_{A \rightarrow B, \Gamma'}}{m}.$$

L'aire \mathcal{A}'' sous la courbe Γ'' est donnée par

$$\mathcal{A}'' = \int_{v_A(\Gamma'')}^{v_B} p \, dv = \frac{1}{m} \int_{v_A(\Gamma'')}^{v_B} p \, dV = -\frac{1}{m} \int_{v_B(\Gamma'')}^{v_A} p \, dV = \frac{W_{A \rightarrow B, \Gamma''}}{m}.$$

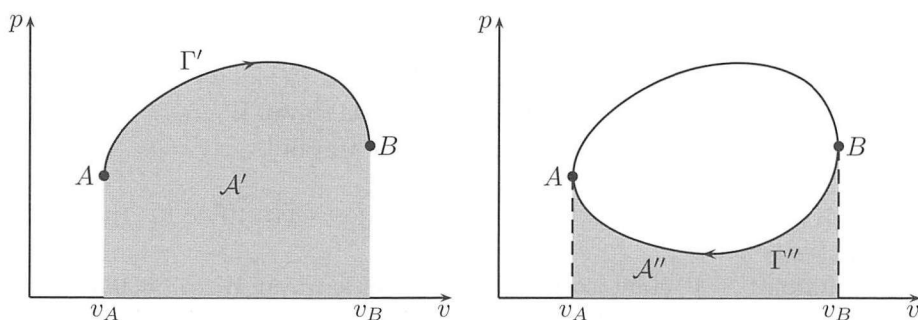


FIG. 15.8. Décomposition du cycle en deux étapes.

L'aire du cycle vaut

$$A = \mathcal{A}' - \mathcal{A}'' = -\frac{[W_{A \rightarrow B, \Gamma'} + W_{A \rightarrow B, \Gamma''}]}{m} = -\frac{W_{\text{cycle}}}{m}.$$

Elle est directement reliée au travail total reçu par l'unité de masse du système sur un cycle.

Nous obtenons $W_{\text{cycle}} < 0$: sur un cycle, le système cède de l'énergie à l'extérieur sous forme de travail (le travail reçu est négatif) ; il se comporte donc comme un moteur. On parle de cycle moteur.

Lorsqu'un système subit une évolution cyclique, l'aire du cycle dans le diagramme de Clapeyron représente, en valeur absolue, le travail massique reçu par le système sur un cycle,

$$\mathcal{A} = \frac{|W_{\text{cycle}}|}{m}.$$

- ▶ Si la courbe est parcourue dans le sens rétrograde, $W_{\text{cycle}} < 0$: le cycle est moteur, le système cède du travail à l'extérieur.
- ▶ Si la courbe est parcourue dans le sens direct, $W_{\text{cycle}} > 0$: le cycle est récepteur, le système reçoit du travail de la part de l'extérieur.

EXERCICE CORRIGÉ 15.7.

Travail reçu le long d'un chemin donné

Un système, constitué de n moles de gaz parfait, subit une transformation d'un état initial (1) à un état final (2). On donne $p_1 = 4,0$ bars, $V_1 = 10$ L et $T_1 = 600$ K pour l'état initial, $p_2 = 1,0$ bar et $V_2 = 20$ L pour l'état final.

1. Déterminer la température T_2 de l'état final.
2. Cette transformation est constituée de deux étapes :
 - ▶ une transformation isobare de l'état (1) à un état intermédiaire (1') ;
 - ▶ une transformation isochore de l'état (1') à l'état (2).

Déterminer le travail $W'_{1 \rightarrow 2}$ reçu par le gaz lors de cette transformation.

3. On considère un autre chemin :
 - ▶ une transformation isochore de l'état (1) à un état intermédiaire (1'') ;
 - ▶ une transformation isobare de l'état (1'') à l'état (2).

Déterminer le travail $W''_{1 \rightarrow 2}$ reçu par le gaz lors de cette transformation. Que constate-t-on ?

Corrigé

1. L'équation d'état du gaz parfait conduit à $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$, d'où $T_2 = 300$ K.

2. L'évolution $1 \rightarrow 1'$ étant isobare, le gaz reçoit le travail $W_{1 \rightarrow 1'} = -p_1(V_2 - V_1)$.

L'évolution $1' \rightarrow 2$ étant isochore, le gaz reçoit le travail $W_{1' \rightarrow 2} = 0$.

Le travail total reçu par le gaz vaut donc

$$W'_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 1'} + W_{1' \rightarrow 2} = -p_1(V_2 - V_1) = -4,0 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3},$$

soit $W'_{1 \rightarrow 2} = -4,0$ kJ.

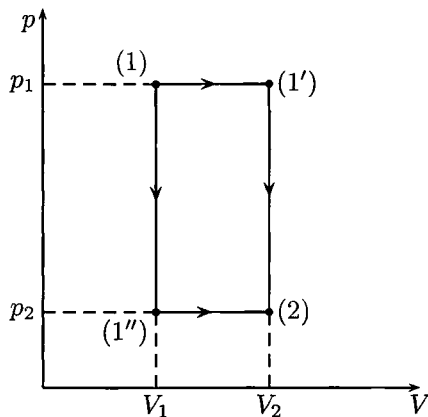
3. L'évolution $1 \rightarrow 1''$ étant isochore, le gaz reçoit le travail $W_{1 \rightarrow 1''} = 0$. L'évolution $1'' \rightarrow 2$ étant isobare, le gaz reçoit le travail $W_{1'' \rightarrow 2} = -p_2(V_2 - V_1)$. Le travail total reçu par le gaz vaut donc

$$W''_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 1''} + W_{1'' \rightarrow 2} = -p_2(V_2 - V_1) = -1,0 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3},$$

soit $W''_{1 \rightarrow 2} = -1,0$ kJ.

Le travail reçu par le gaz entre l'état (1) et l'état (2) n'est pas le même pour les deux transformations considérées.

Nous pouvons représenter les deux transformations dans le diagramme de Watt. Le travail reçu lors des évolutions isochores étant nul, le travail total reçu est représenté par l'aire sous le segment isobare. Nous pouvons immédiatement voir que le travail reçu diffère pour les deux chemins considérés.



Le travail reçu par un système lors d'une transformation dépend du chemin suivi pour aller de l'état final à l'état initial.

III. Échange thermique d'énergie avec l'extérieur : transfert thermique

III.1. Notion de transfert thermique

Le travail est un mode de transfert d'énergie à un système au niveau macroscopique : il se fait par le moyen de forces entraînant un déplacement macroscopique de matière (action d'un piston sur un gaz par exemple).

Les transferts d'énergie qui se font par travail au niveau microscopique sont appelés transferts thermiques.

Définition 15.8. *Transfert thermique*

Le transfert thermique est la quantité d'énergie reçue par le système au niveau microscopique au cours d'une transformation. On le note Q .

III.2. Les différents types de transferts thermiques

Il existe trois modes de transfert thermique.

La conduction Aussi appelée diffusion thermique, c'est un mode de transfert direct d'énergie au sein d'un milieu matériel (transmission de proche en proche du mouvement d'agitation thermique). Ce transfert se fait des zones de température élevée aux zones de basse température, et tend à homogénéiser la température.

La convection Ce mode de transfert d'énergie thermique, caractéristique des fluides (liquides ou gaz), est dû à un transport macroscopique de matière dans le référentiel d'étude. En se déplaçant, la matière transporte avec elle son énergie interne. La convection peut être libre (élévation du fluide chaud, moins dense, sous l'effet de la poussée d'Archimède), ou forcée quand le mouvement du fluide est imposé par un opérateur extérieur au système (pompe de circulation pour les circuits de chauffage central, par exemple). La convection est un mode de transport de l'énergie interne extrêmement efficace.

Le rayonnement C'est un mode de transfert d'énergie par une onde électromagnétique située principalement dans l'infrarouge. L'onde électromagnétique transporte de l'énergie ; lorsque l'onde pénètre dans un milieu matériel, elle peut être absorbée en lui cédant son énergie, qui est alors transformée en énergie d'agitation thermique. C'est le principe de l'échauffement d'un corps exposé au soleil ou au rayonnement émis par un four à micro-ondes.

Un corps chauffé émet des ondes électromagnétiques. Ainsi, un corps chaud peut céder à distance de l'énergie interne à un corps plus froid *via* les ondes électromagnétiques. C'est ce phénomène qui explique la sensation de chaleur intense que l'on ressent devant un four chaud⁸.

Les trois modes de transfert thermique sont la conduction, la convection et le rayonnement.

Dans la plupart des cas, ces trois modes de transfert coexistent, mais ils peuvent avoir des importances relatives très diverses :

- ▶ le transfert par rayonnement est le seul pouvant avoir lieu dans le vide ;
- ▶ la conduction existe dans tous les corps matériels, mais est souvent masquée par la convection dans les fluides ;
- ▶ la conduction est un phénomène lent : sur une durée T , on peut montrer que la diffusion permet la réalisation d'un transfert thermique sur une distance variant comme \sqrt{T} (il faut une durée 100 fois plus grande pour que les effets de la diffusion thermique se ressentent sur une distance 10 fois plus grande).

8. Pour se persuader que cette sensation de chaleur intense est loin d'être due au contact de la peau avec l'air chaud, l'observateur peut intercaler délicatement un journal entre le four et lui : la sensation de chaleur intense disparaît immédiatement alors que l'air chaud n'a pas été chassé. Le journal a simplement bloqué le rayonnement infrarouge émis par le four.

III.3. Transformation adiabatique

Définition 15.9. Transformation adiabatique

Une transformation est dite adiabatique si le système n'échange aucune énergie thermique avec l'extérieur au cours de son évolution, $Q = 0$.

Un paroi qui ne permet pas les transferts thermiques est dite athermane⁹ ou calorifugée. On dit alors que le système est calorifugé, ou thermiquement isolé.

Dans la pratique, on peut considérer une transformation comme adiabatique si elle est « suffisamment rapide » pour que le transfert thermique n'ait pas le temps de se faire avec l'extérieur : il faut que la durée de la transformation soit petite devant le temps caractéristique du transfert par diffusion à travers la paroi.

Attention

Transformation adiabatique

Il ne suffit pas que le transfert thermique soit globalement nul pour que la transformation soit adiabatique, il faut qu'il soit nul à chaque instant de l'évolution.

Par définition, un système isolé n'échange pas d'énergie avec l'extérieur, donc en particulier pas de transfert thermique.

Un système isolé subit une transformation adiabatique.

III.4. Thermostat

Définition 15.10. Thermostat

On appelle thermostat (ou source d'énergie thermique) tout système fermé qui peut échanger de l'énergie thermique en gardant une température constante et uniforme.

- ▶ Un thermostat n'échange pas d'énergie sous forme de travail.
- ▶ La température du thermostat reste uniforme à chaque instant.
- ▶ On rencontre parfois la dénomination désuète de « source de chaleur ».

Le thermostat est un modèle ; un système réel s'en approchera d'autant plus qu'il est « grand » : sa capacité thermique doit être très grande devant la capacité thermique du système avec lequel il est en contact.

Dans la pratique, une grande masse d'eau brassée de plusieurs litres peut servir de thermostat pour des expériences de petite taille, car sa capacité thermique est suffisamment grande. Si nécessaire, un système de réfrigération ou de chauffage de cette eau peut maintenir sa température constante. En cuisine, un bain-marie (eau bouillante autour d'un récipient) est un thermostat qui maintient une température constante de 100 °C. Un four ventilé réglable en température peut être considéré comme un thermostat.

9. Une paroi qui permet les transferts thermiques est dite diathermane.

EXERCICE CORRIGÉ 15.11.*Cas limite du thermostat*

Considérons deux systèmes S_1 et S_2 en contact thermique, l'ensemble étant isolé. On note T_1 la température initiale de S_1 et T_2 celle de S_2 ; leurs capacités thermiques respectives sont $C_{v,1}$ et $C_{v,2}$. L'ensemble évolue jusqu'à ce que les deux systèmes atteignent une même température T_f .

1. Déterminer T_f .
2. Montrer que si $C_{v,1} \gg C_{v,2}$, le système S_1 joue le rôle d'un thermostat.
3. Application numérique :

a/ On considère 10,0 mL d'eau pris à 10,0 °C placés dans 1,00 L d'eau à 50,0 °C;

b/ On considère 1,00 L d'eau pris à 50,0 °C placé dans une pièce de 100 m³ à 20,0 °C. Les capacités thermiques volumiques vérifient $C_{\text{vol,eau}} = 3,34 \cdot 10^3 C_{\text{vol,air}}$.

Corrigé

1. La variation de l'énergie interne de S_1 quand sa température varie de T_1 à T_f est $\Delta U_1 = C_{v,1}(T_f - T_1)$; de même, l'énergie interne de S_2 varie de $\Delta U_2 = C_{v,2}(T_f - T_2)$. L'ensemble étant isolé, il n'échange pas d'énergie avec l'extérieur. L'énergie ΔU_1 reçue par S_1 est donc égale à l'énergie $-\Delta U_2$ cédée par S_2 , soit

$$C_{v,1}(T_f - T_1) = -C_{v,2}(T_f - T_2) \Rightarrow T_f = \frac{C_{v,1}T_1 + C_{v,2}T_2}{C_{v,1} + C_{v,2}}.$$

2. Si $C_{v,1} \gg C_{v,2}$, on peut faire une approximation dans l'expression de T_f ,

$$T_f = \frac{C_{v,1}T_1 + C_{v,2}T_2}{C_{v,1} + C_{v,2}} \approx \frac{C_{v,1}T_1 + C_{v,2}T_2}{C_{v,1}} = T_1 + \frac{C_{v,2}}{C_{v,1}}T_2 \approx T_1.$$

La température de S_1 peut être considérée comme invariable; ce système joue donc le rôle d'un thermostat.

3. a/ On calcule

$$T_f = \frac{0,01 \times 10 + 50}{0,01 + 1} = 49,6 \text{ °C.}$$

La variation de la température du litre d'eau est négligeable devant celle des 10 mL.

b/ On calcule

$$T_f = \frac{10^{-3} \times 3,34 \cdot 10^3 \times 50 + 100 \times 20}{10^{-3} \times 3,34 \cdot 10^3 + 100} = 21,0 \text{ °C.}$$

C'est la variation de température de l'air de la pièce qui est négligeable, ce système jouant le rôle de thermostat.

Ces deux derniers exemples montrent que ce n'est pas la capacité thermique du système qui permet seule de déterminer s'il joue le rôle d'un thermostat : il faut la comparer à la capacité thermique du système avec lequel il est en contact.

III.5. Transformation monotherme

Définition 15.12. Transformation monotherme

Un système subit une transformation monotherme s'il ne reçoit un transfert thermique Q que d'un seul thermostat à la température T_s .

Le système n'est pas nécessairement en contact avec le thermostat pendant toute la durée de son évolution. Quand il n'est pas en contact avec le thermostat, il ne peut échanger de l'énergie avec l'extérieur que sous forme de travail.

On peut étendre cette définition, en parlant de transformation polytherme lorsque le système reçoit successivement des échanges thermiques Q_i de la part de plusieurs thermostats, aux températures $T_{s,i}$. Un cas important est celui des transformations dithermes : le système est en contact avec deux thermostats au cours de son évolution. C'est le cas des moteurs thermiques de voiture : tout se passe comme si l'essence en combustion jouait le rôle de thermostat chaud et l'air ambiant celui de thermostat froid.

III.6. Transformation isotherme

Définition 15.13. Transformation isotherme

Un système subit une transformation isotherme si sa température reste constante tout au long de son évolution.

Cela sous-entend que sa température reste uniforme à chaque instant de la transformation, afin que l'on puisse parler de « la » température du système. Il faut pour cela que la transformation soit quasi stationnaire vis-à-vis des ondes de température : on doit procéder suffisamment lentement pour laisser le temps aux éventuelles inhomogénéités de température de s'uniformiser.

Attention

Isotherme \neq adiabatique

Il ne faut pas confondre transformation isotherme et transformation adiabatique :

- ▶ On peut fournir de l'énergie thermique à un système sans modifier sa température (par exemple, lors d'un changement d'état : lorsque l'on chauffe de l'eau pour la faire bouillir à pression ambiante, sa température reste égale à 100 °C alors qu'elle reçoit un transfert thermique). Cette évolution est isotherme, mais non adiabatique.
- ▶ On peut modifier la température d'un système sans qu'il échange de transfert thermique avec l'extérieur. Par exemple, si l'on comprime un gaz dans une enceinte calorifugée, sa température augmente ; il a reçu de l'énergie sous forme de travail, mais l'évolution est adiabatique ($Q = 0$). Cette transformation est adiabatique, mais non isotherme.

EXEMPLES 15.14.

- ▶ On considère le gonflage d'un pneu de bicyclette à partir de l'air ambiant. Le temps caractéristique du transfert thermique à travers une épaisseur de 5 mm de caoutchouc est $\tau \approx 2,5$ min.

La durée T mise pour gonfler le pneu avec un compresseur étant de l'ordre de quelques secondes, on a $T \ll \tau$: on peut négliger les échanges d'énergie thermique avec l'extérieur. L'air utilisé pour gonfler le pneu subit donc une transformation adiabatique.

► Un ballon de baudruche a une épaisseur de l'ordre de 0,1 mm ; le temps caractéristique du transfert thermique est $\tau \approx 60$ ms. Lorsque l'on gonfle un tel ballon sur une durée T de quelques secondes, on a $T \gg \tau$: on peut considérer qu'à tout instant l'air dans le ballon est en équilibre thermique avec l'air extérieur. L'air utilisé pour gonfler le ballon subit donc une transformation isotherme.

► Lors de l'ouverture d'une bouteille de boisson gazeuse, on peut observer un brouillard au niveau du goulot. La détente de l'air sous pression est très rapide ; l'air étant un mauvais conducteur thermique, on peut négliger le transfert thermique avec l'air extérieur. On observe donc une détente adiabatique, qui s'accompagne d'une diminution de température. Le brouillard observé n'est autre que la condensation de la vapeur d'eau en minuscules gouttelettes.

IV. Exercices

1. Transformation polytropique ★

(solution page 739)

Pour un gaz parfait, on appelle transformation polytropique d'indice k une transformation quasi stationnaire telle qu'à chaque instant $pV^k = \text{cte}$.

1. Identifier le type de transformation correspondant aux cas limites $k = 1$ et $k = 0$.
2. Le gaz étant considéré comme parfait, exprimer le travail W reçu par le gaz lors d'une transformation de l'état initial (p_1, V_1, T_1) à l'état final (p_2, V_2, T_2) .

2. Compression d'un gaz réel ★★

(solution page 739)

L'équation d'état du gaz parfait ne rend pas compte des propriétés des gaz réels (interactions entre molécules, par exemple). Le physicien néerlandais Johannes Diderik Van der Waals a proposé en 1873 une équation d'état plus « réaliste », appelée équation de Van der Waals,

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Les paramètres a et b sont des constantes caractéristiques du gaz considéré.

Déterminer le travail reçu lorsqu'on le comprime du volume V_1 au volume V_2 en lui faisant subir une transformation quasi stationnaire isotherme à la température T_0 .

Application numérique : on comprime une mole d'azote, de $V_1 = 10$ L à $V_2 = 1$ L, à la température $T_0 = 300$ K. On donne pour ce gaz $a = 140,8$ kPa · dm⁶ · mol⁻¹ et $b = 0,0391$ dm³ · mol⁻¹.

Calculer le travail nécessaire, et comparer avec la valeur que l'on obtiendrait en considérant l'azote comme un gaz parfait. On donne $R = 8,314$ J · K⁻¹ · mol⁻¹.

3. Transformation cyclique ★

(solution page 740)

On considère un gaz parfait subissant une transformation cyclique quasi stationnaire dont l'évolution en coordonnées (p, V) est donnée sur la figure 15.9.

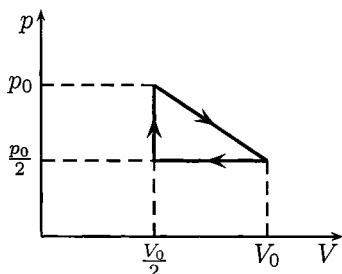


FIG. 15.9. Transformation cyclique d'un gaz représentée dans un diagramme de Clapeyron.

1. Déterminer le travail reçu par le gaz pendant un cycle. Le gaz se comporte-t-il comme un moteur ou comme un récepteur ?
2. L'évolution $(p_0, \frac{V_0}{2}) \rightarrow (\frac{p_0}{2}, V_0)$ est-elle isotherme ?

4. Air comprimé ★★

(solution page 740)

Un récipient de volume V_0 est initialement rempli d'air à la pression p_0 et à la température T_0 , égales à la pression et à la température du milieu extérieur.

On désire augmenter la pression à l'intérieur du récipient à l'aide d'une pompe : lorsque l'on tire sur le piston, la soupape S_1 s'ouvre, permettant le remplissage du corps de la pompe par de l'air à la pression p_0 . Lorsque l'on pousse sur le piston, la soupape S_1 est fermée, et la soupape S_2 s'ouvre dès que la pression à l'intérieur de la pompe est supérieure à la pression dans le récipient (voir figure 15.10).

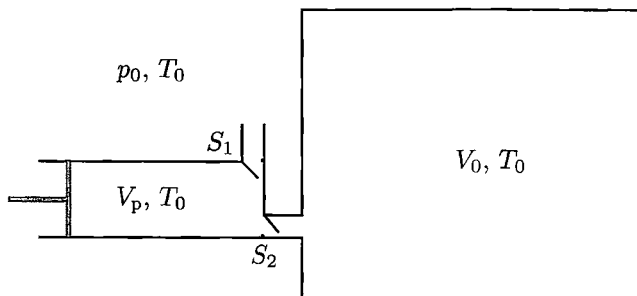


FIG. 15.10. Compression d'air.

L'air est considéré comme un gaz parfait, subissant des transformations quasi stationnaires et isothermes.

On note $\alpha = \frac{V_p}{V_0}$.

1. Qualifier le système défini par les parois du récipient à remplir (isolé, fermé ou ouvert).
2. Déterminer la pression p_1 après une phase de gonflage (comprenant un aller-retour du piston), puis la pression p_i après la i -ième phase de gonflage.
3. On s'intéresse à la première phase de gonflage. Que peut-on dire de l'état de la soupape S_2 ?

En considérant un système fermé que l'on précisera, déterminer le travail W_1 que l'on doit fournir pour amener la pression dans le récipient de p_0 à p_1 . On exprimera W_1 en fonction de p_0 .

4. On s'intéresse à la i -ième phase de gonflage, qui amène la pression dans le récipient de p_{i-1} à p_i . En décomposant cette phase en deux étapes en fonction de l'état (ouvert ou fermé) de la soupape S_2 , exprimer le travail W_i reçu par l'air en fonction de p_0 , V_0 , i et α .

Comparer W_{i+1} et W_i et commenter.

5. Calculer W_t le travail total reçu par le gaz lors d'une succession de n phases de gonflage.

6. Application numérique : on donne $V_0 = 1,0$ L et $\alpha = 0,10$. Partant de $p_0 = 1,0$ bar, on veut atteindre la pression $10p_0$.

Déterminer le nombre n d'allers-retours du piston nécessaires, et le travail total W_t à fournir.

Chapitre 16

PREMIER PRINCIPE. BILANS D'ÉNERGIE

LA CONSOMMATION d'énergie est un problème majeur de notre société : comment concilier l'augmentation de notre consommation d'énergie avec les ressources limitées de notre planète ? Il faudrait limiter la consommation et augmenter la production d'énergie. Mais est-il correct de parler de « production » d'énergie ? Non, comme nous le verrons dans ce chapitre : l'énergie est une grandeur qui ne peut ni être créée, ni disparaître ; on ne peut réaliser que des transformations d'énergie d'une forme à une autre. Les différents modes d'échange d'énergie (travail et transfert thermique) entre un système et le milieu extérieur ont été étudiés dans le chapitre précédent ; ce chapitre permettra d'effectuer des bilans d'énergie, c'est-à-dire d'expliquer les variations de l'énergie d'un système au cours d'une transformation. Cela sera l'occasion d'approfondir les transitions de phase étudiées dans le chapitre 14.

I. Le premier principe de la thermodynamique

I.1. Conservation de l'énergie

Faire un bilan d'énergie pour un système S , c'est expliciter la variation $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ de l'énergie de ce système lors d'une transformation d'un état (1) vers un état (2), en précisant les phénomènes physiques à l'origine de cette variation.

Principe 16.1. Conservation de l'énergie

L'énergie \mathcal{E} d'un système est une grandeur extensive conservative ; le bilan d'énergie s'écrit sous la forme générale

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{éch}}.$$

Si l'énergie d'un système varie, ce ne peut être que par échange avec l'extérieur.

On ne peut créer ou faire disparaître de l'énergie ; elle ne peut que se transformer d'une forme à une autre¹.

► La grandeur $\mathcal{E}_{\text{éch}}$ représente la *quantité d'énergie* reçue algébriquement par le système pendant sa transformation, par échange avec l'extérieur à travers la frontière séparant le système de l'extérieur.

► La grandeur $\Delta\mathcal{E}$ représente la *variation d'énergie* du système, différence entre l'énergie finale et l'énergie initiale, $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$.

Par exemple, si on lance un solide qui glisse sur une table, il ralentit jusqu'à s'arrêter. Son énergie cinétique a diminué ; cette énergie n'a pas « disparu », elle s'est transformée en énergie thermique (échauffement de la zone de contact sous l'effet des frottements).

Avant d'étudier ses variations, il convient de définir l'énergie totale d'un système.

1. Pour reprendre la célèbre phrase de Lavoisier : « rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme » !

Définition 16.2. Énergie totale d'un système

L'énergie totale du système est définie par

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + U.$$

- ▶ \mathcal{E}_c est son énergie cinétique macroscopique, qui dépend du référentiel d'étude.
- ▶ $U = e_c + e_p$ est son énergie interne, indépendante du référentiel d'étude, somme de son énergie cinétique microscopique (agitation thermique) et de son énergie potentielle interne e_p (énergie potentielle d'interactions entre les constituants microscopiques du système).

Un système est dit **isolé** si la quantité d'énergie qu'il reçoit est nulle, $\mathcal{E}_{\text{éch}} = 0$. On en déduit la propriété suivante.

L'énergie totale d'un système isolé reste constante, $\Delta\mathcal{E} = 0$.

I.2. Énoncé du premier principe

On a vu dans le chapitre 15 que les deux façons qu'a un système d'échanger de l'énergie avec l'extérieur sont le travail et le transfert thermique,

$$\mathcal{E}_{\text{éch}} = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}.$$

Le premier principe ne se limite pas à affirmer la conservation de l'énergie ; il précise les propriétés de l'énergie interne du système.

Principe 16.3. Premier principe de la thermodynamique

▶ L'énergie totale $U + \mathcal{E}_c$ d'un système est une **grandeur conservative**, dont le bilan s'écrit sous la forme générale

$$\Delta U + \Delta\mathcal{E}_c = W + Q$$

où W et Q sont respectivement le travail et le transfert thermique reçus par le système au cours de la transformation.

- ▶ L'énergie interne U est une fonction d'état : elle ne dépend que de l'état macroscopique du système.
- ▶ L'énergie interne U est une grandeur extensive.

Détaillons ces différentes propriétés.

L'énergie interne est une fonction d'état

L'énergie interne ne dépendant que de l'état macroscopique du système, sa variation entre deux états (1) et (2) s'écrit

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

Cette variation est indépendante du *chemin suivi* (c'est-à-dire de la nature de la transformation) pour aller de l'état initial à l'état final ; elle ne dépend que des valeurs initiale U_1 et finale U_2 de l'énergie interne.

Cas d'une transformation cyclique

Si l'état final est identique à l'état initial, la transformation est dite cyclique. L'énergie interne étant une fonction d'état, elle a alors la même valeur dans l'état initial et dans l'état final, $U_2 = U_1$. Sa variation est donc nulle sur un cycle, $\Delta U = 0$.

La variation de l'énergie interne d'un système est nulle lorsque ce système subit une transformation cyclique,

$$\Delta U = 0.$$

Pour une transformation cyclique, l'énergie cinétique du système a la même valeur dans l'état final et l'état initial, et sa variation est nulle, $\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c,2} - \mathcal{E}_{c,1} = 0$. La variation de l'énergie totale est donc nulle pour une transformation cyclique, $\Delta \mathcal{E} = \Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = 0$. On peut en déduire l'écriture du premier principe pour une telle transformation.

Propriété 16.4. Premier principe pour une transformation cyclique

La variation de l'énergie totale d'un système est nulle lorsqu'il subit une transformation cyclique ; le bilan d'énergie s'écrit alors

$$W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = 0.$$

L'énergie interne est extensive

Cette propriété est en fait une approximation largement vérifiée dans les situations usuelles que l'on rencontrera : compression et détente d'un gaz dans un cylindre, chauffage d'un fluide...

Une grandeur est extensive si elle est additive lors de la réunion de deux systèmes disjoints². Étant donnés deux systèmes disjoints A et B (voir figure 16.1), l'extensivité de l'énergie interne s'écrit

$$U(A \cup B) = U(A) + U(B).$$

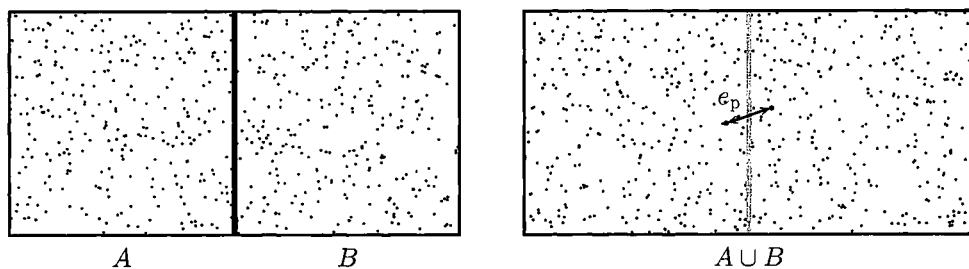


FIG. 16.1. Énergie interne et extensivité.

L'énergie interne comprend l'énergie cinétique microscopique et l'énergie potentielle interne d'interactions entre les particules. Pour le système (A), elle s'écrit

$$U(A) = \sum_{i \in A} e_{c,i} + \sum_{i,j \in A} e_{p,ij}$$

2. C'est-à-dire n'ayant aucune partie commune.

où $e_{c,i}$ représente l'énergie cinétique de la i -ème particule du système, et $e_{p,ij}$ l'énergie potentielle d'interactions entre la i -ième et la j -ième particule³.

L'énergie interne du système (B) s'écrit de même

$$U(B) = \sum_{i \in B} e_{c,i} + \sum_{i,j \in B} e_{p,ij}.$$

L'énergie interne du système ($A \cup B$) s'écrit

$$U(A \cup B) = \sum_{i \in A} e_{c,i} + \sum_{j \in B} e_{c,j} + \sum_{i,j \in A} e_{p,ij} + \sum_{i,j \in B} e_{p,ij} + \sum_{i \in A, j \in B} e_{p,ij},$$

soit

$$U(A \cup B) = U(A) + U(B) + \sum_{i \in A, j \in B} e_{p,ij} \neq U(A) + U(B).$$

L'énergie interne n'est donc pas rigoureusement extensive du fait de l'énergie potentielle d'interaction entre les particules de (A) et celles de (B). Cependant, les interactions entre les molécules d'un gaz étant à très courte portée⁴, le terme d'énergie potentielle correspondant ne concerne que les molécules situées au voisinage de la frontière entre les deux systèmes, c'est-à-dire une infime proportion du nombre total N de molécules dans le cas de la limite thermodynamique ($N \gg 1$). On peut alors négliger le terme d'interaction entre les deux systèmes devant les autres termes⁵, et l'énergie interne est alors extensive.

Remarques

- L'énergie interne du gaz parfait est rigoureusement extensive. En effet, dans le cadre de ce modèle, les molécules sont sans interactions; le terme d'énergie potentielle microscopique est alors nul.
- Pour un système isolé, le premier principe sous forme de bilan s'écrit

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = 0,$$

car $W_{1 \rightarrow 2} = 0$ et $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$: un système isolé n'échange aucune énergie avec l'extérieur, que ce soit sous forme de travail ou de transfert thermique. On peut avoir $\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = 0$ avec $W_{1 \rightarrow 2} = -Q_{1 \rightarrow 2} \neq 0$, mais un tel système n'est pas isolé. Il n'y a d'ailleurs pas l'équivalent du « système pseudo-isolé » de la mécanique en thermodynamique.

Écriture simplifiée du bilan d'énergie

Dans la plupart des transformations subies par des systèmes gazeux, on peut négliger la variation d'énergie cinétique du système devant la variation d'énergie interne. Le bilan d'énergie du premier principe s'écrit alors

$$\Delta U = W + Q.$$

3. La somme porte sur toutes les paires de particules du système; la notation simplifiée utilisée signifie

$$\sum_{i \in A} \sum_{\substack{j \in A \\ j \neq i}} e_{p,ij}.$$

4. Elles décroissent comme $\frac{1}{r^7}$.

5. Ce n'est pas toujours le cas : en astrophysique, on ne peut pas négliger les interactions gravitationnelles entre deux systèmes et l'énergie interne n'est alors franchement pas extensive.

► S'il faut tenir compte des variations de l'énergie cinétique, c'est explicitement précisé dans l'énoncé du problème. Dans la pratique, on peut écrire « par défaut » le premier principe sous la forme $\Delta U = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$, sauf mention contraire.

Il est d'usage d'adopter une écriture simplifiée du bilan d'énergie (sans les indices 1 et 2),

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = W + Q \quad \text{ou} \quad \Delta U = W + Q.$$

Il ne faut pas oublier que ce bilan est écrit entre deux états (1) et (2) :

- le travail et le transfert thermiques reçus sont calculés entre ces deux états, ce que l'on peut préciser en notant $W_{1 \rightarrow 2}$ et $Q_{1 \rightarrow 2}$;
- le terme de variation d'énergie est calculé entre ces deux états,

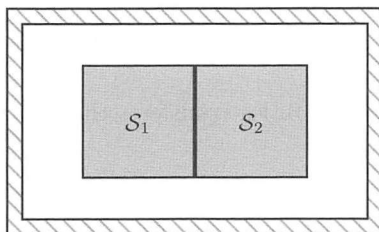
$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = U_2 - U_1 + \mathcal{E}_{c,2} - \mathcal{E}_{c,1}.$$

On prendra soin d'expliciter les bornes quand on étudie une succession de plusieurs transformations, comme dans l'exercice corrigé 16.6.

EXERCICE CORRIGÉ 16.5. *Utiliser l'extensivité de l'énergie interne*

Deux blocs d'acier identiques \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de même masse $m = 0,20$ kg sont placés en contact dans une enceinte indéformable calorifugée. Ils sont considérés comme indilatables et incompressibles, et peuvent échanger un transfert thermique entre eux. On donne la capacité thermique massique de l'acier $c = 0,50$ kJ · K⁻¹ · kg⁻¹.

Les solides sont initialement aux températures $T_{i,1} = 20$ °C et $T_{i,2} = 50$ °C.



1. Déterminer la température finale des deux corps.
2. Détailler les échanges d'énergie.

Corrigé

1. L'état final est un état d'équilibre ; en particulier, l'équilibre thermique doit être réalisé : la température du système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ doit être uniforme, de valeur T_f .

Considérons le système $\{\mathcal{S}_1\}$; sa température passant de $T_{i,1}$ à T_f , sa variation d'énergie interne entre l'état initial et l'état final vaut

$$\Delta U(\mathcal{S}_1) = mc [T_f - T_{i,1}].$$

De même la variation d'énergie interne du système $\{\mathcal{S}_2\}$ vaut

$$\Delta U(\mathcal{S}_2) = mc [T_f - T_{i,2}].$$

L'énergie interne étant extensive, on peut écrire $U(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = U(\mathcal{S}_1) + U(\mathcal{S}_2)$. La variation d'énergie interne du système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ vaut donc

$$\Delta U(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = \Delta U(\mathcal{S}_1) + \Delta U(\mathcal{S}_2) = mc [2T_f - T_{i,1} - T_{i,2}].$$

L'enceinte étant calorifugée, le transfert thermique reçu par le système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ est nul, $Q = 0$.

Une phase condensée indilatable et incompressible subit une transformation isochore ; le travail reçu par le système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ est donc nul, $W = 0$.

Le premier principe appliqué au système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\}$ s'écrit alors

$$\Delta U(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = W + Q = 0,$$

soit $2T_f - T_{i,1} - T_{i,2} = 0$. La température finale vaut donc

$$T_f = \frac{T_{i,1} + T_{i,2}}{2} = 35 \text{ }^\circ\text{C}.$$

La température finale est ici la moyenne des deux températures initiales ; il est inutile de convertir les températures en kelvins pour calculer leur valeur moyenne.

2. Chaque solide étant indéformable, le travail mécanique qu'il reçoit est nul,

$$W_{(\mathcal{S}_1)} = 0 \quad \text{et} \quad W_{(\mathcal{S}_2)} = 0.$$

Le premier principe appliqué au système $\{\mathcal{S}_1\}$ s'écrit

$$\Delta U(\mathcal{S}_1) = W_{(\mathcal{S}_1)} + Q_{(\mathcal{S}_1)} = Q_{(\mathcal{S}_1)} = mc[T_f - T_{i,1}] = mc \frac{T_{i,2} - T_{i,1}}{2} = 1,5 \text{ kJ}.$$

Le premier principe appliqué au système $\{\mathcal{S}_2\}$ s'écrit

$$\Delta U(\mathcal{S}_2) = W_{(\mathcal{S}_2)} + Q_{(\mathcal{S}_2)} = Q_{(\mathcal{S}_2)} = mc[T_f - T_{i,2}] = mc \frac{T_{i,1} - T_{i,2}}{2} = -1,5 \text{ kJ}.$$

Comme $\Delta U(\mathcal{S}_1) + \Delta U(\mathcal{S}_2) = 0$, les transferts thermiques reçus par chaque solide sont opposés, $Q_{(\mathcal{S}_1)} = -Q_{(\mathcal{S}_2)}$.

Méthode

Calculer un transfert thermique

Étant donné un système subissant une transformation d'un état (1) à un état (2) selon un chemin donné, le bilan

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

permet de calculer le transfert thermique $Q_{1 \rightarrow 2}$:

- on a vu dans le chapitre 15 comment calculer le travail $W_{1 \rightarrow 2}$ selon le type de transformation ;
- on a vu dans le chapitre 16 comment calculer la variation d'énergie interne d'un gaz parfait ou d'une phase condensée idéale.

On en déduit $Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U + \Delta \mathcal{E}_c - W_{1 \rightarrow 2}$.

En dehors du cas particulier d'une transformation adiabatique, pour laquelle $Q = 0$, on ne peut en général pas calculer directement le transfert thermique reçu par un système lors d'une transformation quelconque. Il faut alors utiliser le bilan d'énergie du premier principe pour accéder à cette grandeur.

► Le calcul direct du transfert thermique est possible dans le cas de la conduction thermique (étudiée en seconde année); dans certaines situations il peut s'exprimer à l'aide de lois empiriques (contact entre un solide et un fluide en mouvement convectif).

Dans tous les exemples qui suivent, on considère la variation d'énergie cinétique macroscopique négligeable, $\Delta E_c = 0$.

Transformation isotherme d'un gaz parfait

On considère un gaz parfait subissant une transformation isotherme de l'état (p_1, V_1, T_0) à l'état (p_2, V_2, T_0) .

D'après la première loi de Joule, une transformation isotherme d'un gaz parfait se fait sans variation d'énergie interne, $\Delta U = 0$.

Le travail reçu par le gaz au cours d'une telle transformation a été établi page 431 :

$$W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

De la relation $\Delta U = 0 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$, on déduit

$$Q_{1 \rightarrow 2} = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Transformation isochore

On considère un gaz parfait subissant une transformation isochore de l'état (p_1, V_0, T_1) à l'état (p_2, V_0, T_2) . On a vu page 427 qu'un système subissant une transformation isochore (volume V_0 constant) ne reçoit pas de travail des forces de pression, donc $W_{1 \rightarrow 2} = 0$. Le premier principe s'écrit alors $\Delta U = Q_{1 \rightarrow 2}$.

Dans le cas d'un gaz parfait ou d'une phase condensée incompressible et indilatable, la variation d'énergie interne s'écrit $\Delta U = C_v(T_2 - T_1)$.

Le transfert thermique reçu par une phase condensée incompressible et indilatable ou par un gaz parfait lors d'une transformation isochore est donné par

$$Q_{1 \rightarrow 2} = C_v(T_2 - T_1).$$

► Pour un gaz parfait, la relation $\Delta U = C_v(T_2 - T_1)$ est valable quelle que soit la nature de la transformation (première loi de Joule). Ce n'est que dans le cas de la transformation isochore que l'on peut identifier cette expression au transfert thermique, le travail étant nul.

Transformation monobare d'un gaz parfait

On considère un gaz parfait subissant une transformation monobare de l'état (p_0, V_1, T_1) à l'état (p_0, V_2, T_2) . Nous avons vu page 427 que le travail mécanique reçu par un gaz subissant une transformation monobare (pression extérieure p_0 constante) est donné par

$$W_{1 \rightarrow 2} = -p_0(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1).$$

La variation d'énergie interne du gaz pour cette transformation s'écrit

$$\Delta U = C_v(T_2 - T_1).$$

Le transfert thermique s'écrit alors

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U - W_{1 \rightarrow 2} = C_v(T_2 - T_1) - nR(T_2 - T_1) \Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = (C_v - nR)(T_2 - T_1).$$

EXERCICE CORRIGÉ 16.6.*Bilan d'énergie sur différents chemins*

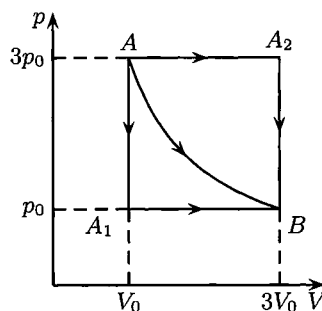
On étudie une détente de n moles d'un gaz parfait d'un état A ($3p_0, V_0$) à un état B ($p_0, 3V_0$).

On considère plusieurs chemins, représentés dans le diagramme de Watt ci-contre.

► **Chemin 1** : le gaz subit un refroidissement isochore de l'état A à l'état A_1 (p_0, V_0), puis une détente isobare le menant à l'état B .

► **Chemin 2** : le gaz subit une détente isobare de l'état A à l'état A_2 ($3p_0, 3V_0$), puis un refroidissement isochore le menant à l'état B .

► **Chemin 3** : le gaz subit une détente isotherme de l'état A à l'état B .



1. Que peut-on dire de la variation d'énergie interne du gaz lors de ces transformations ?
2. Pour quel chemin le transfert thermique reçu par le gaz est-il minimum ? Donner son expression Q_{\min} en fonction de p_0 et V_0 .
3. Calculer le travail et le transfert thermique reçu par le gaz pour chaque chemin. Applications numériques : $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa et $V_0 = 5,0$ L. Le gaz est diatomique, de capacité thermique à volume constant $C_v = \frac{5}{2}nR$. Les transformations sont supposées quasi stationnaires.
4. Détailler les échanges énergétiques pour les deux étapes des chemins 1 et 2 en donnant pour chaque étape l'expression puis la valeur numérique du travail, du transfert thermique et de la variation de l'énergie interne. Effectuer les applications numériques.

Corrigé

1. L'équation d'état du gaz parfait permet de conclure à l'égalité de la température en A et en B , $3p_0 \cdot V_0 = p_0 \cdot 3V_0 = nRT_0$ (ces deux états sont d'ailleurs reliés par une transformation isotherme). L'énergie interne du gaz parfait ne dépendant que de sa température, on en déduit $\Delta U = 0$.

2. Pour chaque transformation, le premier principe s'écrit $\Delta U = W + Q = 0$: le travail et le transfert thermique reçus par le gaz sont opposés.

Le gaz subit une détente, donc $W < 0$, ce qui implique $Q > 0$.

Comme $Q = -W$, le transfert thermique est donné par l'aire sous la courbe correspondant au chemin suivi dans le diagramme de Watt. On voit sur le graphe que cette aire est minimum pour le chemin 1, et vaut $-W = p_0 \times (3V_0 - V_0) = 2p_0V_0$, d'où $Q_{\min} = 2p_0V_0$.

3. Chemin 1 L'aire sous la courbe correspondante est donnée par $\mathcal{A}_1 = 2p_0V_0$. Le travail reçu par le gaz vaut donc $W_1 = -2p_0V_0 = -1,0$ kJ.

Le transfert thermique vaut alors $Q_1 = 2p_0V_0 = 1,0$ kJ.

Chemin 2 L'aire sous la courbe correspondante est donnée par $\mathcal{A}_2 = 6p_0V_0$. Le travail reçu par le gaz vaut donc $W_2 = -6p_0V_0 = -3,0$ kJ.

Le transfert thermique vaut alors $Q_2 = 6p_0V_0 = 3,0$ kJ.

Chemin 3 Le long de l'isotherme, $pV = 3p_0V_0$. Le travail reçu est donc donné par

$$W_3 = - \int_{V_0}^{3V_0} p dV = -3p_0 \int_{V_0}^{3V_0} \frac{dV}{V} = -3p_0V_0 \ln 3 = -1,6 \text{ kJ.}$$

Le transfert thermique vaut alors $Q_3 = 3p_0V_0 \ln 3 = 1,6$ kJ.

Pour chacun de ces chemins, on trouve bien $W < 0$: le gaz a subi une détente ($V_2 > V_1$) et s'est donc comporté comme un moteur vis-à-vis de l'extérieur.

4. Détaillons les échanges d'énergie pour les deux premiers chemins.

Chemin 1 L'étape $A \rightarrow A_1$ est isochore, d'où $W_{A \rightarrow A_1} = 0$.

La variation d'énergie interne est donnée par

$$\Delta U_{A \rightarrow A_1} = \frac{5}{2}nR(T_{A_1} - T_A) = \frac{5}{2}(p_0V_0 - 3p_0V_0) = -5p_0V_0.$$

On en déduit $Q_{A \rightarrow A_1} = \Delta U_{A \rightarrow A_1} - W_{A \rightarrow A_1} = \Delta U_{A \rightarrow A_1} = -5p_0V_0$.

Lors de cette étape, le gaz subit un refroidissement isochore ; il libère de l'énergie sous forme thermique ($Q_{A \rightarrow A_1} < 0$).

L'étape $A_1 \rightarrow B$ est isobare ; le travail vaut donc $W_{A_1 \rightarrow B} = -p_0(3V_0 - V_0) = -2p_0V_0$.

La variation d'énergie interne est donnée par

$$\Delta U_{A_1 \rightarrow B} = \frac{5}{2}R(T_B - T_{A_1}) = \frac{5}{2}(3p_0V_0 - p_0V_0) = 5p_0V_0.$$

On en déduit $Q_{A_1 \rightarrow B} = \Delta U_{A_1 \rightarrow B} - W_{A_1 \rightarrow B} = 7p_0V_0$.

Lors de cette étape, le gaz subit un réchauffement isobare ; il reçoit de l'énergie sous forme thermique ($Q_{A_1 \rightarrow B} > 0$).

$W_{A \rightarrow A_1}$	$Q_{A \rightarrow A_1}$	$\Delta U_{A \rightarrow A_1}$	$W_{A_1 \rightarrow B}$	$Q_{A_1 \rightarrow B}$	$\Delta U_{A_1 \rightarrow B}$
0	$-5p_0V_0$	$-5p_0V_0$	$-2p_0V_0$	$7p_0V_0$	$5p_0V_0$
0 kJ	-2,5 kJ	-2,5 kJ	-1,0 kJ	3,5 kJ	2,5 kJ

Chemin 2 L'étape $A \rightarrow A_2$ est isobare, d'où $W_{A \rightarrow A_2} = -3p_0(3V_0 - V_0) = -6p_0V_0$.

La variation d'énergie interne est donnée par

$$\Delta U_{A \rightarrow A_2} = \frac{5}{2}nR(T_{A_2} - T_A) = \frac{5}{2}(9p_0V_0 - 3p_0V_0) = 15p_0V_0.$$

On en déduit $Q_{A \rightarrow A_2} = \Delta U_{A \rightarrow A_2} - W_{A \rightarrow A_2} = 21p_0V_0$.

L'étape $A_2 \rightarrow B$ est isochore, d'où $W_{A_2 \rightarrow B} = 0$.

La variation d'énergie interne est donnée par

$$\Delta U_{A_2 \rightarrow B} = \frac{5}{2}nR(T_B - T_{A_2}) = \frac{5}{2}(3p_0V_0 - 9p_0V_0) = -15p_0V_0.$$

On en déduit $Q_{A_2 \rightarrow B} = \Delta U_{A_2 \rightarrow B} - W_{A_2 \rightarrow B} = -15p_0V_0$.

$W_{A \rightarrow A_2}$	$Q_{A \rightarrow A_2}$	$\Delta U_{A \rightarrow A_2}$	$W_{A_2 \rightarrow B}$	$Q_{A_2 \rightarrow B}$	$\Delta U_{A_2 \rightarrow B}$
$-6p_0V_0$	$21p_0V_0$	$15p_0V_0$	0	$-15p_0V_0$	$-15p_0V_0$
-3,0 kJ	10,5 kJ	7,5 kJ	0 kJ	-7,5 kJ	-7,5 kJ

II. Enthalpie d'un système

On a vu que le transfert thermique reçu par un système lors d'une transformation isochore est donné par la variation de son énergie interne, $Q_{v,1\rightarrow 2} = \Delta U$, l'indice « v » précisant le caractère isochore de la transformation.

De nombreuses transformations n'étant pas isochores mais isobares, et surtout monobares, existe-t-il une fonction d'état dont la variation donnerait le transfert thermique reçu par le système lors d'une telle transformation ?

Une telle fonction existe : l'enthalpie. Son importance est capitale en chimie et dans l'étude des systèmes en écoulement stationnaire.

II.1. Définition

Définition 16.7. Enthalpie

L'enthalpie d'un système fluide à la pression uniforme p et de volume V est définie par

$$H = U + pV$$

où U est l'énergie interne du système.

- ▶ L'enthalpie est une fonction d'état ; elle a la dimension d'une énergie et s'exprime en joules (J).
- ▶ L'enthalpie est une grandeur extensive.

Le mot enthalpie vient du grec, le préfixe *en-* signifiant « apporter » et le mot *thalpein* signifiant « chaleur ».

Définition 16.8. Seconde loi de Joule

On dit qu'un système obéit à la seconde loi de Joule si son enthalpie ne dépend que de la température.

II.2. Cas du gaz parfait

En utilisant l'équation d'état du gaz parfait, on obtient $H = U(T) + pV = U(T) + nRT$. L'enthalpie molaire est donnée par $H_m = \frac{H}{n} = U_m(T) + RT$, d'où la propriété suivante.

Propriété 16.9. Enthalpie molaire du gaz parfait

L'enthalpie molaire du gaz parfait ne dépend que de la température de ce gaz :

$$H_m(T) = U_m(T) + RT.$$

Le gaz parfait obéit à la seconde loi de Joule.

II.3. Cas d'une phase condensée incompressible et indilatable

L'enthalpie molaire d'une phase condensée s'écrit $H_m = U_m(T) + pV_m$, où $V_m = \frac{V}{n}$ est son volume molaire. Les phases condensées, peu compressibles et peu dilatables, sont caractérisées par un volume molaire V_m faible, ce qui fait que le terme pV_m est

négligeable⁶ devant le terme $U_m(T)$. On peut alors écrire $H_m \simeq U_m$. L'énergie interne d'une phase condensée incompressible et indilatable ne dépend que de la température (voir page 395). Il en est donc de même pour son enthalpie.

Propriété 16.10. Enthalpie molaire d'une phase condensée

L'enthalpie molaire d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T ,

$$H_m(T) \simeq U_m(T).$$

II.4. Capacité thermique à pression constante

Définition 16.11. Capacité thermique à pression constante C_p

La capacité thermique d'un système obéissant à la seconde loi de Joule est définie par

$$C_p = \frac{dH}{dT}.$$

Si C_p est indépendante de la température, la variation de l'enthalpie du système entre deux états est relié à la variation de sa température entre ces états selon

$$\Delta H = C_p \Delta T.$$

- ▶ *La capacité thermique à pression constante est une grandeur extensive, dont l'unité SI est le $J \cdot K^{-1}$.*
- ▶ *Cette relation est valable tant que la phase condensée ne subit pas de transition de phase.*

II.4.1. Cas du gaz parfait

L'enthalpie du gaz parfait est donnée par $H(T) = U(T) + pV = U(T) + nRT$. On en déduit

$$C_p = \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR \frac{dT}{dT} = C_v + nR.$$

Théorème 16.12. Relation de Mayer

Les capacités thermiques à pression constante et à volume constant du gaz parfait vérifient la relation de Mayer,

$$C_p - C_v = nR.$$

On peut en déduire $C_p > C_v$.

Remarque On peut montrer⁷ que le gaz parfait est le seul fluide qui obéit aux deux lois de Joule.

6. Voir l'exercice corrigé 16.16 page 455 pour la justification de ce point.

7. Mais c'est hors programme!

Définition 16.13. Coefficient adiabatique

Le coefficient adiabatique d'un fluide homogène est défini par

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

C'est une grandeur sans dimension, telle que $\gamma > 1$.

À partir des relations $C_p - C_v = nR$ et de la définition de γ , on peut exprimer les capacités thermiques de n moles de gaz parfait en fonction du coefficient adiabatique.

Pour le gaz parfait :

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}.$$

Pour le gaz parfait monoatomique, on a établi page 393 que $U = \frac{3}{2}nRT$. On en déduit

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}nR = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Pour le gaz parfait diatomique, $U = \frac{5}{2}nRT$, d'où $\gamma = \frac{7}{5} = 1,40$.

Gaz parfait	Monoatomique	Diatomique
C_v	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$
C_p	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$
γ	$\frac{5}{3} \simeq 1,67$	$\frac{7}{5} = 1,40$

Ordres de grandeur 16.14. Coefficient adiabatique de l'air

L'air pouvant être considéré comme un gaz parfait diatomique dans les conditions usuelles, on retiendra $\gamma \simeq 1,40$.

- L'air étant constitué à 99 % de gaz diatomiques (N_2 et O_2), on peut l'assimiler à un gaz diatomique.
- Dans les conditions usuelles de température et de pression, N_2 et O_2 peuvent être assimilés à un gaz parfait.

II.4.2. Cas d'une phase condensée : capacité thermique

Pour une phase condensée incompressible et indilatable, on a montré que $H_m \simeq U_m$, soit $\Delta H_m \simeq \Delta U_m$. Des relations $\Delta H_m = C_{p,m}\Delta T$ et $\Delta U_m = C_{v,m}\Delta T$, on peut déduire $C_{p,m} \simeq C_{v,m}$: on ne précise alors plus si la capacité thermique molaire est à pression constante ou à volume constant, et on note C_m la capacité thermique molaire de la phase condensée.

Propriété 16.15. Capacité thermique d'une phase condensée

L'enthalpie molaire d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T ,

$$\Delta H_m \simeq \Delta U_m = C_m \Delta T$$

où C_m est la capacité thermique molaire du corps sous la phase considérée.

EXERCICE CORRIGÉ 16.16.*Ordres de grandeur*

On donne, pour l'eau liquide, les ordres de grandeurs suivants (un chiffre significatif) :

- ▶ masse molaire $M = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- ▶ capacité thermique massique $c = 4 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- ▶ volume massique $v = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Comparer la variation d'enthalpie molaire et la variation du terme pV_m pour une variation de température $\Delta T = 10^2 \text{ K}$ et une variation de pression $\Delta p = 10^1 \text{ bar}$. Conclure.

Corrigé

La capacité thermique molaire vaut $C_m = Mc = 8 \cdot 10^1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. La variation d'enthalpie molaire vaut alors $\Delta H_m = C_m \Delta T = 8 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Le volume molaire de l'eau liquide vaut $V_m = Mv = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. On en déduit $V_m \Delta p = 2 \cdot 10^{-6} \times 10 \cdot 10^5 = 2 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On peut bien négliger le terme $V_m \Delta p$ devant ΔH_m : $\frac{V_m \Delta p}{\Delta H_m} = 3 \cdot 10^{-3}$.

Ordres de grandeur 16.17. Capacité thermique massique de l'eau

Capacité thermique massique de l'eau liquide à la pression atmosphérique et à température ambiante :

$$c \simeq 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Remarque En toute rigueur, la capacité thermique massique de l'eau dépend de la température ; cependant, il est légitime de la considérer constante dans le domaine des températures usuelles.

II.5. Cas particulier du premier principe : bilan d'enthalpie pour une transformation monobare

On considère un système subissant une transformation monobare, la pression extérieure étant égale à p_0 .

On suppose l'équilibre mécanique réalisé dans l'état initial (1) et dans l'état final (2) : les pressions initiale et finale vérifient $p_1 = p_2 = p_0$.

Le travail mécanique reçu par le système de la part des forces de pression s'écrit, pour cette transformation monobare,

$$W_{1 \rightarrow 2} = -p_0(V_2 - V_1) = -p_0 V_2 + p_0 V_1 = -p_2 V_2 + p_1 V_1.$$

Le premier principe sous forme de bilan s'écrit

$$\Delta U = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2} \quad \Rightarrow \quad U_2 - U_1 = -p_2 V_2 + p_1 V_1 + Q_{1 \rightarrow 2}.$$

On obtient donc

$$(U_2 + p_2V_2) - (U_1 + p_1V_1) = Q_{1 \rightarrow 2}.$$

Le bilan fait apparaître $H_2 = U_2 + p_2V_2$ et $H_1 = U_1 + p_1V_1$.

Propriété 16.18. Bilan d'enthalpie pour une transformation monobare

Lors d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et l'état final, le transfert thermique reçu par le système est donné par la variation de son enthalpie,

$$\Delta H = H_2 - H_1 = Q_p.$$

Les éventuels travaux des actions de pression (liés aux variations de volume du système) sont « cachés » dans la variation de H .

Synthèse

Énergie interne, enthalpie et transfert thermique

► L'enthalpie est une fonction d'état dont la variation s'identifie au transfert thermique reçu par le système lors d'une transformation monobare,

$$\Delta H = Q_p.$$

► L'énergie interne est une fonction d'état dont la variation s'identifie au transfert thermique reçu par le système lors d'une transformation isochore,

$$\Delta U = Q_v.$$

III. Étude de détentes de gaz

Définition 16.19. Détente d'un gaz

Un gaz subit une détente lorsque son volume molaire augmente.

Les détentes des gaz ont été utilisées historiquement pour établir certaines propriétés des gaz. Certaines détentes sont industriellement utilisées pour refroidir des gaz (obtention de l'air liquide).

III.1. Détente de Joule et Gay-Lussac

Dans l'expérience dite de Joule et Gay-Lussac, un gaz est initialement contenu dans la moitié gauche d'un récipient, séparée de l'autre moitié par un robinet (voir figure 16.2). À l'aide d'une pompe, un vide poussé a été fait dans la moitié droite. Les parois de l'ensemble sont rigides et thermiquement isolées pour éviter les échanges thermiques avec l'extérieur. On ouvre le robinet : le gaz s'engouffre rapidement dans le récipient de droite. On cherche à faire le lien entre la température initiale et la température finale du gaz, une fois l'équilibre atteint.

On choisit le système délimité par la paroi du récipient ; l'étude est menée dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen.

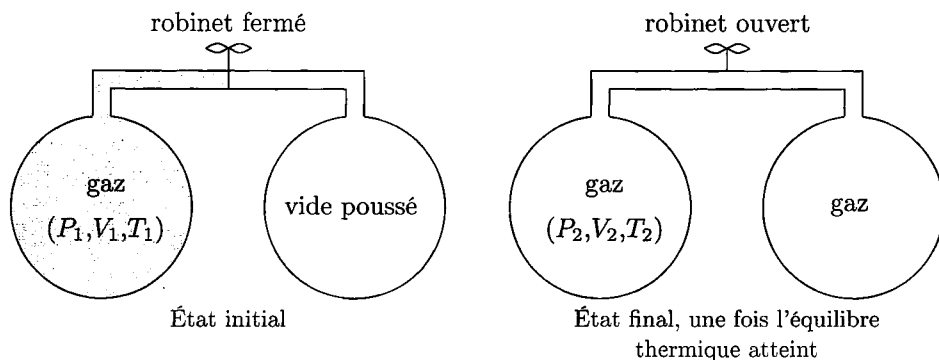


FIG. 16.2. Détente de Joule et Gay-Lussac.

Le premier principe sous forme de bilan s'écrit

$$\Delta U + \Delta E_c = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}.$$

Remarque Le système choisi n'est pas homogène (sauf dans son état final) : la pression et la température n'y sont pas uniformes au cours de la transformation (y compris dans l'état initial, où la moitié du système est vide). Cela n'interdit pas d'écrire le premier principe ; l'énergie interne est bien définie, même si on ne sait pas l'explicitier à chaque instant.

Le gaz étant macroscopiquement au repos dans l'état initial et l'état final, son énergie cinétique macroscopique est nulle dans ces deux états, donc $\Delta E_c = 0$.

Les parois étant calorifugées, le transfert thermique reçu est nul, $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$. Le volume du système étant constant (les parois sont rigides), il subit une transformation isochore, donc le travail reçu est nul, $W_{1 \rightarrow 2} = 0$.

Finalement, le bilan d'écrit s'écrit

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0.$$

L'énergie interne du système reste constante lors de la détente. Dans l'état initial, le système délimité par la paroi du récipient contient pour moitié le gaz, et est vide pour moitié. L'énergie interne du vide étant nulle, l'énergie interne du système s'identifie à celle du gaz qu'il contient.

Propriété 16.20. Détente de Joule et Gay-Lussac et énergie interne

Lorsqu'un gaz subit une détente de Joule et Gay-Lussac, son énergie interne ne varie pas, $\Delta U = 0$.

Si le gaz vérifie la première loi de Joule, son énergie interne ne dépend que de la température. La relation $U_2 = U_1$ conduit alors à $T_2 = T_1$.

Propriété 16.21. Détente de Joule et Gay-Lussac d'un gaz parfait

Si on fait subir une détente de Joule et Gay-Lussac à un gaz obéissant à la première loi de Joule, sa température ne varie pas, $\Delta T = 0$.

► C'est le cas du gaz parfait.

Si un gaz subit une détente de Joule et Gay-Lussac sans variation de température, on peut le modéliser par un gaz parfait. Dans le cas contraire, le modèle du gaz parfait n'est pas satisfaisant ; un autre modèle doit être utilisé (on parle de « gaz réel »).

Dans la plupart des cas, un gaz réel voit sa température diminuer lors d'une détente de Joule et Gay-Lussac, ce que l'on peut expliquer qualitativement : le volume occupé par le gaz augmentant, la distance moyenne entre les molécules qui le constituent augmente. L'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules augmentant avec la distance qui les séparent⁸, on observe une augmentation de l'énergie potentielle microscopique du gaz, $\Delta e_p > 0$.

L'énergie interne $U = e_c + e_p$ est conservée lors de la détente ($\Delta U = 0$), donc $\Delta e_c + \Delta e_p = 0$. Comme $\Delta e_p > 0$, on en déduit $\Delta e_c < 0$. L'énergie cinétique microscopique étant proportionnelle à la température, la décroissance de e_c se traduit par une diminution de la température.

La baisse de température d'un gaz lors de la détente de Joule et Gay-Lussac prouve que les interactions entre les molécules du gaz sont attractives.

III.2. Détente de Joule-Thomson

La détente de Joule-Thomson est l'écoulement permanent d'un gaz dans un tuyau à parois calorifugées, avec traversée d'une zone qui gêne cet écoulement (milieu poreux ou étranglement de la conduite). L'écoulement du gaz est lent, et se traduit par une baisse de pression après franchissement de l'obstacle.

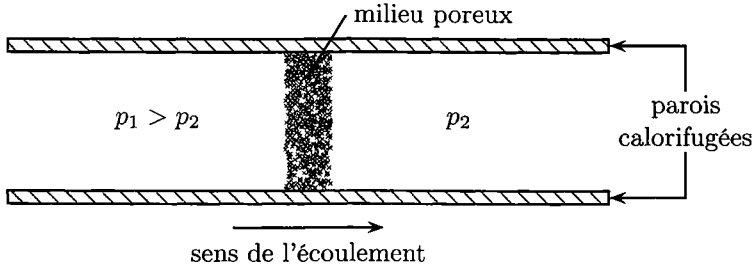


FIG. 16.3. Détente de Joule-Thomson.

Hypothèses

1. La vitesse du gaz étant faible, l'énergie cinétique est négligée devant toutes les autres formes d'énergie.

2. En régime permanent, les pression, volume massique, énergie interne massique et température du gaz sont :

- ▶ p_1, v_1, u_1 et T_1 en amont de l'obstacle ;
- ▶ p_2, v_2, u_2 et T_2 en aval de l'obstacle.

Ces grandeurs intensives sont uniformes en amont et en aval de l'obstacle, et ne dépendent pas du temps en régime stationnaire.

3. Le tuyau est horizontal, et sa section S est constante.

8. Dans le modèle de Van der Waals, l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules distantes de r est de la forme $-\frac{\alpha}{r^6}$, avec $\alpha > 0$.

On ne sait appliquer le premier principe qu'à un système fermé. Le gaz étant en écoulement permanent, une frontière fixe définirait un système ouvert (du gaz entrerait en amont et sortirait en aval). Il faut donc construire un système fermé dont la frontière se déplace, accompagnant une masse donnée de gaz dans son écoulement ; on le définit en le représentant à un instant t et à un instant $t' > t$ (voir figure 16.4).

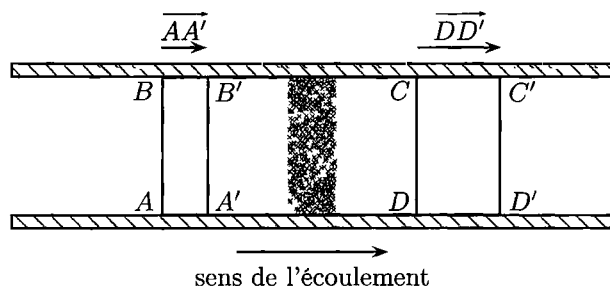


FIG. 16.4. Détente de Joule-Thomson : construction d'un système fermé.

À l'instant t , le système est délimité par la paroi du tube, la section AB en amont et la section CD et aval.

À l'instant t' , le système est délimité par la paroi du tube, la section $A'B'$ en amont et la section $C'D'$ et aval.

Entre t et t' , la section en amont se déplace de $\overline{AA'}$ et la section aval de $\overline{DD'}$.

Bilan de masse

Le système à l'instant t peut se décomposer selon $(ABCD) = (ABB'A') \cup (A'B'CD)$; la masse étant extensive, elle s'écrit

$$m(t) = m_{(ABB'A')}(t) + m_{(A'B'CD)}(t).$$

Le système à l'instant t' se décompose selon $(A'B'C'D') = (A'B'CD) \cup (DCC'D')$; sa masse s'écrit de même

$$m(t') = m_{(A'B'CD)}(t') + m_{(DCC'D')}(t').$$

L'écoulement étant permanent, la masse de la partie fixe $(A'B'CD)$ ne dépend pas du temps ; en notant m_0 sa valeur, on peut écrire

$$m_{(A'B'CD)}(t) = m_{(A'B'CD)}(t') = m_0.$$

De même, la masse contenue entre les sections AB et $A'B'$ ne dépend pas du temps, ainsi que la masse contenue entre les sections CD et $C'D'$. Nous pouvons donc supprimer la dépendance en temps dans les notations,

$$m_{(ABB'A')}(t) = m_{(ABB'A')} \quad \text{et} \quad m_{(DCC'D')}(t') = m_{(DCC'D')}.$$

Le système étant fermé par construction, et la masse étant une grandeur conservative, sa masse ne varie pas au cours de son évolution,

$$m(t') = m(t) \quad \Rightarrow \quad m_{(ADD'A')} + m_0 = m_{(CBD'A')} + m_0.$$

Nous en déduisons $m_{(ADD'A')} = m_{(CBD'A')}$, que nous noterons m_a afin d'alléger les notations.

Bilan d'énergie

L'énergie interne étant une grandeur extensive, le raisonnement précédent peut être suivi pour l'énergie interne : il suffit de remplacer la notation m par la notation U .

L'énergie interne aux instants t et t' s'écrit donc $U(t) = U_{(ABB'A')}(t) + U_{(A'B'CD)}(t)$ et $U(t') = U_{(A'B'CD)}(t') + U_{(DCC'D')}(t')$.

L'écoulement étant permanent, $U_{(A'D'BC)}(t) = U_{(A'D'BC)}(t') = U_0$.

Comme pour la masse, on peut supprimer la dépendance en temps dans l'expression de l'énergie interne des parties $(ABB'A')$ et $(DCC'D')$.

Finalement, $U(t) = U_{(ABB'A')} + U_0$ et $U(t') = U_{(DCC'D')} + U_0$.

La variation de l'énergie interne du système entre les instants t et t' s'écrit donc

$$\Delta U = U(t') - U(t) = U_{(DCC'D')} - U_{(ABB'A')}.$$

Détaillons les échanges d'énergie (travail et transfert thermique) afin d'écrire le premier principe sous forme de bilan. Les actions s'exerçant sur le système étudié sont représentées figure 16.5.

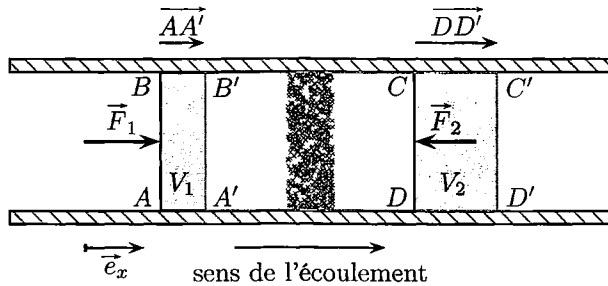


FIG. 16.5. Détente de Joule-Thomson : action des forces de pression et volumes balayés par les sections amont et aval.

La section amont est soumise à la force $\vec{F}_1 = p_1 S \vec{u}_x$. Lorsque la frontière du système fermé étudié se déplace de \vec{AA}' entre t et t' , le travail fourni au système par les actions de pression en amont est

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{AA}' = p_1 S \cdot AA' = p_1 V_1,$$

où $V_1 = S \cdot AA'$ est le volume balayé par la section amont entre t et t' , c'est-à-dire le volume de la partie $(ABB'A')$.

La section aval est soumise à la force $\vec{F}_2 = -p_2 S \vec{u}_x$. Le travail reçu par le système entre t et t' s'écrit donc

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{DD}' = -p_2 S \cdot DD' = -p_2 V_2,$$

où $V_2 = -S \cdot DD'$ est le volume balayé par la section aval entre t et t' , c'est-à-dire le volume de la partie $(DCC'D')$. Finalement, le travail des forces de pression reçu par le système entre t et t' s'écrit

$$W = W_1 + W_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2.$$

Le tuyau étant horizontal, le système ne reçoit pas de travail de la part de la force de pesanteur.

Les parois du tuyau exercent des forces de pression sur le système. Cependant, le gaz longe localement les parois. Le déplacement de chaque point du gaz en contact avec le tuyau est donc orthogonal à la force de pression locale. Le travail fourni par le tuyau au gaz est donc nul.

Les parois du tuyau étant calorifugées, le système ne reçoit aucun transfert thermique à travers la paroi.

La température T_1 étant uniforme dans la partie amont, le gaz est en équilibre thermique ; il ne se produit donc aucun transfert thermique au sein du gaz⁹ dans la zone amont : le système ne reçoit donc pas de transfert thermique à travers la section AB . Il en est de même pour la partie aval : le système ne reçoit aucun transfert thermique à travers la section CD .

Finalement, le transfert thermique total reçu par le système est nul, $Q = 0$.

L'écoulement étant lent, on peut négliger la variation d'énergie cinétique du gaz.

Le premier principe sous forme de bilan s'écrit alors

$$\Delta U = W + Q = W$$

soit

$$U_{(DCC'D')} - U_{(ABB'A')} = p_1 V_1 - p_2 V_2. \quad (16.1)$$

L'énergie interne de la masse m_a du gaz contenu dans la partie $(ABB'A')$ s'écrit en fonction de l'énergie interne massique du gaz en amont,

$$U_{(ABB'A')} = m_a u_1.$$

De même pour le gaz en aval,

$$U_{(DCC'D')} = m_a u_2.$$

Le volume de la masse m_a de gaz en amont s'écrit en fonction de son volume massique, $V_1 = m_a v_1$. On écrit de même pour le gaz en aval, $V_2 = m_a v_2$.

Le bilan (16.1) s'écrit alors

$$m_a(u_2 - u_1) = p_1 m_a v_1 - p_2 m_a v_2$$

soit

$$u_2 + p_2 v_2 = u_1 + p_1 v_1.$$

L'enthalpie massique du gaz s'écrit¹⁰ $h = u + pv$. On en déduit $h_2 = h_1$, qui est la propriété fondamentale de la détente de Joule-Thomson.

Propriété 16.22. *Détente de Joule-Thomson et enthalpie*

Lorsqu'un gaz subit une détente de Joule-Thomson, son enthalpie massique ne varie pas au passage de l'obstacle, $\Delta h = h_2 - h_1 = 0$.

Une telle détente est dite isenthalpique.

Si le gaz vérifie la seconde loi de Joule, son enthalpie massique ne dépend que de la température, $h(T) = \frac{H(T)}{m}$. La relation $h_2 = h_1$ conduit alors à $T_2 = T_1$.

9. Ce point sera approfondi en seconde année.

10. L'enthalpie d'une masse m de gaz est $H = U + pV$, d'où $\frac{H}{m} = \frac{U}{m} + p\frac{V}{m} = u + pv$.

Propriété 16.23. *Détente de Joule-Thomson d'un gaz parfait*

Si on fait subir une détente de Joule-Thomson à un gaz obéissant à la seconde loi de Joule, sa température ne varie pas, $\Delta T = 0$.

► *C'est le cas du gaz parfait.*

Un gaz réel subit une détente de Joule-Thomson avec une variation de température. À part l'hydrogène, l'hélium et le néon, tous les autres gaz se refroidissent lors d'une détente de Joule-Thomson s'ils sont à une température inférieure ou égale à la température ambiante en amont de l'obstacle. Ce refroidissement, appelé effet Joule-Thomson, est d'autant plus important que l'on impose $p_2 \ll p_1$.

Intérêt pratique de la détente de Joule-Thomson

La détente de Joule-Thomson peut être utilisée pour obtenir une baisse de pression. La diminution de température qui l'accompagne est alors un « effet secondaire » qui peut être gênant.

► Le détendeur situé juste en sortie des bouteilles de plongée (air sous forte pression) refroidit par effet Joule-Thomson lors du débit d'air (entre -30 °C et -55 °C). Les traces d'humidité dans l'air de la bouteille conduisent à un givrage qui peut bloquer le débit d'air. Il est donc important de remplir les bouteilles avec l'air le plus sec possible. De plus, le plongeur ne doit pas faire d'efforts violents pour limiter le débit d'air et donc limiter le refroidissement. Cela laisse au givre qui se forme le temps de fondre grâce au transfert thermique reçu à travers les parois de la part de l'eau ambiante.

► Les détendeurs de bouteilles de butane ou de propane permettent d'obtenir une pression plus basse en sortie. La température du gaz diminue lors de cette détente, ce que l'on peut sentir en touchant le détendeur.

La détente de Joule-Thomson est fréquemment utilisée pour atteindre des basses températures, mettant à profit l'effet Joule-Thomson.

► Dans l'industrie, l'effet Joule-Thomson est utilisé pour liquéfier les gaz. On refroidit préalablement le gaz sous pression par une réfrigération classique, puis on le fait circuler dans un tuyau calorifugé où il subit une détente de Joule-Thomson qui abaisse encore sa température en dessous de sa température de liquéfaction.

► En médecine, on peut détruire des tissus malades en les mettant en contact avec un objet très froid (cela fait geler l'eau des cellules, qui éclatent et meurent). Certains cabinets médicaux possèdent une bouteille de gaz liquéfié sous pression, à la température ambiante. Un tuyau branché en sortie de cette bouteille est équipé d'une buse (embout à fort rétrécissement) qui fait subir au gaz une détente de Joule-Thomson. Le gaz très froid fait geler l'embout qui peut alors être appliqué sur les lésions à détruire.

IV. Application aux transitions de phase

IV.1. Enthalpie associée à une transition de phase

On a vu qu'un corps pur peut exister sous trois phases : liquide, solide et vapeur (voir section VII page 399). L'étude était alors limitée à un état d'équilibre où deux phases coexistent. Le premier principe permet d'étudier l'aspect énergétique de la transition entre deux phases.

Le changement d'état d'un corps pur est une transformation qui s'accompagne d'un échange d'énergie avec l'extérieur, le système étudié étant le corps pur considéré : nous savons tous qu'il faut apporter de l'énergie à un bloc de glace pour le faire fondre ou à de l'eau liquide pour la vaporiser en la faisant bouillir.

Définition 16.24. Transition de phase

Une transition de phase est une transformation thermodynamique d'un système (le corps pur), d'un état initial où le corps est dans une phase α à un état final où le corps est dans une phase β .

Remarque On parle aussi de *changement d'état*. La notion de transition de phase est cependant plus générale (transition entre des structures cristallines différentes par exemple, qu'on ne qualifie pas d'état physique mais de phase allotropique).

Usuellement, les transitions de phases sont effectuées sous la pression ambiante ; la transformation est donc monobare. Il est donc plus adapté d'utiliser l'enthalpie (voir propriété 16.18 page 456) pour décrire le transfert thermique échangé.

Définition 16.25. Enthalpie massique de transition de phase

L'enthalpie massique $L_{\alpha \rightarrow \beta}$ de la transition de phase $\alpha \rightarrow \beta$ d'un corps pur à la température T est définie par

$$L_{\alpha \rightarrow \beta} = h_{\beta} - h_{\alpha}$$

où h_{α} est l'enthalpie massique du corps pur dans la phase α , et h_{β} son enthalpie massique dans la phase β à la température T .

L'enthalpie massique de transition de phase s'exprime en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Elle correspond à l'énergie thermique qu'il faut fournir (algébriquement) à un kilogramme de ce corps pour le faire passer de la phase α à la phase β à la température T constante, sous la pression constante $P_{\alpha, \beta}(T)$ d'équilibre des deux phases.

Remarques

- ▶ L'enthalpie massique de la transition de phase est aussi appelée chaleur latente massique.
- ▶ L'enthalpie massique de la transition de phase inverse $\beta \rightarrow \alpha$ est opposée d'après la définition, $L_{\beta \rightarrow \alpha} = -L_{\alpha \rightarrow \beta}$.
- ▶ L'enthalpie massique de transition de phase dépend de la température. En particulier l'enthalpie massique de vaporisation diminue quand la température augmente, pour s'annuler à une certaine température appelée température critique.

Signes des enthalpies massiques de transition de phase

- ▶ Pour passer de l'état solide à l'état liquide (fusion), il faut apporter de l'énergie au corps pur pour casser les liaisons assurant la cohésion du solide ; on en déduit $L_{\text{fus}} > 0$.
- ▶ Pour passer de l'état liquide à l'état gazeux (vaporisation), il faut apporter de l'énergie au corps pur pour vaincre les interactions attractives entre les molécules au sein du liquide, afin de les séparer les unes des autres ; on en déduit $L_{\text{vap}} > 0$.
- ▶ Pour passer de l'état solide à l'état gazeux (sublimation), un raisonnement analogue conduit à $L_{\text{sub}} > 0$.

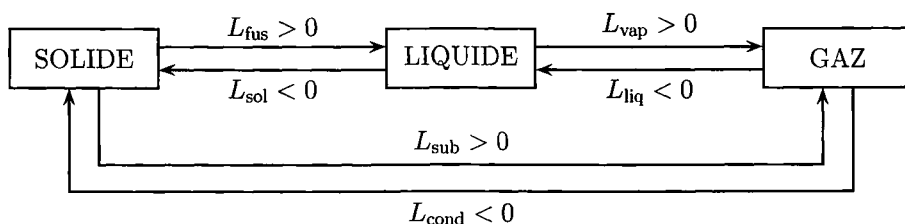


FIG. 16.6. Signes des enthalpies massiques de transition de phase.

► Les enthalpies massiques correspondant aux transformations inverses sont négatives.

L'enthalpie massique de vaporisation d'un corps pur est en général plus élevée que son enthalpie massique de fusion : il faut fournir une énergie plus importante pour séparer les molécules du liquide lors de sa vaporisation que pour casser la structure du solide lors de la fusion.

L'enthalpie massique de vaporisation de l'eau est particulièrement élevée : cela s'explique par l'existence de liaisons hydrogène entre les molécules d'eau. Il faut donc fournir une énergie plus élevée pour vaporiser l'eau car il faut casser ces liaisons.

Ordres de grandeur 16.26. *Enthalpies massiques de transition de phase*

- $L_{\text{fus}} \simeq 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; pour l'eau $L_{\text{fus}} \simeq 3,3 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à $0 \text{ }^\circ\text{C}$.
- $L_{\text{vap}} \simeq 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; pour l'eau $L_{\text{vap}} \simeq 2,5 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à $100 \text{ }^\circ\text{C}$ sous 1 bar.

Application des transitions de phase

Les énergies mises en jeu lors des transitions de phase sont très importantes : vaporiser un kilogramme d'eau nécessite $2,5 \cdot 10^3 \text{ kJ}$: c'est l'énergie qu'il faudrait dépenser pour monter un camion de 25 t d'une hauteur de 100 m, soit le deuxième étage de la tour Eiffel ! Elles peuvent donc être utilisées (ou mises en œuvre dans des processus naturels) pour prélever ou céder de grandes quantités d'énergie à un système en contact avec le corps pur.

Une fusion, une vaporisation ou une sublimation sont caractérisées par une enthalpie massique positive. Ces transitions nécessitent de l'énergie que le corps peut prélever au milieu extérieur.

► La transpiration permet de refroidir un organisme : la sueur prélève l'énergie nécessaire à sa vaporisation. C'est un important processus de thermorégulation.

► L'eau est couramment utilisée dans la lutte contre l'incendie : elle se vaporise au contact des corps en combustion (chauds), entraînant leur refroidissement grâce à son enthalpie de vaporisation élevée. C'est l'une des raisons de son utilisation.

► Le caloduc est un dispositif qui permet de refroidir un objet. Il se présente comme une enceinte hermétique contenant un fluide. Une extrémité du caloduc est en contact avec la pièce chaude à refroidir : le fluide se vaporise, prélevant de l'énergie à l'élément chaud. La vapeur diffuse ensuite vers l'autre extrémité du caloduc où elle se liquéfie, cédant de l'énergie à un dissipateur thermique permettant de l'évacuer vers l'extérieur. Le liquide retourne à l'extrémité chaude par capillarité.

► Le cycle de l'eau joue un rôle essentiel dans les échanges énergétiques au sein de l'atmosphère : l'évaporation de l'eau des océans prélève une quantité d'énergie

considérable, qui est ensuite cédée à l'atmosphère lorsque la vapeur d'eau se condense en formant les nuages. Cette énergie entraîne une élévation de la température de l'air ; l'air chaud devenant moins dense, il s'élève donnant lieu à des mouvements convectifs ascendants.

IV.2. Bilans énergétiques en présence de transitions de phases

Réaliser un bilan énergétique permet de déterminer l'état final d'un système dans lequel des transitions de phase sont susceptibles de se produire.

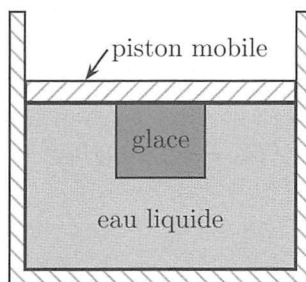


FIG. 16.7. Évolution d'un mélange eau-glace.

Considérons une enceinte calorifugée déformable¹¹ (voir figure 16.7) dans laquelle on place une masse m_1 d'eau liquide à la température T_1 et une masse m_2 de glace à la température T_2 . La capacité thermique de l'eau liquide est $c_\ell = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et celle de la glace $c_s = 2,06 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'enthalpie massique de fusion de l'eau est $L_{\text{fus}} = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, la température de fusion étant $T_{\text{fus}} = 273 \text{ K} = 0,00 \text{ }^\circ\text{C}$.

On note (S) le système constitué de toute l'eau, (S_1) le système constitué de l'eau initialement liquide et (S_2) celui constitué de l'eau initialement solide.

Le système (S) va évoluer vers un état final dans lequel la température est uniforme (l'équilibre thermique est réalisé). La question se pose quant à la composition du système final : uniquement de l'eau liquide, uniquement de la glace, ou un mélange d'eau et de glace ?

État final	Condition d'existence
Liquide	$T > T_{\text{fus}}$
Solide	$T < T_{\text{fus}}$
Mélange liquide-solide	$T = T_{\text{fus}}$

Prenons $m_1 = 500 \text{ g}$ d'eau à la température $T_1 = 15,0 \text{ }^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$ et $m_2 = 150 \text{ g}$ de glace à la température $T_2 = -5,00 \text{ }^\circ\text{C} = 268 \text{ K}$.

Supposons dans un premier temps que toute la glace a fondu dans l'état final, qui est donc constitué d'eau liquide à une température T_f à déterminer.

La variation de l'enthalpie du système (S_1) est

$$\Delta H_1 = m_1 c_\ell (T_f - T_1).$$

11. Le volume molaire de l'eau varie lors de sa solidification.

Le système (S_2) subit une augmentation de température de T_2 à T_{fus} , une fusion à la température T_{fus} puis une augmentation de température de T_{fus} à T_f . La variation de son enthalpie vaut donc

$$\Delta H_2 = m_2 c_s (T_{\text{fus}} - T_2) + m_2 L_{\text{fus}} + m_2 c_\ell (T_f - T_{\text{fus}}).$$

L'enthalpie étant une grandeur extensive, la variation d'enthalpie du système total (S) s'écrit $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$.

L'enclume étant déformable, l'évolution est monobare ; c'est donc la variation de l'enthalpie du système (S) qui s'identifie au transfert thermique reçu, $\Delta H = Q_p$. L'enclume étant de plus calorifugée, $Q_p = 0$, donc $\Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$, soit

$$m_1 c_\ell (T_f - T_1) + m_2 c_s (T_{\text{fus}} - T_2) + m_2 L_{\text{fus}} + m_2 c_\ell (T_f - T_{\text{fus}}) = 0.$$

On en déduit

$$T_f = \frac{m_1 c_\ell T_1 + m_2 c_s T_2 - m_2 L_{\text{fus}} + m_2 (c_\ell - c_s) T_{\text{fus}}}{(m_1 + m_2) c_\ell}.$$

On calcule $T_f = 266 \text{ K} = -7,00 \text{ °C}$. À cette température, l'état stable de l'eau est la glace ; l'hypothèse d'un état final où l'eau est liquide est donc erronée.

Supposons maintenant que seule une masse x de glace a fondu. L'état final étant un état diphasé solide-liquide, sa température vaut T_{fus} .

La variation de l'enthalpie du système (S_1) est $\Delta H_1 = m_1 c_\ell (T_{\text{fus}} - T_1)$.

Le système (S_2) subit une augmentation de température de T_2 à T_{fus} , puis une masse x subit une fusion à la température T_{fus} . La variation de son enthalpie vaut donc

$$\Delta H_2 = m_2 c_s (T_{\text{fus}} - T_2) + x L_{\text{fus}}.$$

La variation de l'enthalpie du système total vaut $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$, soit

$$m_1 c_\ell (T_{\text{fus}} - T_1) + m_2 c_s (T_{\text{fus}} - T_2) + x L_{\text{fus}} = 0$$

d'où

$$x = \frac{m_2 c_s T_2 - m_1 c_\ell T_1 - (m_1 c_\ell + m_2 c_s) T_{\text{fus}}}{L_{\text{fus}}}.$$

On calcule $x = 90,3 \text{ g}$. On a bien $x < m_2$ (il ne peut pas fondre plus de glace qu'il n'y en avait initialement !). Cette hypothèse est donc la bonne.

Dans l'état final, le système est constitué de $60,0 \text{ g}$ de glace et de 590 g d'eau liquide à la température de $0,00 \text{ °C}$.

Méthode Déterminer l'état final d'un système diphasé

Un système constitué d'un corps sous deux phases différentes (α) et (β), à des températures différentes, est placé dans une enceinte adiabatique et déformable pour assurer une évolution monobare. On note $T_{\alpha\beta}$ la température de transition de phase correspondante.

La détermination de l'état final nécessite de poser une hypothèse quant à sa composition :

- ▶ l'une des deux phases a subi complètement une transition de phase, et le système est monophasé dans l'état final ;
- ▶ l'une des deux phases a subi partiellement une transition de phase, et les deux phases coexistent dans l'état final.

On utilise l'extensivité de l'enthalpie pour exprimer la variation d'enthalpie du système,

$$\Delta H = \Delta H_{\alpha} + \Delta H_{\beta} = 0,$$

où ΔH_{α} et ΔH_{β} sont les variations d'enthalpie du corps initialement sous les phases α et β respectivement.

Hypothèse	Condition de validité	Grandeur à calculer
Système monophasé	Température finale compatible avec l'existence du corps sous la phase considérée	Température finale
Système diphasé à la température $T_{\alpha\beta}$	Il doit rester une masse non nulle du corps sous chaque phase	Masse ayant subi une transition de phase

Remarque Si le système est placé dans une enceinte calorifugée et indéformable, l'évolution est isochore ; dans ce cas c'est la variation de l'énergie interne totale qui est nulle,

$$\Delta U = \Delta U_{\alpha} + \Delta U_{\beta} = 0.$$

Cas du retard à la transition de phase

Dans l'exemple précédent, nous avons conclu à la non validité de la première hypothèse car elle conduisait à un état final constitué d'eau liquide à une température de -7°C . L'état liquide est en effet stable, sous la pression atmosphérique, entre 0°C et 100°C . Cependant, on peut observer dans certaines conditions, par exemple quand le liquide est très pur, de l'eau à l'état liquide à des températures inférieures à sa température de fusion $T_{\text{fus}} = 0^{\circ}\text{C}$. On dit que l'eau est en surfusion.

Le *retard à la transition de phase* est l'existence d'un corps pur sous une phase où on ne devrait pas l'observer dans les conditions de température et de pression considérées. Un tel état est qualifié de *métastable*.

Phase métastable	Description
Liquide à $T < T_{\text{fus}}$	Liquide surfondu (surfusion)
Liquide à $T > T_{\text{vap}}$	Liquide surchauffé
Vapeur à $T < T_{\text{vap}}$	Vapeur sursaturée

Il ne s'agit que d'un *retard* à la transition de phase : le fluide évolue rapidement vers son état stable sous l'effet d'une perturbation : secousse, introduction d'une impureté ou d'une trace de la phase stable.

Remarque Un état métastable est thermodynamiquement instable : il ne devrait pas exister. Cependant, il est cinétiquement observable car la vitesse de transition entre cet état métastable et l'état stable du système est très lente (voir quasi-nulle). La notion de métastabilité est très générale en physique et en chimie et ne s'applique pas qu'à la thermodynamique.

Ce phénomène peut être observé dans certains cas, quand les conditions sont favorables à l'existence de la phase métastable.

► Les pluies verglaçantes sont un exemple d'eau surfondu : les gouttes de pluie sont liquides à une température inférieure à $0\text{ }^\circ\text{C}$, mais se solidifient sous l'action d'un choc, en tombant sur sol par exemple, formant une couche de verglas.

► La chambre à bulles est un détecteur de particules utilisé au milieu du XX^{e} siècle. Elle est constituée d'une enceinte contenant de l'hydrogène liquide surchauffé (état liquide à une température supérieure à sa température d'ébullition). Lorsqu'une particule traverse cette enceinte, elle provoque localement l'ébullition du liquide, formant des bulles le long de sa trajectoire, ce qui permet de la visualiser.

La chambre à brouillard (ou chambre de Wilson) fonctionne sur le même principe, mais l'enceinte contient une vapeur sursaturée (de l'alcool isopropylique). La particule entraîne la formation de gouttelettes sur son passage.

► Les chauffeuses chimiques sont des petites poches contenant un liquide surfondu (solution aqueuse saturée en acétate de sodium, dont la température de fusion est de $54\text{ }^\circ\text{C}$). À l'intérieur se trouve une plaquette métallique qui libère des germes d'acétate solide lorsqu'on la tord, entraînant la solidification. On a vu que la solidification est caractérisée par une enthalpie massique négative : le système fournit de l'énergie à l'extérieur, que l'on utilise pour se réchauffer les mains.

V. Calorimétrie

Définition 16.27. Calorimétrie

La calorimétrie est l'art de mesurer les transferts thermiques reçus ou cédés par un système.

La calorimétrie¹² permet de déterminer les capacités thermiques du corps étudié (qui constitue le système).

12. Les notions présentées dans ce chapitre seront développées en travaux pratiques. Mettre en œuvre une technique de calorimétrie est une compétence figurant au programme.

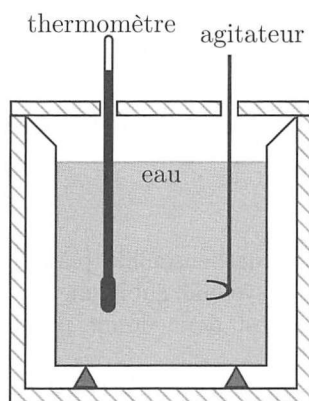


FIG. 16.8. Calorimètre.

Fondamentalement, une telle étude se fait en plaçant le corps dans une enceinte appelée *calorimètre*. Il existe différentes méthodes, selon l'état physique du corps étudié (phase condensée, gaz), et le domaine de température dans lequel on se place.

Définition 16.28. *Calorimètre*

Un calorimètre est une enceinte (voir figure 16.8) dans laquelle deux sous-systèmes échangent un transfert thermique.

1. Un des sous-systèmes est constitué du calorimètre et de son contenu, initialement à l'équilibre thermique.
2. L'autre sous-système est constitué du corps que l'on place dans le calorimètre.

Remarques

- Le calorimètre est le plus souvent calorifugé, mais il peut aussi recevoir de l'énergie de l'extérieur.
- Le calorimètre peut-être isobare, afin d'assurer l'égalité entre la pression interne et la pression externe. L'évolution du système est donc monobare, telle que $\Delta H = Q_p$.
- Le calorimètre peut-être indéformable. L'évolution du système est donc isochore, telle que $\Delta U = Q_v$.
- Dans le cas où les phases sont condensées (solide ou liquide), il n'y a pas lieu de distinguer les évolutions monobare et isochore car $\Delta H = \Delta U$.

V.1. Mesure de la capacité thermique d'un solide : méthode des mélanges

Description de l'expérience

On dispose d'un solide de masse m_s initialement à la température $T_{s,i}$ connue.

Le calorimètre est un récipient calorifugé (parois isolées dans le cas du calorimètre de Berthelot, parois entre lesquelles on a fait le vide dans le cas du vase Dewar), dans lequel on place une masse m_e d'eau à la température $T_{e,i}$ connue (voir figure 16.8).

On place le solide à étudier dans le calorimètre et on referme ce dernier pour l'isoler thermiquement de l'extérieur. L'ensemble {eau + solide} finit par atteindre un état d'équilibre thermique¹³ caractérisé par une température uniforme T_f .

Attention : l'eau reste liquide tout au long de l'évolution. C'est le liquide calorimétrique qui fait partie intégrante du calorimètre et ne subit aucun changement de phase.

Étude thermodynamique

Le système étudié est constitué de l'ensemble {eau + solide}. Le calorimètre étant en contact avec l'atmosphère, le système subit une évolution monobare. Le transfert thermique reçu par le système est donc donné par la variation de son enthalpie, $\Delta H = Q_p$.

L'enceinte calorifugée impose $Q_p = 0$, d'où $\Delta H = 0$.

L'enthalpie étant extensive, sa variation s'écrit

$$\Delta H = \Delta H_s + \Delta H_e = 0$$

où H_s est l'enthalpie du solide et ΔH_e celle de l'eau.

En notant $c_{p,s}$ la capacité thermique massique à pression constante du solide et $c_{p,e}$ celle de l'eau, la variation d'enthalpie de chaque corps s'exprime en fonction de sa variation de température,

$$\Delta H_s = m_s c_{p,s} (T_f - T_{s,i}) \quad \text{et} \quad \Delta H_e = m_e c_{p,e} (T_f - T_{e,i}).$$

Le bilan d'enthalpie conduit à

$$m_s c_{p,s} (T_f - T_{s,i}) + m_e c_{p,e} (T_f - T_{e,i}) = 0$$

d'où l'on déduit

$$c_{p,s} = c_{p,e} \frac{m_e}{m_s} \left(\frac{T_f - T_{s,i}}{T_{e,i} - T_f} \right).$$

Commentaires

► Expérimentalement, la température finale est inférieure à celle prévue par les calculs précédents. On ne peut pas négliger la capacité thermique C du calorimètre et de ses accessoires, qui passent de la température initiale $T_{e,i}$ à la température finale T_f . La variation d'enthalpie du calorimètre vaut donc $\Delta H_{\text{cal}} = C(T_f - T_{e,i})$, et le bilan d'enthalpie pour le système {eau liquide + calorimètre + solide étudié} s'écrit $\Delta H = \Delta H_s + \Delta H_e + \Delta H_{\text{cal}} = 0$, soit

$$m_s c_{p,s} (T_f - T_{s,i}) + (m_e c_{p,e} + C)(T_f - T_{e,i}) = 0.$$

On définit la masse équivalente en eau du calorimètre comme étant la masse μ d'eau qui aurait la même capacité thermique que le calorimètre, soit $\mu c_e = C$. La relation précédente s'écrit alors

$$m_s c_{p,s} (T_f - T_{s,i}) + (m_e + \mu) c_{p,e} (T_f - T_{e,i}) = 0$$

d'où

$$c_{p,s} = c_{p,e} \frac{m_e + \mu}{m_s} \left(\frac{T_f - T_{s,i}}{T_{e,i} - T_f} \right).$$

13. La calorimètre est muni d'un agitateur pour atteindre plus rapidement cet état d'équilibre, le transfert thermique étant plus rapide par convection que par conduction.

- Les corps étudiés étant des phases condensées, il est inutile de faire la distinction entre les capacités thermiques à pression et à volume constant ; on peut raisonner en utilisant la capacité thermique massique c .
- On met le solide en contact avec un liquide car l'équilibre thermique peut être atteint rapidement par convection (en agitant). Cette méthode n'est alors possible que dans la plage de température où l'eau est liquide.

V.2. Mesure de la capacité thermique d'un liquide : méthode électrique

On place une masse m_ℓ du liquide étudié dans un calorimètre de capacité thermique C_{cal} . L'ensemble est initialement à l'équilibre thermique à la température T_i . Une résistance chauffante R , plongée dans le liquide, est parcourue par un courant d'intensité I . Au bout d'une durée τ , on mesure la température T_f du liquide, de capacité thermique massique c .

Le bilan d'énergie s'écrit

$$\Delta H = Q_p = RI^2\tau.$$

La variation d'enthalpie du système {calorimètre + liquide} s'écrit

$$\Delta H = (m_\ell c_\ell + C_{\text{cal}})(T_f - T_i).$$

On en déduit

$$(m_\ell c_\ell + C_{\text{cal}})(T_f - T_i) = RI^2\tau$$

ce qui permet de déterminer c_ℓ .

VI. Exercices

1. Transfert thermique par effet Joule ★ (solution page 471)

Un récipient aux parois calorifugées contient n moles d'un gaz considéré comme parfait, de coefficient adiabatique γ . L'une de ses extrémités est fermée par un piston calorifugé \mathcal{P} , qui peut se déplacer sans frottement, l'une de ses faces étant au contact de l'atmosphère à la pression p_a .

Une résistance r placée dans le récipient est alimentée par un courant d'intensité I constante. L'énergie dissipée par effet Joule est transmise intégralement au gaz par transfert thermique (voir figure 16.9).

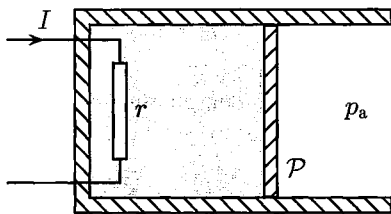


FIG. 16.9. Gaz chauffé par une résistance.

1. Le piston \mathcal{P} est bloqué. Le gaz est dans son état initial caractérisé par une pression p_1 , une température T_1 et un volume V_1 . On fait circuler le courant I dans la résistance pendant une durée τ . Déterminer p_2 , V_2 et T_2 dans l'état final.

2. Le piston \mathcal{P} est maintenant libre de se déplacer. Le gaz étant dans l'état initial ($p_1 = p_a, T_1, V_1$), déterminer l'état final (p_2, T_2, V_2) après avoir fait circuler un courant I dans la résistance pendant une durée τ .

2. Transfert thermique à volume total constant ★ (solution page 472)

Un cylindre calorifugé est séparé en deux compartiments par un piston \mathcal{P} calorifugé pouvant se déplacer sans frottements (voir figure 16.10).

Les compartiments (1) et (2) contiennent chacun n moles d'un gaz parfait de coefficient adiabatique γ .

Une résistance r , placée dans le compartiment (1), est parcourue par un courant d'intensité I , permettant de transférer de l'énergie thermique au gaz de ce compartiment. On suppose l'intensité I suffisamment faible pour considérer les évolutions des gaz quasi stationnaires.

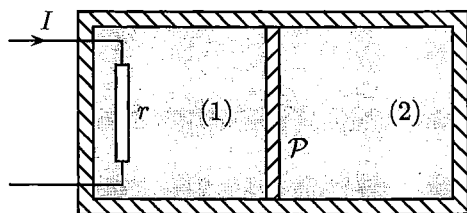


FIG. 16.10. Enceinte calorifugée chauffée par une résistance.

L'état initial, noté A , est tel que $V_1 = V_2 = V_A, T_1 = T_2 = T_A$ et $p_1 = p_2 = p_A$.

L'intensité I ayant parcouru la résistance pendant une durée τ , on note B l'état d'équilibre final, où le gaz dans le compartiment (1) est caractérisé par p_{1B}, V_{1B} et T_{1B} , et celui dans le compartiment (2) par p_{2B}, V_{2B} et T_{2B} .

Comme le gaz dans le compartiment (2) subit une évolution adiabatique, il vérifie $pV^\gamma = \text{cte}$, où γ est l'exposant adiabatique du gaz. Cette relation sera justifiée page 494.

1. a/ Écrire le premier principe en considérant le système global¹⁴ $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, où \mathcal{S}_1 est constitué des n moles de gaz présentes dans le compartiment (1) et \mathcal{S}_2 des n moles de gaz présentes dans le compartiment (2).

b/ Déterminer p_{1B} et p_{2B} en fonction de p_A et de q, V_{1B}, V_{2B} en fonction de V_A, q et γ , et T_{1B}, T_{2B} en fonction de T_A, q et γ .

2. Reprendre l'étude précédente, en appliquant le premier principe successivement aux systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . En déduire une relation entre T_{1B} et T_{2B}, T_A et q .

3. Détente avec un piston retenu par un ressort ★★ (solution page 472)

Un piston calorifugé peut glisser sans frottement dans une enceinte calorifugée, de section S orthogonalement à \vec{u}_x , à laquelle il est accroché par un ressort de raideur $k = 1,00 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. L'enceinte contient un gaz considéré comme parfait, de coefficient adiabatique $\gamma = 1,40$.

Initialement, le piston est bloqué par un taquet, le gaz étant à la pression p_1 et à la température T_1 . Le ressort est alors au repos.

On enlève le taquet; le système évolue vers un nouvel état d'équilibre où le piston s'est déplacé d'une abscisse x , le gaz ayant une pression p_2 et une température T_2 .

14. Le piston ne fait pas partie du système \mathcal{S} .

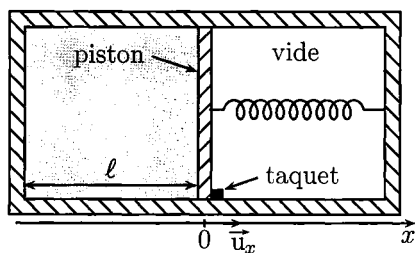


FIG. 16.11. Détente avec piston retenu par un ressort.

Pour les applications numériques : $p_1 = 0,200$ bar, $T_1 = 300$ K, $S = 100$ cm² et $\ell = 20,0$ cm.

1. Calculer, en moles, la quantité n de gaz.
2. Justifier soigneusement que le gaz reçoit le travail $W = -\frac{1}{2}kx^2$.
3. Trouver trois relations liant x , p_2 et T_2 , et en déduire une équation du second degré en x . La résoudre. En déduire p_2 et T_2 .

4. Mélange d'eau liquide et de glace ★ (solution page 473)

Dans une enceinte calorifugée à pression constante se trouvent une masse $M = 1,0$ kg d'eau liquide à $\theta_1 = 20$ °C et un cube de glace de masse m à $\theta_2 = -10$ °C.

On donne les capacités thermiques massiques de l'eau liquide $c_\ell = 4,18$ kJ · K⁻¹ · kg⁻¹ et de la glace $c_s = 2,06$ kJ · K⁻¹ · kg⁻¹, l'enthalpie massique de fusion de la glace $L_{\text{fus}} = 330$ kJ · kg⁻¹.

Tracer le graphe $\theta_f(x)$ donnant la température finale en fonction de $x = \frac{m}{M}$.

5. Frottements : travail ou transfert thermique? ★★ (solution page 473)

Un cube solide est posé sur une table horizontale. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$, à la réaction normale \vec{N} de la table, à l'action horizontale \vec{F} exercée par un opérateur et à la réaction tangentielle \vec{T} de la table, dont la norme est donnée par la loi empirique des frottements secs :

► si le cube glisse sur la table, la réaction tangentielle est dirigée dans le sens opposé à la vitesse, et a pour norme $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, où f est une constante positive appelée coefficient de frottement ;

► si le cube est immobile sur la table, $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$.

L'étude est menée dans le référentiel lié à la table, considéré comme galiléen.

1. L'opérateur exerce la force \vec{F} de manière à faire avancer le cube sur la table avec une vitesse \vec{v} constante. Calculer le travail W_1 fourni par l'opérateur au cube lors d'un déplacement du cube sur un trajet rectiligne AB de longueur L .
2. En déduire le travail W_2 exercé par la table sur le cube durant ce déplacement.
3. Calculer le travail W_3 exercé par le cube sur la table durant ce déplacement. Comparer W_2 et W_3 et interpréter la différence.
4. Appliquer le premier principe au système {cube + table} durant le déplacement du cube, et faire le lien avec la question précédente. On néglige les transferts thermiques vers l'air ambiant ; on note C_1 et C_2 les capacités thermiques du cube et de la table. Déterminer la température finale T_f de l'ensemble {cube + table}.
5. Reprendre l'étude précédente dans le cas où le cube est lancé avec une vitesse \vec{v} et s'arrête après avoir glissé sur une longueur L .

Chapitre 17

DEUXIÈME PRINCIPE. BILANS D'ENTROPIE

LA CONSERVATION de l'énergie, traduite par le premier principe, est un principe fondamental : une transformation lors de laquelle l'énergie ne serait pas conservée est impossible. Le premier principe ne permet cependant pas d'expliquer un caractère essentiel des transformations réelles : leur irréversibilité. Si on passe un film à l'envers, le résultat semble cocasse : de nombreuses scènes semblent impossibles, bien que la conservation de l'énergie soit respectée. C'est le deuxième principe qui permettra de définir la « flèche du temps », c'est-à-dire le sens naturel d'une évolution spontanée, en introduisant une nouvelle grandeur, l'entropie. Historiquement, le deuxième principe a été introduit pour prendre en compte la dissymétrie entre l'énergie thermique et l'énergie mécanique, point qui sera développé dans le chapitre 18 traitant des machines thermiques. Les travaux de Boltzmann ont donné une assise théorique statistique à la notion d'entropie, faisant le lien entre l'approche macroscopique et l'approche microscopique.

I. Le deuxième principe de la thermodynamique

I.1. Insuffisance du premier principe

Notion d'irréversibilité Reprenons l'exemple du contact thermique étudié dans l'exercice corrigé 16.5 (voir page 447) : deux corps identiques sont placés en contact dans une enceinte adiabatique, la température de l'un étant de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, celle de l'autre de $50\text{ }^{\circ}\text{C}$. Le système évolue spontanément vers un état d'équilibre thermique où les deux corps sont à la température de $35\text{ }^{\circ}\text{C}$ (voir figure 17.1).

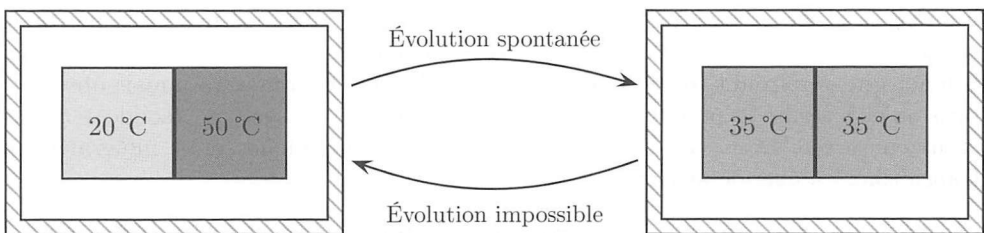


FIG. 17.1. Une évolution irréversible : le transfert thermique par contact.

La scène inverse est-elle possible ? Partant de deux corps identiques à la même température, l'un d'eux s'échaufferait spontanément de $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ tandis que l'autre verrait sa température diminuer de $15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Cette situation ne pourra jamais être observée, bien qu'elle respecte le premier principe.

Un système isolé ne peut pas subir n'importe quelle transformation, même si celle-ci assure la conservation de l'énergie du système. Si le système est dans un état initial qui n'est pas un état d'équilibre (température non uniforme dans l'exemple considéré), il évolue spontanément vers un état d'équilibre (équilibre thermique caractérisé par une température uniforme dans cet exemple). En revanche, on n'observera jamais

l'évolution d'un système isolé à partir d'un état d'équilibre vers un état de non-équilibre.

Cet exemple permet d'introduire la notion d'irréversibilité : si un système évolue spontanément d'un état (1) vers un état (2), alors il ne peut évoluer spontanément de l'état (2) vers l'état (1). Cette dissymétrie n'est pas prévue par le premier principe qui autorise pourtant les deux évolutions.

Certaines évolutions ne peuvent se faire que dans un sens : un système isolé évolue spontanément d'un état de non-équilibre vers un état d'équilibre, tandis que la transformation inverse, même si elle est permise par le premier principe, ne se produit jamais.

Le deuxième principe permet de combler cette insuffisance du premier principe en précisant la notion de transformation irréversible.

Considérons un solide que l'on lance sur une table horizontale : sous l'effet des frottements, il va finir par s'arrêter. Son énergie cinétique a été convertie en énergie thermique du fait des frottements, entraînant un échauffement de la zone de contact (voir figure 17.2).

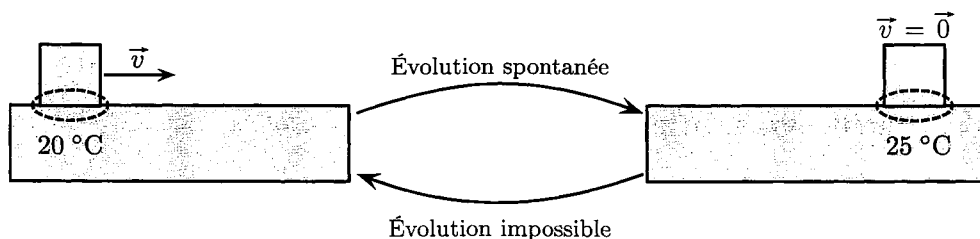


FIG. 17.2. Une évolution irréversible : mouvement avec frottement.

Filmons la scène et regardons-la à l'envers : un objet au repos posé sur une table se met spontanément en mouvement, l'énergie cinétique étant prélevée à la zone de contact qui se refroidit. Il est évident qu'une telle situation ne sera jamais observée, bien qu'elle vérifie le premier principe, l'énergie totale du système {solide + table} étant conservée. Dans cette évolution, de l'énergie thermique serait intégralement transformée en énergie mécanique¹.

Selon le premier principe, il y a équivalence entre le travail W et le transfert thermique Q qui ne sont vus que comme deux modes de transfert d'énergie. Il existe cependant une dissymétrie fondamentale : si l'on peut transformer intégralement de l'énergie mécanique en énergie thermique, l'opération inverse n'est pas permise. Le deuxième principe permet de combler cette insuffisance du premier principe : le transfert thermique Q joue un rôle particulier dans son énoncé.

Dans les deux cas considérés, le deuxième principe va préciser dans quel sens les transformations sont possibles.

1. Dans ce raisonnement, on néglige tout échange thermique avec l'air ambiant.

I.2. Énoncé du deuxième principe

Principe 17.1. Deuxième principe de la thermodynamique

À tout système thermodynamique est associée une fonction d'état S , appelée entropie.

- ▶ L'entropie est une grandeur extensive, dont la valeur s'exprime en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.
- ▶ L'entropie est une grandeur non conservative ; sa variation $\Delta S = S_2 - S_1$ au cours d'une transformation d'un système fermé d'un état (1) vers un état (2) est donnée par le bilan

$$\Delta S = S_{\text{reçu}} + S_{\text{créé}}$$

avec $S_{\text{créé}} \geq 0$.

- ▶ Pour une transformation irréversible, $S_{\text{créé}} > 0$.
- ▶ Dans le cas limite d'une transformation réversible, $S_{\text{créé}} = 0$.

Même si le temps n'apparaît pas explicitement dans le second principe, le signe du terme $S_{\text{créé}}$ de création d'entropie au sein du système porte en lui le sens possible² de l'évolution de ce système : quand le temps s'écoule, $S_{\text{créé}} \geq 0$; il y a création d'entropie. Une évolution telle que $S_{\text{créé}} < 0$ est impossible.

L'entropie a été introduite en 1864 par le physicien allemand Rudolf Clausius (1822-1888). Il a appelé cette grandeur entropie à partir du nom grec *entropé* ($\eta\nu\tau\rho\pi\eta$), signifiant « retour en arrière », et par analogie avec le terme « énergie ».

Cas d'une transformation cyclique

L'entropie étant une fonction d'état, sa variation au cours d'une transformation cyclique est nulle, l'état initial et l'état final étant identiques par définition.

Propriété 17.2. Deuxième principe pour une transformation cyclique

La variation de l'entropie d'un système fermé est nulle lorsqu'il subit une transformation cyclique, $\Delta S = 0$. Le bilan d'entropie s'écrit alors

$$S_{\text{créé}} + S_{\text{reçu}} = 0 \quad \text{avec} \quad S_{\text{créé}} \geq 0.$$

On en déduit $S_{\text{reçu}} \leq 0$.

Cas d'un système isolé

Par définition, un système isolé n'échange pas d'entropie avec l'extérieur³, $S_{\text{reçu}} = 0$. La variation de son entropie s'identifie donc avec l'entropie créée.

Propriété 17.3. Variation d'entropie d'un système isolé

L'entropie d'un système isolé ne peut que croître,

$$\Delta S = S_{\text{créé}} \geq 0.$$

- ▶ Lorsqu'un système isolé évolue vers un état d'équilibre, son entropie augmente jusqu'à atteindre sa valeur maximale lorsque l'état d'équilibre est atteint.
- ▶ Lorsqu'un système isolé est dans un état d'équilibre, son entropie est constante, $\Delta S = 0$. Il n'y a plus de création d'entropie au sein du système.

2. L'asymétrie de l'écoulement du temps est appelée la « flèche du temps » ; le deuxième principe l'associe à la création d'entropie.

3. Un système isolé n'échange rien avec l'extérieur.

I.2.1. Irréversibilité d'une transformation

Propriété 17.4. Transformation irréversible

L'évolution irréversible d'un système fermé d'un état (1) à un état (2) est caractérisée par $S_{\text{créé}} > 0$.

Le système ne peut suivre une telle évolution dans le sens inverse en suivant le même chemin, c'est-à-dire selon une transformation qui passerait par les mêmes états intermédiaires, tant pour le système que pour l'extérieur.

Dans l'exemple de la figure 17.1 (voir page 475), on peut tout à fait envisager la transformation dans le sens inverse, où deux blocs initialement à la même température évoluent vers des températures différentes : il suffit de chauffer l'un et de refroidir l'autre. Mais le milieu extérieur n'est alors plus le même que dans le cas de l'évolution spontanée. L'évolution inverse est impossible si l'on impose aux deux blocs de rester isolés.

Passer par le même chemin pour la transformation inverse est équivalent à visionner le film de cette transformation à l'envers. On peut en déduire un critère qualitatif pour savoir si une transformation est irréversible.

Une évolution est irréversible si « le film de l'évolution passé à l'envers » conduit à une situation thermodynamiquement absurde.

Dans le cas du contact thermique, on verrait ainsi un flux thermique se produire spontanément du corps froid (qui se refroidirait encore plus) vers le corps chaud (qui se réchaufferait encore plus).

Les principales causes d'irréversibilité de la transformation d'un système sont :

- ▶ la non-uniformité d'une grandeur intensive (au sein du système, et entre le système et le milieu extérieur si le système n'est pas calorifugé) ;
- ▶ l'existence de phénomènes dissipatifs (frottements).

Exemples

1. Dans le cas de la figure 17.1 (voir page 475), la température du système formé par l'ensemble des deux blocs n'est pas uniforme dans l'état initial : c'est la cause de l'irréversibilité de la transformation.

2. Dans le cas de la figure 17.2 (voir page 476), il existe des frottements, phénomène dissipatif appelé ainsi car il « dissipe » de l'énergie mécanique en énergie thermique : c'est la cause de l'irréversibilité de la transformation.

3. Si on place une goutte d'encre dans un liquide, l'encre diffuse au sein du liquide de façon irréversible : on n'observera jamais de l'encre diluée de façon homogène dans un liquide se concentrer spontanément en une goutte. La non-uniformité de la concentration en encre (grandeur intensive) est la cause de l'irréversibilité de la transformation.

Il existe d'autres causes d'irréversibilité que l'on ne rencontrera pas dans ce cours :

1. les réactions chimiques ;
2. les phénomènes d'hystérésis (persistance de l'effet quand la cause est supprimée) ;
3. le dépassement de la limite d'élasticité dans la déformation d'un matériau.

I.2.2. Cas limite de la transformation réversible

Définition 17.5. Transformation réversible

Une transformation est dite réversible si :

- ▶ elle est quasi stationnaire, c'est-à-dire si le système est en équilibre interne à tout instant (ses variables intensives sont uniformes) ;
- ▶ on peut à tout instant en inverser le sens par une modification infinitésimale des paramètres extérieurs.

Une transformation réversible d'un état (1) à un état (2) est telle que $S_{\text{créé}} = 0$.

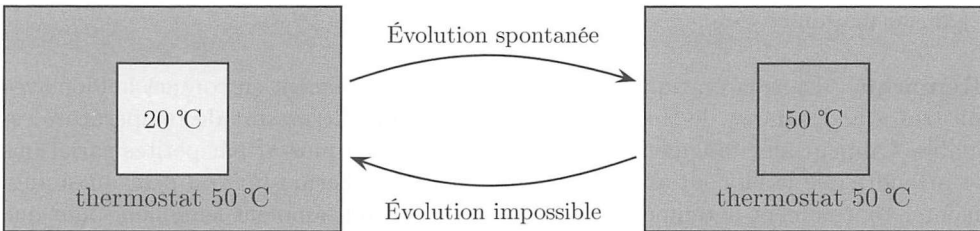


FIG. 17.3. Caractère irréversible d'une transformation monotherme.

Considérons un solide à la température initiale de 20 °C, placé dans un thermostat à la température de 50 °C. On choisit comme système le solide. Il subit ici une évolution monotherme, le conduisant à un état final d'équilibre thermique avec le thermostat où sa température est de 50 °C (voir figure 17.3).

Supposons l'évolution quasi stationnaire vis-à-vis de la température : à tout instant, la température du solide est uniforme⁴. Pour savoir si cette transformation est réversible, on envisage un état intermédiaire quelconque, par exemple tel que la température du solide soit de 30 °C. Pour inverser le sens de l'évolution, c'est-à-dire pour observer un refroidissement du solide, il faut que la température du thermostat devienne inférieure à 30 °C. La modification de la température du thermostat correspondante est donc supérieure à 20 °C, ce qui n'est pas du tout infinitésimal. Cette transformation est bien irréversible.

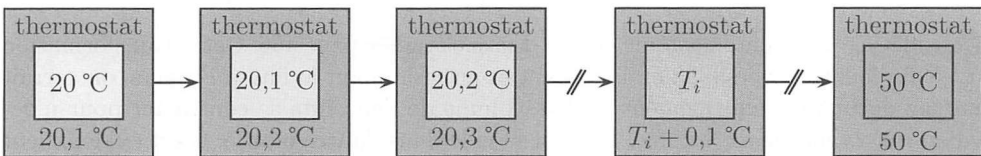


FIG. 17.4. Vers une transformation réversible.

Est-il possible d'augmenter la température du solide de 20 °C à 50 °C de façon réversible? Comme indiqué sur la figure 17.4, on met le solide successivement en contact avec une série de N thermostats, la différence de température entre les thermostats étant petite (0,1 °C ici, ce qui correspond à 300 thermostats). On attend que l'équilibre thermique soit réalisé à chaque étape avant de mettre le solide en contact avec le thermostat suivant.

4. Cette hypothèse suppose que le corps soit un bon conducteur thermique, de dimensions suffisamment petites.

Si on veut inverser le sens de la transformation à partir d'un état intermédiaire où la température du solide est T_i , il faut remplacer le thermostat de température $T_i + 0,1$ °C par le thermostat de température $T_i - 0,1$ °C, soit une modification de la température du thermostat de 0,2 °C, très petite. On peut rendre cette modification aussi petite que l'on veut en augmentant le nombre N de thermostats intermédiaires. L'écart de température entre le bloc et le thermostat étant très petit, on peut considérer que la température reste constamment uniforme dans le système {bloc + thermostats}. On a ainsi éliminé la non-uniformité de la température (grandeur intensive), cause d'irréversibilité du contact thermique. On peut montrer (voir exercice 3 page 501) que le terme de création d'entropie tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.

La transformation réversible apparaît comme un cas limite théorique d'une transformation réelle.

Remarque Dans la pratique, on ne met pas successivement en contact le bloc avec un très grand nombre de thermostats. On utilise un thermostat de température réglable. On peut alors augmenter la température du thermostat par petites variations et attendre que le bloc ait atteint la température du thermostat ; on peut aussi augmenter continûment la température du thermostat, suffisamment lentement pour que l'on puisse considérer que l'équilibre thermique entre le bloc et le thermostat soit établi à chaque instant.

Propriété 17.6. Transformation adiabatique réversible

Si un système fermé subit une transformation adiabatique et réversible, alors son entropie reste constante tout au long de l'évolution, $S = \text{cte}$.

Une telle transformation est dite isentropique, $\Delta S = 0$ quels que soient les états initial et final.

Remarque La condition $\Delta S = 0$ ne suffit pas pour qualifier une transformation d'isentropique ; il faut que l'entropie reste constante pendant toute la transformation.

II. Interprétation statistique de l'entropie

Considérons la détente de Joule et Gay-Lussac étudiée page 456. Cette transformation est clairement irréversible : en la filmant et en visionnant le film à l'envers, on verrait un gaz occupant uniformément tout le volume de l'enceinte se contracter pour n'occuper que la moitié du volume, laissant le vide dans l'autre moitié. C'est évidemment impossible.

Pourtant, si l'on filmait cette expérience au niveau microscopique, en admettant que l'on puisse visualiser la trajectoire des molécules, le film visionné à l'envers est aussi crédible que dans le bon sens : le mouvement d'une molécule, erratique au gré des collisions avec ses voisines, est le même dans un sens comme dans l'autre.

Comment concilier l'irréversibilité thermodynamique macroscopique de la transformation avec la réversibilité microscopique de l'évolution des molécules ? C'est Boltzmann qui, en 1877, a proposé une démonstration de la croissance de l'entropie d'un système isolé à partir d'une description microscopique de la matière. L'explication, qui fait appel aux probabilités, peut être esquissée à partir d'un modèle de la détente de Joule et Gay-Lussac.

On considère l'enceinte constituée de deux compartiments ; on adopte une description simplifiée où chaque molécule ne peut être que dans deux « états » : dans le compartiment de gauche ou dans le compartiment de droite (voir figure 17.5).

Étant donné N molécules identiques de gaz, un état macroscopique du système correspond à N_g molécules dans le compartiment de gauche et à $N_d = N - N_g$ molécules dans le compartiment de droite. Un tel état macroscopique est appelé « macro-état ». Si l'on pouvait numérotter chaque molécule, il existerait plusieurs possibilités de réaliser un même macro-état. Par exemple, le macro-état où $N_g = 1$ peut être réalisé de N façons différentes : le compartiment de gauche peut contenir la molécule n° 1, ou bien la molécule n° 2, etc., ce qui donne bien N possibilités. Chaque configuration décrite en précisant dans quel compartiment se trouve chaque molécule est appelée un « micro-état ». Dans cet exemple, N micro-états correspondent au même macro-état. La figure 17.5 décrit le cas où l'on considère $N = 2$ particules. Le macro-état est bien réalisé par $N = 2$ macro-états.

Dans le cas général (N molécules), le nombre Ω de micro-états correspondant au macro-état défini par le nombre N_g de molécules dans le compartiment de gauche est donné par le nombre de façons possibles que l'on a de choisir N_g particules parmi un ensemble de N , soit

$$\Omega(N_g) = \binom{N}{N_g} = \frac{N!}{N_g!(N - N_g)!}.$$

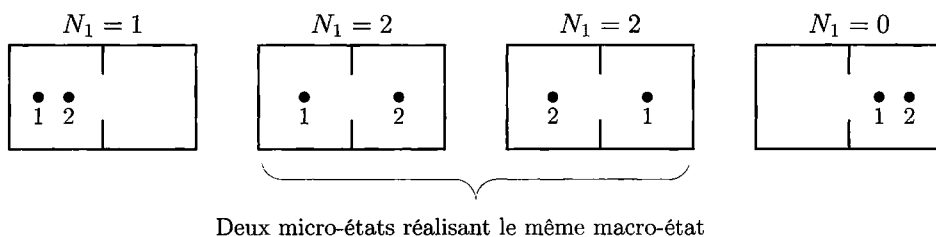


FIG. 17.5. Macro-états et micro-états correspondants.

Soit Ω le nombre de micro-états correspondant au même macro-état. En faisant l'hypothèse que tous les micro-états sont équiprobables⁵, la probabilité d'observer un macro-état est proportionnelle au nombre Ω de micro-états le réalisant. Dans le cas où $N = 2$, on peut déterminer la probabilité d'observer chaque macro-état.

Macro-état	Nombre de micro-états	Probabilité du macro-état
$N_g = 0$	$\Omega = 1$	25 %
$N_g = 1$	$\Omega = 2$	50 %
$N_g = 2$	$\Omega = 1$	25 %

L'état macroscopique le plus probable correspond à $N_g = N_d = 1$, c'est-à-dire à une répartition uniforme des particules. On montre que quand $N \gg 1$, $\Omega = \binom{N}{N_g}$ prend sa valeur maximale pour $N_g = \frac{N}{2}$, et décroît très vite quand N_g s'écarte de cette valeur.

5. La thermodynamique statistique pose le postulat : pour un système isolé à l'équilibre, tous les micro-états accessibles ont même probabilité.

La figure 17.6 représente $\frac{\Omega(N_g)}{\Omega_{\max}}$ en fonction de N_g , où $\Omega_{\max} = \Omega(\frac{N}{2})$, pour différentes valeurs du nombre total N de particules⁶. Il apparaît que pour un système contenant un très grand nombre de particules (ce qui est le cas des systèmes étudiés en thermodynamique), l'état final de la détente de Joule et Gay-Lussac a une probabilité d'être observé bien supérieure aux autres états, et en particulier l'état initial.

L'irréversibilité d'une transformation apparaît donc comme l'évolution vers les états macroscopiques de probabilité plus élevée.

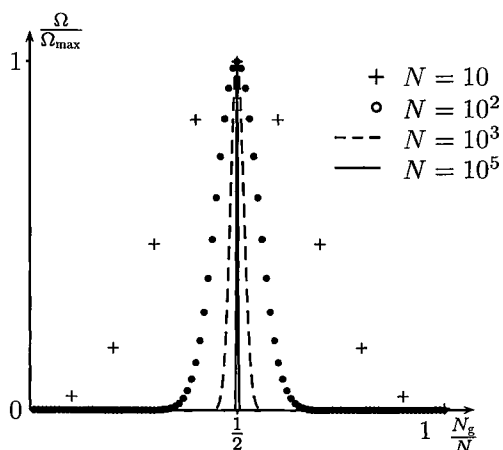


FIG. 17.6. Proportion relative du nombre de micro-états réalisant un macro-état à N_g particules dans le compartiment de gauche, pour différentes valeurs du nombre total N de particules.

On peut ainsi relier l'entropie d'un système dans un macro-état donné au nombre Ω de micro-états réalisant cet état macroscopique : S augmente quand Ω augmente (sens d'évolution d'un système isolé). Boltzmann a théorisé cette propriété dans la formule (admise) qui porte son nom⁷.

Loi 17.7. Formule de Boltzmann

L'entropie d'un système dans un état macroscopique donné s'écrit

$$S = k_B \ln \Omega,$$

où Ω est le nombre d'états microscopiques réalisant cet état, et où k_B est la constante de Boltzmann.

Remarque Le raisonnement précédent s'appuie sur une modélisation d'un gaz où les molécules ne peuvent être que dans deux états. En réalité, une molécule peut occuper une infinité d'états (donnés par sa position et sa vitesse) dans une enceinte ; on ne peut plus alors faire un décompte des états accessibles. La grandeur Ω est définie en décrivant l'espace des phases associé au système : on a vu en mécanique que l'espace des phases associé à un système à un degré de liberté est le plan (q, \dot{q}) où q est une variable décrivant la position du système. La position d'une particule dans l'espace est définie par trois coordonnées d'espace (via le vecteur-position \vec{OM}). En adjoignant sa quantité de mouvement \vec{p} (similaire à \dot{q} pour le système à un degré de liberté),

6. La figure 17.6 représente Ω pour $N = 10^5$; dans un système thermodynamique, on a typiquement $N = 10^{24}$.

7. Cette formule est admise, conformément au programme des CPGE.

l'espace des phases associé à une particule est donc de dimension 6 (\overrightarrow{OM} , et \vec{p}). L'espace des phases permettant de décrire un gaz contenant N particules est donc de dimension $6N$. Le nombre de micro-états est alors assimilable au volume de l'espace des phases accessible au système. Les développements théoriques sortent du cadre du programme.

Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) est un physicien autrichien qui a développé la physique statistique. Il fut le premier à donner une interprétation microscopique de l'entropie. Il est l'auteur de travaux fondamentaux sur la théorie cinétique des gaz. Il dut faire face à l'incompréhension de ses contemporains et, lors d'une crise de dépression, il se suicida en 1906. Sur sa tombe est inscrite sa célèbre formule $S = k \log W$, énoncée en 1877, le symbole W étant choisi d'après le terme allemand *Wahrscheinlichkeit* : probabilité.



Ludwig Boltzmann

Lien entre entropie et désordre

Si le nombre Ω de micro-états réalisant un état macroscopique est élevé, on peut dire d'un premier point de vue que l'on manque d'informations sur le système (quel est le micro-état effectivement réalisé ?). L'Américain Claude Shannon (1916-2001) a développé la théorie de l'information, définissant la notion d'entropie liée à l'information que l'on a sur un système⁸.

D'un autre point de vue, on peut dire que le système est d'autant plus désordonné que Ω est grand (donc que son entropie est élevée) : une répartition uniforme de molécules est plus désordonnée qu'une répartition plus structurée. Il est d'usage de dire que l'entropie mesure le désordre d'un système.

Un système isolé évolue donc spontanément et de façon irréversible de l'ordre vers le désordre (croissance de l'entropie).

Remarque Ce résultat n'est valable que pour un système isolé, évoluant vers un état d'équilibre.

Autour de nous, de nombreuses situations semblent violer le second principe, évoluant du désordre vers l'ordre. Par exemple, un œuf évolue spontanément d'un état désordonné (un jaune uniforme entouré d'un blanc uniforme) vers un état hautement structuré (un poussin). Sans aller jusqu'aux organismes vivants, si l'on chauffe la base d'une couche de liquide, il peut apparaître des courants organisés formant des structures de convection appelées « cellules de Bénard ».

Le chimiste belge Ilya Prigogine (1917-2003, prix Nobel de chimie en 1977) a contribué à la compréhension de ces phénomènes en introduisant le concept de « structures dissipatives » en 1969. Un système ouvert, loin de l'équilibre et régi par des lois non linéaires peut évoluer vers un état structuré, organisé ; ces conditions sont d'ailleurs satisfaites pour tout système vivant.

8. Cette entropie est équivalente à l'entropie statistique de Boltzmann.

Synthèse

Interprétation microscopique de l'entropie

- ▶ L'entropie peut s'interpréter comme une mesure du désordre d'un système : un système structuré a une entropie plus faible qu'un système désordonné.
- ▶ La probabilité d'observer un système sous une forme désorganisée (où ses grandeurs intensives sont uniformes, par exemple) est beaucoup plus élevée que la probabilité de l'observer dans un état structuré. Un système isolé évolue spontanément vers son état le plus probable, de façon irréversible.

III. Bilan d'entropie

III.1. Terme d'échange d'entropie

Dans le cadre du programme des CPGE, les résultats suivants sont admis ; ils sont issus des travaux théoriques de Clausius lors de sa construction de la fonction entropie S .

Proposition 17.8. *Expression de l'entropie échangée*

L'entropie reçue par un système lors d'une transformation dépend du transfert thermique reçu par ce système.

Nature de l'évolution	Entropie échangée	Commentaire
Adiabatique	$S_{\text{reçu}} = 0$	
Monotherme	$S_{\text{reçu}} = \frac{Q}{T_0}$	Le système reçoit le transfert thermique Q de la part du thermostat à la température T_0
Polytherme	$S_{\text{reçu}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$	Le système reçoit le transfert thermique Q_i de la part du thermostat (i) à la température T_i

Alors que le travail et le transfert thermique jouent un rôle équivalent dans le premier principe, l'expression de l'entropie échangée fait apparaître la dissymétrie entre ces deux grandeurs : seul le transfert thermique intervient.

Remarque D'une façon plus générale, l'entropie reçue par un système est donnée par le rapport du transfert thermique reçu par ce système sur la température de la frontière du système à travers laquelle se fait ce transfert thermique. Dans le cas où le système est au contact avec un thermostat, cette température est égale à celle du thermostat.

III.2. Variation d'entropie d'un système

Faire un bilan d'entropie, c'est expliciter les termes ΔS , variation de l'entropie du système étudié, et $S_{\text{reçu}}$, entropie reçue par le système à travers sa frontière. On peut alors en déduire l'entropie créée $S_{\text{créé}}$ en écrivant $\Delta S = S_{\text{reçu}} + S_{\text{créé}}$.

Remarques

1. La variation d'entropie d'un système se calcule à partir de l'expression de son entropie, qui sera donnée⁹.
2. On n'a pas accès à $S_{\text{créé}}$ directement ; cette grandeur se calcule à partir du bilan d'entropie.

III.2.1. Variation d'entropie du gaz parfait

Les variables d'état du gaz parfait sont sa pression p , son volume V et sa température T . L'état de n moles de ce gaz à l'équilibre est entièrement déterminé par la donnée de deux de ces variables : (p, V) , (p, T) ou (T, V) ; la troisième de ces variables se déduit de l'équation d'état $pV = nRT$.

L'entropie, fonction d'état, ne dépend que de l'état macroscopique du gaz ; elle est donc entièrement déterminée par la donnée de deux des variables d'état p , V et T . On peut donc l'écrire comme une fonction de deux variables $S(p, V)$, $S(p, T)$ ou $S(T, V)$. La loi 17.9 ci-après est admise.

Loi 17.9. Entropie du gaz parfait

L'entropie de n moles de gaz parfait à l'équilibre est donnée par

$$S(T, V) = C_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S_0,$$

où $S_0 = S(T_0, V_0)$ est l'entropie du gaz dans l'état (p_0, T_0, V_0) choisi comme origine.

Remarques

1. Le gaz doit être dans un état d'équilibre thermodynamique afin que sa température et sa pression soient uniformes. C'est à cette condition que l'on peut parler de la température T ou de la pression p du gaz, et que les écritures $S(T, V)$, $S(T, p)$ et $S(p, V)$ ont un sens.
2. L'entropie est en fait définie à partir de sa variation¹⁰. Son expression est donc déterminée à une constante additive près, que l'on note S_0 , correspondant à un état arbitrairement choisi comme origine.
3. Cela n'est pas gênant que l'entropie ne soit connue qu'à une constante additive près : seule sa variation ΔS intervient dans les bilans d'entropie.
4. L'indétermination précédente sur la valeur de l'entropie peut être levée grâce au troisième principe de la thermodynamique, énoncé par le physicien allemand Walther Nernst en 1906 : *l'entropie de tout corps cristallisé tend vers zéro quand la température tend vers zéro*.
5. L'entropie apparaît bien comme extensive dans l'expression proposée : C_v est extensive et le terme $nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$ est extensif (proportionnel à n). La constante S_0 doit d'ailleurs être extensive.

D'après l'équation d'état $pV = nRT$ du gaz parfait, $\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p}$, d'où

$$S(T, p) = C_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p} \right) + S_0 = (C_v + nR) \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) + S_0.$$

9. L'établissement de l'entropie d'un système n'est pas au programme.

10. Plus précisément, à partir de sa variation élémentaire dS , appelée différentielle. Ces notions de thermodynamique différentielle seront vues en seconde année.

La relation de Mayer (voir page 453) s'écrit $C_v + nR = C_p$, d'où

$$S(T, p) = C_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) + S_0.$$

De même, partant de $\frac{T}{T_0} = \frac{V}{V_0} \frac{p}{p_0}$, on a

$$S(p, V) = C_v \ln \left(\frac{V}{V_0} \frac{p}{p_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S_0 = C_v \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + (C_v + nR) \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S_0,$$

soit, en utilisant la relation de Mayer (voir page 453) $C_v + nR = C_p$,

$$S(p, V) = C_v \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + C_p \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S_0.$$

Les expressions précédentes permettent d'exprimer la variation d'entropie du gaz parfait entre deux états d'équilibre (p_1, V_1, T_1) et (p_2, V_2, T_2) .

En variables T et V , la variation d'entropie $\Delta S = S(T_2, V_2) - S(T_1, V_1)$ s'écrit, en supposant C_v indépendant de T sur l'intervalle de température considéré,

$$\Delta S = C_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Comme $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ (voir page 454), on peut écrire

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} \right).$$

En variables T et p , la variation d'entropie $\Delta S = S(T_2, p_2) - S(T_1, p_1)$ s'écrit, en supposant C_p indépendant de T sur l'intervalle de température considéré,

$$\Delta S = C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - nR \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Comme $C_p = \frac{n\gamma R}{\gamma-1}$, on peut écrire

$$\Delta S = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - nR \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_2 p_2^{1-\gamma}}{T_1 p_1^{1-\gamma}} \right).$$

Enfin, en variables p et V , la variation d'entropie $\Delta S = S(p_2, V_2) - S(p_1, V_1)$ s'écrit

$$\Delta S = C_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) + C_p \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) + \frac{n\gamma R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right),$$

soit

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} \right).$$

Synthèse

Variation de l'entropie du gaz parfait

La variation de l'entropie d'un système constitué de n moles de gaz parfait entre deux états d'équilibre (p_1, V_1, T_1) et (p_2, V_2, T_2) s'écrit en fonction de deux de ses variables d'état et son coefficient adiabatique.

Variation	Variation d'entropie
(T, V)	$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} \right)$
(T, p)	$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}}{T_1^\gamma p_1^{1-\gamma}} \right)$
(p, V)	$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} \right)$

Remarques

1. Ces expressions ne sont pas à mémoriser. Il faut savoir exprimer l'entropie en fonction de deux quelconques des variables d'état du gaz parfait à partir d'une expression donnée, et en déduire la variation de l'entropie sous la forme donnée dans le tableau de synthèse.
2. Ces résultats sont valables si $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ et $C_p = \frac{n\gamma R}{\gamma-1}$ sont indépendants de la température, c'est-à-dire si γ ne dépend pas de T dans le domaine de température considéré, hypothèse généralement vérifiée pour un large intervalle de température.
3. Si l'on augmente la température en maintenant p ou V fixée, l'entropie du gaz augmente : cela traduit une augmentation du désordre au sein du système (l'agitation thermique des molécules est plus importante).
4. Si le volume augmente, les autres grandeurs étant fixées, l'entropie augmente. L'espace disponible pour le gaz étant plus grand, le désordre (nombre de micro-états) augmente.

III.2.2. Variation d'entropie d'une phase condensée

On considère une phase condensée incompressible et indilatable, de masse m et de capacité thermique massique c (on peut en effet assimiler capacité thermique massique à pression constante et à volume constant, voir page 455).

Loi 17.10. Entropie d'une phase condensée idéale

L'entropie du système constitué d'une masse m de phase condensée ne dépend que de sa température,

$$S(T) = mc \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + S_0,$$

où $S_0 = S(T_0)$ pour une température T_0 choisie comme référence, et où c est la capacité thermique massique de la phase condensée, supposée indépendante de la température.

L'expression proposée est bien extensive car proportionnelle à la masse (le terme S_0 doit d'ailleurs être extensif). La variation d'entropie d'une phase condensée entre un état initial d'équilibre à la température T_1 et un état final d'équilibre à la température T_2 s'écrit donc

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

EXERCICE CORRIGÉ 17.11.

Variation d'entropie d'un thermostat

On considère une phase condensée incompressible et indilatable, de masse m et de capacité thermique massique c , évoluant d'un état initial où sa température vaut T_1 à un état final où sa température vaut T_2 .

1. Exprimer T_2 en fonction des données et du transfert thermique Q reçu par le système défini par la phase condensée.
2. Exprimer la variation d'entropie de la phase condensée au cours de cette transformation en fonction de Q , T_1 , m et c .
3. On se place dans le cas où la phase condensée est de grande dimension, soit dans la limite $m \rightarrow \infty$.

Que deviennent alors la température finale et la variation d'entropie du système ?

Que modélise alors ce système ?

On rappelle que $\ln(1+x) \simeq x$ pour $|x| \ll 1$.

Corrigé

1. La phase condensée évoluant à volume constant, elle reçoit un travail nul ($W = 0$) et le premier principe s'écrit $\Delta U = mc(T_2 - T_1) = Q$. On en déduit

$$T_2 = T_1 + \frac{Q}{mc}.$$

2. La variation d'entropie est donnée par

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = mc \ln \left(\frac{T_1 + \frac{Q}{mc}}{T_1} \right) = mc \ln \left(1 + \frac{Q}{mcT_1} \right).$$

3. La limite $m \rightarrow \infty$ correspond à $\frac{Q}{mcT_1} \ll 1$; on a alors $T_2 \simeq T_1$, et

$$\Delta S = mc \ln \left(1 + \frac{Q}{mcT_1} \right) \simeq mc \frac{Q}{mcT_1} = \frac{Q}{T_1}.$$

La température du système ne varie pas ; ce système, qui n'échange qu'un transfert thermique sans variation de température, se comporte comme un thermostat.

Remarque Le thermostat est un modèle purement théorique. On vient de montrer qu'il suppose une capacité thermique infinie, ce qui est le cas si on considère sa masse infinie, pour que sa température reste constante. Comme on suppose que sa température reste uniforme, il doit aussi conduire « infiniment bien » l'énergie thermique¹¹ afin d'uniformiser sa température.

11. La conduction thermique sera étudiée en seconde année.

III.2.3. Bilan d'entropie pour un thermostat

Considérons un système (Σ) subissant une évolution monotherme, c'est-à-dire n'échangeant un transfert thermique Q qu'avec un thermostat (\mathcal{T}) à la température T_0 (voir figure 17.7).

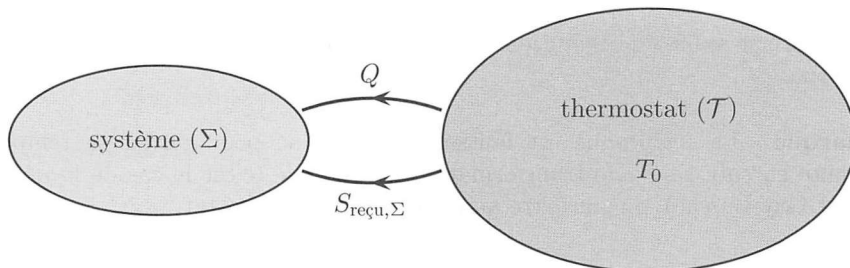


FIG. 17.7. Entropie reçue par un système au contact d'un thermostat.

Le thermostat reçoit donc le transfert thermique $-Q$ de la part du système étudié. La variation de son entropie a été établie dans l'exercice corrigé 17.11,

$$\Delta S_{\mathcal{T}} = -\frac{Q}{T_0}.$$

Le système (Σ) subissant une évolution monotherme, il reçoit algébriquement l'entropie

$$S_{\text{reçu},\Sigma} = \frac{Q}{T_0}.$$

Le système global (Σ) \cup (\mathcal{T}) étant isolé, le thermostat reçoit l'entropie

$$S_{\text{reçu},\mathcal{T}} = -S_{\text{reçu},\Sigma} = -\frac{Q}{T_0}.$$

Le bilan d'entropie pour le thermostat s'écrit

$$\Delta S_{\mathcal{T}} = S_{\text{reçu},\mathcal{T}} + S_{\text{créé},\mathcal{T}}.$$

On en déduit

$$S_{\text{créé},\mathcal{T}} = \Delta S_{\mathcal{T}} - S_{\text{reçu},\mathcal{T}} = -\frac{Q}{T_0} + \frac{Q}{T_0} = 0.$$

Le thermostat subit donc une transformation réversible.

Propriété 17.12. Bilan d'entropie pour un thermostat

L'évolution d'un thermostat échangeant un transfert thermique avec un système (Σ) est réversible.

Les échanges thermiques étant orientés comme indiqué figure 17.7, la variation d'entropie du thermostat est donnée par

$$\Delta S_{\text{therm}} = -\frac{Q}{T_0},$$

où Q est le transfert thermique reçu par le système (Σ) au contact avec le thermostat à la température T_0 .

Remarque Le système (Σ) subit une évolution irréversible si sa température est différente de celle du thermostat. On a vu page 479 que l'irréversibilité du transfert thermique est due à la non uniformité de la température, mais que cette transformation tend vers la réversibilité si la température du système reste infiniment proche de celle du thermostat à chaque instant. Comme la température du thermostat est constante, celle du système reste constante dans le cas limite de la réversibilité.

Si un système subit une évolution monotherme réversible, elle est nécessairement isotherme.

Remarque La réciproque est fautive : un système peut garder sa température constante en subissant une transformation irréversible (c'est le cas de la détente de Joule et Gay-Lussac), ou sans être au contact d'un thermostat.

III.3. Exemples

III.3.1. Détente de Joule et Gay-Lussac

La détente de Joule et Gay-Lussac a été étudiée page 457 : il s'agit de la détente dans le vide d'un gaz (voir figure 16.2 page 457), considéré comme parfait. Les deux compartiments sont identiques, de volume V . La température du gaz ne varie pas entre l'état initial et l'état final (voir page 457). D'autre part, on connaît le volume initial V et le volume final $2V$ occupés par le gaz. Il est donc adapté d'utiliser l'expression de l'entropie du gaz parfait en variables T et V . Avec $T_2 = T_1$ et $V_2 = 2V_1$, la variation d'entropie du gaz est donnée par

$$\Delta S = nR \ln 2.$$

L'enceinte étant calorifugée, le terme d'échange d'entropie est nul, $S_{\text{reçu}} = 0$. Le bilan d'entropie s'écrit alors

$$\Delta S = S_{\text{créé}} = nR \ln 2 > 0.$$

La transformation est telle que $S_{\text{créé}} > 0$: elle est irréversible.

La cause d'irréversibilité est ici la non-uniformité des grandeurs intensives (température et pression) du gaz au cours de la transformation. L'augmentation de l'entropie du système traduit une augmentation du désordre au sein du système.

Remarque Le terme d'échange d'entropie étant nul pour un système isolé, le bilan d'entropie s'écrit alors $\Delta S = S_{\text{créé}}$. Dans le cas d'une évolution irréversible (c'est-à-dire réelle), $S_{\text{créé}} > 0$, donc $\Delta S > 0$. Cela donne une autre façon de formuler le deuxième principe de la thermodynamique.

L'entropie d'un système *isolé* ne peut que croître. Lorsque l'évolution (spontanée) d'un système isolé s'arrête, l'entropie de celui-ci est maximale.

III.3.2. Contact thermique avec un thermostat

On place un bloc de cuivre de masse m , considéré comme une phase condensée incompressible et indilatable, en contact avec un thermostat à la température T_0 . La température initiale du bloc est T_1 , et sa capacité thermique massique c . Le solide étant un bon conducteur thermique, on peut supposer sa température T uniforme à tout instant (voir figure 17.8). Par définition d'un thermostat, ce dernier garde une

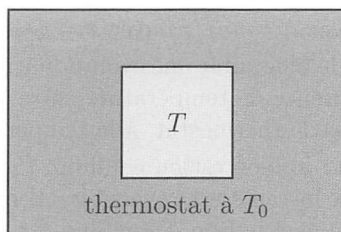


FIG. 17.8. Transformation monotherme et bilan d'entropie.

température constante et uniforme T_0 . Dans son état final, le bloc est en équilibre thermique avec le thermostat : sa température vaut alors $T_2 = T_0$.

Étude en considérant le système {bloc}

Considérons comme système (Σ_1) le bloc de cuivre. La variation de son entropie quand sa température évolue de T_1 à T_0 est

$$\Delta S_1 = mc \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right).$$

L'entropie reçue par le bloc de cuivre lors de cette transformation monotherme vaut

$$S_{\text{reçu},1} = \frac{Q}{T_0},$$

où le transfert thermique reçu par le cuivre est donné par $Q = mc(T_0 - T_1)$, donc

$$S_{\text{reçu},1} = mc \left(1 - \frac{T_1}{T_0} \right).$$

Le bilan d'entropie $\Delta S_1 = S_{\text{reçu},1} + S_{\text{créé},1}$ pour le système (Σ_1) s'écrit alors

$$mc \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) = mc \left(1 - \frac{T_1}{T_0} \right) + S_{\text{créé},1}.$$

L'entropie créée au sein du système (Σ_1) vaut ainsi

$$S_{\text{créé},1} = mc \left[\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right].$$

Le signe de cette expression peut être déterminé en étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto x - 1 - \ln x$. Sa dérivée $f'(x) = 1 - 1/x$ s'annule pour $x = 1$ où cette fonction présente un extremum. On en déduit le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

L'entropie créée s'écrivant $S_{\text{créé},1} = mc f(x)$ avec $x = \frac{T_1}{T_0}$, on en déduit $S_{\text{créé}} \geq 0, \forall T_1$. Si $T_1 \neq T_0$, alors $S_{\text{créé},1} > 0$: le bloc subit une évolution irréversible. La cause physique de l'irréversibilité est la différence de température entre le bloc, à la température T , et sa frontière en contact avec le thermostat, à la température T_0 .

Si $T_1 = T_0$, alors $S_{\text{créé},1} = 0$: le bloc est en équilibre thermique avec le thermostat. Son « évolution » entre deux instants est réversible : il ne se passe rien ! L'évolution inverse est donc identique : une situation d'équilibre est naturellement réversible.

Étude en considérant le système {bloc} + {thermostat}

On a raisonné en considérant l'évolution du bloc, dont on a montré l'irréversibilité. On peut aussi considérer le système {bloc + thermostat}, qui subit une transformation adiabatique (le thermostat n'échange de l'énergie qu'avec le bloc, l'ensemble étant dans une enceinte adiabatique par exemple). Dans ce cas, le système global n'échange pas d'entropie avec l'extérieur, et le bilan d'entropie s'écrit

$$\Delta S = S_{\text{créé}}.$$

L'entropie étant extensive, $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, où $\Delta S_1 = S_{\text{reçu},1} + S_{\text{créé},1}$ est la variation d'entropie du bloc et ΔS_2 celle du thermostat. La variation d'entropie du thermostat est (voir page 489)

$$\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_0}.$$

La variation d'entropie du bloc s'écrit

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_0} + S_{\text{créé},1}.$$

On a donc $\Delta S = S_{\text{créé},1} > 0$. L'évolution du système global est irréversible. Cette évolution n'est même pas quasi stationnaire : à tout instant, la température du système {bloc + thermostat} n'est pas uniforme ; le système n'est donc pas dans un état d'équilibre interne (l'équilibre thermique n'est pas réalisé). Une telle évolution ne peut donc pas être réversible.

Remarque Que l'on considère l'évolution du système {bloc + thermostat} ou du bloc seul, le terme de création est le même, $S_{\text{créé},1} = S_{\text{créé}}$. L'irréversibilité est due à l'évolution du bloc, le thermostat subissant une évolution réversible. Attention : cela ne veut pas dire que la création d'entropie (et donc la cause d'irréversibilité) est localisée dans le bloc. Même si l'on considère {le bloc} comme système, on ne peut faire abstraction de l'extérieur (on dit parfois « du reste de l'univers ») pour décrire son évolution. Ici, l'irréversibilité est due à la différence de température entre le bloc et l'extérieur¹².

La température du bloc est uniforme à chaque instant de la transformation : l'équilibre thermique interne est donc réalisé, et sa transformation est quasi stationnaire. Cependant, la transformation n'est pas réversible, car cette température n'est pas égale à la température du thermostat.

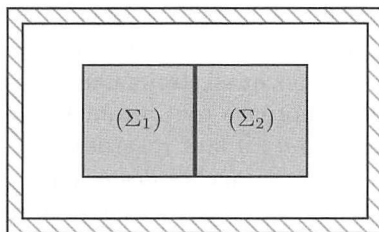
12. On a de plus supposé que la température du bloc est uniforme à tout instant, ce qui revient à le considérer comme de conductivité thermique infinie. En réalité, il existe un gradient de température au sein du bloc, ce qui est une source supplémentaire d'irréversibilité (grandeur intensive non uniforme).

On ne peut conclure quant au caractère réversible ou non de l'évolution d'un système en faisant abstraction du reste de l'univers. L'irréversibilité peut avoir des causes :

- ▶ internes au système (grandeur intensive non uniforme) ;
- ▶ dues aux échanges entre le système et l'extérieur (situation de non équilibre).

EXERCICE CORRIGÉ 17.13. Bilan d'entropie pour le contact thermique

Deux blocs de cuivre identiques Σ_1 et Σ_2 de même masse $m = 200$ g sont placés en contact dans une enceinte indéformable adiabatique. Ils sont considérés comme indilatables et incompressibles, et peuvent échanger un transfert thermique entre eux. Leurs températures initiales sont $T_{i,1}$ et $T_{i,2}$. On donne la capacité thermique massique du cuivre $c = 385 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.



La température finale des deux corps a été déterminée dans l'exercice corrigé 16.5 page 447, $T_f = \frac{T_{i,1} + T_{i,2}}{2}$.

1. Effectuer un bilan d'entropie pour le système $\{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ et discuter du caractère réversible ou non de la transformation.
2. Application numérique. Calculer l'entropie créée au sein du système $\{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ dans les cas suivants :
 - a/ $T_{i,1} = 20,0$ °C et $T_{i,2} = 50,0$ °C ;
 - b/ $T_{i,1} = 20,0$ °C et $T_{i,2} = 25,0$ °C.

Corrigé

1. La variation d'entropie du système Σ_1 entre l'état initial et l'état final est donnée par

$$\Delta S_1 = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_{i,1}} \right).$$

De même, pour le système Σ_2 ,

$$\Delta S_2 = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_{i,2}} \right).$$

L'entropie étant une grandeur extensive, la variation de l'entropie du système global $\{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ s'écrit

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \left(\frac{T_f^2}{T_{i,1} T_{i,2}} \right).$$

Le système $\{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ subissant une transformation adiabatique, $S_{\text{reçu}} = 0$, et le bilan d'entropie s'écrit $\Delta S = S_{\text{créé}}$. L'entropie créée au sein de ce système est donc donnée par la variation de l'entropie de ce système, soit en remplaçant T_f par son expression

$$S_{\text{créé}} = mc \ln \left(\frac{T_f^2}{T_{i,1} T_{i,2}} \right) = mc \ln \left(\frac{(T_{i,1} + T_{i,2})^2}{4 T_{i,1} T_{i,2}} \right) = mc \ln f(x)$$

avec $f(x) = \frac{(1+x)^2}{4x}$, où l'on a posé $x = \frac{T_{i,2}}{T_{i,1}}$.

On peut écrire

$$f(x) = \frac{1+x^2+2x}{4x} = \frac{(1+x^2-2x)+4x}{4x} = \frac{(1-x)^2+4x}{4x} = 1 + \frac{(1-x)^2}{4x} > 1,$$

donc $\ln f(x) > 0$, d'où $S_{\text{créé}} > 0$: cela confirme l'irréversibilité de l'évolution, qui était *a priori* évidente (il suffit d'imaginer le film de la transformation projeté à l'envers).

L'irréversibilité est due à la non-uniformité de la température dans le système *global* $\{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ au cours de la transformation. Les états successifs du système au cours de sa transformation ne sont donc pas des états d'équilibre interne : l'évolution n'est pas quasi stationnaire pour le système global et ne peut donc pas être réversible.

Même si l'échange thermique est suffisamment lent pour que l'évolution de chaque bloc puisse être considérée comme quasi stationnaire (c'est-à-dire que la température au sein de chaque bloc soit uniforme à tout instant), cela ne permet pas d'assurer la réversibilité de la transformation : il faut regarder le système dans sa globalité (en incluant toutes les parties entre lesquelles des échanges thermiques ont lieu) pour conclure quant au caractère réversible ou non de l'évolution.

2. Il ne faut pas oublier de convertir les températures en kelvins pour effectuer les applications numériques.

a/ Pour $T_{i,1} = 293 \text{ K}$ et $T_{i,2} = 323 \text{ K}$, on calcule $S_{\text{créé}} = 0,183 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

b/ Pour $T_{i,1} = 293 \text{ K}$ et $T_{i,2} = 298 \text{ K}$, on calcule $S_{\text{créé}} = 5,51 \cdot 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

La création d'entropie diminue sensiblement quand la différence des températures initiales des deux corps est plus faible.

Remarques

1. Dans cet exemple, aucun des deux corps ne peut être assimilé à un thermostat. On ne peut donc, dans le cadre du programme¹³, effectuer de calcul d'entropie échangée; le terme d'échange ne peut être calculé que pour le système global qui est calorifugé, d'où $S_{\text{reçu}} = 0$.

2. Quand on écrit $S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_0}$ pour une évolution monotherme, la température figurant au dénominateur est en toute rigueur la température de l'interface entre le corps et le thermostat. On suppose que cette température est égale à celle du thermostat, ce qui est une modélisation de la réalité : la température étant une grandeur continue, on ne peut observer un saut de température entre le thermostat et le corps en contact. Ces notions seront approfondies en seconde année lors de l'étude de la diffusion thermique.

IV. Loi de Laplace

Considérons un gaz parfait subissant une évolution adiabatique et réversible. En supposant γ indépendant de T , la variation d'entropie de ce gaz lors de la transformation

13. Ce calcul sera possible avec les méthodes vues en seconde année.

s'écrit (voir page 487)

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}}{T_1^\gamma p_1^{1-\gamma}} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} \right).$$

Une transformation adiabatique réversible étant isentropique (voir propriété 17.6 page 480), $\Delta S = 0$, d'où

$$\frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 1, \quad \frac{T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}}{T_1^\gamma p_1^{1-\gamma}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} = 1.$$

Une telle transformation est donc caractérisée par

$$TV^{\gamma-1} = \text{cte}, \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} \quad \text{et} \quad pV^\gamma = \text{cte}. \quad (17.1)$$

Loi 17.14. Loi de Laplace

On considère un système fermé constitué d'un gaz obéissant aux conditions suivantes :

- ▶ c'est un gaz parfait ;
- ▶ son exposant adiabatique γ est constant.

S'il subit une transformation qui est :

- ▶ adiabatique,
- ▶ réversible,

alors pV^γ reste constant tout au long de la transformation,

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma,$$

où p_0 et V_0 sont la pression et le volume du gaz dans l'état initial.

Il est inutile de mémoriser les trois relations (17.1) ; il suffit d'utiliser l'équation d'état du gaz parfait pour retrouver les deux autres à partir de $pV^\gamma = \text{cte}$:

- ▶ comme p est proportionnel à $\frac{T}{V}$, $\frac{T}{V} V^\gamma = \text{cte}$, soit $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$;
- ▶ comme V est proportionnel à $\frac{T}{p}$, $p \left(\frac{T}{p} \right)^\gamma = \text{cte}$, soit $p^{1-\gamma} V^\gamma = \text{cte}$.

EXERCICE CORRIGÉ 17.15.

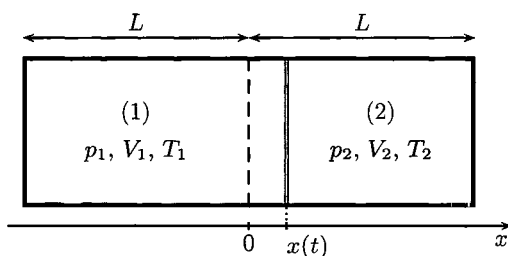
Un cylindre calorifugé de section S et de longueur $2L$ est séparé en deux compartiments par un piston calorifugé de masse m pouvant se déplacer sans frottements.

À l'équilibre, chaque compartiment contient un gaz considéré comme parfait, à la température T_0 , sous la pression p_0 , le piston étant situé en $x = 0$.

À l'instant $t = 0$, on écarte le piston en $x = b$ et on le lâche avec une vitesse initiale nulle.

1. Prévoir qualitativement l'évolution du système.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
3. Dans le cas où $b \ll L$, la résoudre et décrire le mouvement. On rappelle que pour $|\varepsilon| \ll 1$, on a $(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$.

Oscillations d'un piston



Corrigé

1. Quand le piston se déplace vers la droite, le volume du compartiment de droite diminue, entraînant une augmentation de la pression du gaz dans ce compartiment. De même, l'augmentation du volume du compartiment de gauche y entraîne une augmentation de la pression. La résultante des forces de pression s'exerçant sur le piston tend à le « repousser » vers la gauche. En tenant un raisonnement similaire pour un déplacement du piston vers la gauche, on en déduit que la résultante des forces de pression se comporte comme une force de rappel s'exerçant sur le piston. On s'attend donc à des oscillations (pas nécessairement sinusoïdales) du piston.

2. L'équation du mouvement du piston s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique au piston,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x = p_1(x)S \vec{u}_x - p_2(x)S \vec{u}_x + \vec{F}, \quad (17.2)$$

où \vec{F} est la résultante des actions de contact du cylindre sur le piston. Le contact se faisant sans frottement, $\vec{F} \perp \vec{u}_x$. La projection de l'équation (17.2) selon \vec{u}_x s'écrit alors

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = p_1(x)S - p_2(x)S. \quad (17.3)$$

Il faut donc déterminer les pressions dans chaque compartiment. Le gaz est supposé parfait et il est légitime de supposer son coefficient γ constant (la température ne va pas varier sur un large intervalle). L'évolution dans chaque compartiment est adiabatique. Il est raisonnable de supposer la vitesse du piston faible devant la vitesse du son dans le gaz : on peut donc considérer la transformation subie par le gaz comme réversible (elle est quasi stationnaire pour les ondes de pression, la pression reste donc uniforme dans chaque compartiment). Les conditions d'utilisation de la loi de Laplace sont donc réunies, et on peut écrire $pV^\gamma = \text{cte}$ dans chaque compartiment, soit

$$p_1(x)V_1^\gamma(x) = p_0V_0^\gamma \quad \text{et} \quad p_2(x)V_2^\gamma(x) = p_0V_0^\gamma$$

en notant avec un indice (1) les grandeurs relatives au compartiment de gauche et avec un indice (2) celles relatives au compartiment de droite.

Le volume initial des compartiments est $V_0 = LS$. Comme $V_1(x) = (L+x)S$ et $V_2(x) = (L-x)S$, on en déduit, après simplification par S ,

$$p_1(x) = p_0 \left(\frac{L}{L+x} \right)^\gamma \quad \text{et} \quad p_2(x) = p_0 \left(\frac{L}{L-x} \right)^\gamma.$$

L'équation (17.3) s'écrit alors

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = p_0S \left[\left(1 + \frac{x}{L} \right)^{-\gamma} - \left(1 - \frac{x}{L} \right)^{-\gamma} \right]. \quad (17.4)$$

Cette équation n'est pas linéaire.

3. Tout d'abord, remarquons que l'on peut écrire $\left(\frac{L}{L+x} \right)^\gamma = \left(1 + \frac{x}{L} \right)^{-\gamma}$ et $\left(\frac{L}{L-x} \right)^\gamma = \left(1 - \frac{x}{L} \right)^{-\gamma}$, ce qui permet de faire apparaître la grandeur sans dimension $\frac{x}{L}$, telle que $\left| \frac{x}{L} \right| \ll 1$. On peut alors effectuer les linéarisations

$$\left(1 + \frac{x}{L} \right)^{-\gamma} \simeq 1 - \gamma \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{x}{L} \right)^{-\gamma} \simeq 1 + \gamma \frac{x}{L}$$

et l'équation (17.4) s'écrit alors

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = p_0 S \left(-2\gamma \frac{x}{L} \right),$$

soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\gamma p_0 S}{mL} x = 0.$$

Le mouvement du piston est régi par ¹⁴ $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\gamma p_0 S}{mL}}$. La solution générale du mouvement s'écrit $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. La position initiale conduit à $x(0) = b = A$. Comme $\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$, la condition initiale sur la vitesse s'écrit $\dot{x}(0) = 0 = -B$. On en déduit $x(t) = b \cos(\omega_0 t)$.

V. Cas particulier d'une transition de phase

On étudie dans ce chapitre un changement d'état d'un corps pur qui se déroule à pression constante, de façon quasi stationnaire. La température du corps pur est alors constante tout au long de la transformation.

Définition 17.16. Entropie massique de transition de phase

Considérons la transition de phase isobare $\alpha \rightarrow \beta$ d'un corps pur à la température T . L'entropie massique associée à cette transition de phase est définie par

$$\Delta s_{\alpha \rightarrow \beta} = s_\beta - s_\alpha,$$

où s_α est l'entropie massique du corps pur dans la phase α et s_β son entropie massique dans la phase β , à la température T .

Remarque La dénomination « entropie massique » est un abus de langage; on devrait parler de « variation d'entropie massique associée à la transition de phase » : en effet il ne s'agit pas d'une entropie, mais d'une variation d'entropie au cours d'une transformation.

On a vu dans la section II (voir page 480) que l'entropie d'un système augmente avec son désordre. On peut donc comparer qualitativement l'entropie massique d'un corps pur sous les trois phases solide, liquide et gazeuse.

L'état solide est un état où la matière est ordonnée sur une grande distance; son entropie massique s_{sol} est donc « faible ».

L'état liquide est un état où la matière n'est plus ordonnée sur une grande distance, mais présente un ordre sur une courte distance (les liaisons entre les molécules restent importantes). L'entropie massique s_{liq} d'une phase liquide est donc supérieure à celle d'une phase solide.

L'état gazeux est un état complètement désordonné (les liaisons entre les molécules sont très faibles, et même négligées dans le modèle du gaz parfait). L'entropie massique s_{gaz} du gaz est donc supérieure à celle d'une phase liquide.

14. L'analyse qualitative initiale a prévu un comportement oscillatoire; une erreur de calcul qui aurait conduit à un signe « moins » dans l'équation différentielle ne pourrait passer inaperçue. Elle conduirait à un mouvement exponentiellement amplifié (solution instable).

L'entropie massique des corps purs varie selon la phase du corps,

$$s_{\text{sol}} < s_{\text{liq}} < s_{\text{gaz}}.$$

On peut déduire des considérations précédentes le signe de l'entropie massique de changement d'état des transitions usuelles :

Transition de phase	Expression de $\Delta s_{\alpha \rightarrow \beta}$	Signe de $\Delta s_{\alpha \rightarrow \beta}$
Fusion	$\Delta s_{\text{fus}} = s_{\text{liq}} - s_{\text{sol}}$	$\Delta s_{\text{fus}} > 0$
Vaporisation	$\Delta s_{\text{vap}} = s_{\text{gaz}} - s_{\text{liq}}$	$\Delta s_{\text{vap}} > 0$

Remarque Selon la règle de Trouton¹⁵, l'entropie molaire de vaporisation d'un grand nombre de liquides vérifie $\Delta S_{\text{m,vap}} \simeq 10,6R \simeq 88 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Cette règle empirique approchée¹⁶ permet d'estimer l'ordre de grandeur de l'enthalpie molaire de vaporisation d'un liquide connaissant sa température de vaporisation, à partir de $\Delta S_{\text{m,vap}} = \frac{\Delta H_{\text{m,vap}}}{T_{\text{vap}}}$. Elle n'est cependant pas valable pour tous les corps. En particulier, l'entropie de vaporisation de l'eau est sensiblement supérieure à la valeur prévue. Cet écart s'explique par la présence de liaisons hydrogène entre les molécules d'eau au sein du liquide : très directionnelles, elles imposent un ordre partiel au sein du liquide, abaissant son entropie molaire¹⁷ par rapport à un liquide plus désordonné (en l'absence de telles liaisons). L'entropie molaire de la phase liquide étant plus basse, l'écart entre l'entropie molaire du gaz et celle du liquide, c'est-à-dire l'entropie molaire de vaporisation, augmente.

Loi 17.17. Entropie et enthalpie massiques de transition de phase

Lorsque l'on fait subir de manière réversible, à la température T , une transition de phase d'un corps pur d'une phase α à une phase β , l'entropie massique de transition de phase est reliée à l'enthalpie massique de transition de phase selon

$$\Delta s_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{\Delta h_{\alpha \rightarrow \beta}}{T}.$$

On retrouve alors les résultats établis à la section IV.1 page 462 à partir de considérations énergétiques :

- ▶ pour une vaporisation $L_{\text{vap}} = \Delta h_{\text{vap}} > 0$;
- ▶ pour une sublimation $L_{\text{sub}} = \Delta h_{\text{sub}} > 0$.

EXERCICE CORRIGÉ 17.18. Variation d'entropie et changement d'état

Dans une enceinte adiabatique déformable, on place une masse $m_1 = 500 \text{ g}$ d'eau liquide à la température $T_1 = 15,0 \text{ }^\circ\text{C}$ et une masse $m_2 = 150 \text{ g}$ de glace à la température $T_2 = -5,00 \text{ }^\circ\text{C}$. La capacité thermique massique de l'eau liquide est $c_\ell = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et celle de la glace $c_s = 2,06 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'enthalpie massique de fusion de l'eau est $L_{\text{fus}} = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et la température de fusion $T_{\text{fus}} = 273 \text{ K} = 0,00 \text{ }^\circ\text{C}$.

15. Frederick Trouton, 1863-1922, était un physicien irlandais.

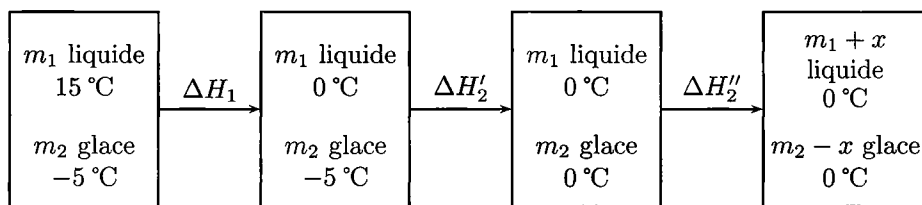
16. Cette règle a été établie empiriquement sous la forme $\frac{\Delta H_{\text{m,vap}}}{T_{\text{vap}}} = 10,6R$, et a fait l'objet de justifications théoriques. Il en existe des variantes plus précises.

17. L'entropie molaire d'un corps est reliée à son entropie massique par $S_{\text{m}} = Ms$, où M est la masse molaire du corps. En simplifiant par M dans le cas d'un corps pur, on trouve des relations identiques en considérant indifféremment les grandeurs molaires ou massiques.

On a montré (voir page 465) que le système évolue vers un état final constitué d'un mélange de glace et d'eau liquide à la température T_{fus} , une masse $x = 90,3$ g de glace ayant fondu. Quelle est la variation ΔS du système constitué de toute l'eau ?

Corrigé

L'entropie étant une fonction d'état, on peut calculer sa variation sur n'importe quel chemin allant de l'état initial à l'état final considéré. On découpe artificiellement la transformation en plusieurs étapes (le chemin ainsi construit est fictif et ne correspond pas à la réalité de la transformation) : on considère d'abord un refroidissement de l'eau liquide à 0°C , puis un échauffement de la glace de T_2 à T_{fus} , et enfin une fusion à la température T_{fus} .



La masse m_1 d'eau liquide subit une variation de température de T_1 à T_{fus} ; sa variation d'entropie est donc

$$\Delta S_1 = m_1 c_\ell \ln \left(\frac{T_{\text{fus}}}{T_1} \right).$$

La masse m_2 de glace subit une variation de température de T_2 à T_{fus} , la variation d'entropie correspondante étant

$$\Delta S'_2 = m_2 c_s \ln \left(\frac{T_{\text{fus}}}{T_2} \right).$$

La fusion d'une masse x de glace s'accompagne d'une variation d'entropie de cette masse donnée par

$$\Delta S''_2 = \frac{x L_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}}.$$

L'entropie étant une fonction d'état, la variation d'entropie de la totalité de l'eau contenue dans l'enceinte est donnée par $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S'_2 + \Delta S''_2$, soit

$$\Delta S = m_1 c_\ell \ln \left(\frac{T_{\text{fus}}}{T_1} \right) + m_2 c_s \ln \left(\frac{T_{\text{fus}}}{T_2} \right) + \frac{x L_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}}.$$

L'application numérique (ne pas oublier de convertir les températures en kelvins, $T_1 = 288$ K et $T_2 = 268$ K) conduit à $\Delta S = 6,38$ J \cdot K $^{-1}$.

Le système étant dans une enceinte calorifugée, il subit une évolution adiabatique et le terme d'échange d'entropie est nul, $S_{\text{reçu}} = 0$. La variation d'entropie de ce système s'identifie alors à l'entropie créée, $\Delta S = S_{\text{créé}} > 0$, ce qui confirme l'irréversibilité de la transformation.

L'irréversibilité n'est pas due au changement d'état (qui est réversible à la température T_{fus}) mais à la non-uniformité de la température dans le système initial et durant son évolution.

VI. Exercices

1. Expérience de Rüchardt ★

(solution page 500)

Un gaz parfait est enfermé dans un ballon dont le col est un tube de section S dans lequel se trouve une bille de masse m (voir figure 17.9). On suppose que la bille joue le rôle d'un piston étanche. On note p_a la pression atmosphérique et V_0 le volume total de gaz à l'équilibre. Le ballon est considéré comme calorifugé.

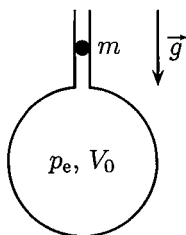


FIG. 17.9. Expérience de Rüchardt.

1. On lâche la bille dans le tube. Prévoir qualitativement ce qu'il se passe.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la bille, déterminer l'équation différentielle de son mouvement. On choisira un axe vertical ascendant Oz , on notera $p(z)$ la pression dans le ballon quand la bille est à la cote z (on précisera l'origine choisie) et p_e la pression dans le ballon à l'équilibre.
3. Par des considérations sur l'évolution du gaz, déterminer la loi $p(z)$.
4. En déduire l'équation du mouvement. On fera des approximations simplificatrices. On rappelle que pour $|\varepsilon| \ll 1$, on linéarise $(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$.
5. Montrer alors que la mesure d'une durée caractéristique du mouvement de la bille permet de déterminer l'exposant adiabatique γ du gaz, et préciser la relation correspondante.

On donne $V_0 = 11,5$ L, $m = 16,5$ g, $p_a = 1,00 \cdot 10^5$ Pa, $g = 9,81$ m \cdot s⁻². Le tube a pour diamètre $d = 16,0$ mm. Déterminer γ .

2. Diagramme de Watt : isotherme et isentropique ★ (solution page 500)

On considère un gaz parfait dont l'évolution est représentée dans le diagramme de Watt (p, V).

1. Comparer la pente de la courbe représentative d'une évolution isotherme et la pente de la courbe représentative d'une évolution adiabatique réversible du gaz en un même point du diagramme. On établira l'expression de la pente de la courbe en fonction de p et V pour chaque type d'évolution.

Faire un schéma.

2. On considère une évolution cyclique constituée :

- ▶ d'une compression adiabatique réversible ;
- ▶ d'une évolution isochore ;
- ▶ d'une détente isotherme.

Représenter le cycle dans le diagramme de Watt.

Le cycle est-il moteur ou récepteur ?

3. Décomposition du contact thermique ★★ (solution page 501)

Un solide de capacité thermique C , initialement à la température T_0 , est amené à la température T_F en étant placé successivement au contact de N thermostats dont les températures T_i s'échelonnent régulièrement de T_0 à T_N . On attend que l'équilibre thermique avec chaque thermostat soit réalisé avant de passer au thermostat suivant. On donne $C = 400 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $T_0 = 300 \text{ K}$ et $T_F = 350 \text{ K}$.

1. En notant T_i la température du i -ième thermostat (i varie de 1 à N), exprimer l'écart de température $T_i - T_{i-1}$ entre deux thermostats successifs en fonction de T_0 , T_F et N .

2. Exprimer $S_{\text{reçu},i}$, entropie reçue par le solide lors de la i -ème étape où, au contact avec le thermostat de température T_i , il passe de la température T_{i-1} à la température T_i .

En déduire $S_{\text{créé},i}$, entropie créée lors de cette i -ème étape.

3. Exprimer $S_{\text{créé}}$ pour la transformation totale en fonction de C , T_0 , T_F et N .

Calculer $S_{\text{créé}}$ pour $N = 1$, $N = 2$, $N = 10$ et $N = 100$. Commenter.

4. On cherche à déterminer si on peut rendre la transformation réversible en passant à la limite $N \rightarrow \infty$. Dans le cas où N est très grand, on pose $\theta = \frac{T_F - T_0}{N}$.

a/ Exprimer $S_{\text{créé},i}$ en fonction de C , θ et T_{i-1} .

b/ Si $|\varepsilon| \ll 1$, on rappelle que $\ln(1 + \varepsilon) \simeq \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$ et $(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2$. Que devient l'expression de $S_{\text{créé},i}$ quand $N \gg 1$? On donnera le résultat en fonction de C , T_0 , T_N et N .

c/ Montrer que $S_{\text{créé},i} \leq \frac{C}{2N^2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_{i-1}^2}$. En déduire un majorant de $S_{\text{créé}}$ pour la transformation totale.

Que peut-on dire à la limite $N \rightarrow \infty$?

4. Décomposition d'une détente dans le vide ★★ (solution page 500)

1. On considère un récipient ayant des parois rigides et indéformables, composé de deux compartiments de volumes identiques V , séparés par une cloison. On introduit n moles de gaz parfait à la température T dans l'un des compartiments, le vide régnant dans l'autre compartiment.

On enlève la cloison de séparation.

a/ Comment s'appelle la détente que subit le gaz? Quelle grandeur thermodynamique reste conservée, quelle que soit la nature du gaz? Dans le cas où le gaz est parfait, quelle variable d'état ne change pas lors de cette détente?

b/ En choisissant un couple de variables approprié, déterminer la variation de l'entropie du gaz lors de cette détente. Peut-on en tirer une conclusion quant au caractère réversible ou non de la transformation?

2. Le compartiment de droite est maintenant divisé en N compartiments par autant de cloisons calorifugées amovibles. On remplace donc la détente initiale par une succession de N détentes « élémentaires » si N est grand.

a/ Calculer la variation d'entropie ΔS_k du gaz lorsque la k -ième cloison est retirée, en fonction de n , R , V et N . En déduire l'expression de l'entropie créée $S_{\text{créé},k}$ lors de cette transformation.

b/ Exprimer alors la variation d'entropie lors de la transformation totale, lorsque toutes les cloisons ont été retirées.

c/ Peut-on rendre la transformation réversible en passant à la limite $N \rightarrow \infty$? On pourra exprimer $S_{\text{créé},k}$ en fonction de l'accroissement $v = V_k - V_{k-1} = \frac{V}{N}$ du volume lors de chaque détente élémentaire, et mener une discussion similaire à celle de la fin de l'exercice 3. On rappelle que $\ln(1 + \varepsilon) \simeq \varepsilon$ si $|\varepsilon| \ll 1$.

5. Vaporisation sous vide ★★

(solution page 502)

On place $m = 10,0$ g d'eau liquide à la température $T_0 = 373$ K dans une enceinte indéformable de volume V en contact avec un thermostat à la température T_0 .

La pression de vapeur saturante de l'eau à la température T_0 est $p_{\text{sat}} = 1,00$ bar.

La vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M = 18,0$ g · mol⁻¹. L'enthalpie massique de vaporisation de l'eau est $L_{\text{vap}} = 2,26$ kJ · kg⁻¹. On néglige le volume massique de l'eau liquide devant celui de la vapeur d'eau.

On donne $R = 8,31$ J · K⁻¹ · mol⁻¹.

1. Calculer le volume V qui correspond à un état final où l'eau est entièrement vaporisée, à la température T_0 sous la pression p_{sat} .
2. Quel est le transfert thermique Q reçu par le système {eau} lors de cette évolution? Calculer la variation d'enthalpie ΔH de l'eau au cours de cette transformation, ainsi que la variation ΔU de son énergie interne.
3. Calculer la variation d'entropie ΔS de l'eau au cours de cette transformation, ainsi que l'entropie créée $S_{\text{créé}}$.

6. Évolution d'un gaz ★

(solution page 502)

Un gaz parfait d'exposant adiabatique γ est enfermé dans une enceinte calorifugée fermée par un piston, à l'équilibre avec la pression extérieure p_0 .

1. On fait passer très rapidement la pression extérieure à $2p_0$ et, une fois l'équilibre rétabli, on relâche la pression extérieure jusqu'à ce qu'elle retombe à p_0 .

Déterminer l'état final du gaz une fois l'équilibre rétabli et calculer la quantité d'entropie créée.

2. On veut faire subir au gaz une compression amenant sa pression de p_0 à $2p_0$, puis une détente ramenant sa pression à p_0 , en opérant cette fois de façon réversible. Comment réaliser une telle opération? Déterminer alors l'état final du gaz.

7. Entropie d'une chaîne élastique ★★★

(solution page 502)

Le caoutchouc est constitué, à l'échelle microscopique, de longues chaînes de polymères. Une chaîne est formée d'une séquence rectiligne de maillons identiques, liés les uns aux autres, pouvant être dans différents états. Une tension f peut être appliquée à son extrémité.

Le modèle étudié comprend un très grand nombre N d'éléments, dont chacun peut apparaître dans deux états : un état court de longueur $\ell - a$ et un état long de longueur $\ell + a$. On suppose pour simplifier que ces deux états ont la même énergie.

On rappelle que le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments est donné par le coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pour $n \gg 1$, $\binom{n}{k}$ est maximal pour $k = \frac{n}{2}$.

1. L'énergie interne de la chaîne dépend-elle de sa longueur ?
2. Soit n le nombre de maillons dans l'état court. Exprimer la longueur totale L de la chaîne.
3. Justifier l'expression de l'entropie pour une longueur L donnée,

$$S = k_B \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

4. Déterminer la longueur à l'équilibre L_0 de la chaîne isolée (soumise à $f = 0$, et sans échanges thermiques avec l'extérieur).
5. Lorsque la chaîne est soumise à une tension f , sa longueur varie jusqu'à une nouvelle position d'équilibre $L_{\text{éq}} \neq L_0$. Pourquoi ne peut-on pas dire que S est maximale pour cet état d'équilibre ? On montrera qu'une variation de la longueur de la chaîne s'accompagne nécessairement d'un terme d'échange d'entropie.
6. À partir du modèle microscopique adopté, justifier qu'un allongement de la chaîne s'accompagne d'une diminution de son entropie.

Chapitre 18

MACHINES THERMIQUES

HISTORIQUEMENT, les principes thermodynamiques présentés dans les chapitres précédents ont été progressivement découverts au XIX^e siècle lors du développement des moteurs. C'est donc tout naturellement qu'un chapitre de ce cours est consacré aux conséquences des deux principes sur le fonctionnement et la conception des machines thermiques.

I. Machines thermiques

I.1. Machines thermiques cycliques

Les machines thermiques ont été inventées dans le but d'effectuer des échanges énergétiques ciblés :

- ▶ un moteur doit fournir du travail à l'utilisateur ;
- ▶ un réfrigérateur doit prélever de l'énergie thermique à ce qu'il contient ;
- ▶ une pompe à chaleur doit puiser de l'énergie thermique à l'air extérieur pour chauffer l'intérieur d'une maison.

Les machines thermiques courantes (moteurs d'automobiles, réfrigérateurs, climatiseurs, pompes à chaleur) fonctionnent de façon cyclique : le mécanisme revient périodiquement à son état initial. On va donc se concentrer sur l'étude des évolutions cycliques.

I.2. Irréversibilité et inégalité de Clausius

Pour toute la suite, on définit le système

$$\mathcal{S} = \{\text{le fluide qui subit une évolution cyclique polytherme dans la machine}\}.$$

- ▶ L'évolution étant cyclique, les états initial et final sont identiques.
- ▶ Le système ne reçoit de transferts thermiques que de la part de N thermostats. On note Q_k le transfert thermique fourni par le k -ième thermostat à la température T_k .
- ▶ Le système reçoit *a priori* un travail W .

Une telle évolution correspond à ce que subit un fluide dans une machine thermique cyclique. C'est le cas par exemple du fluide qui circule dans le circuit d'un réfrigérateur : il est alternativement en contact avec la paroi intérieure de la chambre froide (que l'on assimile à un thermostat) et avec la paroi extérieure, à la température de la pièce (que l'on assimile à un autre thermostat).

L'évolution du système \mathcal{S} étant cyclique, le bilan d'entropie s'écrit

$$S_{\text{créé}} + S_{\text{reçu}} = 0.$$

L'expression de l'entropie échangée lors d'une transformation polytherme a été établie page 484,

$$S_{\text{reçu}} = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{T_k}.$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{T_k} + S_{\text{créé}} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{T_k} = -S_{\text{créé}}.$$

D'après le deuxième principe, $S_{\text{créé}} \geq 0$, l'égalité ayant lieu dans le cas limite de la transformation réversible.

Loi 18.1. Inégalité de Clausius

L'inégalité de Clausius caractérise un système subissant une évolution cyclique polytherme

$$\sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{T_k} \leq 0,$$

où Q_k représente le transfert thermique fourni au système par le k -ième thermostat à la température T_k . L'égalité correspond au cas limite de la transformation réversible.

Remarque L'égalité de Clausius $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ pour un cycle ditherme décrit de façon réversible a historiquement servi de base à la construction de la fonction entropie.

EXERCICE CORRIGÉ 18.2.

Cycle monotherme, énoncé de Kelvin

Lord Kelvin a énoncé le deuxième principe sous la forme : « il n'existe pas de cycle moteur construit à partir d'une seule source d'énergie thermique ». Vérifier cette assertion.

Corrigé

Le système est {le fluide circulant dans la machine}, par exemple. Notons W le travail qu'il reçoit et Q la quantité d'énergie thermique qu'il reçoit de l'unique thermostat au cours d'un cycle. Le premier principe appliqué à ce système s'écrit, entre le début et la fin d'un cycle, $\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = W + Q$. Les énergies U et \mathcal{E}_c étant des fonctions d'état, elles ont la même valeur au début et à la fin du cycle. Autrement dit, leur variation pour un cycle est nulle. Par conséquent, $W + Q = 0$. Le cycle est moteur, donc $W < 0$, ce qui impose $Q > 0$. Or, d'après l'inégalité de Clausius, $Q/T_{\text{source}} \leq 0$, où T_{source} est la température de la source d'énergie thermique (positive bien sûr). Ces deux inégalités sont contradictoires, ce qui confirme l'énoncé de lord Kelvin.

Un canon est un exemple de moteur fonctionnant avec une unique source d'énergie thermique : il donne de l'énergie cinétique à l'obus (aspect moteur) par la seule combustion de la poudre (unique thermostat). Mais le canon ne fonctionne pas de façon cyclique : il ne revient pas à son état initial une fois l'obus tiré. Il n'y a pas contradiction avec l'énoncé de Kelvin.

Remarque L'énoncé de Kelvin révèle la dissymétrie entre l'énergie thermique et l'énergie mécanique : il est impossible de convertir intégralement de l'énergie thermique en énergie mécanique (on dit parfois, par abus de langage, « de la chaleur en travail ») de façon cyclique, c'est-à-dire selon une transformation dont le seul résultat serait cette conversion d'énergie. On ne peut donc pas concevoir une machine cyclique qui délivrerait du travail (moteur) à partir d'une unique source thermique. Un tel moteur, interdit par le deuxième principe, permettrait ce que l'on appelle un « mouvement perpétuel de seconde espèce ».

II. Machines thermiques cycliques dithermes

La plupart des machines thermiques de la vie de tous les jours (moteurs, réfrigérateurs, pompes à chaleur) fonctionnent en utilisant deux thermostats à deux températures différentes. Ces deux thermostats sont appelés « source froide » et « source chaude ». On parle alors de machines cycliques dithermes.

Pour les trois grands types de machines dithermes, on va effectuer une étude thermodynamique simple.

II.1. Moteur cyclique ditherme

Le moteur cyclique monotherme étant impossible d'après l'énoncé de Kelvin du second principe (voir exercice corrigé 18.2), on envisage un moteur ditherme. Un fluide suit une évolution cyclique en étant alternativement en contact avec deux thermostats :

- ▶ un thermostat à la température T_c appelé source chaude ;
- ▶ un thermostat à la température $T_f < T_c$ appelé source froide.

Le but d'un moteur est de fournir du travail à l'utilisateur. Pour cela, le moteur puise de l'énergie thermique dans la source chaude. Il en cède nécessairement à la source froide, car la conversion cyclique *totale* d'énergie thermique en énergie mécanique est impossible. On résume ces informations dans un diagramme. Avec les orientations choisies (voir figure 18.1), les trois grandeurs W , Q_c et Q_f sont positives. Cela s'avérera pratique au moment de manipuler des inégalités. Ces grandeurs représentent les trois quantités d'énergie échangées par le fluide au cours d'un cycle.

Les grandeurs U et S étant deux fonctions d'état, leur variation est nulle au cours de l'évolution cyclique d'un système fermé. En tenant compte des orientations de W , Q_c

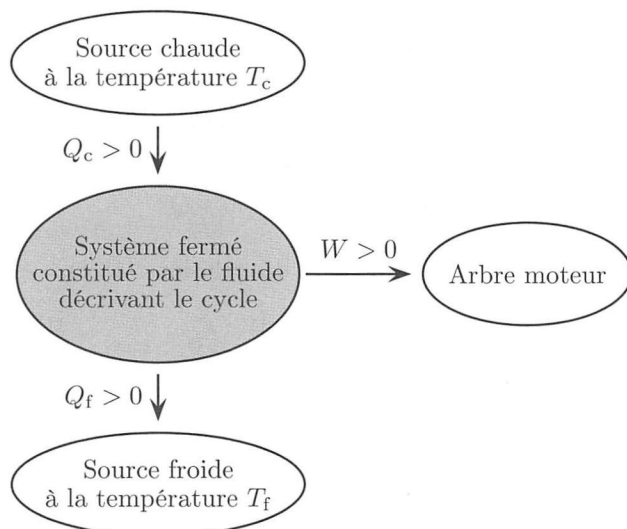


FIG. 18.1. Transferts d'énergie entre le système et l'extérieur dans le cas d'un cycle moteur. Les orientations sont choisies (arbitrairement) de manière que les échanges énergétiques soient positifs. Il faut tenir compte de ces orientations pour les signes dans les expressions des principes (voir encadré « Attention » page 508).

et Q_f , les deux principes appliqués au fluide au cours d'un cycle s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\text{final}} - U_{\text{initial}} = 0 = Q_c - Q_f - W \quad (\text{premier principe}) \\ S_{\text{final}} - S_{\text{initial}} = 0 = \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f} + \underbrace{S_{\text{créé}}}_{\geq 0} \quad (\text{deuxième principe}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_c - Q_f - W = 0 \\ \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \quad (\text{inégalité de Clausius}). \end{array} \right. \quad (18.1)$$

Attention

Signes dans les relations

Dans l'écriture des deux principes de la thermodynamique, W et Q représentent les transferts d'énergie *reçus* par le système. Ils font donc implicitement référence à des diagrammes d'échanges où les flèches de transfert seraient orientées *vers* le système. En cas d'orientations différentes, il faut réfléchir aux signes. Sur la figure 18.1, W et Q_f sont des grandeurs qui *sortent* du système : on les affecte donc d'un signe « moins » dans l'écriture des principes. En effet, le système reçoit $-W$, $-Q_f$ et $+Q_c$.

Le but du moteur est de fournir du travail. La grandeur recherchée par l'utilisateur, appelée grandeur utile, est donc W . L'énergie qui a un coût pour l'utilisateur est Q_c , la quantité d'énergie thermique apportée par la source chaude (combustion d'essence, par exemple). On définit donc le *rendement énergétique* η du moteur par

$$\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur coûteuse}} = \frac{W}{Q_c}.$$

Pour exprimer ce rendement, on élimine Q_f des relations (18.1).

$$\frac{Q_c}{T_c} - \frac{W - Q_c}{T_f} \leq 0 \iff Q_c \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_f} \right) + \frac{W}{T_f} \leq 0 \iff \frac{W}{T_f} \leq Q_c \underbrace{\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c} \right)}_{>0}$$

Dans cette inégalité, toutes les grandeurs sont positives. On peut donc les changer de côté sans changer le sens de l'inégalité. Finalement, on obtient une majoration du rendement du moteur,

$$\eta = \frac{W}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

Le cas d'égalité n'est atteint que si l'évolution du moteur est réversible. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Carnot.

Théorème 18.3. Théorème de Carnot pour un moteur

Le rendement énergétique d'un moteur cyclique ditherme est

$$\eta \leq \eta_{\max} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

Le rendement maximal correspond à un moteur fonctionnant de façon réversible.

Le moteur théorique de Carnot, qui a servi à Clausius pour construire la fonction entropie, fonctionne de façon réversible et atteint le rendement théorique maximal η_{\max} .

Tous les phénomènes irréversibles (gradients de pression et de température, frottements) sont causes de dégradation du rendement d'un moteur.

Par exemple, pour le moteur d'une voiture, la source chaude vient de la combustion de l'essence ($T_c \simeq 10^3$ K) et la source froide est l'atmosphère ambiante ($T_f \simeq 3 \cdot 10^2$ K). Le rendement théorique maximal est donc $\eta_{\max} \simeq 0,7$. Dans la pratique, les mesures montrent que le rendement est seulement de l'ordre de 0,4.

- Les phénomènes irréversibles font énormément baisser le rendement.
- On n'extrait sous forme mécanique que 40 % de l'énergie chimique contenue dans le carburant. Les 60 % restants servent uniquement à chauffer l'atmosphère.

Le rendement maximal théorique est d'autant plus grand que $\frac{T_f}{T_c}$ est petit. Plus ce rapport est petit, plus le gradient thermique entre la source froide et la source chaude est grand, ce qui occasionne un grand flux d'énergie de la source chaude vers la source froide. Le moteur, par sa réalisation technique, « détourne » une partie de ce flux d'énergie et la convertit en travail mécanique. Inversement, si $T_f = T_c$, il n'y a pas de gradient thermique, donc pas de flux d'énergie. Le rendement du moteur est alors nul.

- Le fait que $\eta_{\max} < 1$ montre que le moteur ditherme cyclique ne peut pas convertir toute l'énergie qu'il prélève à la source chaude en travail.
- Le théorème de Carnot a une propriété remarquable : le rendement maximal est indépendant de la nature du fluide et de la réalisation technique du moteur. Il ne dépend que des températures des sources.

II.2. Réfrigérateur

Un réfrigérateur a pour but de prélever de l'énergie thermique à une enceinte froide pour maintenir sa température à une valeur basse. Il rejette de l'énergie thermique dans une pièce déjà chaude. Ce transfert d'énergie d'une zone froide vers une zone chaude est contraire à ce qui se produirait spontanément. Il faut donc un apport d'énergie par un agent extérieur pour réaliser ce transfert. Cet apport d'énergie se fait sous forme de travail mécanique : un compresseur fournit du travail au fluide qui circule dans la machine. C'est ce compresseur qui consomme de l'énergie électrique dans le réfrigérateur. On résume le fonctionnement du réfrigérateur dans un diagramme (voir figure 18.2).

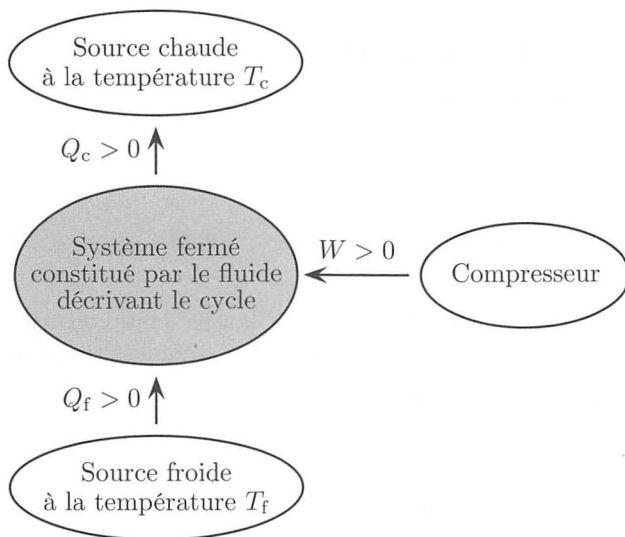


FIG. 18.2. Transferts d'énergie entre le système et l'extérieur pour un cycle dans le cas d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur. Les orientations sont choisies (arbitrairement) de manière que les échanges énergétiques soient positifs. Il faut tenir compte de ces orientations pour les signes dans les expressions des principes (voir encadré « Attention » page 508).

Compte tenu des orientations choisies, les deux principes appliqués au fluide circulant durant un cycle s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\text{final}} - U_{\text{initial}} = 0 = Q_f - Q_c + W \quad (\text{premier principe}) \\ S_{\text{final}} - S_{\text{initial}} = 0 = \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c}{T_c} + \underbrace{S_{\text{créé}}}_{\geq 0} \quad (\text{deuxième principe}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_f - Q_c + W = 0 \\ \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \quad (\text{inégalité de Clausius}). \end{array} \right. \quad (18.2)$$

L'efficacité thermique du réfrigérateur est définie par

$$\varepsilon = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie coûteuse}} = \frac{Q_f}{W}.$$

Pour calculer cette efficacité, il suffit d'éliminer Q_c des expressions (18.2).

$$Q_c = Q_f + W \Rightarrow \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_f + W}{T_c} \leq 0 \Rightarrow Q_f \underbrace{\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c} \right)}_{> 0} \leq \frac{W}{T_c}$$

On en déduit que

$$\varepsilon \leq \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad (\text{efficacité frigorifique}).$$

L'efficacité frigorifique est majorée par une efficacité maximale théorique $\varepsilon_{\max} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$, qui ne peut être atteinte que par un réfrigérateur fonctionnant de façon réversible.

Les valeurs numériques typiques pour un réfrigérateur domestique sont $T_c \simeq 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$ (température de la pièce) et $T_f \simeq -18^\circ\text{C} = 255\text{ K}$ (température de la partie congélateur). Cela conduit à

$$\varepsilon_{\max} = \frac{255}{293 - 255} \simeq 6,7.$$

Dans la pratique, l'efficacité des réfrigérateurs domestiques est de l'ordre de 3. La différence entre l'efficacité théorique et l'efficacité réelle provient des diverses causes d'irréversibilité dans l'évolution du fluide réfrigérant. En particulier, le fluide est soumis à d'importants gradients de température.

II.3. Pompe à chaleur

Une pompe à chaleur a pour but de prélever de l'énergie thermique à l'air extérieur à une maison (source froide) pour échauffer l'intérieur de la maison (source chaude). Ce transfert non spontané d'énergie thermique de la source froide vers la source chaude nécessite un apport de travail. Le diagramme de fonctionnement est donc exactement le même que pour un réfrigérateur (voir figure 18.2). Les relations (18.2) restent donc valables. Seule la définition de l'efficacité énergétique change, car le but ici est de récupérer Q_c .

$$\varepsilon = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie coûteuse}} = \frac{Q_c}{W}$$

Pour exprimer ce rapport, on élimine Q_f des expressions (18.2), $Q_f = Q_c - W$, donc l'inégalité de Clausius devient

$$Q_c \underbrace{\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c} \right)}_{>0} - \frac{W}{T_f} \leq 0,$$

soit

$$\varepsilon \leq \frac{T_c}{T_c - T_f} \quad (\text{efficacité énergétique d'une pompe à chaleur}).$$

Comme précédemment, il existe une efficacité maximale théorique qui ne peut être atteinte que par une machine fonctionnant de façon réversible.

Pour une pompe à chaleur domestique, les valeurs usuelles sont, par exemple, $T_f = 5^\circ\text{C} = 268\text{ K}$ (air extérieur) et $T_c = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$ (air intérieur). Cela donne une efficacité maximale théorique

$$\varepsilon_{\max} = \frac{293}{293 - 268} \simeq 11,2.$$

En pratique, l'efficacité énergétique est de l'ordre de 4. Cela signifie que, pour 1 joule dépensé en électricité (pour faire tourner le compresseur), l'intérieur de la maison reçoit 4 joules sous forme thermique. La pompe à chaleur est donc quatre fois plus efficace qu'un simple radiateur électrique (pour lequel 1 joule électrique dépensé fournit 1 joule thermique). Les pompes à chaleur sont donc une excellente solution pour faire des économies d'énergie.

Remarquons que, pour le réfrigérateur ou la pompe à chaleur, l'efficacité maximale théorique est d'autant plus grande que $T_c - T_f$ est faible¹. Cela est normal. Plus cette différence est faible, plus le gradient thermique de la source chaude vers la source froide est faible. La machine a donc moins de mal à créer un flux thermique allant de la source froide vers la source chaude : l'efficacité de la machine est donc meilleure.

II.4. Rendement et efficacité

Pour chacune des trois machines thermiques envisagées, on a pu définir une grandeur qui traduit les performances énergétiques.

- Pour les moteurs, on parle de rendement énergétique. Celui-ci est nécessairement inférieur à 1.
- Pour les réfrigérateurs et pompes à chaleur, on parle d'efficacité énergétique. Celle-ci peut être supérieure à 1.

L'étude de chaque cas a montré l'existence d'un rendement ou d'une efficacité maximale théorique, ce que résume le théorème de Carnot.

Théorème 18.4. Théorème de Carnot

Le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique cyclique ditherme réelle est inférieur à celui ou celle d'une machine thermique cyclique ditherme réversible.

EXERCICE CORRIGÉ 18.5.

Échauffement sans fournir de travail

On considère trois sources d'énergie thermique (thermostats), de températures T_1 , T_2 et T_3 avec $T_1 > T_2 > T_3$. On note Q_i le transfert thermique de la source numéro i vers le fluide de la machine (attention aux orientations dans l'écriture des relations). Sur quel principe fonctionne une machine cyclique réversible dont le but est de transférer de l'énergie thermique à la source la plus chaude (soit $Q_1 < 0$) sans apport de travail ? Il s'agit ici de préciser les signes de Q_2 et Q_3 .

Corrigé

Sur un cycle, avec les orientations précisées par l'énoncé, $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ d'après le premier principe, et

$$Q_1/T_1 + Q_2/T_2 + Q_3/T_3 = 0$$

d'après le deuxième principe (égalité de Clausius car le cycle est supposé réversible). Ces deux équations permettent de trouver Q_2 et Q_3 en fonction de Q_1 (que l'on sait négatif) et d'étudier ainsi leur signe.

$$Q_2 = -Q_1 \left(1 + \frac{T_3 T_1 - T_2}{T_1 T_2 - T_3} \right) > 0 \quad \text{et} \quad Q_3 = \frac{T_3 T_1 - T_2}{T_1 T_2 - T_3} Q_1 < 0$$

La source (2) cède de l'énergie thermique et les sources (1) et (3) en reçoivent.

1. C'est là la limite de ce genre de dispositif. Une pompe à chaleur est très efficace si $T_c - T_f$ est faible, c'est-à-dire s'il ne fait pas trop froid dehors.

III. Évolutions dans une machine réelle : modélisation du moteur à combustion interne

Jusqu'à présent, l'étude thermodynamique des machines cycliques dithermes a été faite indépendamment de leur réalisation technique : rien n'a été dit sur la façon dont le fluide circule dans un réfrigérateur, par exemple.

Sur l'exemple du moteur à combustion interne (moteur de voiture), on va voir comment passer de la réalisation technique du moteur à sa modélisation dans un diagramme permettant des calculs.

Conformément au programme des CPGE, cette présentation ne requiert aucune connaissance spécifique exigible. La nature du cycle, les différentes étapes, les conditions de température et de pression seraient rappelées dans un problème.

En 1862, le Français Alphonse Eugène Beau, dit Beau de Rochas (1815-1893), dépose un brevet d'invention concernant un cycle dont l'intérêt est de décrire, de manière simplifiée, le cycle à « quatre temps » d'un cylindre d'un moteur à combustion interne d'automobile. La première mise en application de ce cycle a été réalisée sur un monocylindre en 1876 par l'inventeur allemand Nikolaus Otto (1832-1891), sans qu'il ait eu connaissance du travail de Beau de Rochas. Pour cette raison, le nom d'Otto est aussi associé à ce cycle.



Beau de Rochas



Nikolaus Otto

Le moteur est constitué d'un bloc métallique dans lequel sont percés un ou plusieurs cylindres. Dans chaque cylindre peut coulisser un piston alternativement de haut en bas². Une bielle (tige métallique rigide) transmet le mouvement alternatif du piston en mouvement rotatif du vilebrequin. Le piston est mis en mouvement par les variations de pression du gaz qui le surmonte.

Deux soupapes permettent au cylindre de se remplir ou de se vider de son contenu de gaz : dans les phases de remplissage et de vidange, le piston joue le même rôle que le piston d'une seringue. Il y a aspiration quand le volume augmente et refoulement quand le volume diminue.

Le fonctionnement d'un tel moteur est décomposé en quatre étapes successives appelées temps (voir figure 18.3).

2. Ces notions de « haut » et « bas » sont purement conventionnelles, les cylindres n'étant pas disposés verticalement dans tous les moteurs.

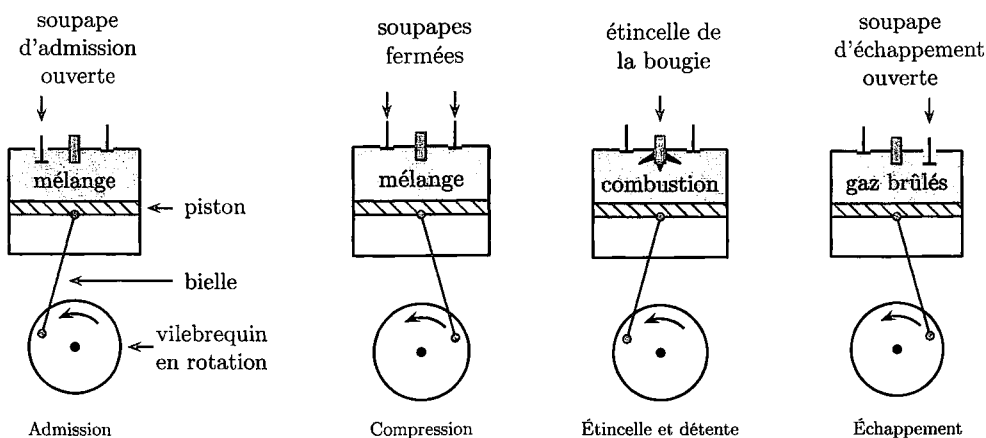


FIG. 18.3. Les quatre temps d'un moteur à combustion interne.

► **Admission** : le piston est initialement en position haute (le volume de la chambre de combustion est minimal), la soupape d'admission s'ouvre et le mélange air-carburant venant du carburateur entre dans le cylindre durant la descente du piston ; à la fin de cette étape, le piston est en position basse.

► **Compression** : la soupape d'admission se ferme et le piston comprime le mélange en remontant jusqu'à la position haute.

► **Combustion et détente** : les soupapes étant fermées, une étincelle³ provoque la combustion exothermique du mélange, la pression augmente brutalement, le piston est repoussé jusqu'à sa position basse : c'est le « temps moteur » durant lequel le piston reçoit du travail de la part du gaz (c'est l'analogie du temps où les jambes travaillent pour pousser le pédalier d'une bicyclette vers le bas).

► **Échappement** : la soupape d'échappement s'ouvre, les gaz brûlés sont éjectés dans l'atmosphère *via* le tuyau d'échappement.

On peut représenter ce cycle dans un diagramme de Watt, pour lequel on simplifie les différents « temps » du moteur afin de n'obtenir que des évolutions facilement représentables.

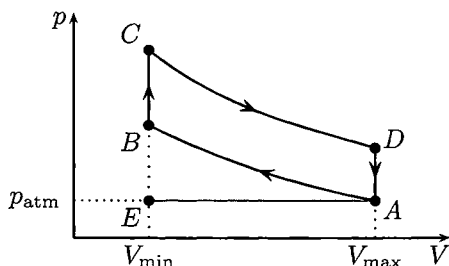


FIG. 18.4. Cycle de Beau de Rochas représenté dans un diagramme de Watt.

3. Dans un moteur à allumage commandé, une bougie commandée électroniquement provoque le début de la combustion en créant une étincelle. Dans un moteur diesel, il n'y a pas de bougie. On comprime adiabatiquement l'air qui s'échauffe fortement. Puis on injecte rapidement le carburant dont la combustion démarre spontanément à cause de la température très élevée.

Lorsqu'une des soupapes est ouverte, l'évolution se fait à pression constante, la pression atmosphérique. Pendant les deux périodes correspondant à l'échappement ($A \rightarrow E$, en gris sur la figure 18.4) et à l'admission ($E \rightarrow A$), le mélange de gaz brûlés est remplacé par un mélange air-essence. Pour simplifier, on assimile par la suite ces deux mélanges à un même fluide gazeux, qui parcourt donc indéfiniment le cycle $ABCD$ et qui constituera le système thermodynamique fermé étudié. Tout se passe donc comme si le transfert thermique reçu par le fluide provenait d'une source chaude fictive, alors qu'en réalité il provient d'une réaction chimique interne. On suppose de plus que ce fluide gazeux se comporte comme un gaz parfait.

On modélise maintenant les quatre étapes du cycle présenté sur la figure 18.4.

- ▶ $A \rightarrow B$: la compression du gaz est supposée adiabatique (elle est suffisamment rapide pour que les échanges thermiques avec l'extérieur n'aient pas le temps de se faire) et réversible (les frottements du piston sur le cylindre sont négligés ; la vitesse du piston est faible devant la vitesse du son dans le gaz, de telle sorte que la pression reste uniforme et l'évolution quasi stationnaire vis-à-vis des ondes de pression).
- ▶ $B \rightarrow C$: en B , l'étincelle provoque la combustion rapide du mélange, faisant monter brutalement la température. La pression augmente quasi instantanément, de sorte que le volume n'a pas le temps d'augmenter ; cette étape est donc assimilée à une évolution isochore.
- ▶ $C \rightarrow D$: détente adiabatique et réversible du gaz.
- ▶ $D \rightarrow A$: l'ouverture de la soupape d'échappement ramène le gaz à la pression atmosphérique. Cette transformation est supposée isochore et à quantité de gaz constante (en réalité, les gaz brûlés sont évacués et laissent la place à la même quantité de mélange air-carburant dans le même volume ; le système revient bien à la pression atmosphérique et à la température extérieure).

Les grandeurs connues sont V_{\min} et V_{\max} ainsi que $p_A = p_{\text{atm}}$. En raisonnant sur les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz au cours d'un cycle, on peut montrer que seule la connaissance du rapport volumétrique $a = V_{\max}/V_{\min}$ est nécessaire pour calculer le rendement énergétique du moteur, qui vaut

$$\eta = 1 - a^{1-\gamma}$$

où γ est l'exposant adiabatique du gaz. La détermination du rendement η est l'objet de l'exercice 4.

L'expression précédente du rendement théorique conduit, pour une valeur usuelle du rapport volumétrique de l'ordre de 10 et en considérant un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$), à un rendement de l'ordre de 60 %.

En pratique, le rendement réel du moteur est bien inférieur à cette valeur (il est de l'ordre de 40 %), car de nombreuses hypothèses faites ne sont pas vérifiées. En particulier, le cycle réel est irréversible et n'est pas représenté par les quatre évolutions simples de la figure 18.4. Le champ de pression dans le gaz n'est pas uniforme. Il est donc impossible de parler de LA pression du gaz. L'état du gaz n'est donc pas toujours représentable par une ordonnée p dans le graphe. Le cycle réel n'est ainsi pas représentable dans un diagramme de Watt.

Notons enfin que le rendement réel d'une voiture est encore plus faible que le rendement thermique du moteur. Environ 15 % de la puissance mécanique sortant du moteur est perdue par frottements (échauffement) dans le système de transmission aux roues motrices.

IV. Machines thermiques à écoulement de fluide permanent

IV.1. Premier principe de la thermodynamique pour un écoulement permanent

Les machines thermiques comme les réfrigérateurs, les pompes à chaleur ou les systèmes domestiques de chauffage à eau chaude utilisent un fluide qui circule en circuit fermé. L'aspect énergétique de ces machines s'étudie à l'aide du premier principe appliqué à une portion de fluide (système fermé). La démarche est analogue à celle employée pour l'étude de la détente de Joule-Thomson (voir page 458).

On raisonne sur le système \mathcal{S} fermé constitué du fluide compris entre A et B à l'instant t_1 (voir figure 18.5). Du fait de l'écoulement, il se déforme. À l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$, il est compris entre A' et B' tels que $\overline{AA'} = \vec{V}_A \Delta t$ et $\overline{BB'} = \vec{V}_B \Delta t$, où \vec{V}_A et \vec{V}_B sont les vitesses du fluide en amont et en aval.

$$\mathcal{S} = \{\text{portion de fluide } [AB] \text{ à } t_1\} = \{\text{portion de fluide } [A'B'] \text{ à } t_2\}$$

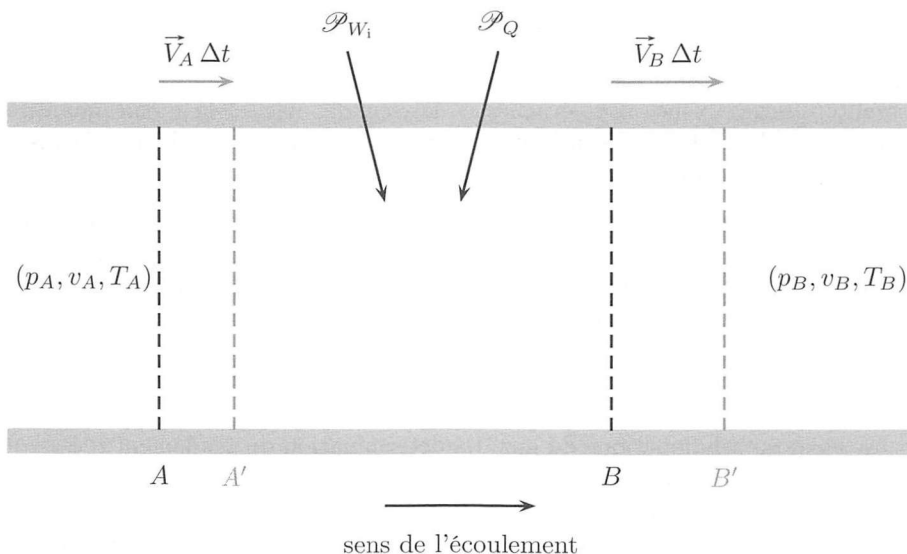


FIG. 18.5. Écoulement dans une machine thermique. La machine fournit au fluide circulant une puissance thermique \mathcal{P}_Q (grâce à une résistance électrique, par exemple) et une puissance mécanique indiquée \mathcal{P}_{W_i} grâce à des parties mobiles (piston ou roue à augets, par exemple). Les grandeurs (p, v, T) signalées en amont et en aval représentent la pression, le volume massique et la température du fluide.

Définition 18.6. *Écoulement permanent*

Un écoulement est dit permanent⁴ si les grandeurs relatives à toute région fixe de l'espace sont indépendantes du temps.

On s'intéresse au fonctionnement permanent des machines thermiques (la phase de démarrage ou d'arrêt ne correspond pas au fonctionnement normal). Dans ce cas, les grandeurs (masse, énergie interne, etc.) relatives à toute zone fixe de l'espace sont indépendantes du temps. Ce résultat sera utilisé plusieurs fois dans le raisonnement qui va suivre.

Conservation de la masse

Le système étant fermé, sa masse est constante, donc

$$m_{AB}(t_1) = m_{A'B'}(t_2).$$

Comme la masse est une grandeur extensive, on peut décomposer chaque membre selon

$$m_{AA'}(t_1) + m_{A'B}(t_1) = m_{A'B}(t_2) + m_{BB'}(t_2). \quad (18.3)$$

Les zones AA' , $A'B$ et BB' sont fixes⁵, donc, par permanence, on peut supprimer les indications de temps dans la relation (18.3), qui s'écrit alors

$$m_{AA'} + m_{A'B} = m_{A'B} + m_{BB'} \Rightarrow m_{AA'} = m_{BB'}. \quad (18.4)$$

Le fait que la masse $m_{A'B}$ ait disparu du calcul est une autre façon d'exprimer la permanence : la masse qui est dans la machine est constante au cours du temps. Pour la suite, on note

$$\Delta m \stackrel{\text{def.}}{=} m_{AA'} = m_{BB'}. \quad (18.5)$$

La relation (18.5) signifie que la masse $m_{AA'}$ qui entre par l'amont pendant Δt est égale à la masse $m_{BB'}$ qui sort par l'aval de la machine pendant le même intervalle de temps.

Remarque Les volumes occupés par $m_{AA'}$ et $m_{BB'}$ n'ont aucune raison d'être égaux, car le fluide circulant peut avoir été comprimé ou détendu dans la machine. La démonstration faite pour la masse ne peut pas être reproduite pour le volume, car il n'existe pas de principe de conservation du volume : \mathcal{V}_{AB} peut être différent de $\mathcal{V}_{A'B'}$.

Application du premier principe au système

Le système \mathcal{S} reçoit de l'énergie thermique ($Q = \mathcal{P}_Q \Delta t$) et de l'énergie mécanique sous forme de travaux. On introduit temporairement les aires S_A et S_B des sections amont et aval du tuyau pour les calculs. Les travaux reçus par le système entre les deux instants t_1 et t_2 sont :

- ▶ le travail de pression exercé par le fluide en amont, $\vec{F}_A \cdot \vec{AA}' = p_A S_A AA'$;
- ▶ le travail de pression exercé par le fluide en aval, $\vec{F}_B \cdot \vec{BB}' = -p_B S_B BB'$;
- ▶ le travail $W_i = \mathcal{P}_{W_i} \Delta t$ apporté par les parties mobiles de la machine (roue à augets ou piston, par exemple). La grandeur \mathcal{P}_{W_i} porte le nom de *puissance indiquée*, car c'est ce qu'indiquerait un cadran mesurant le transfert mécanique d'énergie de la machine vers le fluide. En conséquence, W_i prend le nom de *travail indiqué*.

4. L'adjectif stationnaire est synonyme de permanent. On peut donc parler d'un écoulement stationnaire. Cela peut paraître paradoxal : écoulement fait référence à un mouvement alors que stationnaire pourrait suggérer la notion d'immobilité. Dans ce contexte, stationnaire ne signifie pas immobile, mais « dont les propriétés sont invariantes dans le temps ».

5. Le système étudié est mobile et déformable, mais les points A , A' , B et B' sont des points fixes de l'espace qui ne font que coïncider avec les frontières du système à certains instants. On peut imaginer que ce sont des marques peintes sur la tuyauterie pour servir d'indications.

Pour simplifier, on suppose que la canalisation est horizontale, de manière que le poids du fluide ne travaille pas. Le tuyau ne fournit pas de travail au fluide à cause des phénomènes de viscosité : le fluide adhère localement aux parois, donc les éléments du fluide en contact avec la paroi ont une vitesse nulle dans le référentiel d'étude. Ils reçoivent donc une puissance mécanique nulle à chaque instant de la part du tuyau. Le premier principe appliqué au système \mathcal{S} dans le référentiel (galiléen) du tuyau entre les deux instants t_1 et $t_2 = t_1 + \Delta t$ s'écrit

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = p_A S_A AA' - p_B S_B BB' + \mathcal{P}_W \Delta t + \mathcal{P}_Q \Delta t. \quad (18.6)$$

Par ailleurs, la variation d'énergie interne du système \mathcal{S} entre les deux instants s'écrit $\Delta U = U_{A'B'}(t_2) - U_{AB}(t_1)$. L'écoulement étant permanent, on peut supprimer l'indication du temps dans chaque terme,

$$\Delta U = U_{A'B'} - U_{AB}.$$

Par extensivité de l'énergie interne, on peut faire les deux décompositions

$$U_{A'B'} = U_{A'B} + U_{BB'} \quad \text{et} \quad U_{AB} = U_{AA'} + U_{A'B}$$

donc

$$\Delta U = [U_{A'B} + U_{BB'}] - [U_{AA'} + U_{A'B}] \Rightarrow \Delta U = U_{BB'} - U_{AA'}. \quad (18.7)$$

L'énergie cinétique étant extensive, la même démarche peut lui être appliquée,

$$\Delta \mathcal{E}_c = [\mathcal{E}_{cA'B} + \mathcal{E}_{cBB'}] - [\mathcal{E}_{cAA'} + \mathcal{E}_{cA'B}] \Rightarrow \Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{cBB'} - \mathcal{E}_{cAA'}. \quad (18.8)$$

En utilisant les équations (18.7) et (18.8), le premier principe (18.6) se réécrit

$$[U_{BB'} - U_{AA'}] + [\mathcal{E}_{cBB'} - \mathcal{E}_{cAA'}] = p_A S_A AA' - p_B S_B BB' + \mathcal{P}_W \Delta t + \mathcal{P}_Q \Delta t. \quad (18.9)$$

Dans cette expression, on fait apparaître la masse Δm grâce aux grandeurs massiques locales. On note u_A et u_B les énergies internes massiques du fluide en amont et en aval : alors $U_{BB'} = \Delta m \times u_B$ et $U_{AA'} = \Delta m \times u_A$. Par ailleurs, $S_A AA'$ et $S_B BB'$ représentent des volumes qui peuvent être exprimés en fonction des volumes massiques v_A et v_B , soit $S_A AA' = \Delta m \times v_A$ et $S_B BB' = \Delta m \times v_B$. La relation (18.9) devient

$$\Delta m [u_B - u_A] + \Delta m \left[\frac{1}{2} V_B^2 - \frac{1}{2} V_A^2 \right] = \Delta m (p_A v_A - p_B v_B) + \mathcal{P}_W \Delta t + \mathcal{P}_Q \Delta t. \quad (18.10)$$

En regroupant les termes en u et pv , on fait apparaître l'enthalpie massique $h = u + pv$ du fluide,

$$\Delta m [h_B - h_A] + \Delta m \left[\frac{1}{2} V_B^2 - \frac{1}{2} V_A^2 \right] = \mathcal{P}_W \Delta t + \mathcal{P}_Q \Delta t. \quad (18.11)$$

On peut réécrire cette relation en la divisant membre à membre par Δm ,

$$\left(h_B + \frac{V_B^2}{2} \right) - \left(h_A + \frac{V_A^2}{2} \right) = \frac{\mathcal{P}_W \Delta t}{\Delta m} + \frac{\mathcal{P}_Q \Delta t}{\Delta m} = \frac{W_i}{\Delta m} + \frac{Q}{\Delta m}.$$

Les numérateurs des termes du membre de droite s'identifient à W_i et Q , quantités d'énergies mécanique et thermique fournies par la machine au fluide durant Δt . Or, la masse qui a traversé la machine durant cet intervalle de temps est Δm . Donc les deux termes du membre de droite, $w_i = \frac{W_i}{\Delta m}$ et $q = \frac{Q}{\Delta m}$, s'identifient à des quantités d'énergie reçues par unité de masse de fluide qui s'écoule.

En résumé, le premier principe appliqué au système \mathcal{S} conduit au théorème 18.7.

Théorème 18.7. *Écoulement permanent à travers une machine thermique*

Soit un fluide en écoulement permanent traversant une machine qui lui fournit :

- ▶ le travail massique indiqué w_i ;
- ▶ l'énergie thermique massique q .

Les variations des grandeurs h (enthalpie massique) et V (vitesse) du fluide entre l'amont A et l'aval B de la machine vérifient la relation

$$\left(h_B + \frac{V_B^2}{2} \right) - \left(h_A + \frac{V_A^2}{2} \right) = w_i + q. \quad (18.12)$$

Le théorème 18.7 est une formulation du premier principe adaptée à un écoulement. On l'appelle parfois « premier principe industriel ».

On peut aussi diviser membre à membre la relation (18.11) par Δt . Cela fait apparaître le débit de masse

$$D_m \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

qui représente la quantité de masse traversant la machine par unité de temps. On obtient la relation suivante, qui n'est qu'une reformulation de l'égalité (18.12),

$$D_m \left[\left(h_B + \frac{V_B^2}{2} \right) - \left(h_A + \frac{V_A^2}{2} \right) \right] = \mathcal{P}_{w_i} + \mathcal{P}_Q. \quad (18.13)$$

Remarques

▶ Dans les relations (18.12) et (18.13), la seule grandeur mécanique qui apparaît est la grandeur *indiquée* (travail massique ou puissance). En effet, les travaux des actions de pression exercés sur \mathcal{S} par le fluide en amont et en aval de la machine ont été « cachés » dans la variation d'enthalpie au moment du regroupement des termes u et pv (passage entre les relations (18.10) et (18.11)). Pour cette raison, la grandeur énergétique pertinente dans l'étude des machines thermiques est l'enthalpie et non l'énergie interne.

▶ De même, pour l'étude des changements d'état, c'est la grandeur enthalpie qui est pertinente, car un système change en général de volume lors de la transition d'un état vers un autre. Le système reçoit alors algébriquement du travail de la part de l'atmosphère extérieure. L'avantage de l'enthalpie de changement d'état est de prendre en compte ce travail.

EXEMPLE 18.8.

La détente de Joule-Thomson (étudiée page 458) conduit à un cas particulier de la relation (18.12). En effet, le tuyau calorifugé et équipé d'un obstacle peut être assimilé à une machine thermique ne fournissant ni travail indiqué $w_i = 0$, ni énergie thermique ($q = 0$) à l'écoulement. De plus, les vitesses d'écoulement sont supposées négligeables dans la détente de Joule-Thomson (V_A et V_B sont pris nuls). De la relation (18.12), il ne reste que

$$h_B = h_A.$$

L'enthalpie massique d'un fluide ne varie pas lors d'une détente de Joule-Thomson.

Méthode

Utilisation du théorème 18.7

Lors de l'étude d'une machine thermique, le théorème 18.7 permet de lier w_i et q aux variations des propriétés thermodynamiques (h et V) du fluide entre l'entrée et la sortie de la machine. Le but est en général de lier w_i et q à des grandeurs *directement mesurables*, ce qui n'est pas le cas de h (il n'existe pas « d'enthalpiemètre »). L'enthalpie h n'est donc qu'un intermédiaire de calcul, ce qui conduit à une méthode en deux temps.

1. Appliquer le théorème 18.7 à la machine.

2. Par ailleurs, exprimer $h_B - h_A$.

► Si le fluide est à l'état de gaz (supposé parfait) à l'entrée et à la sortie,

$$h_B - h_A = c_p(T_B - T_A),$$

où c_p est la capacité thermique massique à pression constante du gaz.

► Si le fluide est un liquide à l'entrée et à la sortie,

$$h_B - h_A = c(T_B - T_A),$$

où c est la capacité thermique massique du liquide.

► Si le fluide a changé (partiellement ou totalement) d'état entre l'entrée et la sortie, il faut imaginer une évolution (fictive) qui amène le fluide de l'état A à l'état B , de manière à calculer $h_B - h_A$ en faisant intervenir les grandeurs mesurables nécessaires (température et pression, par exemple).

Pour l'étude pratique des machines thermiques, des diagrammes relatifs au fluide considéré permettent de lire graphiquement $h_B - h_A$. Cela évite des calculs fastidieux (voir section IV.2 page 521).

EXERCICE CORRIGÉ 18.9.

Tuyère

On considère une tuyère (simple tuyau calorifugé, indéformable et de section non constante) dans laquelle a lieu l'écoulement permanent d'un gaz assimilé à un gaz parfait diatomique. Les grandeurs caractérisant le gaz sont, entre autres, sa vitesse V , sa température T . On les note avec un indice A en amont et B en aval de la tuyère. Déterminer le lien entre la variation de vitesse et la variation de température du gaz en fonction de la constante R des gaz parfaits, la masse molaire M du gaz et l'exposant adiabatique γ du gaz.

Corrigé

La tuyère étant calorifugée, $q = 0$. Elle est un simple tuyau indéformable, donc $w_i = 0$. Le théorème 18.7 s'écrit simplement

$$h_B - h_A + \frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2) = 0.$$

Par ailleurs, le gaz étant parfait, $h_B - h_A = c_p(T_B - T_A)$. La relation de Mayer $c_p - c_v = \frac{R}{M}$ et l'exposant adiabatique $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ permettent d'exprimer la capacité thermique massique $c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}$. Finalement,

$$\frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_B - T_A) + \frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2) = 0 \iff \frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2) = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_A - T_B).$$

Si le fluide accélère entre l'entrée et la sortie de la tuyère, $V_B > V_A$, donc $T_B < T_A$: il se refroidit en accélérant. Cela a lieu dans les tuyères de réacteur d'avion : l'air sort du réacteur en étant très chaud et comprimé. Il accélère dans la tuyère (dont la forme est bien choisie, ce qui n'est pas détaillé ici) tout en se refroidissant. Le but est de l'éjecter avec la plus grande vitesse possible pour assurer une bonne propulsion de l'avion.

IV.2. Diagrammes thermodynamiques

Pour accéder facilement à la variation des différentes grandeurs thermodynamiques, comme $h_B - h_A$ par exemple, on utilise des diagrammes contenant une information sur l'enthalpie.

Le diagramme (p, h) d'un fluide donne des points dont les coordonnées sont la pression et l'enthalpie massique du fluide. Ces diagrammes sont établis de façon théorique. La figure 18.6 montre l'exemple du diagramme (p, h) du fluide réfrigérant R11. La pression est représentée en échelle logarithmique afin de permettre une bonne lisibilité, même si la pression varie sur plusieurs décades. En général, ces diagrammes affichent plusieurs familles de courbes, ce qui les rend difficiles à lire au premier abord. Cependant, ils sont toujours fournis avec les explications nécessaires. Pour la figure 18.6 (voir page 522), le code de lecture est donné ci-après.

- ▶ De manière évidente, une évolution isenthalpique du fluide (détente de Joule-Thomson) est représentée par une verticale dans ce diagramme.
- ▶ Une évolution isobare du fluide est représentée par un segment horizontal.
- ▶ En trait épais est représentée la courbe de saturation (courbe en cloche), sous laquelle se trouve le domaine de coexistence liquide-vapeur. À droite de la courbe de saturation se trouve le domaine du gaz. Le sommet de la courbe de saturation est le point critique.
- ▶ Les courbes isothermes sont aussi des isobares ($P = P_{\text{sat}}(T) = \text{cte}$) lorsque les deux phases coexistent. Elles correspondent donc à des segments horizontaux (paliers de changement d'état). Pour ne pas encombrer la figure, seuls les débuts et fins de ces paliers sont représentés sous la courbe de saturation (en gris, avec un petit symbole carré). Dans la phase gaz, les courbes isothermes (en gris, se raccordant aux paliers horizontaux au niveau de la courbe de saturation) sont dirigées vers le bas.
- ▶ Sous la courbe de saturation, des courbes partent du point critique pour se terminer sur l'axe horizontal. Elles sont indexées par $x = 0,1$, $x = 0,2$, etc. Ce sont les isotitres en vapeur, x représentant le pourcentage massique de vapeur dans le mélange liquide-vapeur. Elles permettent de savoir rapidement quel est le pourcentage de vapeur pour un point quelconque dans le domaine liquide-vapeur. Par exemple, la courbe $x = 0,3$ intersecte tous les paliers horizontaux à 30 % de leur longueur, conformément à la règle des moments.
- ▶ Les courbes en trait fin continu sont les isochores (le long desquelles le fluide, mono ou diphasé, a un volume massique constant).
- ▶ Les courbes en pointillé sont les isentropiques (le long desquelles le fluide, mono ou diphasé, garde une entropie massique constante : cela correspond aux évolutions adiabatiques réversibles du fluide dans le diagramme).

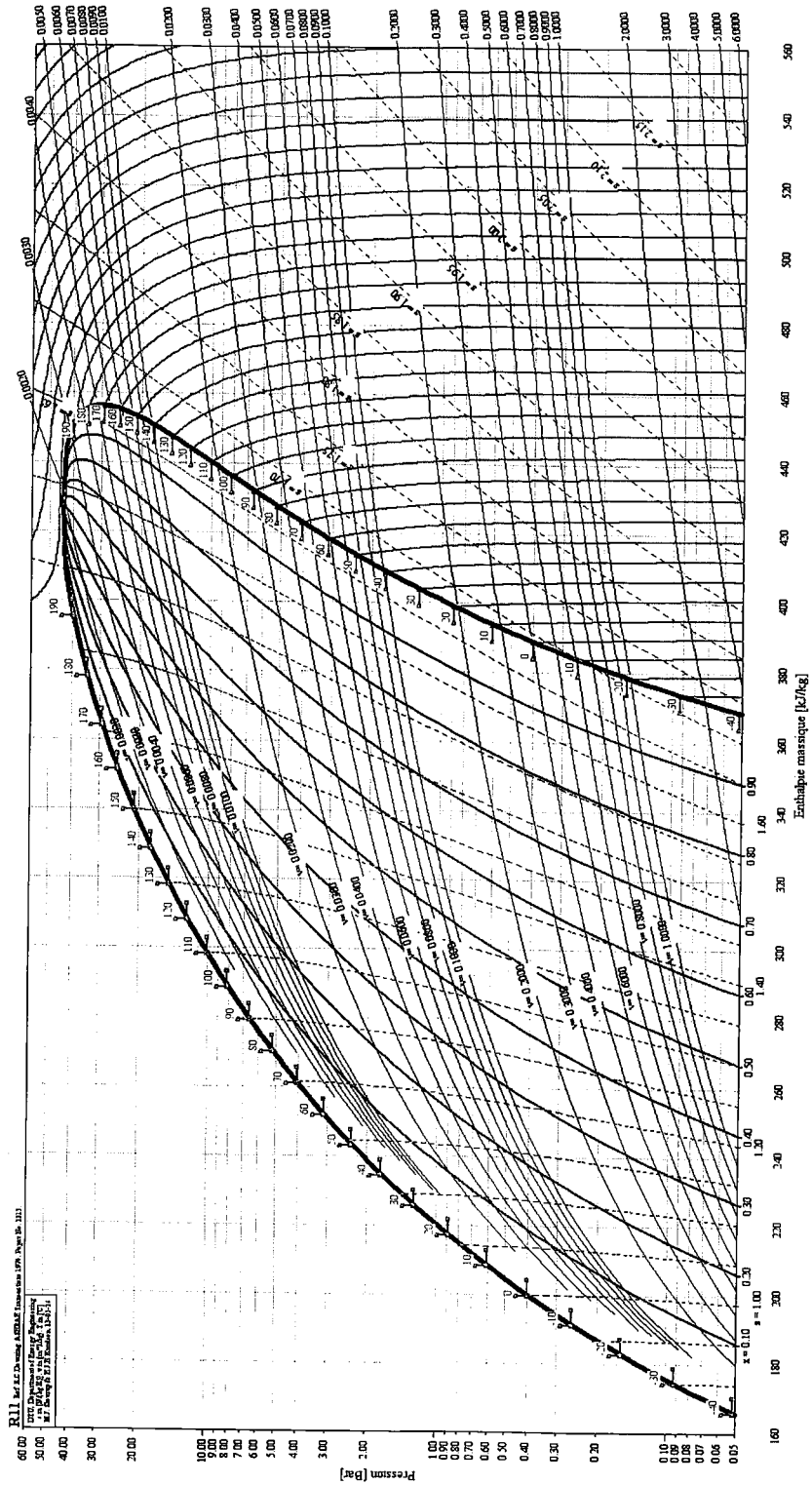


FIG. 18.6. Diagramme pression-enthalpie massique du fluide réfrigérant R11 (trichlorofluorométhane). L'enthalpie massique est en abscisse, la pression est en ordonnée (échelle logarithmique).

V. Exercices

1. Exemples de machines thermiques ★

(solution page 754)

Pour les cas à traiter, on considère une machine thermique mettant en jeu l'écoulement permanent d'un fluide. On note \mathcal{P}_{W_i} la puissance mécanique indiquée et \mathcal{P}_Q la puissance thermique de la machine (puissances *fournies* au fluide par la machine). Dans chaque cas, citer un exemple de dispositif pour lequel :

1. $\mathcal{P}_{W_i} > 0$ et $\mathcal{P}_Q = 0$;
2. $\mathcal{P}_{W_i} > 0$ et $\mathcal{P}_Q > 0$;
3. $\mathcal{P}_{W_i} = 0$ et $\mathcal{P}_Q < 0$;
4. $\mathcal{P}_{W_i} < 0$ et $\mathcal{P}_Q = 0$;
5. $\mathcal{P}_{W_i} = 0$ et $\mathcal{P}_Q = 0$;
6. $\mathcal{P}_{W_i} = 0$ et $\mathcal{P}_Q > 0$.

2. Cycle monotherme ★

(solution page 754)

Le système étudié est constitué de $n = 1,0$ mole d'air (gaz supposé parfait), de capacité thermique massique à volume constant $c_v = \frac{5}{2}R = 20 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et d'exposant adiabatique $\gamma = 1,4$, contenue dans un cylindre de volume variable. On fait subir à ce gaz une évolution cyclique monotherme en trois étapes.

► À partir de l'état initial A , défini par $p_A = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_A = 300 \text{ K}$, mise en contact isochore du gaz avec un thermostat de température $T_B = 2T_A$, jusqu'à ce que le gaz atteigne la température T_B et la pression p_B .

► Compression isotherme $B \rightarrow C$ par contact avec le thermostat à la température T_B , jusqu'à atteindre un volume noté V_C .

► Détente adiabatique réversible $C \rightarrow A$ qui ramène le gaz à son état initial.

1. Représenter ce cycle dans le diagramme de Watt (volume V en abscisse, pression p en ordonnée) en notant bien les trois sommets A , B et C . Exprimer et calculer les grandeurs p_B , V_C et p_C .

2. Exprimer les quantités d'énergie reçues par le gaz à chaque étape (travaux notés W_{AB} , W_{BC} , W_{CA} et transferts thermiques notés Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CA}). Calculer leur valeur numérique.

3. Ce cycle est-il moteur ou récepteur ? Est-il réversible ? Confirmer la réponse par un calcul d'entropie créée. Les réponses à ces questions étaient-elles prévisibles sans calculs ?

4. Pourrait-on inverser ce cycle afin de réaliser un moteur cyclique monotherme ?

3. Moteurs à combustion externe ★

(solution page 756)

Les moteurs à combustion externe sont des machines dithermes où un fluide (à l'intérieur de la machine) est chauffé par une source externe. Ce principe s'oppose à celui des moteurs de voiture où la combustion est interne (dans le cylindre). Un exemple de moteur à combustion externe est la machine à vapeur. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux exemples historiques : le cycle de Stirling (brevet déposé en 1816 par le pasteur écossais Robert Stirling) et le cycle d'Ericsson (inventé par l'ingénieur John Ericsson, 1803-1889, d'origine suédoise mais qui fit carrière aux États-Unis).

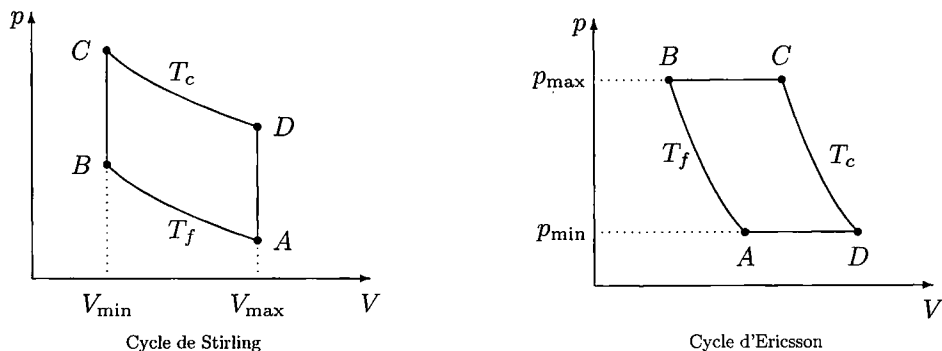


FIG. 18.7. Deux exemples historiques de cycles à combustion externe, le cycle de Stirling et le cycle d'Ericsson, représentés dans un diagramme de Watt.

1. Cycle de Stirling

Le cycle de Stirling (voir figure 18.7 à gauche) est constitué de deux isothermes et de deux isochores. Ce cycle, supposé réversible, est décrit dans le sens moteur par n moles d'un gaz parfait d'exposant adiabatique γ constant. Il se décompose comme suit.

- ▶ $A \rightarrow B$: compression isotherme réversible, le cylindre étant en contact avec la source froide à la température T_f . Le transfert thermique reçu par le gaz est noté Q_{AB} .
- ▶ $B \rightarrow C$: échauffement isochore réversible, l'apport thermique Q_{BC} venant d'un régénérateur, dont le rôle sera détaillé plus loin.
- ▶ $C \rightarrow D$: détente isotherme réversible, le cylindre étant en contact avec la source chaude à la température T_c , qui transfère au gaz l'énergie thermique Q_{CD} .
- ▶ $D \rightarrow A$: refroidissement isochore réversible, l'apport thermique algébrique Q_{DA} venant du régénérateur.

Le régénérateur est une pièce métallique interne à la machine qui peut effectuer des échanges thermiques avec le gaz et stocker temporairement de l'énergie thermique. L'énergie qui entre dans le régénérateur durant $D \rightarrow A$ est restituée au gaz durant $B \rightarrow C$, donc $Q_{BC} + Q_{DA} = 0$. Ce bilan thermique étant nul, Q_{BC} n'a pas à être compté en tant qu'énergie coûteuse lors du calcul du rendement moteur. On suppose que toutes les évolutions du gaz sont réversibles, y compris lorsque celui-ci est en contact avec le régénérateur.

a/ Exprimer les transferts thermiques reçus par le gaz pour chaque étape du cycle en fonction de n , R , γ , V_{\min} , V_{\max} , T_f et T_c .

b/ Déterminer le rendement du moteur en fonction de T_f et T_c . Commenter.

2. Cycle d'Ericsson

Le cycle d'Ericsson (voir figure 18.7 à droite) est constitué de deux isothermes et de deux isobares. Ce cycle, supposé réversible, est décrit dans le sens moteur par n moles d'un gaz parfait d'exposant adiabatique γ constant. Les températures T_f et T_c sont celles des sources froide et chaude, respectivement. Elles correspondent aux températures des deux évolutions isothermes. Les deux évolutions isobares sont effectuées avec mise en contact du gaz avec un régénérateur.

a/ Exprimer les transferts thermiques vers le gaz pour chaque étape du cycle en fonction de n , R , γ , p_{\min} , p_{\max} , T_f et T_c .

b/ Déterminer le rendement du moteur en fonction de T_f et T_c . Commenter.

VI. Problèmes

4. Rendement d'un moteur à quatre temps ★ (solution page 757)

On considère un moteur cyclique ditherme dont le fonctionnement est décrit par un cycle de Beau de Rochas. Ce cycle, présenté section III et figure 18.4 page 514, est constitué par une compression adiabatique réversible AB , une évolution isochore BC , une détente adiabatique réversible CD et enfin une évolution isochore DA . On note $a = V_{\max}/V_{\min}$ le rapport volumétrique. Le gaz parcourant ce cycle est supposé parfait, d'exposant adiabatique $\gamma = 1,4$. On rappelle que la constante des gaz parfaits est $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le système considéré par la suite est constitué des n moles de gaz décrivant le cycle (système fermé).

1. On note Q_{BC} le transfert thermique fourni au système lors de l'étape $B \rightarrow C$. Exprimer Q_{BC} en fonction de R, n, γ, T_B et T_C . Quel est le signe de Q_{BC} ?
2. On note Q_{DA} le transfert thermique fourni au système lors de l'étape $D \rightarrow A$. Exprimer Q_{DA} en fonction de R, n, γ, T_D et T_A . Quel est le signe de Q_{DA} ?
3. Exprimer le travail W fourni au système au cours du cycle en fonction de Q_{BC} et Q_{DA} .
4. Définir puis exprimer le rendement énergétique η du moteur en fonction de Q_{BC} et Q_{DA} , puis en fonction de T_A, T_B, T_C et T_D .
5. Exprimer le rendement η en fonction de γ et du rapport volumétrique a uniquement. Comment η varie-t-il en fonction de a ? Faire l'application numérique pour $a = 10$ (valeur usuelle pour les moteurs de voiture à essence à allumage commandé).
6. Les valeurs pratiques pour un moteur à allumage commandé sont $T_A \simeq 20^\circ\text{C}$ (admission d'air extérieur) et $T_C \simeq 800^\circ\text{C}$ (fin de combustion du mélange air-essence). En déduire les valeurs de T_B et T_D .
7. Le moteur réel est supposé ditherme (modélisation), c'est-à-dire que les échanges thermiques du gaz ne se font que par contact avec deux thermostats au cours du cycle.
 - L'échauffement isochore $B \rightarrow C$ (combustion) est modélisé par une simple mise en contact du gaz avec un thermostat à la température T_C .
 - Le refroidissement isochore $D \rightarrow A$ du gaz est obtenu par contact avec un thermostat à la température T_A .

Déterminer l'expression de l'entropie créée $S_{m, \text{créé}}$ au cours du cycle et par mole de gaz en fonction de γ, R , et des températures des quatre sommets du cycle. Calculer numériquement $S_{m, \text{créé}}$.

8. Le cycle ainsi modélisé est-il réversible ? Si ce n'est pas le cas, expliciter les causes d'irréversibilité *venant du modèle*. Dans un moteur réel, quelles sont les éventuelles causes supplémentaires d'irréversibilité ?
9. Quel serait le rendement η_C d'un moteur (théorique) de Carnot utilisant les thermostats T_A et T_C ? Comment se classent les rendements η et η_C ? Est-ce normal ?

5. Cycle de Carnot ★★ (solution page 759)

Ce problème est à traiter sans faire appel au deuxième principe de la thermodynamique. Le moteur théorique de Sadi Carnot (1796-1832) est composé de n moles de gaz parfait enfermées dans un cylindre, dont le volume peut varier à l'aide d'un piston mobile sans frottements. Ce piston est la pièce qui échange du travail avec l'extérieur. L'opérateur, théorique lui aussi, dispose du matériel suivant :

► deux thermostats dont les températures sont T_1 et T_2 . L'opérateur peut mettre le cylindre en contact avec un thermostat à T_1 ou T_2 pour effectuer des compressions ou détentes monothermes du gaz ;

► des parois calorifugées adaptables autour du cylindre pour bloquer les transferts thermiques. Cela permet d'effectuer des compressions et détentes adiabatiques du gaz.

L'opérateur effectue les opérations nécessaires (montage ou démontage des parois calorifugées, mise en contact avec un thermostat, enfoncement ou remontée du piston) pour que le dispositif ait le fonctionnement suivant.

► $A \rightarrow B$: le cylindre est mis en contact avec le thermostat à T_1 , puis le gaz est comprimé lentement (compression monotherme quasi stationnaire).

► $B \rightarrow C$: le gaz subit une compression adiabatique quasi stationnaire qui élève sa température jusqu'à T_2 .

► $C \rightarrow D$: le cylindre est mis en contact avec le thermostat à T_2 , puis le gaz subit une détente lente (monotherme quasi stationnaire).

► $D \rightarrow A$: le gaz subit une détente adiabatique quasi stationnaire qui abaisse sa température jusqu'à T_1 , ce qui le ramène à son état initial.

On note V_A , V_B , V_C et V_D les volumes correspondant aux quatre sommets du cycle. Le gaz est caractérisé par son exposant adiabatique γ et la constante des gaz parfaits est notée R .

1. Justifier que les étapes où le cylindre est en contact avec les thermostats sont isothermes.

2. Représenter le cycle de Carnot dans un diagramme de Watt (volume en abscisse, pression en ordonnée) en précisant bien le sens de parcours.

3. En justifiant la réponse, préciser si ce cycle est moteur.

4. Ce cycle est-il réversible ?

5. On note Q_1 et Q_2 les quantités respectives d'énergie thermique reçues par le gaz lors de son contact avec les thermostats à T_1 et T_2 . Établir les expressions de Q_1 et Q_2 en fonction des données utiles du problème (en particulier des volumes). En déduire une expression de la quantité $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$ en fonction de n , R , et des volumes des quatre sommets du cycle.

6. En exploitant les propriétés des transformations $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$, montrer qu'il existe une relation simple entre les volumes des quatre sommets du cycle.

7. Déduire des deux questions précédentes l'égalité de Clausius.

6. Optimisation d'un moteur ★★

(solution page 761)

Les moteurs thermiques alternatifs à combustion interne transforment une partie de l'énergie thermique de combustion (réaction chimique exothermique jouant le rôle de source chaude) en travail mécanique.

Dans ces moteurs, un piston se déplace dans un cylindre entre deux positions extrêmes : le point mort haut (PMH sur la figure 18.8) et le point mort bas (PMB). Le volume balayé V_e s'appelle la cylindrée. Le volume d'une même masse fluide (pendant le temps de fermeture des soupapes S) varie entre une valeur maximale V_1 et une valeur minimale V_2 (également nommée volume de l'espace mort).

On définit le taux volumétrique de compression τ par le rapport $V_1/V_2 = 1 + V_e/V_2$.

Hypothèses générales

Pour simplifier, le fluide gazeux réel (mélange initial carburant-air, puis produits de combustion) en évolution dans le moteur est assimilé à de l'air, supposé se comporter

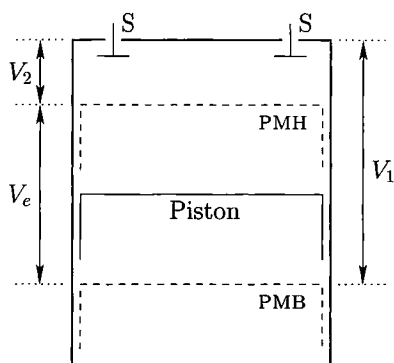


FIG. 18.8. Positions extrêmes lors du déplacement du piston dans un cylindre, point mort haut (PMH) et point mort bas (PMB). Le volume balayé par le piston dans le cylindre est V_e , appelé cylindrée.

comme un gaz parfait dont le nombre de moles est constant. On notera c_p et c_v les capacités thermiques massiques à pression et volume constants, et $\gamma = c_p/c_v$ leur rapport, appelé exposant adiabatique. On donne $c_v = 713 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\gamma = 1,4$.

L'air est aspiré à la température $T_{\text{atm}} = 300 \text{ K}$ et à la pression $p_{\text{atm}} = 1,0 \text{ bar}$. On pose $\alpha = T_{\text{max}}/T_{\text{atm}}$, rapport entre la température maximale du cycle (T_{max}) et la température d'aspiration. On prendra $\alpha = 9,0$, soit $T_{\text{max}} = 2,70 \cdot 10^3 \text{ K}$.

Le système thermodynamique d'étude est la masse unité (1 kg) de gaz. On appelle :

- ▶ Q_1 le transfert thermique massique reçu du fait de la combustion pendant un cycle ;
- ▶ Q_2 le transfert thermique massique rejeté dans le milieu extérieur pendant un cycle ;
- ▶ W le travail massique reçu par le gaz au cours d'un cycle.

1. Étude d'un cycle théorique de moteur

On donne sur la figure 18.9 un cycle théorique représentant l'évolution d'une masse de fluide entre la fermeture et l'ouverture des soupapes dans un diagramme de Clapeyron (le cycle est parcouru dans le sens horaire).

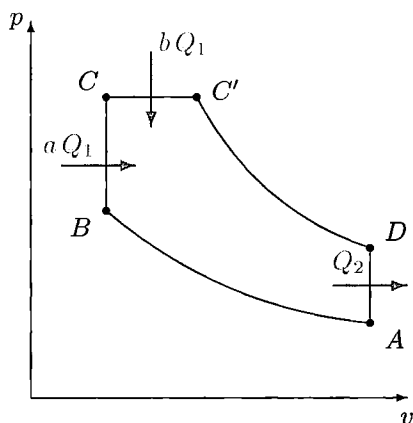


FIG. 18.9. Cycle théorique du moteur (donc parcouru dans le sens horaire). Les évolutions $A \rightarrow B$ et $C' \rightarrow D$ sont des adiabatiques réversibles ; l'apport d'énergie thermique est fractionné en deux séquences.

Les évolutions $A \rightarrow B$ et $C' \rightarrow D$ sont des adiabatiques réversibles. L'apport d'énergie thermique est fractionné en deux séquences, l'une à volume constant, l'autre à pression constante. $Q_1 = aQ_1 + bQ_1$, avec $a + b = 1$. Le rejet d'énergie thermique Q_2 se fait exclusivement au cours de l'évolution $D \rightarrow A$.

a/ Définir et exprimer le rendement thermodynamique η du cycle en fonction de T_A , T_B , T_C , T_D (respectivement températures aux points A , B , C et D) et γ .

b/ On introduit les paramètres $\lambda = p_C/p_B$ et $\Delta = V_{C'}/V_C$ le taux (ou rapport) d'injection.

Calculer littéralement les températures T_B , T_C , $T_{C'}$ et T_D en fonction de T_A et de paramètres adimensionnels à choisir parmi $\tau = \frac{V_A}{V_B}$, γ , λ , Δ .

c/ En déduire l'expression du rendement du cycle η , $\eta = \eta(\lambda, \Delta, \gamma, \tau)$.

d/ Pour $a = b = 0,5$, calculer les températures et pressions en B , C , C' et D , ainsi que λ et Δ (en donner une expression littérale); présenter les résultats dans le tableau 18.1.

	A	B	C	C'	D
T (K)	300				
p (bar)	1				

$$\tau = 10; \alpha = 9$$

$$\lambda =$$

$$\Delta =$$

TABLEAU 18.1. Températures et pressions dans le cas du cycle de la figure 18.9.

e/ En déduire la valeur numérique de η .

2. Optimisation d'un cycle théorique de moteur

On modifie le cycle théorique de la partie précédente en supprimant la combustion à pression constante, et donc l'apport d'énergie thermique correspondant, soit $a = 1$, $b = 0$. Les autres évolutions sont conservées, notamment le rejet isochore d'énergie thermique.

a/ Tracer qualitativement les évolutions $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$, c'est-à-dire le cycle dans un diagramme de Clapeyron. À quelles transformations sont associés les transferts thermiques Q_1 et Q_2 ?

b/ Exprimer la relation (simple) reliant les températures T_A , T_B , T_C et T_D .

c/ On pose $\beta = \tau^{\gamma-1}$. Exprimer littéralement en fonction de T_A , α et β les températures T_B , T_C et T_D .

d/ Calculer littéralement la valeur absolue $|W|$ du travail mécanique massique fourni par le cycle, $|W| = f(c_v, T_A, \alpha, \beta)$.

e/ Pour c_v , T_A et α fixés, rechercher la valeur littérale de τ en fonction de α et γ conduisant à la valeur maximale de $|W|$; donner la valeur numérique de τ .

f/ Pour la valeur numérique de τ obtenue à la question précédente, calculer numériquement le rendement thermodynamique η^* du cycle, puis le comparer à celui (noté η') que l'on obtiendrait pour $\tau = 10$.

g/ Pour la valeur de $\tau = 10$, calculer numériquement p_C . Sachant que, en pratique, la pression dans les cylindres moteur ne doit pas dépasser 200 bars, que penser de l'utilisation éventuelle de ce cycle?

7. Étude d'une machine frigorifique ★★

(solution page 763)

Une machine frigorifique est utilisée dans un pays chaud pour maintenir à 0°C un local contenant des denrées périssables. Cette machine contient un fluide frigorigène de type fréon dont le diagramme température-entropie massique ($t-s$) est représenté à la figure 18.12.

Dans tout le sujet, on fera attention au fait que les températures sont données en degrés Celsius.

Ce réfrigérateur ditherme fonctionne en régime permanent. Grâce à la circulation permanente d'un fluide caloporteur (appelé fréon) dans un circuit fermé, il prélève de

l'énergie thermique à la source froide (local réfrigéré à 0°C) et en donne à la source chaude (l'atmosphère extérieure à 40°C). La circulation du fréon est assurée par un compresseur qui fournit du travail au fluide lors de la compression.

Le schéma général de fonctionnement, avec le sens de circulation du fréon, est indiqué sur la figure 18.10.

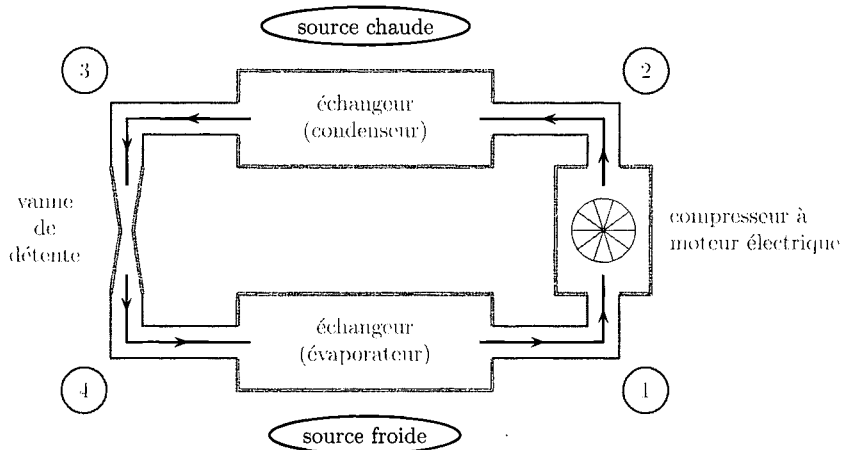


FIG. 18.10. Schéma de fonctionnement d'une machine frigorifique ditherme.

Le fréon circule en circuit fermé dans le sens indiqué par les flèches sur le schéma. Quatre points ont été numérotés sur le circuit. Le sens de parcours est $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Les évolutions du fluide se détaillent comme suit.

- ▶ $1 \rightarrow 2$: le fluide passe dans le **compresseur** où il subit une compression adiabatique, considérée comme réversible.
- ▶ $2 \rightarrow 3$: le fluide passe dans un **échangeur-condenseur** où il cède de l'énergie à la source chaude (échanges thermiques à travers les parois) et se condense (liquéfaction). Cette évolution est isobare.
- ▶ $3 \rightarrow 4$: le fluide passe dans une **vanne de détente** qui est simplement une portion de tuyau indéformable dont les parois sont calorifugées (détente de type Joule-Thomson).
- ▶ $4 \rightarrow 1$: le fluide passe dans un **échangeur-évaporateur** où il reçoit de l'énergie de la part de la source froide (échanges thermiques à travers les parois) et subit une évaporation. Cette évolution est isobare.

Le but des questions 1 et 2 est de montrer une relation générale destinée à être appliquée ensuite aux différents éléments de la machine frigorifique.

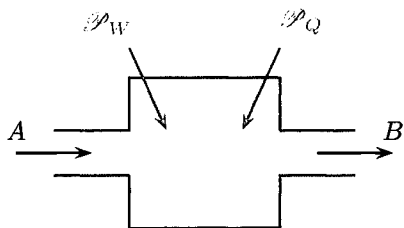


FIG. 18.11. Schématisation d'un élément de machine thermique fournissant la puissance mécanique indiquée \mathcal{P}_W et la puissance thermique \mathcal{P}_Q au fluide qui le traverse.

On considère un fluide qui circule en régime permanent et passe dans un dispositif quelconque qui lui fournit de l'énergie thermique et du travail (voir figure 18.11). On

appelle \mathcal{P}_W la puissance mécanique fournie au fluide (puissance indiquée) et \mathcal{P}_Q la puissance thermique fournie au fluide par le dispositif (\mathcal{P}_W ne tient donc pas compte des actions de pression exercées par le fluide en amont et en aval). L'action de la pesanteur sur le fluide est négligée.

On note :

- ▶ p_A et V_A la pression et la vitesse du fluide en amont du dispositif;
- ▶ p_B et V_B la pression et la vitesse du fluide en aval du dispositif;
- ▶ h_A et h_B les enthalpies massiques du fluide en amont et en aval;
- ▶ D_{m_A} et D_{m_B} les débits massiques de fluide en amont et en aval. Le débit massique, exprimé en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, est la quantité de masse qui passe par unité de temps à travers une section du tuyau.

1. Par un calcul simple, démontrer que $D_{m_A} = D_{m_B}$. Dans la question suivante, on notera D_m cette valeur commune du débit de masse.

2. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système à préciser, démontrer que

$$D_m \left[\left(h_B + \frac{V_B^2}{2} \right) - \left(h_A + \frac{V_A^2}{2} \right) \right] = \mathcal{P}_W + \mathcal{P}_Q.$$

Le débit de fréon étant faible dans la machine frigorifique, on négligera tous les termes d'énergie cinétique macroscopique dans la suite. De plus, on supposera que l'état du fluide n'est pas modifié par les éléments de tuyauterie raccordant deux éléments consécutifs du réfrigérateur.

3. On note w et q le travail et le transfert thermique massiques reçus par le fréon (en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$) lors de son passage dans un des éléments du réfrigérateur (travail et énergie thermique reçus pour une unité de masse de fréon circulant. Par exemple : $w = W/\Delta m$). Établir la relation entre w , q et la variation d'enthalpie massique du fréon $\Delta h = h_{\text{après l'élément}} - h_{\text{avant l'élément}}$.

4. Montrer que la détente dans la vanne 3 \rightarrow 4 est isenthalpique.

Sur la figure 18.12 (voir page 533) est représenté le diagramme température-entropie massique du fréon. Il sera à compléter au fur et à mesure des questions posées.

Sur ce diagramme sont représentés :

- ▶ la courbe de saturation (courbe de liquide saturé et de vapeur saturée);
- ▶ des débuts d'isobares (courts traits noirs épais sur la partie gauche);
- ▶ des courbes isobares (pressions indiquées en bars);
- ▶ des courbes isenthalpiques (enthalpies massiques en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$);
- ▶ des courbes « isotitre en vapeur » qui indiquent, sous la courbe de saturation, la fraction massique de vapeur dans le domaine où le liquide et la vapeur coexistent.

5. Dans le diagramme ($t - s$) du fréon, comment se représente une évolution isobare quasi statique dans la région où liquide et vapeur coexistent? Justifier rapidement.

- ▶ La température du fréon lors de l'évaporation dans l'évaporateur est de -10°C .
- ▶ La pression p_2 de fin de compression (point 2) est de 15 bars.
- ▶ Au point 3 (sortie du condenseur), le fréon est sous forme de liquide saturé.
- ▶ Dans l'évaporateur, l'évolution est isobare. Le fréon venant du point 4 est complètement vaporisé par l'apport d'énergie dû à la source froide (le local réfrigéré). Il sort au point 1 sous forme de vapeur saturée à la température de -10°C .

6. À l'aide de ces informations :

- ▶ placer les points 1, 2, 3 et 4 sur le diagramme ($t - s$) de la figure 18.12 (voir page 533) ;
- ▶ tracer le cycle en indiquant son sens de parcours ;
- ▶ déterminer, par lecture graphique et interpolation linéaire, les valeurs de p , t et h (pression, température en degrés Celsius et enthalpie massique) aux quatre points (notées avec en indices les numéros des points). Résumer ces informations dans un tableau.

7. Si on considérait que l'évolution du fréon dans le compresseur était adiabatique, mais non réversible, comment se situerait sa température en sortie (toujours avec $p_2 = 15$ bars) par rapport à la température t_2 ? Justifier.

8. Comment peut-on trouver, de deux façons différentes sur le diagramme, la valeur de l'enthalpie massique $L(t_0)$ de vaporisation du fréon à une température t_0 donnée ?

9. Application numérique : pour $p_0 = 3,0$ bars, déterminer la température d'ébullition t_0 et l'enthalpie massique de vaporisation $L(t_0)$.

10. Donner les valeurs de $L(t_c)$, t_c et $s(t_c)$ (enthalpie massique de vaporisation, température et entropie massique au point critique). Expliquer en quelques lignes les particularités du point critique.

11. En partant d'un kilogramme de liquide saturant à une température inférieure à la température critique, on réalise de façon isobare une vaporisation partielle. On note x la fraction massique de vapeur (titre en vapeur) à la fin de cette évolution. Démontrer que x peut s'exprimer en fonction de longueurs mesurées sur le palier de changement d'état.

12. Utiliser le résultat de la question précédente pour donner la valeur du titre en vapeur x_4 à la sortie de la vanne de détente (point 4 du cycle).

13. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, la quantité d'énergie massique (*i.e.* reçue par kilogramme de fréon), notée q_c , reçue par le fréon de la part de la source chaude. Faire l'application numérique.

14. Même question pour la source froide, en notant q_f l'énergie massique reçue par le fréon.

15. Déterminer $w_{1 \rightarrow 2}$, le travail massique reçu par le fréon de la part du compresseur. Faire l'application numérique.

16. Définir et calculer l'efficacité, notée ε , de la machine frigorifique.

17. Sur le diagramme ($t - s$) de la figure 18.12, construire le cycle $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ d'une machine frigorifique de Carnot (cycle réversible avec deux isothermes et deux adiabatiques), qui fonctionnerait entre -10°C et t_3 , et qui, pour l'isotherme t_3 , décrirait la totalité du palier de liquéfaction. Calculer l'efficacité de cette machine de Carnot.

18. Pour la phase vapeur (supposée homogène), donner l'expression de c_p (capacité thermique massique à pression constante) en fonction des variations élémentaires de la température t et de l'entropie massique s . Déterminer graphiquement c_p pour la phase gazeuse (vapeur sèche) au voisinage du point 1 du cycle (indiquer succinctement la méthode utilisée).

Étude de l'effet d'une séparation de phases

19. On suppose qu'au lieu de faire l'évolution $3 \rightarrow 4$ de p_3 à p_4 , on réalise une première détente isenthalpique de p_3 à $p_{3'} = \sqrt{p_3 \times p_4}$. La température en ce nouveau point $3'$ est notée $t_{3'}$. On sépare alors les phases liquide et vapeur obtenues en $3'$. Le liquide saturé $(p_{3'}, t_{3'})$ est alors détendu dans une deuxième vanne isenthalpique jusqu'à la pression p_4 (du point 4 de l'étude précédente).

► Calculer $p_{3'}$ et donner la valeur de la température $t_{3'}$ correspondante (indiquer la méthode pour trouver $t_{3'}$).

► Placer les points $3'$ et $4'$ sur le diagramme $(t - s)$ de la figure 18.12.

20. En déduire l'énergie thermique massique q'_f que le fréon peut recevoir de la source froide pour l'évolution $4' \rightarrow 1$.

21. Dans une machine à séparation de phases, la vapeur saturée obtenue et séparée en $3'$ est réintroduite en cours de compression (nécessité d'un compresseur à deux étages). Cette opération permet de minimiser le travail absorbé par le fréon lors de la compression (*i.e.* de minimiser la consommation électrique du réfrigérateur). On admet que dans ce cas, le travail massique w' absorbé est égal à 85 % du travail calculé à la question 15.

Définir et calculer l'efficacité ε' de la machine frigorifique à séparation de phases.

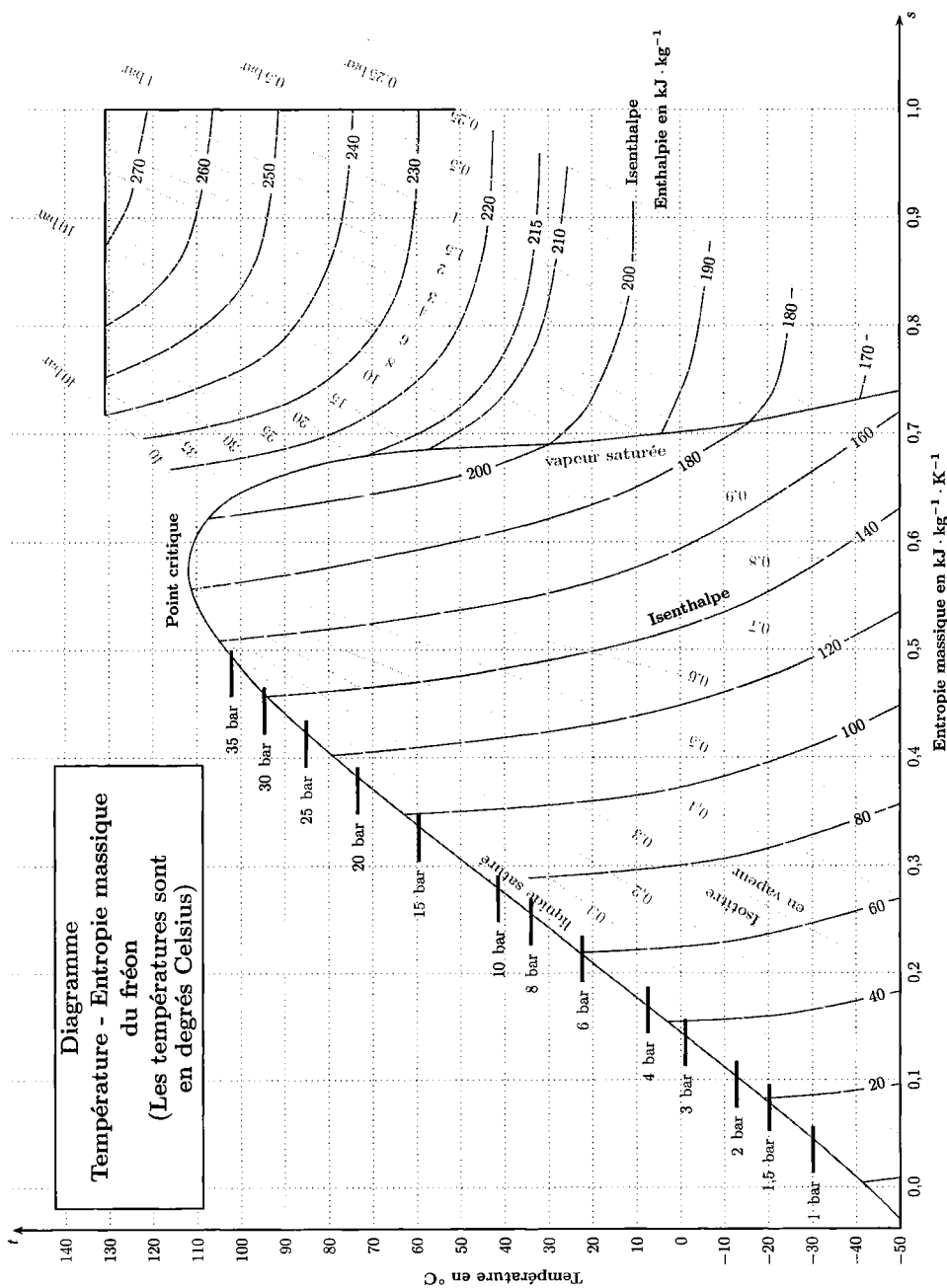


FIG. 18.12. Diagramme température-entropie massique du fréon.

Chapitre 19

STATIQUE DES FLUIDES (PCSI)

UN FLUIDE possède la propriété de pouvoir s'écouler, comme le font les liquides et les gaz. Il est dit en équilibre s'il n'a pas de mouvement macroscopique, c'est-à-dire détectable à l'échelle humaine dans le référentiel d'étude. L'étude des fluides à l'équilibre, qui fait l'objet de ce chapitre, s'appelle la statique des fluides. Dans ce chapitre, nous allons définir la pression et étudier le champ de pression dans un fluide. Nous comprendrons pourquoi un fluide exerce une poussée, dite d'Archimède, sur un corps immergé.

I. Modèle du milieu continu

I.1. Les différentes échelles de description d'un fluide

Les échelles de description d'un fluide ont déjà été données dans le cours de thermodynamique (voir page 379).

Rappel

Échelles de description d'un fluide

Trois échelles sont possibles pour décrire un fluide,

$$\lambda \ll \ell \ll L.$$

1. Échelle microscopique : λ (libre parcours moyen).
2. Échelle mésoscopique : ℓ assez grande pour contenir beaucoup de molécules et pas trop grande pour que p et T puissent y être considérées comme uniformes.
3. Échelle macroscopique : L , distance sur laquelle T et p varient appréciablement.

Un volume de taille mésoscopique s'appelle une **particule mésoscopique de fluide**. Dans une telle particule se trouvent beaucoup de molécules, de sorte que la notion de grandeur moyenne a un sens. Dans le référentiel \mathcal{R} d'étude, la vitesse du centre de masse G de cet ensemble de N particules est

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R})}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

La particule mésoscopique est dite immobile si cette vitesse est nulle.

Le volume élémentaire $d\tau$ sera appelé, au choix :

- ▶ particule ou goutte (mésoscopique) de fluide ;
- ▶ point du fluide.

À l'échelle macroscopique, qui est l'échelle humaine d'observation, un échantillon de fluide est dit en équilibre si toutes les particules mésoscopiques qui le constituent ont une vitesse nulle. Cela signifie que le fluide n'a pas de mouvement d'ensemble.

Dans toute la suite, nous adopterons une description mésoscopique des fluides. Lorsque nous écrirons « la pression au point M », il s'agira d'un abus de langage pour « la pression dans un volume mésoscopique de dimension ℓ centré en M ».

Lorsque nous devons calculer des intégrales de volume sur des fluides, l'élément « différentiel » de volume qui apparaîtra sera en fait un volume mésoscopique $d\tau = \ell^3$. Les grandeurs intensives (pression, température, vitesse, etc.) seront considérées comme uniformes à l'échelle de $d\tau$.

I.2. Pression dans un fluide

La pression exercée par un fluide sur un solide est le résultat des chocs des molécules (agitation thermique) du fluide sur la paroi solide. La notion de pression est définie en moyennant les effets de ces chocs dans le temps.

Définition 19.1. Pression – Force de pression

Si la pression dans le fluide est uniforme ($p(M) = p_0$ partout), la résultante des forces de pression exercée par ce fluide sur une surface solide plane d'aire S est

$$\vec{F} = p_0 S \vec{n},$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire orthogonal à la surface et dirigé du fluide vers le solide. La pression est homogène à une force par unité de surface. Son unité SI est le pascal (Pa),

$$1 \text{ Pa} \stackrel{\text{déf.}}{=} 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}.$$

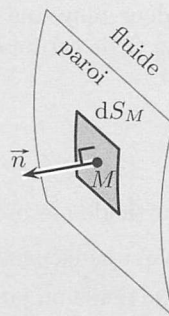
Remarque L'orientation du vecteur unitaire \vec{n} est intuitive : un fluide ne peut qu'appuyer sur une paroi et non la tirer.

Si la pression au sein du fluide n'est pas uniforme à l'échelle macroscopique, on adapte la définition précédente en raisonnant à l'échelle mésoscopique. À cette échelle, la pression peut être considérée comme uniforme.

Définition 19.2. Pression – Force de pression

Soit une surface mésoscopique d'aire dS_M , centrée en un point M de l'interface entre un système et un fluide. Soit \vec{n} le vecteur unitaire orthogonal à dS_M et dirigé du fluide vers le système. La pression $p(M)$ du fluide en M est définie par la force élémentaire $d\vec{F}$ qu'exerce le fluide sur la surface dS ,

$$d\vec{F} = p(M) dS_M \vec{n}.$$



I.3. Champs de grandeurs intensives locales

Rappelons qu'une grandeur intensive est définie comme le rapport de deux grandeurs extensives. L'aspect intensif des pression, température et masse volumique a été discuté dans le cours de thermodynamique. En mécanique des fluides, ces grandeurs sont décrites par des champs.

Définition 19.3. Champ scalaire

Le champ d'une grandeur physique g dans un domaine \mathcal{D} de l'espace à un instant t est défini par la donnée de $g(M,t)$ en tout point M de \mathcal{D} .

Mathématiquement, g est une fonction réelle de quatre variables (trois d'espace et une de temps).

- Un champ indépendant de l'espace est dit *uniforme*.
- Un champ indépendant du temps est dit *permanent* ou *stationnaire*.

Il faut éviter le mot « constant » pour qualifier un champ, car la constance peut être spatiale (uniformité) ou temporelle (permanence).

Le présent chapitre concerne les fluides en équilibre. Les situations envisagées seront donc toutes stationnaires. Dans ce cas, les différents champs ne dépendent que de l'espace.

Champ de pression	$M \mapsto p(M)$
Champ de température	$M \mapsto T(M)$
Champ de masse volumique	$M \mapsto \rho(M)$

Pour tous ces champs, le « point M » représente le centre de la particule mésoscopique entourant M . Du point de vue mathématique, la valeur que prend le champ considéré au point M est une moyenne sur toutes les molécules de la particule mésoscopique. Souvent, ces champs ne sont pas uniformes, c'est-à-dire que la valeur qu'ils prennent dépend du point M considéré. Pour cette raison, les grandeurs définies par des champs sont qualifiées de *locales*. Dans la suite, on cherche à établir comment varie la pression en fonction du point M .

II. Statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme

Nous savons par expérience que l'eau appuie de plus en plus sur nos tympans lorsque nous nous enfonçons dans une piscine. On résume ce phénomène en disant que la pression augmente en descendant dans l'eau. La pression caractérise l'aptitude d'un fluide à appuyer sur les solides qu'il entoure. C'est Blaise Pascal (1623-1662) qui a établi les premiers résultats concernant la pression dans les fluides. Pascal s'est distingué très jeune par ses aptitudes en sciences. En 1642, il invente la première machine à calculer. En 1646, il apprend que l'Italien Torricelli a réalisé des expériences sur la pression et il en entreprend du même type. À une époque où la notion de vide n'est pas acceptée



Blaise Pascal

par l'Église, ces travaux sont révolutionnaires. Pour vérifier ses hypothèses, il demande à son beau-frère, Florin Périer, de mener des expériences similaires au pied et au sommet du puy de Dôme. Il reçoit les résultats et rédige un traité sur la pression atmosphérique. Pascal, dont la santé a toujours été mauvaise, meurt à Paris en 1662 à l'âge de trente-neuf ans. Florin Périer publie le traité de Pascal en 1663 sous le titre *Traité de l'équilibre des liqueurs¹ et de la pesanteur de l'air*.

Dans le cas particulier d'une masse fluide au repos dans le référentiel terrestre, par exemple l'eau d'une piscine ou bien une portion de l'atmosphère en l'absence de vent, la pression ne dépend que de l'altitude z . Pour établir la relation qui donne les variations de $p(z)$, on raisonne sur une couche fluide d'aire horizontale S arbitraire et d'épaisseur dz mésoscopique (voir figure 19.1). Par définition de cette échelle, on peut considérer que :

- la masse volumique ρ du fluide est uniforme sur dz : elle ne varie presque pas quand z varie de dz . Comme $\rho(z)$ est quasi uniforme sur $[z, z + dz]$, la couche a pour masse $\rho(z) S dz$;
- le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme sur $[z, z + dz]$. Le poids de la couche est donc $\rho(z) S dz \vec{g}$.

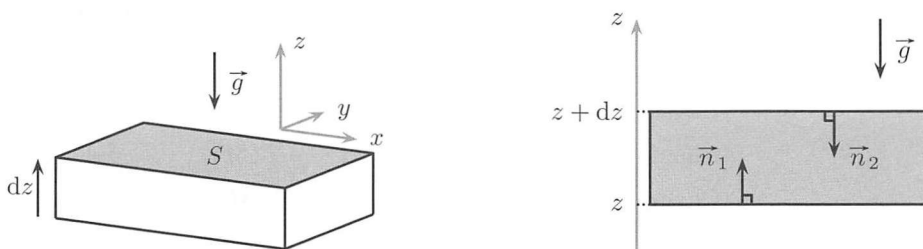


FIG. 19.1. Couche de fluide d'épaisseur mésoscopique isolée par la pensée.

La force de pression exercée par le fluide externe sur la face inférieure de la couche est dirigée vers le haut, $\vec{n}_1 = +\vec{u}_z$ pour cette face, située à l'altitude z . La force de pression exercée par le fluide externe sur la face supérieure de la couche est dirigée vers le bas, $\vec{n}_2 = -\vec{u}_z$ pour cette face, située à l'altitude $z + dz$. La pression est uniforme sur chacune de ces faces. En appliquant la définition 19.1 (voir page 536), les forces de pression exercées par le fluide ambiant sur ces deux faces s'écrivent

$$p(z) S \vec{n}_1 = p(z) S \vec{u}_z \quad \text{et} \quad p(z + dz) S \vec{n}_2 = -p(z + dz) S \vec{u}_z.$$

À l'équilibre de la couche de fluide d'épaisseur dz , la somme des forces extérieures (le poids et les deux forces de pression) est nulle,

$$p(z) S \vec{u}_z - p(z + dz) S \vec{u}_z + \rho(z) S dz \vec{g} = \vec{0}.$$

L'aire S disparaît du calcul, ce qui est normal car le problème est invariant par translation selon les directions x et y . Il reste, en projection sur \vec{u}_z ,

$$p(z + dz) - p(z) = -\rho(z) g(z) dz \quad \iff \quad dp = -\rho(z) g(z) dz.$$

1. Liqueur est à prendre au sens de liquide.

Théorème 19.4. Relation locale de la statique des fluides

Si l'axe z pointe selon la verticale ascendante, les variations de la pression p dans un fluide de masse volumique ρ vérifient

$$dp = -\rho(z) g(z) dz.$$

Remarques

- ▶ L'orientation de l'axe z est importante. Le signe « moins » vient ici du fait que $\vec{g} = -g \vec{u}_z$. Si l'axe z était orienté vers le bas, la relation de la statique des fluides s'écrirait $dp = +\rho g dz$.
- ▶ Les grandeurs ρ et g ne sont pas nécessairement uniformes. L'établissement de la relation de la statique des fluides repose uniquement sur le fait que ρ et \vec{g} sont uniformes à l'échelle de la couche d'épaisseur mésoscopique, ce qui n'a rien à voir avec l'uniformité globale.
- ▶ La relation de la statique des fluides ne donne accès qu'à dp (variation élémentaire de la pression entre deux altitudes très voisines) ou à la dérivée de la pression dp/dz .

II.1. Champ de pression dans un liquide (hydrostatique)

Un liquide étant pratiquement incompressible, sa masse volumique ρ peut être considérée comme uniforme. Cela permet d'intégrer facilement la relation de la statique des fluides entre deux altitudes z_A et z_B dans une zone où \vec{g} est uniforme (voir figure 19.2). En effet, le produit ρg est alors une grandeur constante, qui peut sortir des intégrales lors du calcul.

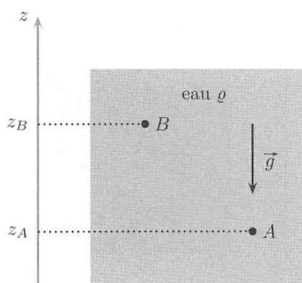


FIG. 19.2. Pression dans un liquide.

$$\begin{aligned} dp = -\rho g dz &\Rightarrow \int_{p(z_A)}^{p(z_B)} dp = \int_{z_A}^{z_B} -\rho g dz = -\rho g \int_{z_A}^{z_B} dz \\ &\Rightarrow p(z_B) - p(z_A) = -\rho g (z_B - z_A) \end{aligned}$$

Ce résultat liant les pressions entre deux points d'un liquide à l'équilibre dans le champ de pesanteur s'appelle « loi de l'hydrostatique de Pascal ». Celle-ci n'est valable que si ρ et \vec{g} sont uniformes.

Théorème 19.5. Relation de l'hydrostatique de Pascal

Si l'axe z est vertical ascendant et si le champ de pesanteur est uniforme, les pressions dans un liquide à deux altitudes z_A et z_B vérifient la relation de l'hydrostatique de Pascal,

$$p(z_B) - p(z_A) = -\rho g(z_B - z_A).$$

II.1.1. Pression dans la mer

L'interface qui sépare le liquide de l'atmosphère qui le surmonte est appelée *surface libre*. Pour connaître la pression dans un liquide surmonté d'air à la pression ambiante p_0 (mer, piscine, etc.), on peut utiliser le résultat suivant².

Propriété 19.6. Continuité de la pression

À l'interface entre deux fluides, la pression est continue.

Cela implique que la pression dans l'eau juste en dessous de la surface libre est égale à la pression p_0 de l'air juste au-dessus de la surface libre. En prenant le point B à la surface, $p(z_B) = p_0$. On peut prendre B comme origine des altitudes ($z_B = 0$) et noter z au lieu de z_A (voir figure 19.3), ce qui simplifie l'écriture de la loi de l'hydrostatique de Pascal.

Avec les notations de la figure 19.3, la pression dans l'eau à l'équilibre vérifie

$$p(z) = p_0 - \rho g z.$$

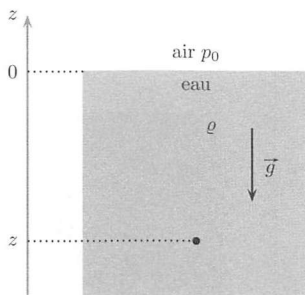


FIG. 19.3. Pression dans l'eau à l'équilibre.

On peut tester cette équation.

- En $z = 0$, la pression dans l'eau est la pression ambiante de l'air.
- Plus z décroît, plus la pression augmente, ce qui est conforme à l'expérience.

La pression augmente linéairement avec la profondeur. Pour l'eau, $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Avec $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, il faut $z \simeq -10 \text{ m}$ pour que $-\rho g z = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,0 \text{ bar}$.

2. La continuité de la pression à l'interface entre deux fluides est valable tant que l'on peut négliger les phénomènes de tension superficielle à cette interface. C'est notamment le cas lorsque l'interface est plane, comme la surface d'une piscine par exemple. La notion de tension superficielle est hors programme.

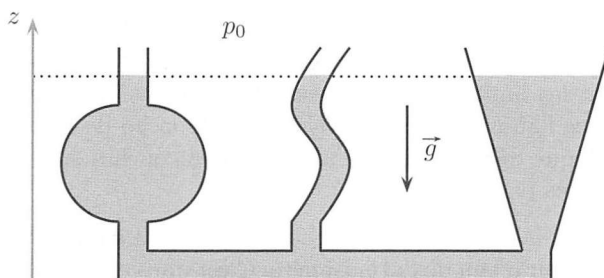


FIG. 19.4. Principe des vases communicants. La pression ne dépendant que de l'altitude z au sein d'un même liquide, la surface libre définie par $p(z_{\text{surface}}) = p_0$ est à la même altitude dans tous les vases qui communiquent, quelle que soit la forme de ces vases.

Ordres de grandeur 19.7. *Pression de l'eau dans la mer*

- ▶ Dans l'eau à l'équilibre, la pression augmente de 1 bar tous les 10 mètres de profondeur.
- ▶ Au fond de l'océan (environ 4 km de profondeur), la pression est d'environ 400 bars, soit 400 fois la pression atmosphérique.

II.1.2. Principe des vases communicants

Au sein d'un même liquide en équilibre dans le champ de pesanteur, la pression ne dépend que de z : les surfaces isobares (surfaces d'égale pression) sont donc des plans horizontaux. En particulier, la surface du liquide qui est en contact avec l'air est un plan horizontal quelle que soit la forme du récipient. Cela se vérifie expérimentalement en remplissant d'eau un récipient composé de « vases » qui communiquent par leur fond (voir figure 19.4) : la hauteur d'eau est la même dans les trois vases. On appelle cela le principe des vases communicants.

Les scientifiques contemporains de Pascal étaient d'accord pour admettre que la pesanteur était responsable de l'augmentation de pression avec la profondeur. Certains disaient (à tort) que la pression en un point du liquide était due au poids total du liquide qui le surmonte. En conséquence de cet argument erroné, ils concluaient que la pression au fond du vase de gauche de la figure 19.4 devrait être plus grande que la pression au fond du vase du milieu, car le vase de gauche contient plus d'eau.

Pour persuader les réfractaires que seule la hauteur d'eau (et non le poids) jouait sur la pression, Pascal eut l'idée de « l'expérience du crève-tonneau », destinée à prouver que ce n'était pas la quantité d'eau qui comptait. Sur un tonneau rempli d'eau, il adapta de façon étanche un tube vertical d'environ 10 mètres de hauteur et 1 cm^2 de section. Un unique litre d'eau suffit à remplir le tube. Cette colonne d'eau de 10 mètres imposa une surpression de 1 bar dans le tonneau qui se mit à fuir de toutes parts.

II.2. Modèle isotherme de l'atmosphère

L'atmosphère est la couche gazeuse qui entoure la Terre. Elle est composée en volume approximativement de 21 % de dioxygène O_2 , de 78 % de diazote N_2 et de 1 % d'autres

gaz (dioxyde de carbone CO_2 , vapeur d'eau, gaz rares). La température varie selon le profil indiqué sur la figure 19.5. Conventionnellement, l'atmosphère est divisée en cinq couches, dont les limites ont été fixées aux endroits où le sens de variation de la température avec l'altitude s'inverse. En vertu de la loi de la statique des fluides, la pression ne fait que décroître avec l'altitude. Les couches situées au-dessus de la stratosphère sont très peu denses.

- ▶ La troposphère est la couche la plus basse. Elle contient environ 90 % de la masse et presque toute la vapeur d'eau de l'atmosphère. C'est dans cette couche que se forment les nuages. Son épaisseur varie de 8 km aux pôles à 15 km à l'équateur.
- ▶ La stratosphère contient de l'ozone très dilué entre 20 et 50 km d'altitude. Si tout l'ozone de cette couche était regroupé sous forme d'ozone pur, l'épaisseur ne serait que de 3 mm dans les conditions normales de température et de pression. C'est cette fine couche qui nous protège des rayons ultraviolets du Soleil.
- ▶ La mésosphère est la couche où se trouvent les satellites en orbite basse.
- ▶ Les couches suivantes sont la thermosphère et l'exosphère, qui débute entre 350 et 800 km d'altitude et s'étend jusqu'à environ 50 000 km.

On propose un modèle très simplifié de la troposphère, c'est-à-dire des dix premiers kilomètres d'épaisseur de l'atmosphère :

- ▶ l'atmosphère est assimilée à un gaz parfait ;
- ▶ la température est uniforme (modèle isotherme). Cela n'est pas du tout conforme au profil de température réel mais simplifie énormément les calculs. Le modèle isotherme est le seul qui soit explicitement au programme des CPGE. Des modèles plus conformes à la réalité seront abordés en exercice.

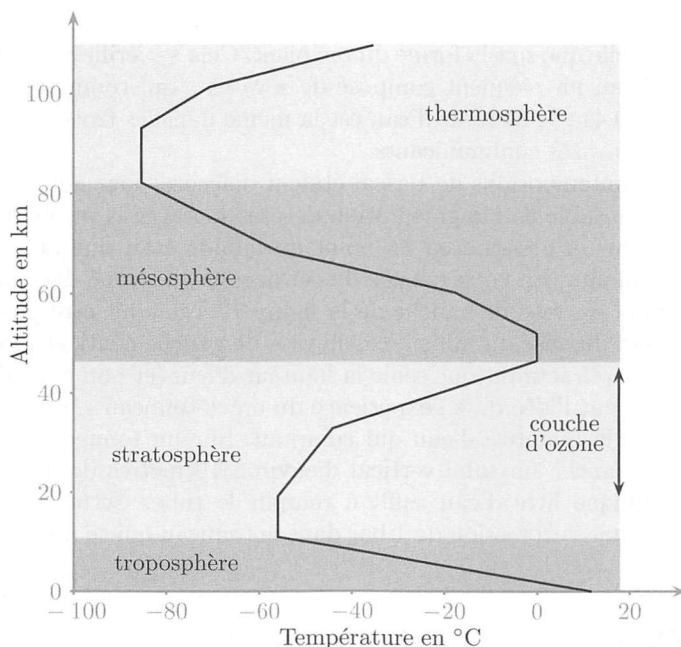


FIG. 19.5. Profil de température de l'atmosphère terrestre.

La forme $pV = nRT$ de l'équation d'état du gaz parfait est inexploitable pour deux raisons :

- les grandeurs n et V représenteraient la quantité (en moles) et le volume de gaz dans l'atmosphère, grandeurs sur lesquelles nous ne savons rien ;
- la pression p est non uniforme.

Il faut donc utiliser une version *locale* de l'équation d'état dans laquelle ne figurent que des grandeurs intensives. On introduit la masse molaire M du gaz. Un système de n moles de gaz ayant une masse $m = nM$ et occupant un volume V , la masse volumique vaut $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$. Par conséquent,

$$pV = nRT \iff p = \frac{n}{V}RT = \underbrace{\frac{nM}{V}}_{\rho} \frac{RT}{M} \iff p = \frac{\rho RT}{M}.$$

Si on suppose que chaque couche de l'atmosphère est en équilibre hydrostatique dans le référentiel galiléen du sol,

$$\left\{ \begin{array}{l} dp = -\rho g dz \quad (\text{équilibre mécanique}) \\ \text{et} \\ p = \frac{\rho RT}{M} \iff \rho = \frac{pM}{RT} \quad (\text{équation d'état locale}). \end{array} \right.$$

La norme du champ de pesanteur est quasi uniforme sur l'épaisseur de l'atmosphère. La température T étant supposée uniforme égale à T_0 , les deux seules inconnues sont p et ρ , à exprimer en fonction de z . Cela fait deux équations indépendantes pour deux inconnues ; le problème est donc fermé. On peut commencer les calculs en éliminant ρ , ce qui donne

$$dp = -\frac{pM}{RT_0} g dz.$$

Pour intégrer cette équation différentielle, on peut séparer les variables, c'est-à-dire passer p d'un côté et z de l'autre du signe égal.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz \quad \Rightarrow \quad \int_{p(z=0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = \int_{z=0}^z -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

On choisit $z = 0$ au niveau du sol et on note $p_0 = p(z = 0)$ la pression de l'air en $z = 0$.

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{Mg}{RT_0} z \quad \Rightarrow \quad p(z) = p_0 \exp \left[-\frac{Mgz}{RT_0} \right]$$

Pour obtenir la masse volumique à partir de p , on utilise l'équation d'état du gaz parfait. Cela fait apparaître la masse volumique en $z = 0$, que l'on note ρ_0 .

$$\rho(z) = \frac{Mp(z)}{RT_0} = \underbrace{\frac{p_0 M}{RT_0}}_{\rho_0} \exp \left[-\frac{Mgz}{RT_0} \right]$$

En résumé, la pression et la masse volumique sont données par

$$p(z) = p_0 \exp \left[-\frac{Mgz}{RT_0} \right] \quad \text{et} \quad \rho(z) = \frac{p_0 M}{RT_0} \exp \left[-\frac{Mgz}{RT_0} \right].$$

Cette expression peut être mise sous la forme

$$p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{z}{h}\right],$$

où $h \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{RT_0}{Mg}$ représente une hauteur caractéristique. En tenant compte de la composition de l'air, la masse molaire moyenne³ de l'air est $M \simeq 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Attention

Applications numériques en thermodynamique

Il faut penser à convertir les grandeurs en unités du système international. Les masses molaires doivent être converties en $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ et les masses volumiques en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Pour l'air, $M \simeq 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Par conséquent, pour le modèle de l'atmosphère isotherme à la température $T_0 = 288 \text{ K}$ (soit $T_0 \simeq 15^\circ\text{C}$), la hauteur caractéristique est

$$h = \frac{RT_0}{Mg} \simeq \frac{8,3 \times 288}{29 \times 10^{-3} \times 9,8} \simeq 8,3 \cdot 10^3 \text{ m} \quad \text{ou encore} \quad h \simeq 8,3 \text{ km}.$$

Comme pour toute exponentielle, la tangente à l'origine de la courbe coupe l'axe horizontal en $z = h$. La figure 19.6 représente le profil de pression pour l'atmosphère isotherme avec sa tangente à l'origine, ainsi que le profil réel de pression.

L'accord du modèle isotherme avec les mesures réelles est étonnamment bon sur les cinq premiers kilomètres d'épaisseur de l'atmosphère. À 10 km d'altitude, là où volent les avions de ligne, l'écart relatif entre les deux courbes est d'environ 10%. Le désaccord entre les deux courbes vient de ce que la température n'est pas uniforme dans l'atmosphère. En réalité, la température décroît à peu près linéairement de $6,5^\circ\text{C}$ par kilomètre d'altitude : à 10 km d'altitude, elle vaut environ -50°C , ce qui n'a plus rien à voir avec les 15°C de notre modèle isotherme.

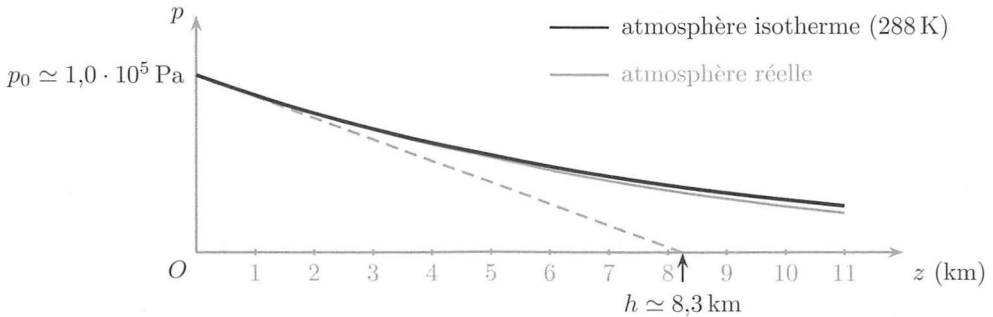


FIG. 19.6. Profil de pression dans l'atmosphère terrestre.

Le modèle de l'atmosphère isotherme est relativement bon pour la répartition de pression (10% d'erreur par rapport à la réalité). En revanche, il ne correspond pas du tout à la réalité pour la température.

3. Attention, il n'existe pas de molécule d'air. L'air est composé à environ 80% de diazote N_2 ($M \simeq 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) et à 20% de dioxygène O_2 ($M \simeq 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$). La masse molaire « de l'air » est donc une moyenne pondérée des masses molaires de ces deux composants.

III. Le facteur de Boltzmann

III.1. Construction du facteur de Boltzmann

Le modèle de l'atmosphère isotherme pour un gaz parfait de masse molaire M conduit à

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left[-\frac{Mgz}{RT}\right]. \quad (19.1)$$

Cela donne des éléments sur la répartition des molécules dans un gaz à température uniforme. Pour simplifier, on suppose ici que le gaz parfait considéré est constitué d'un seul type de molécules. En divisant en haut et en bas dans l'exponentielle par la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A \simeq 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, on fait apparaître :

- ▶ la masse d'une molécule $m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$;
- ▶ la constante de Boltzmann $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} \simeq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

De plus, la masse volumique s'écrit $\rho = m \times n$, où n est le nombre de molécules par unité de volume. L'expression (19.1) se réécrit

$$n(z) = n_0 \exp\left[-\frac{mgz}{k_B T}\right]. \quad (19.2)$$

Dans le langage statistique, la densité moléculaire $n(z)$ (nombre de molécules par unité de volume) est proportionnelle à la probabilité de trouver une molécule à l'altitude z . L'expression (19.2) montre que cette probabilité est proportionnelle à la quantité $\exp\left[-\frac{mgz}{k_B T}\right]$, appelée facteur de Boltzmann.

- ▶ Au numérateur, mgz représente l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule.
- ▶ Au dénominateur, $k_B T$ est proportionnelle à l'énergie d'agitation thermique d'une molécule.

On peut analyser le comportement du facteur de Boltzmann dans deux cas extrêmes.

- ▶ Si le champ de pesanteur est très intense, le terme mgz croît très vite avec z et $\exp\left[-\frac{mgz}{k_B T}\right]$ décroît très vite avec z pour une température donnée. Par conséquent, la densité moléculaire sera faible pour z grand : la forte gravité retient les molécules vers les faibles altitudes.
- ▶ En considérant une grande valeur de la température T , on réduit fortement la vitesse de décroissance de l'exponentielle avec z . Donc, même si le champ de gravité est intense, une température suffisamment grande permettra que l'exponentielle décroisse peu avec l'altitude. La densité moléculaire pourra donc être forte, même pour z grand. À l'extrême, $T \rightarrow +\infty$ donne $n(z) \simeq n_0$ pour tout z . La répartition des molécules est uniforme. L'agitation thermique est si forte qu'elle permet d'envoyer des molécules à grande altitude : le champ de gravité n'a plus aucune influence.

Le quotient de ces deux facteurs dans l'exponentielle du facteur de Boltzmann reflète donc la *compétition* entre les deux types d'énergie. Le facteur de Boltzmann est une notion qui se généralise à toute forme d'énergie et pour tout système à l'équilibre (et donc homogène en température).

Définition 19.8. Facteur de Boltzmann

Soit un système à la température uniforme T . Lorsque le système est en équilibre, la probabilité pour une particule du système d'avoir l'énergie E_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann

$$\exp\left[-\frac{E_i}{k_B T}\right],$$

où $k_B = \frac{R}{N_A} \simeq 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

Le facteur de Boltzmann traduit la compétition entre l'énergie E_i et l'énergie d'agitation thermique $k_B T$ d'une particule.

III.2. Utilisation du facteur de Boltzmann

Pour simplifier, on considère un système dans lequel les particules ne peuvent prendre que deux valeurs d'énergie, notées E_1 et E_2 . On parle de « système à deux niveaux ». Par définition du facteur de Boltzmann, les nombres respectifs N_1 et N_2 de particules possédant l'énergie E_1 ou E_2 s'écrivent

$$N_1 = N_0 \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad N_2 = N_0 \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right), \quad (19.3)$$

où N_0 est un facteur de proportionnalité, inconnu à ce stade. Pour déterminer N_0 , il suffit d'exprimer le nombre total (supposé connu) N_{tot} de particules dans le système.

$$\begin{aligned} N_{\text{tot}} = N_1 + N_2 &= N_0 \left[\exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right) \right] \\ \Rightarrow N_0 &= \frac{N_{\text{tot}}}{\exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right)} \end{aligned} \quad (19.4)$$

Le facteur N_0 étant déterminé par (19.4), les relations (19.3) donnent les nombres N_1 et N_2 de particules possédant les énergies E_1 et E_2 .

Parfois, la connaissance de N_0 n'est pas nécessaire. Par exemple, N_0 disparaît si on calcule le rapport

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right)} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right). \quad (19.5)$$

La relation (19.5) montre que si $E_2 > E_1$, alors $N_2 < N_1$.

Dans un système à l'équilibre obéissant à la loi statistique de Boltzmann, les niveaux de basse énergie sont les plus peuplés.

C'est ce qui se passe dans le modèle de l'atmosphère isotherme : la densité de particules est d'autant plus grande que l'altitude est faible, car c'est la zone où l'énergie potentielle mgz d'une molécule est la plus faible.

La relation (19.5) montre que si la température T tend vers l'infini, le rapport N_2/N_1 augmente et tend vers 1.

Dans un système à l'équilibre obéissant à la loi statistique de Boltzmann, le pourcentage relatif des états de haute énergie augmente quand la température augmente.

IV. Actions de pression

IV.1. Résultante d'actions de pression

Lorsqu'il est en contact avec un système, un fluide exerce des actions de pression caractérisées par une résultante et un moment. Seul le calcul de la résultante est au programme de première année des CPGE.

Pour la calculer, il faut partir de l'expression déjà connue de la force « élémentaire » (mésoscopique, en fait) de pression exercée par le fluide sur un élément de surface mésoscopique (voir définition 19.2, page 536). Il faut ensuite sommer toutes ces contributions élémentaires sur toute l'interface fluide-système.

Définition 19.9. Résultante d'actions de pression

Soit un élément mésoscopique de l'interface fluide-système, d'aire dS_M , centré en un point M . La force élémentaire exercée par le fluide sur cet élément s'écrit

$$\overrightarrow{dF}(M) = p(M) \overrightarrow{dS}_M,$$

où $\overrightarrow{dS}_M = dS_M \vec{n}$ est le vecteur orthogonal à l'interface, orienté du fluide vers le système, centré en M , ayant pour norme dS_M .

La résultante \vec{F} est la somme des forces de pression élémentaires s'exerçant sur tous les éléments de l'interface \mathcal{S} système-fluide,

$$\vec{F} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{dF}(M).$$

Un calcul complet d'action de pression peut être très long. Il faut le simplifier au maximum en utilisant les symétries du problème dès que possible.

Méthode

Calcul pratique d'actions de pression

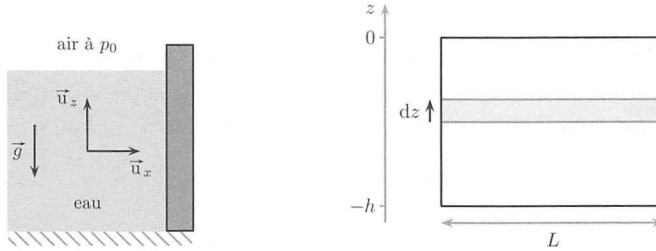
1. Trouver l'expression de la pression $p(M)$ en tout point M de la surface \mathcal{S} .
2. Représenter sur un schéma quelques forces élémentaires \overrightarrow{dF} pour voir si certaines composantes de la résultante s'annulent par symétrie (grâce à la parité de p par exemple).
3. Choisir un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème (cartésiennes, cylindriques ou sphériques). En déduire l'expression de l'aire dS , puis du vecteur \overrightarrow{dS}_M .
4. Exprimer $\overrightarrow{dF} = -p(M) \overrightarrow{dS}_M$, puis l'intégrale *en veillant au sens des bornes*.
5. Calculer la ou les composantes non nulles de la résultante et du moment. Pour cela, projeter l'intégrale sur le ou les axes choisis *avant* le calcul.

L'exercice corrigé 19.10 ainsi que l'exercice 4 (voir page 556) montrent des exemples d'application de cette méthode.

EXERCICE CORRIGÉ 19.10.**Force subie par un barrage**

On étudie un barrage qui retient l'eau d'un lac. On note p_0 la pression de l'air ambiant et ρ la masse volumique de l'eau. La surface du barrage en contact avec l'eau est un mur plan, rectangulaire vertical, de hauteur h et de largeur L .

- Après avoir établi l'expression de la pression en fonction de l'altitude dans l'eau, exprimer la force \vec{F}_1 exercée par l'eau sur le barrage.
- S'il n'y avait pas d'eau, quelle serait la force \vec{F}_2 exercée par l'air sur la partie du barrage qui est en contact avec l'eau ?
- La résultante $\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ représente l'effet net de l'eau sur le barrage. Calculer numériquement cette force pour $h = 50,0$ m et $L = 100$ m.

Corrigé

1. L'énoncé n'impose aucun repère spatial. On introduit un axe z vertical ascendant pour repérer les altitudes. En prenant l'origine des z à la surface, on établit (voir le cours) l'expression de la pression $p(z) = p_0 - \rho g z$. La pression étant non uniforme, il faut découper par la pensée la surface du barrage en éléments de surface mésoscopiques à l'échelle desquels la pression pourra être considérée comme uniforme : cela permet d'appliquer la définition de la pression $d\vec{F} = p d\vec{S}$. Nous choisissons des éléments de surface en forme de bandelettes rectangulaires horizontales, de largeur dz et de longueur L : leur aire est $L \times dz$. On introduit un vecteur unitaire \vec{u}_x orthogonal à l'interface barrage-eau et dirigé de l'eau vers le barrage. Par définition de la pression, la force élémentaire subie par la bandelette de la part de l'eau s'écrit

$$d\vec{F} = p(z) dS \vec{u}_x = [p_0 - \rho g z] L dz \vec{u}_x.$$

On somme toutes ces forces élémentaires sur la surface du barrage.

Attention **Sens d'intégration**

Il faut calculer l'intégrale selon les z croissants (les dz , algébriques, sont alors positifs), car $L \times dz$ représente une aire et doit être positif.

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \int_{z=-h}^0 [p_0 - \rho g z] L dz \vec{u}_x = \left[p_0 z - \frac{1}{2} \rho g z^2 \right]_{z=-h}^0 L \vec{u}_x \\ &\Rightarrow \vec{F}_1 = \left[p_0 L h + \frac{1}{2} \rho g L h^2 \right] \vec{u}_x \end{aligned}$$

2. S'il n'y avait pas d'eau, la face du barrage qui est immergée serait en contact avec de l'air à la pression ambiante p_0 . La force \vec{F}_2 est donc

$$\vec{F}_2 = \int_{z=-h}^0 p_0 L dz \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_2 = p_0 L h \vec{u}_x.$$

3. L'effet net de l'eau est donc de pousser le barrage avec la force

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \frac{1}{2} \rho g L h^2 \vec{u}_x.$$

Cela signifie que seul le terme de *surpression* $-\rho g z$ exercée par l'eau a de l'importance. Numériquement,

$$F = \frac{1}{2} \times 10^3 \times 10 \times 100 \times 50^2 \Rightarrow F = 1,2 \cdot 10^9 \text{ N}.$$

Cette force est énorme. Elle représente le poids d'une masse de 120 000 tonnes !

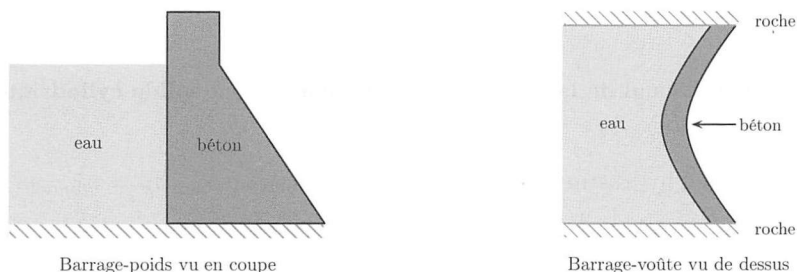


FIG. 19.7. Exemples de barrages.

Pour résister à de telles forces, les barrages doivent être adaptés. Il existe deux grands types de barrages (voir figure 19.7).

- Les barrages-poids ont une forme de prisme droit et tiennent en place par leur propre poids qui les plaque sur le sol et les empêche de bouger sous la pression de l'eau. Leur construction nécessite beaucoup de matériaux.
- Comme leur nom l'indique, les barrages-voûtes ont une forme de voûte. De la même façon que les voûtes des églises canalisent les efforts vers les piliers, la voûte du barrage canalise les efforts vers les extrémités du barrage fixées à de la roche. Ces barrages sont bien adaptés pour des gorges étroites. Ils nécessitent des points d'appui latéraux en roche très solide. Ils demandent beaucoup moins de matériaux de construction que les barrages-poids.

IV.2. Poussée d'Archimède

Par expérience, nous avons l'impression de peser moins lourd lorsque nous sommes dans l'eau que lorsque nous sommes dans l'air. Pour comprendre cela, examinons la résultante des actions *verticales* exercées par l'eau sur un cylindre qui y est immergé (voir figure 19.8). La pression de l'eau est p_A sur la face inférieure et p_B sur la face supérieure. La pression p_A étant plus grande que p_B d'après la relation de l'hydrostatique, nous pouvons d'emblée prévoir que la résultante des actions de pression sera dirigée vers le haut. En notant S la section du cylindre, la résultante des forces de pression verticales s'écrit

$$\vec{F}_{\text{pression}} = p_A S \vec{u}_z - p_B S \vec{u}_z = (p_A - p_B) S \vec{u}_z. \quad (19.6)$$

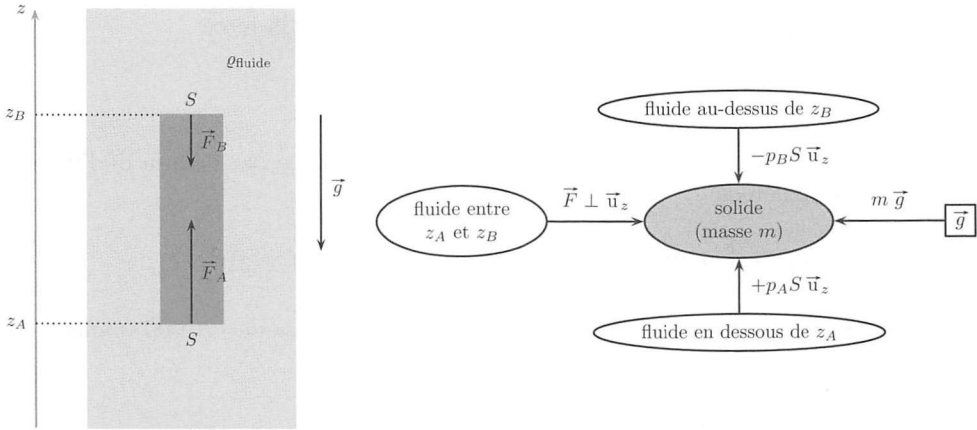


FIG. 19.8. Calcul de la poussée d'Archimède sur un solide cylindrique.

Or, la relation de l'hydrostatique lie les deux pressions par $p_A - p_B = \rho_{\text{fluide}}g(z_B - z_A)$, donc

$$\vec{F}_{\text{pression}} = \rho_{\text{fluide}}(z_B - z_A)Sg \vec{u}_z.$$

La quantité $(z_B - z_A)S$ est le volume du solide immergé, donc $\rho_{\text{fluide}}(z_B - z_A)Sg \vec{u}_z$ n'est autre que l'opposé du poids de la portion de fluide qui occupait la place du solide avant son arrivée. On appelle cette dernière le « *volume de fluide déplacé* ». Ce résultat, montré ici dans le cas d'un solide de forme simple plongé dans un fluide de masse volumique uniforme, est valable quelle que soit la forme du solide immergé et même si le fluide a une masse volumique non uniforme. Cette généralisation est admise, conformément au programme.

Théorème 19.11. Poussée d'Archimède

La résultante des actions de pression exercées par un fluide sur un solide qui y est immergé s'appelle la poussée d'Archimède. Elle est égale à l'opposé du poids de la portion de fluide déplacée par ce solide.

La somme du poids d'un corps et de la poussée d'Archimède qu'il subit s'appelle le poids apparent de ce corps :

$$\text{poids apparent d'un solide de masse } m = m\vec{g} - m_{\text{fluide déplacé}}\vec{g}.$$

Un corps de masse m peut flotter dans un liquide si son poids apparent est dirigé vers le haut, c'est-à-dire si $m < m_{\text{fluide déplacé}}$. Un corps homogène constitué d'un matériau moins dense que l'eau (en liège, par exemple) flotte sur l'eau.

Grâce à leur coque creuse, les bateaux flottent sur l'eau sous l'action de la poussée d'Archimède même s'ils sont fabriqués dans des matériaux très denses comme l'acier. Cela se comprend sur une vue en coupe d'un bateau (voir figure 19.9). Le volume d'eau déplacé est hachuré. Plus le bateau s'enfonce dans l'eau, plus ce volume augmente. Le bateau arrête de s'enfoncer lorsque la masse d'eau déplacée est égale à la masse du bateau.

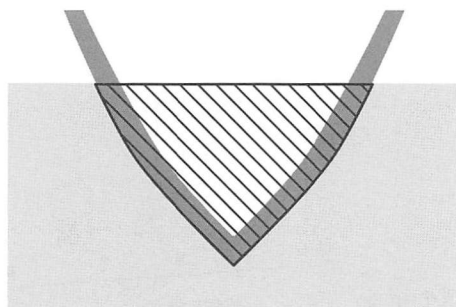


FIG. 19.9. Fluide déplacé par une coque de bateau (vue en coupe).

Notons que les bateaux sont stables vis-à-vis des perturbations verticales.

- ▶ Si le bateau s'enfonce, la masse d'eau déplacée augmente et la poussée d'Archimède aussi : le bateau est donc expulsé de l'eau.
- ▶ Si le bateau sort de l'eau (suite à un « saut » sur une vague), la masse d'eau déplacée diminue et la poussée d'Archimède aussi : le bateau se renfonce dans l'eau.

Le bateau est donc toujours rappelé vers son enfoncement d'équilibre dans l'eau.

Cas où la pression ambiante est supposée uniforme

La relation (19.6) montre que la poussée d'Archimède subie par un solide est due au fait que la pression du fluide ambiant dépend de l'altitude. Dans certains cas, comme par exemple pour l'air dans une pièce, on considère que la pression est uniforme ($p_A = p_B = p_0$ dans l'expression (19.6)). Pour être cohérent avec cette expression, on doit alors considérer que la poussée d'Archimède exercée par l'air de la pièce sur les solides qu'il entoure est rigoureusement nulle.

Attention

Pression uniforme et poussée d'Archimède

Si la pression dans un fluide est considérée comme uniforme, la poussée d'Archimède exercée par ce fluide sur les solides qui y sont immergés doit être considérée comme rigoureusement nulle.

Il faut donc veiller à la cohérence des raisonnements. Par exemple, un ballon gonflé à l'hélium ou une montgolfière s'élèvent spontanément dans l'air ambiant sous l'effet de la poussée d'Archimède (poids apparent dirigé vers le haut). Il serait donc illégitime de considérer la pression de l'air ambiant comme uniforme dans ce cas.

V. Équation locale de la statique des fluides

V.1. Équivalent volumique des actions de pression

En partant de la définition 19.2 de la force de pression (voir page 536), nous allons obtenir l'expression de la résultante des actions de pression subies par une particule mésoscopique de fluide au sein du fluide (voir figure 19.10).

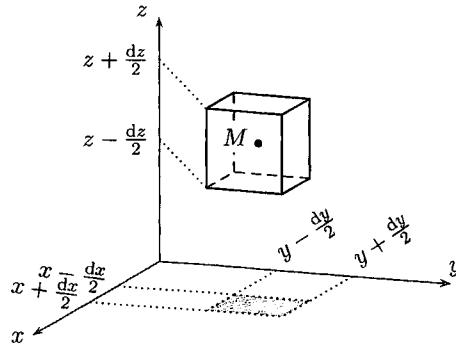


FIG. 19.10. Particule mésoscopique de volume $d\tau = dx \times dy \times dz$, découpée par la pensée autour du point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

En coordonnées cartésiennes, son volume s'écrit $d\tau = dx \times dy \times dz$ et les coordonnées de son centre M sont (x, y, z) . Ce volume élémentaire est soumis, de la part du fluide qui l'environne, à des actions de pression sur ses six faces. Par définition, chaque action de pression exercée par le fluide ambiant fait intervenir la pression au centre de chaque face et est orientée vers l'intérieur du cube. Ces orientations sont prises en compte dans les signes. Les actions de pression sur les six faces sont résumées dans le tableau ci-après.

Face du cube	$dS \vec{n}$	$p(M) dS \vec{n}$
Face avant	$dy \times dz (-\vec{u}_x)$	$-p \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) \times dy \times dz \vec{u}_x$
Face arrière (cachée)	$dy \times dz (+\vec{u}_x)$	$+p \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) \times dy \times dz \vec{u}_x$
Face gauche (cachée)	$dx \times dz (+\vec{u}_y)$	$+p \left(x, y - \frac{dy}{2}, z \right) \times dx \times dz \vec{u}_y$
Face droite	$dx \times dz (-\vec{u}_y)$	$-p \left(x, y + \frac{dy}{2}, z \right) \times dx \times dz \vec{u}_y$
Face inférieure (cachée)	$dx \times dy (+\vec{u}_z)$	$+p \left(x, y, z - \frac{dz}{2} \right) \times dx \times dy \vec{u}_z$
Face supérieure	$dx \times dy (-\vec{u}_z)$	$-p \left(x, y, z + \frac{dz}{2} \right) \times dx \times dy \vec{u}_z$

En regroupant les termes portés par le même vecteur unitaire, la somme de ces six actions s'écrit

$$\begin{aligned}
 \vec{dF}_{\text{press}} = & \left[-p \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) + p \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) \right] \times dy \times dz \vec{u}_x \\
 & + \left[-p \left(x, y + \frac{dy}{2}, z \right) + p \left(x, y - \frac{dy}{2}, z \right) \right] \times dx \times dz \vec{u}_y \\
 & + \left[-p \left(x, y, z + \frac{dz}{2} \right) + p \left(x, y, z - \frac{dz}{2} \right) \right] \times dx \times dy \vec{u}_z.
 \end{aligned} \quad (19.7)$$

Cette expression peut être simplifiée en appliquant la formule de Taylor à chacune des six pressions.

Rappel**Formule de Taylor à l'ordre 1**

Soit une fonction réelle de trois variables réelles. Au voisinage d'un point (x, y, z) où f est dérivable, f admet un développement limité à l'ordre 1,

$$f(x+h, y+k, z+\ell) = f(x, y, z) + h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \ell \frac{\partial f}{\partial z} + o(h, k, \ell).$$

- ▶ Les trois dérivées partielles sont calculées en (x, y, z) .
- ▶ Le terme $o(h, k, \ell)$ s'appelle le reste et tend vers zéro lorsque h , k et ℓ tendent tous les trois vers zéro.

Par exemple, le développement limité à l'ordre 1 des deux termes du dernier crochet de l'équation (19.7) s'écrit, en omettant le reste,

$$p\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial z} \times \frac{dz}{2} \quad \text{et} \quad p\left(x, y, z - \frac{dz}{2}\right) = p(x, y, z) - \frac{\partial p}{\partial z} \times \frac{dz}{2}.$$

Ainsi, le dernier crochet de (19.7) devient simplement $-\frac{\partial p}{\partial z} dz$. En faisant de même pour les deux autres crochets (calcul identique à une permutation circulaire près sur x , y et z), l'expression (19.7) devient

$$\vec{dF}_{\text{press}} = - \underbrace{\left[\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z \right]}_{\stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \vec{\text{grad}} p} \underbrace{dx dy dz}_{d\tau}.$$

La grandeur entre crochets est l'écriture en coordonnées cartésiennes d'un opérateur différentiel appelé gradient.

Théorème 19.12. Actions de pression subies par une particule de fluide

La résultante des actions de pression exercées par le reste du fluide sur un élément de volume $d\tau$ s'écrit

$$\vec{dF}_{\text{press}} = - \vec{\text{grad}} p \times d\tau.$$

Les actions de pression sont des actions de contact exercées par le fluide sur les six faces de $d\tau$. Or, le théorème 19.12 montre que, à l'échelle d'une particule mésoscopique, la résultante \vec{dF}_{press} de ces six actions est proportionnelle au volume $d\tau$: on l'appelle « équivalent volumique des actions de pression ».

La grandeur $\frac{\vec{dF}_{\text{press}}}{d\tau} = - \vec{\text{grad}} p$ a pour unité SI le $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$: c'est une densité volumique de force.

V.2. Relation fondamentale de la statique des fluides

Un fluide est dit en équilibre dans un référentiel si, dans ce référentiel, la vitesse du centre de masse de toute particule mésoscopique est nulle. Cela implique que la résultante des actions mécaniques subies par chaque particule de fluide est nulle. Raisonnons sur une particule mésoscopique de volume $d\tau$ et de masse dm , en équilibre

dans le champ de pesanteur terrestre \vec{g} . Notons la masse volumique $\rho = \frac{dm}{d\tau}$. L'étude est faite dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. La particule de fluide est soumise à :

- ▶ son poids $dm\vec{g} = \rho d\tau\vec{g}$, où ρ est la masse volumique locale ;
- ▶ la résultante des actions de pression exercées par le fluide environnant $d\vec{F}_{\text{press}} = -\vec{g}\text{rad} p \times d\tau$.

L'équilibre de la particule mésoscopique implique que la somme de ces actions mécaniques est nulle,

$$d\vec{F}_{\text{press}} + dm\vec{g} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -\vec{g}\text{rad} p \times d\tau + \rho d\tau\vec{g} = \vec{0}.$$

Nous remarquons alors que $d\tau = dx dy dz$ peut être simplifié.

Théorème 19.13. Relation locale de la statique des fluides

En tout point d'un fluide de masse volumique ρ en équilibre dans le référentiel terrestre, supposé galiléen,

$$\forall M, \quad -\vec{g}\text{rad} p(M) + \rho(M)\vec{g}(M) = \vec{0}.$$

Remarques

- ▶ Il s'agit d'une équation *locale*, c'est-à-dire valable au voisinage d'un point donné du fluide. Cela signifie que la relation est valable même si p , ρ et \vec{g} ne sont pas uniformes.
- ▶ Cette équation est une équation aux dérivées partielles. Elle ne donne pas directement le champ de pression p , mais seulement ses dérivées partielles par rapport à l'espace. Il faudra donc *intégrer* cette relation pour obtenir p . Attention en intégrant cette relation : ρ n'a aucune raison d'être uniforme, en particulier si le fluide considéré est un gaz et que les distances que l'on considère sont grandes. De même, \vec{g} peut ne pas être uniforme.

VI. Exercices

1. Baromètre de Torricelli ★

(solution page 769)

L'Italien Evangelista Torricelli (1608-1647) a beaucoup influencé les travaux de Pascal. Il est l'inventeur du baromètre à colonne dont le principe est schématisé sur la figure 19.11. On remplit à ras bord un tube de verre d'un mètre de hauteur avec du mercure. On bouche le tube avec le doigt et on le retourne dans un récipient plein de mercure. En maintenant le tube vertical, on enlève le doigt. Le niveau de mercure dans le tube descend et se stabilise. On note h la différence de niveau entre les deux surfaces libres du mercure. Dans le haut du tube se trouve uniquement du mercure sous forme de vapeur en équilibre avec le mercure liquide. Sa pression est, par définition, la pression de vapeur saturante du mercure, notée p_{sat} , qui est négligeable devant la pression ambiante. On donne la masse volumique du mercure $\rho \simeq 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

1. Établir la relation entre la pression ambiante, notée p_0 , et la dénivellation h .
2. Si on recommence l'expérience plusieurs jours au niveau de la mer, on mesure en moyenne $h \simeq 760 \text{ mm}$. Donner la valeur de p_0 .
3. Pourquoi Torricelli a-t-il utilisé du mercure plutôt que de l'eau pour réaliser son baromètre ?

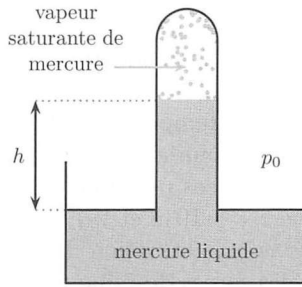


FIG. 19.11. Principe du baromètre de Torricelli.

4. Que signifient les variations temporelles de la pression ambiante en un point donné ?

2. Variation de la hauteur d'eau dans un verre ★ (solution page 770)

1. Un glaçon solide, à 0°C , flotte dans un verre d'eau à la même température. On néglige la masse volumique de l'air devant celle de l'eau. La fonte du glaçon s'accompagne-t-elle d'une variation du niveau h de l'eau dans le verre ? Donner une explication qualitative, puis mettre en équation.

2. Un morceau de bois flotte dans un verre d'eau. Sur le morceau de bois est posée une pièce métallique. La pièce métallique glisse au fond du verre. Ce mouvement s'accompagne-t-il d'une variation du niveau h' de l'eau dans le verre ? Donner une explication qualitative, puis mettre en équation.

3. Plongée libre ★ (solution page 771)

L'eau où le plongeur évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, en équilibre dans le champ de pesanteur \vec{g} uniforme, avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La surface libre de l'eau (altitude $z = 0$, voir figure 19.12) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante $p_{\text{atm}} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1. Déterminer, littéralement et numériquement, la pression $p(z)$ de l'eau en un point d'altitude z . Tracer le graphe de $p(z)$.

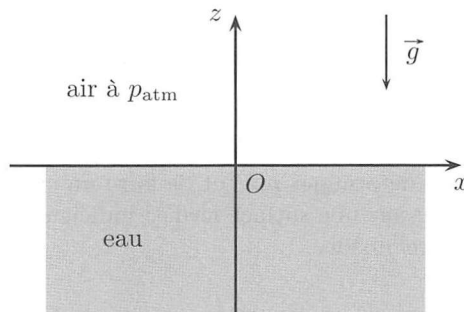


FIG. 19.12. Orientation de l'axe z .

2. On assimile l'air contenu dans les poumons du plongeur à un gaz parfait ; cet air est caractérisé par une pression $p(z)$ identique à celle de l'eau à l'altitude z , un volume $V(z)$ (capacité pulmonaire) variable (la cage thoracique se déforme sous l'effet de la pression), et enfin une température T_i , constante et indépendante de la profondeur. Calculer la capacité pulmonaire du plongeur à une cote z , sachant que celui-ci, avant de plonger, gonfle ses poumons à leur capacité maximale V_M puis bloque sa respiration. On donne $z = -10$ m et $V_M = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. On définit le poids apparent du plongeur (et on y associe la notion de flottabilité) comme la résultante de la poussée d'Archimède et des forces de pesanteur. Comment varie la flottabilité lorsque la profondeur augmente ? Diminue-t-elle ou augmente-t-elle ?

3. Afin de faciliter leur descente lors des premiers mètres, les plongeurs utilisent souvent un lest, plaque de plomb de volume négligeable, accrochée à une ceinture et facilement largable. Ce lest ne doit pas être trop lourd car un surlestage peut inciter à descendre à une profondeur excessive. On appelle m la masse du plongeur, $V^*(z)$ le volume de son corps et V_0 le volume de son corps hors celui de la cage thoracique, de sorte que $V^*(z) = V_0 + V(z)$. Quelle masse m_1 de lest choisir si l'on adopte comme règle de sécurité le fait que le plongeur doit avoir une flottabilité nulle à la profondeur de 5,0 mètres ?

Application numérique : $V_0 = 0,077 \text{ m}^3$ et $m = 80$ kg.

4. Actions de pression sur une demi-sphère ★★ (solution page 771)

1. Établir l'expression de la résultante \vec{F} des actions de la pression ambiante p_0 sur une surface en forme de demi-sphère de rayon R . Comment interpréter le résultat ?

2. Faire l'application numérique pour une demi-sphère de rayon $R = 20$ cm et commenter le résultat.

3. Que vaut la résultante des actions de la pression ambiante sur une sphère de rayon R ?

5. Masse de l'atmosphère terrestre ★★ (solution page 773)

1. Quel lien peut-on faire entre la force de pression exercée par l'air sur une portion d'aire S du sol et le poids de l'atmosphère ?

2. Connaissant la valeur de la pression au sol et le rayon de la Terre, $R \simeq 6\,400$ km, estimer la masse de l'atmosphère terrestre.

6. Actions de pression sur le fond d'un récipient ★★ (solution page 774)

On considère un récipient dont le fond présente une partie hémisphérique (cul de bouteille) de rayon R (voir figure 19.13).

Ce récipient est rempli d'eau jusqu'à la hauteur $h > R$.

Calculer la résultante des actions de pression exercées par l'eau sur la demi-sphère.

Indication : plutôt que de déterminer $p(z)$ et de faire un calcul direct des actions de pression, on peut travailler sur une surface fermée judicieusement choisie de manière à utiliser le théorème d'Archimède.

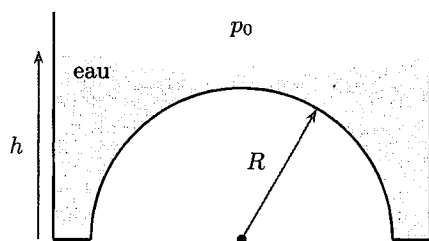


FIG. 19.13. Fond de récipient hémisphérique.

7. Modèle simple de la matière aimantée ★★

(solution page 775)

Le système étudié est un modèle très simplifié d'un échantillon de matériau magnétique à la température uniforme T . Chaque atome de l'échantillon est assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique \vec{m} . L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme \vec{B} créé par l'extérieur. On néglige devant \vec{B} le champ magnétique créé par les dipôles eux-mêmes. On rappelle que chaque dipôle possède une énergie potentielle $E = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ d'interaction avec le champ \vec{B} (résultat admis). On suppose pour simplifier que ces dipôles ne peuvent prendre que deux types de position :

- ▶ état 1 : \vec{m} parallèle et de même sens que $\vec{B} \Rightarrow$ énergie $E_1 = -mB$;
- ▶ état 2 : \vec{m} parallèle et de sens opposé à $\vec{B} \Rightarrow$ énergie $E_2 = +mB$.

Un tel modèle s'appelle un modèle à deux niveaux d'énergie. On note n_{tot} le nombre total de moments magnétiques dans l'échantillon.

1. En admettant que la matière aimantée obéisse à la loi de Boltzmann, déterminer les nombres respectifs n_1 et n_2 de dipôles dans les états d'énergie E_1 et E_2 .
2. Représenter graphiquement n_1 et n_2 en fonction de la variable $x = \frac{mB}{k_B T}$. Commenter l'influence de la température sur n_1 et n_2 et interpréter physiquement le résultat.
3. On note \vec{u} le vecteur unitaire pointant dans le sens du champ magnétique extérieur. Le moment magnétique total \vec{M} de l'échantillon est la somme vectorielle des moments individuels des dipôles. Donner l'expression de \vec{M} , puis tracer l'évolution de $\vec{M} \cdot \vec{u}$ en fonction de x . Interpréter le tracé.

b/ En différenciant la relation de conjugaison précédente,

$$-\frac{df'_1}{f_1'^2} = +\frac{d\overline{O_1A}}{\overline{O_1A}^2} - \frac{d\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A'}^2}.$$

L'incertitude absolue sur la distance focale est alors (voir annexe A page 631)

$$\Delta f'_1 = f_1'^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta \overline{O_1A}}{\overline{O_1A}^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \overline{O_1A'}}{\overline{O_1A'}^2}\right)^2} = 20,0^2 \times \sqrt{\left(\frac{0,4}{35^2}\right)^2 + \left(\frac{0,8}{46,5^2}\right)^2} \text{ cm} = 0,2 \text{ cm}.$$

3. a/ Il faut vérifier à la fois la condition imposée par l'énoncé, $D = \overline{O_1A'} - \overline{O_1A}$, et la relation de conjugaison $-1/\overline{O_1A} + 1/\overline{O_1A'} = 1/f'_1$. Posons $p = \overline{O_1A}$, alors $\overline{O_1A'} = p + D$. Injecté dans la relation de conjugaison, cela conduit à l'équation du second degré $p^2 + Dp + Df'_1 = 0$. Le discriminant $D^2 - 4Df'_1$ n'est positif ou nul que si $D \geq 4f'_1 = D_{\min}$ et il n'existe deux solutions distinctes que si $D > D_{\min}$.

b/ Il existe alors deux racines négatives

$$p_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4Df'_1}}{2} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4Df'_1}}{2}, \quad |p_1| < |p_2|.$$

La différence $d = p_1 - p_2$, distance entre les deux positions de la lentille, permet d'accéder à f'_1 ,

$$d = p_1 - p_2 = \sqrt{D^2 - 4Df'_1} \quad \text{soit} \quad f'_1 = \frac{D^2 - d^2}{4D} = \frac{D}{4} - \frac{d^2}{4D}.$$

c/ En différenciant l'expression de f'_1 on obtient (voir annexe A page 631)

$$\Delta f'_1 = \sqrt{\left(\frac{D^2 + d^2}{4D^2} \Delta D\right)^2 + \left(\frac{d}{2D} \Delta d\right)^2}.$$

d/ Numériquement, $f'_1 = 20,0 \text{ cm}$ et $\Delta f'_1 = 0,3 \text{ cm}$.

4. a/ D'après la formule (3.5) du cours (voir page 63, on la retrouve immédiatement sur un schéma), $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB} = -\overline{O_1A'}/\overline{O_1A}$; si $\gamma = -1$, $\overline{O_1A} = -\overline{O_1A'}$, soit $D_0 = 2\overline{O_1A'}$. Injecté dans la relation de conjugaison, on trouve $D_0 = 4f'_1$, ce cas correspond en fait à la racine double de la méthode de Bessel (question 3.a).

b/ $f'_1 = 20,1 \text{ cm}$ et $\Delta f'_1 = \Delta D_0/4 = 0,1 \text{ cm}$.

c/ Comme nous l'avons remarqué, cette méthode correspond à la racine double (discriminant nul), $d = 0$ conduit à $f'_1 = d/4$.

5. La méthode la plus rapide est l'autocollimation (pas de calcul, la lecture est directe). La méthode la plus précise est la méthode de Silbermann.

15 Focométrie d'une lentille divergente

1. a/ D'après la formule de conjugaison, la vergence peut être obtenue par $V = -1/\overline{OA} + 1/\overline{OA'}$, soit numériquement $V = 4 \text{ m}^{-1}$.

b/ $V_2 = V - V_0 = -4 \text{ m}^{-1}$, $f'_2 = -25,0 \text{ cm}$.

c/ D'après la formule proposée, $V_2 = (V - V_0)/(1 - eV_0)$, soit $V_2 = -4,17 \text{ m}^{-1}$ et $f'_2 = -24,0 \text{ cm}$.

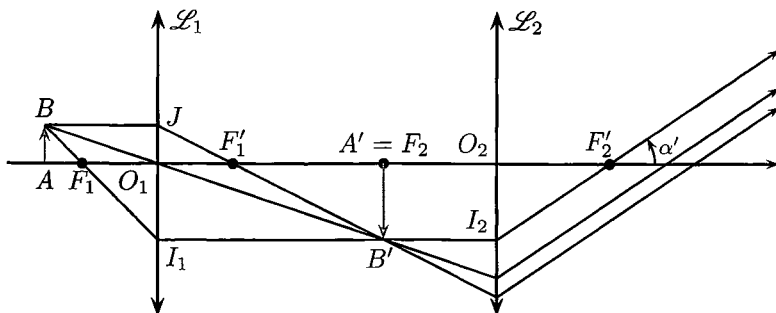


FIG. E.3.11. Marche d'un faisceau lumineux issu de B à travers les deux lentilles convergentes constituant un microscope.

3. Dans le triangle $F_2'O_2I_2$, $\tan \alpha' = \overline{O_2I_2}/\overline{F_2'O_2} = -\overline{A'B'}/f_2'$; or,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1J}} = \frac{\overline{F_1'A'}}{\overline{F_1'O_1}} = -\frac{\Delta}{f_1'}$$

donc $\alpha' \simeq \tan \alpha' = \overline{AB}\Delta/(f_1'f_2')$. D'autre part,

$$\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{F_2'A}} = \frac{\overline{AB}}{-2f_2' - \Delta - 2f_1' + \overline{F_1A}} = -\frac{\overline{AB}}{2f_2' + \Delta + 2f_1' + f_1'^2/\Delta},$$

soit

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\overline{AB}\Delta}{f_1'f_2'} \times \frac{2f_2' + \Delta + 2f_1' + f_1'^2/\Delta}{\overline{AB}} = -\frac{\Delta^2 + 2\Delta(f_1' + f_2') + f_1'^2}{f_1'f_2'} = 6 \cdot 10^2.$$

Le signe négatif signifie que l'image est renversée par rapport à l'objet.

4. L'observateur pourra encore accommoder sur l'image $A''B''$ de l'objet à travers le microscope si celle-ci est distante de $\ell = 25$ cm de son œil, soit $\overline{F_2'A''} = -\ell$. En utilisant la formule de Newton pour la lentille \mathcal{L}_2 , $\overline{F_2A'}\overline{F_2'A''} = -f_2'^2$, donc $\overline{F_2A'} = f_2'^2/\ell$. Ensuite, exprimons $\overline{F_1A'} = \overline{F_1F_2} + \overline{F_2A'} = \Delta + f_2'^2/\ell$ et utilisons une nouvelle fois la formule de Newton, mais pour \mathcal{L}_1 cette fois,

$$\overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1A'}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{\ell}} = -\frac{\ell f_1'^2}{\ell\Delta + f_2'^2} = -0,099 \text{ mm}.$$

La différence avec la position qui permet à l'œil de ne pas avoir à accommoder n'est que de 1 μm , cela signifie que la plage sur laquelle l'observateur voit net (la profondeur de champ) est très faible. La distance du microscope à l'objet doit être réglée avec précision.

14 Focométrie d'une lentille convergente

1. a/ Il s'agit de placer un miroir derrière \mathcal{L}_1 et de chercher à obtenir une image renversée de même taille ($\gamma = -1$) dans le plan de l'objet. Ce dernier est alors dans le plan focal objet de la lentille.

b/ D'après la question précédente, $f_1' = 20,2$ cm et $\Delta f_1' = 0,5$ cm.

2. a/ La relation de conjugaison donne directement f_1'

$$\frac{1}{f_1'} = -\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1A'}} \quad \Rightarrow \quad f_1' = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}}} = 20,0 \text{ cm}.$$

2. $\overline{O_1A} = \overline{O_1O} + \overline{OA} = D + x$ et il faut trouver D de telle sorte que l'image de A soit en O , donc que la relation

$$-\frac{1}{D+x} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{soit} \quad D^2 + xD - xf'_1 = 0,$$

où l'inconnue est D . Pour que la solution existe, il faut que le discriminant soit positif, soit $x \leq -4f'_1$ compte tenu du fait que $x < 0$. Il est ensuite possible de continuer à raisonner sur les expressions mathématiques ou de constater que $4f'_1$ correspond à un montage de Silbermann, soit $D = 2f'_1$ et $x \rightarrow -\infty$ impose $D = f'_1$ pour que le plan focal image soit confondu avec le plan du réticule. En ne conservant que la racine comprise dans cette plage,

$$D = \frac{-x - \sqrt{x(x+4f'_1)}}{2}.$$

3. a/ Le viseur étant réglé pour un œil emmétrope (ce que semble suggérer l'énoncé), un nouvel observateur n'a que le réglage de l'oculaire à modifier. Pour qu'il observe sans fatiguer, il faut que l'image à travers le viseur soit située à une distance δ de son œil, donc à une distance algébrique $a - \delta$ de la lentille \mathcal{L}_2 ; l'objet intermédiaire étant à une distance d de la lentille, la relation de conjugaison s'écrit donc

$$-\frac{1}{(-d)} + \frac{1}{(a-\delta)} = \frac{1}{f'_2}$$

ce qui conduit à une nouvelle valeur de d ,

$$d = \frac{(\delta - a)f'_2}{\delta - a + f'_2}.$$

b/ Le but de la correction, pour un œil myope, est de faire du sujet situé à l'infini une image virtuelle à la distance δ . Cette distance δ est donc la valeur absolue de la distance focale de la lentille divergente constituant le verre correcteur. Une correction de -8 dioptries correspond alors à $\delta = 12,5$ cm, soit $d = 1,7$ cm.

Le verre correcteur pour l'œil hypermétrope est une lentille convergente qui donne du sujet à l'infini une image réelle située derrière l'œil de l'observateur. En continuant à utiliser δ , celui-ci devient négatif, $\delta = -12,5$ cm pour $+8$ dioptries et $d = 2,4$ cm. La plage de réglage doit donc être $1,7 \leq d \leq 2,4$ cm.

13 Modélisation d'un microscope

1. L'œil n'a pas à accommoder s'il vise à l'infini; l'image $A''B''$ de AB à travers le microscope doit donc être à l'infini. Il faut pour cela que l'image intermédiaire $A'B'$ à travers \mathcal{L}_1 soit dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 , soit $A' = F_2$. La détermination de $\overline{F_1A}$ peut alors se faire directement à l'aide de la formule de Newton, $\overline{F_1A} \overline{F_1A'} = -f_1'^2$, soit

$$\overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -0,1 \text{ mm}.$$

2. Remarquons que la démonstration géométrique du résultat utilisé à la question précédente peut se faire en s'appuyant sur le schéma demandé dans cette question. Sur la figure E.3.11, en considérant respectivement l'homothétie de centre F_1 et celle de centre F'_1 ,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{O_1I_1}} = \frac{\overline{F_1A}}{\overline{F_1O_1}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1J}} = \frac{\overline{F'_1F_2}}{\overline{F'_1O_1}}$$

en notant que $\overline{O_1I_1} = \overline{A'B'}$, $\overline{O_1J} = \overline{AB}$, $\overline{F_1O_1} = f'_1$, $\overline{F'_1F_2} = \Delta$, $\overline{F'_1O_1} = -f'_1$ et, en combinant les deux expressions obtenues afin de faire disparaître $\overline{A'B'}/\overline{AB}$, on obtient $\overline{F_1A} = -f_1'^2/\Delta$.

b/ Le théorème de Thalès conduit à (voir figure E.3.10)

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{O_2A_2}}$$

et la relation de conjugaison s'écrit

$$-\frac{1}{\overline{O_2A_1}} + \frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{f'_2}$$

En injectant la première relation dans la seconde et en utilisant le fait que $2\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, on obtient

$$\overline{O_2A_1} = -\frac{f'_2}{2} = 1,25 \text{ cm}$$

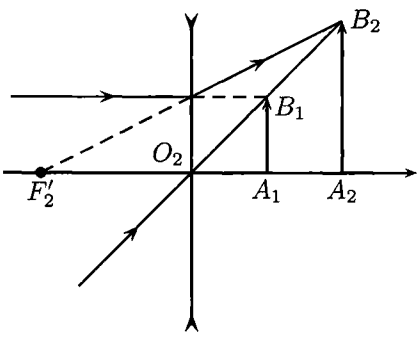


FIG. E.3.10. Construction géométrique des rayons.

3. a/ $\overline{A_2B_2} \simeq f'\theta$, donc $f'\theta = 2\overline{A_1B_1} = 2f'_1\theta$, soit $f' = 2f'_1 = 15,0 \text{ m}$.

b/

$$\overline{A_1A_2} = \overline{O_2A_2} - \overline{O_2A_1} = \left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} - 1 \right) \overline{O_2A_1} = \overline{O_2A_1} = 1,25 \text{ cm}$$

$\overline{A_1A_2} \ll \overline{O_1A_1} = f'_1$, donc l'encombrement est pratiquement le même. En revanche, grâce à \mathcal{L}_2 , l'image finale est deux fois plus grande.

4. La distance angulaire minimale décelable par le dispositif correspondra au cas où deux pixels voisins seront éclairés par la lumière provenant respectivement de E_a et de E_b , soit une taille de l'objet de $9 \mu\text{m}$. $\overline{A_2B_2} = 2f'_1\theta$, donc l'angle minimum est

$$\theta_{\min} = 9 \cdot 10^{-6} / (2 \times 7,5) = 6 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,12''$$

A contrario, la distance maximale sera obtenue lorsque les deux étoiles éclairent respectivement le premier et le 768° détecteur, soit une distance $767 \times 9 \mu\text{m} = 6,9 \text{ mm}$.

$$\theta_{\max} = 6,9 \cdot 10^{-3} / (2 \times 7,5) = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 1,6'$$

12 Principe d'un viseur

1. Cette question se ramène à la première question de l'exercice 7 (voir énoncé page 76 et corrigé page 663), où l'on avait montré que la position algébrique de l'objet devait vérifier un encadrement. Ici, la position du réticule par rapport à l'oculaire est repérée par la distance d ; il faut donc changer le x de l'exercice 7 (qui ne correspondra pas au x de ce nouvel exercice) en $-d$, ce qui conduit à

$$\frac{f'(d_m - a)}{d_m - a + f'} \leq d \leq f'$$

Pour régler l'oculaire, dévisser pour augmenter d et s'arrêter juste avant que le réticule ne devienne flou, le réticule est alors au foyer objet de \mathcal{L}_2 .

3. La tour Eiffel observée à 5 km de distance a une largeur angulaire θ telle que

$$\tan \theta = 300 / (5 \cdot 10^3) = 0,06, \text{ soit } \theta = 3,4^\circ.$$

Avec un grossissement de 10, elle apparaîtrait avec une largeur angulaire de 34° pour une observation à travers la lunette. Le champ apparent n'étant que de 5° pour la lunette de Galilée, l'observateur ne voit pas la tour Eiffel dans sa totalité. Avec un instrument « moderne » en revanche, cela est possible (50° de champ apparent). En ce qui concerne la Lune, sa largeur angulaire est très légèrement supérieure à $0,5^\circ$, soit après grossissement un peu plus de 5° , ce qui ne permettrait pas l'observation de la Lune dans sa totalité d'après les valeurs proposées.

4. Il n'est pas possible de répondre de manière quantitative à cette question, car nous ne disposons pas du diamètre des lentilles, mais, qualitativement, la figure E.3.8 montre que les rayons s'écartent très rapidement de l'axe optique en sortie de \mathcal{L}_2 . Cette même figure indique que, pour l'angle d'incidence particulier choisi, tous les rayons sortent au-dessus de O_2 (le trait en pointillé passant par O_2 n'est pas un rayon car son prolongement ne passe pas par \mathcal{L}_1). Autrement dit, lorsque α augmente, les rayons risquent de ne plus rentrer dans la pupille de l'observateur si celui-ci place son œil dans l'axe de la lunette, et ce même si l'observateur colle son œil à l'oculaire, car le diamètre de la pupille est limité (de l'ordre de 4 mm). Pour augmenter le champ apparent, il faudrait focaliser les rayons plutôt que de les faire diverger. C'est ce qui est proposé à la question suivante.

5. Une nouvelle fois, le foyer image de la lentille \mathcal{L}_1 est confondu avec le foyer objet de la lentille \mathcal{L}_2 . La distance entre les deux lentilles est maintenant $f'_1 - f_2 = 66$ cm car $f_2 = -6$ cm, F_2 est placé avant O_2 pour une lentille convergente (voir figure E.3.9).

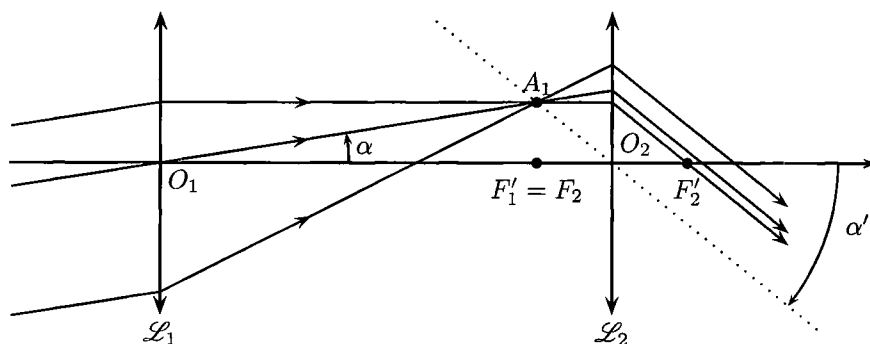


FIG. E.3.9. Position des lentilles dans une lunette de Kepler et construction des rayons.

Sur cette même figure, on constate que les faisceaux, pour différentes incidences α , vont passer au voisinage du foyer image de \mathcal{L}_2 ; en plaçant son œil à cet endroit, l'observateur pourra ainsi observer tous les rayons traversant \mathcal{L}_2 , ce qui n'était pas le cas pour la lunette de Galilée. Le champ apparent est ainsi augmenté. En revanche, on constate que le grossissement est maintenant négatif, $G = \alpha' / \alpha = f'_1 / f_2 = -10$ car $f_2 < 0$. Les objets seront donc **renversés**, ce qui n'est évidemment pas acceptable pour l'observation d'objets à la surface de la Terre, mais n'est pas préjudiciable pour une observation astronomique.

11 Observation de deux étoiles

1. À grande distance, les faisceaux lumineux provenant des étoiles semblent **parallèles**. La direction des rayons issus de E_a est $\vec{u}_a = \vec{u}_z$. Ceux issus de E_b ont pour direction $\vec{u}_b = \cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u}_x$.

2. a/ Les images A_1 et B_1 sont dans le plan focal image de \mathcal{L}_1 ; $A_1 = F'_1$. Dans le triangle $O_1 A_1 B_1$, $\overline{A_1 B_1} = f'_1 \tan \theta \simeq f'_1 \theta$ dans les conditions de Gauss.

Calculons $A_T \times (f'_F + f'_C)$ afin de faire apparaître la longueur $A_L = F'_F F'_C$

$$A_T(f'_F + f'_C) = dF'_F F'_C = dA_L$$

soit, compte tenu du fait que $f'_F + f'_C = 2f'_D$, approximation proposée par l'énoncé,

$$A_T = \frac{dA_L}{2f'_D} = \frac{d}{2\nu}$$

Comme nous l'attendions, A_T est d'autant plus faible que ν est grand. Numériquement,

$$A_T = 0,5 \text{ mm}$$

9 Objectif achromatique

1. La première lentille étant biconvexe, $\overline{S_1 C_1} = R_1 > 0$ et $\overline{S_2 C_2} = -R_2 < 0$; la seconde lentille étant plan-convexe, le second rayon de courbure est infini; de telle sorte que

$$V_1 = (n_1 - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \left(-\frac{1}{R_2} \right) \right]; \quad V_2 = (n_2 - 1) \left[\left(-\frac{1}{R_2} \right) - 0 \right] \quad \text{soit} \quad V = \frac{n_1 - 1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

2. Pour que l'objectif soit achromatique, il faut que la vergence ne dépende pas de λ , soit $\partial V / \partial \lambda = 0$. Nous pourrions nous contenter d'exprimer cette condition, mais l'énoncé demande le calcul complet

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = -\frac{2}{\lambda^3} \left(\frac{B_1}{R_1} + \frac{B_1}{R_2} - \frac{B_2}{R_2} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad B_2 = B_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

À cette condition, $V = (A_1 - 1)/R_1 + (A_1 - A_2)/R_2$. La seconde lentille étant divergente (car plan-concave), plus A_2 est grand, plus la vergence est faible.

10 Lunette de Galilée

1. Le foyer image de la lentille \mathcal{L}_1 doit être confondu avec le foyer objet de la lentille \mathcal{L}_2 . La distance entre les deux lentilles est donc $f'_1 - f_2 = 54 \text{ cm}$.

2. D'après la figure E.3.8, dans le triangle $O_1 F'_1 A_1$, $\tan \alpha = \overline{F'_1 A_1} / \overline{O_1 F'_1}$, soit, en supposant les angles petits, $\alpha = \overline{F'_1 A_1} / f'_1$. D'autre part, dans le triangle $O_2 F_2 A_1$, $\tan \alpha' = \overline{F'_1 A_1} / \overline{O_2 F_2}$, soit $\alpha' \simeq \overline{F'_1 A_1} / f_2$. Finalement, le grossissement est $G = \alpha' / \alpha = f'_1 / f_2 = 10$.

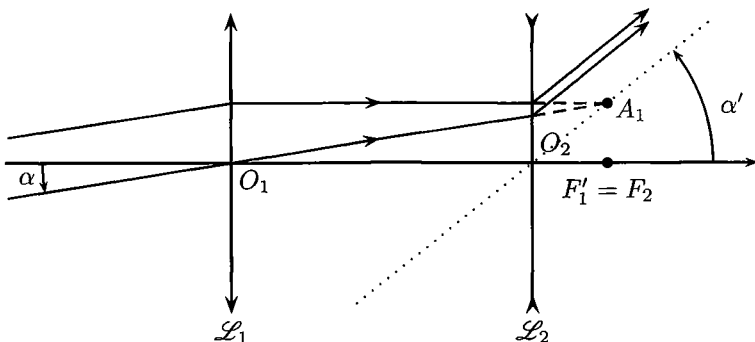


FIG. E.3.8. Position des lentilles dans une lunette de Galilée et construction des rayons. La figure n'est pas à l'échelle, le grossissement est normalement deux fois plus grand.

D'après le principe de retour inverse de la lumière, si on retourne cette dernière, le grossissement devient $\alpha / \alpha' = f_2 / f'_1 = 0,1$.

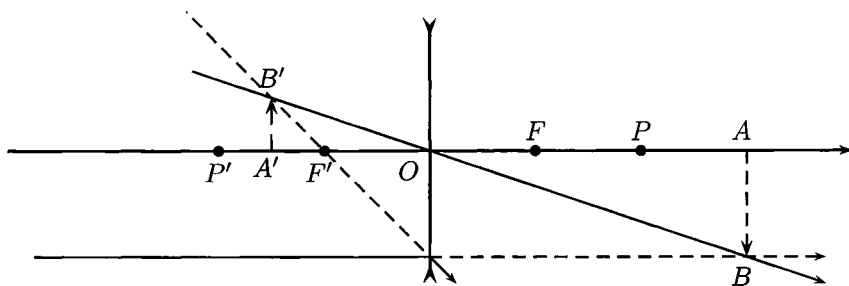


FIG. E.3.6. Construction des images virtuelles de deux objets virtuels dans le cas d'une lentille divergente. L'objet est placé après le point antiprincipal P , l'image est plus petite.

Plus ν est grand, ou plus K est faible, et plus les indices sont proches; on s'attend donc à ce que les aberrations chromatiques soient d'autant moins importantes.

2. En utilisant la formule proposée, et en tenant compte du fait que la lentille est biconvexe, on calcule $f'_D = 107$ cm. L'indice de la radiation C étant plus faible que celui de la radiation F , la vergence sera plus faible, donc la distance focale sera plus grande. Ainsi, pour la lentille convergente (\mathcal{L}), F'_F sera avant F'_C sur l'axe optique (de part et d'autre de F'_D), voir figure E.3.7.

3. D'après la question précédente, $A_L = \overline{F'_F F'_C} > 0$. L'indice étant inversement proportionnel à la distance focale, il faut éviter de calculer directement $A_L = f'_C - f'_F$, mais plutôt

$$\frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f'_C} = \frac{f'_C - f'_F}{f'_C f'_F} \simeq \frac{A_L}{f_D'^2}.$$

Or, cette quantité est la différence des vergences pour la radiation bleue et la radiation rouge, donc, en introduisant dans le calcul la vergence V_D de la radiation jaune,

$$V_F - V_C = \frac{n_F - 1}{n_D - 1} V_D - \frac{n_C - 1}{n_D - 1} V_D = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} V_D = K V_D = \frac{V_D}{\nu} = \frac{1}{\nu f'_D}.$$

Finalement, $A_L = f'_D K = \frac{f'_D}{\nu}$; A_L est d'autant plus faible que ν est grand, comme attendu d'après la remarque faite à la première question. Numériquement, $A_L = 14$ mm.

4. La plus petite tache lumineuse produite par les faisceaux bleu et rouge est obtenue là où les rayons pour les radiations F et C se coupent (voir figure E.3.7).

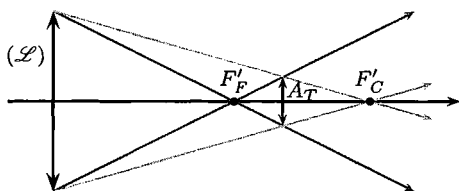


FIG. E.3.7. Aberration chromatique transversale (en noir). Trajet des rayons pour les radiations F (en gris foncé) et C (en gris clair). La distance entre les deux foyers est très exagérée pour la clarté de la figure.

Il faut éviter de calculer l'abscisse du plan dans lequel ces rayons s'intersectent (notons toutefois que c'est approximativement le plan focal de la radiation D d'après les valeurs proposées); notons F' l'intersection de ce plan avec l'axe optique (sur la figure, l'intersection du segment noir avec l'axe optique). Calculons ensuite A_T de deux manières, une première fois en utilisant la tangente de l'angle entre les rayons de la radiation F et l'axe optique, et une seconde fois en utilisant la tangente de l'angle entre les rayons de la radiation C et l'axe optique, soit

$$A_T = F'_F F' \frac{d}{f'_F} \quad \text{et} \quad A_T = F' F'_C \frac{d}{f'_C}.$$

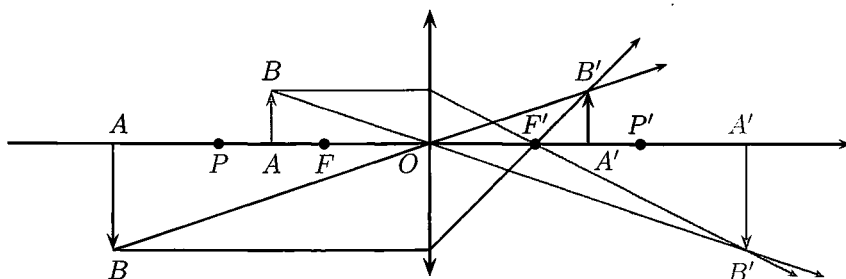


FIG. E.3.4. Construction des images de deux objets. L'un étant entre le foyer objet F et le point antiprincipal P (construction en gris), l'autre étant placé avant le point antiprincipal P (construction en noir).

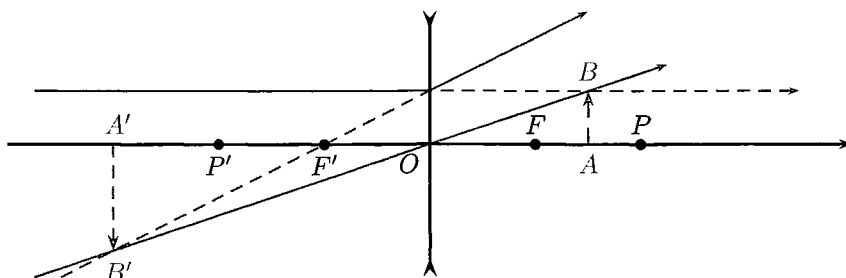


FIG. E.3.5. Construction des images virtuelles de deux objets virtuels dans le cas d'une lentille divergente. L'objet est placé entre le foyer objet F et le point antiprincipal P , l'image est plus grande.

7 Loupe

1. En plaçant l'objet à la distance minimale d_m de l'œil, $\alpha_m \simeq \tan \alpha_m = \ell/d_m$.

2. a/ En notant $x' = \overline{OA'}$, A' étant l'image de A ($\overline{OA} = x$), l'observation n'est nette que si $a - x'$ (distance entre l'image et l'œil) est supérieure à d_m . D'après la formule de Descartes (voir équation (3.4) page 63), la relation entre x et x' est $x' = xf'/(x + f')$, donc la condition est

$$a - \frac{xf'}{x + f'} \geq d_m \quad \text{soit} \quad a(x + f') - xf' \geq d_m(x + f'),$$

à condition que $x + f' \geq 0$, sinon l'inégalité change de sens; dans le cas $x + f' < 0$, l'objet est avant le foyer objet, l'image est renversée, ce qui ne correspond pas à ce que l'on attend d'une loupe et ce qui conduirait de plus à une incompatibilité dans les inégalités. On obtient finalement l'encadrement

$$-f' \leq x \leq -\frac{f'(d_m - a)}{d_m - a + f'}$$

b/ L'observation se fait sans fatigue lorsque l'image est à l'infini, donc lorsque l'objet est dans le plan focal objet de la lentille; $\alpha \simeq \tan \alpha = \ell/f'$, soit $G = \alpha/\alpha_m = d_m/f' = 5$.

8 Aberrations chromatiques

1. La constante A est donnée avec quatre chiffres significatifs alors que la constante B n'est donnée qu'avec deux chiffres, mais B/λ^2 n'est qu'une correction de A ($B/\lambda^2 = 0,010$ dans le cas de la radiation jaune), de telle sorte que l'on peut exprimer n avec quatre chiffres significatifs.

On obtient $n_F = 1,530$, $n_D = 1,525$ et $n_C = 1,523$, puis $\nu = 79$ ¹ et $K = 1,3 \cdot 10^{-2}$.

1. Valeur obtenue sans arrondir la valeur des indices; on obtiendrait $\nu = 75$ sinon.

5 Dispersion dans une fibre optique

1. La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu d'indice n_C est $\frac{c}{n_C}$. Or, n_C dépend *a priori* de la fréquence, il faut donc utiliser une source monochromatique pour éviter la dispersion.

2. a/ Pour des rayons formant un angle θ avec l'axe de la fibre, lorsque la lumière parcourt une distance d , la longueur parcourue dans la fibre est en réalité $L = d \cos \theta$. La vitesse de propagation étant c/n_C , le temps nécessaire pour parcourir une longueur L de fibre est

$$\tau = \frac{d}{c/n_C} = \frac{n_C L}{c \cos \theta}.$$

Or, $n_A \sin \alpha = n_C \sin \theta$, donc $\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{n_A}{n_C} \sin \alpha\right)^2}$, soit $\tau = \frac{n_C^2 L}{c \sqrt{n_C^2 - n_A^2 \sin^2 \alpha}}$.

b/ Le mode le plus rapide ($\tau = \tau_{\min}$) correspond à la valeur de θ la plus faible, soit $\theta = 0$. Le mode le plus lent ($\tau = \tau_{\max}$) correspond à la valeur de θ la plus élevée, soit $\theta = \theta_\ell$, valeur au-delà de laquelle la réflexion n'est plus totale. On a donc

$$\tau_{\min} = \frac{n_C L}{c} \quad \text{et} \quad \tau_{\max} = \frac{n_C L}{c \cos \theta_\ell} = \frac{n_C L}{c(1 - \Delta)},$$

car $\cos \theta_\ell = \sin i_\ell = n_G/n_C = 1 - \Delta$. Donc $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{n_C L}{c} \left(\frac{1}{1 - \Delta} - 1 \right)$. Si $\Delta \ll 1$, on peut écrire à l'ordre 2 négligé près $(1 - \Delta)^{-1} \simeq 1 + \Delta$ et ainsi $\Delta\tau \simeq \frac{n_C L}{c} \Delta$, soit numériquement $\Delta\tau = 10^{-7} \text{ s} = 0,1 \mu\text{s}$.

3. a/ Le signal ne se propage donc pas à la même vitesse selon la valeur de α . Un signal de largeur T_0 aura pour largeur $T_0 + \Delta\tau$ après une longueur L de fibre, $\Delta T_0 = \Delta\tau$. Pour un débit de B bits par seconde envoyés pendant la durée T_0 , la durée d'un bit est $T_0 = 1/B$. On définit L_{\max} par

$$\Delta T_0 = \frac{n_C L_{\max}}{c} \Delta = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2B} \quad \text{soit} \quad L_{\max} = \frac{c}{2n_C \Delta}.$$

b/ La bande passante est $L_{\max} \times B$. Le but de la fibre est de transporter un maximum d'information (B grand) sur une distance la plus grande possible (L_{\max} grand). Plus la bande passante est élevée, plus la fibre remplit efficacement son rôle.

$$L_{\max} \times B = \frac{c}{2n_C \Delta} = 5 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5 \text{ MHz} \cdot \text{km}$$

6 Points antiprincipaux

1. Sur la figure E.3.4, lorsque l'objet est placé entre le foyer F et le point antiprincipal P , l'image $A'B'$ est plus grande, le grandissement transversal est supérieur à 1 en valeur absolue (la construction est en gris sur la figure); *a contrario*, lorsque l'objet est placé avant P , l'image est plus petite, $|\gamma| < 1$ (la construction est en noir). Le principe de retour inverse permettrait de ne faire en réalité qu'une construction pour conclure, car lorsque l'objet est entre P et F , l'image est alors après P' .

2. Sur la figure E.3.5, qui concerne maintenant la construction pour une lentille divergente, lorsque l'objet virtuel est placé entre le foyer objet F et le point antiprincipal P , l'image virtuelle $A'B'$ est plus grande, le grandissement transversal est supérieur à 1 en valeur absolue.

Lorsque l'objet virtuel est placé après P (voir figure E.3.6), l'image virtuelle est plus petite, $|\gamma| < 1$. Une nouvelle fois, le principe de retour inverse aurait pu nous éviter de tracer cette seconde construction.

communément (cependant dans des conditions très favorables rarement rencontrées), c'est un rayon vert, les longueurs d'onde correspondant au bleu et au violet étant plus sensibles au phénomène de diffusion de la lumière par l'atmosphère (diffusion Rayleigh qui permet d'expliquer pourquoi le ciel est bleu dans la journée ou pourquoi il se teinte en rouge au soleil couchant ; ce phénomène est étudié en deuxième année). Le phénomène abordé dans cet exercice porte donc communément le nom de « rayon vert ».

4 Propagation dans une fibre optique

1. Notons α_i l'angle d'incidence, α_r l'angle de réflexion que fait, avec la normale, le rayon réfléchi (dans le même milieu d'indice n_1 que le rayon incident), et α_t l'angle de réfraction fait par le rayon transmis (dans un milieu d'indice n_2) avec la normale. Les lois de Snell-Descartes sont les suivantes :

- les rayons réfléchis et réfractés sont dans le plan d'incidence ;
- $\alpha_i = -\alpha_r$ et $n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t$.

La réflexion est totale lorsque la loi de Snell-Descartes conduit à l'inégalité $\sin \alpha_t > 1$. Cela n'est possible que si $\sin \alpha_i > n_2/n_1$, ce qui impose $n_1 > n_2$.

2. On cherche la réflexion totale à l'interface cœur/gaine, ce qui est possible car $n_C > n_G$; il faut que l'incidence i vérifie $\sin i > n_G/n_C$ (voir figure 3.34). L'angle limite i_ℓ est donc tel que $\sin i_\ell = n_G/n_C$. L'angle θ est tel que $\theta = \frac{\pi}{2} - i$; pour avoir une réflexion totale, il faut donc $\theta < \theta_\ell = \frac{\pi}{2} - i_\ell$. Enfin, $n_A \sin \alpha = n_C \sin \theta$; il faut donc $\alpha < \alpha_\ell$ avec

$$\sin \alpha_\ell = \frac{n_C}{n_A} \sin \theta_\ell = \frac{n_C}{n_A} \cos i_\ell = \frac{n_C}{n_A} \sqrt{1 - \left(\frac{n_G}{n_C}\right)^2}. \quad (3.1)$$

On retrouve bien finalement $ON = n_A \sin \alpha_\ell = \sqrt{n_C^2 - n_G^2}$.

3. Les rayons qui arrivent sur la fibre avec un angle d'incidence α tel que $-\alpha_\ell < \alpha < \alpha_\ell$ (soit une fois dans la fibre un angle avec la normale $-\theta_\ell < \theta < \theta_\ell$) ne subissent par la suite que des réflexions totales ; il n'y a donc pas de perte d'énergie, la propagation se fait sans atténuation (c'est le cas du rayon en noir sur la figure E.3.3). En revanche, le rayon en gris, qui ne vérifie pas la condition précédente, va subir une réflexion et une réfraction. Une partie de l'énergie est donc transmise dans la gaine, l'énergie du rayon lumineux qui reste dans le cœur de la fibre est donc atténuée. Le faisceau de rayons lumineux qui se propage sans perte d'énergie dans la fibre est délimité par les tirets sur la figure.

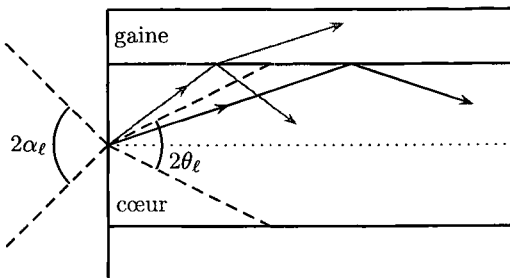


FIG. E.3.3. Différents rayons dans la fibre. Le rayon noir subit une réflexion totale, donc se propage sans atténuation ; une partie de l'énergie du rayon gris est transmise dans la gaine, donc perdue pour le signal. Les rayons se propageant sans perte d'énergie doivent être dans le cône délimité par les tirets.

4. Par définition, $\Delta = 1 - \frac{n_G}{n_C} = 0,02$ donc $\sin i_\ell = 1 - \Delta = 0,98$, soit $i_\ell = 1,37 \text{ rad} = 78,5^\circ$. En réorganisant l'équation (3.1),

$$\sin \alpha_\ell = \frac{n_C}{n_A} \sqrt{(2 - \Delta)\Delta} \quad \text{soit} \quad \alpha_\ell = 0,298 \text{ rad} = 17,4^\circ \quad \text{et donc} \quad ON = 0,298.$$

2 Reconnaissance de gemmes

1. Lorsque les rayons arrivent dans un milieu d'indice plus grand ($n_1 > n_2$), ils se rapprochent de la normale. Les rayons *C* et *D* ont tendance à se focaliser sous l'arête au sommet, dans une zone qui apparaîtra ainsi plus lumineuse (voir figure E.3.1). Le rayon *B* est lui aussi détourné, et le rayon *A* n'étant pas dévié, il existe une zone qui ne reçoit pas de lumière et qui apparaîtra sombre.

En revanche, lorsque les rayons arrivent dans un milieu d'indice plus faible ($n_1 < n_2$), ils s'éloignent de la normale. Les rayons *C* et *D* vont donc diverger, la zone située sous ces rayons sera sombre (voir figure E.3.2). Le rayon *A* n'est toujours pas dévié et le rayon *B* semble converger vers lui, cette zone de l'écran sera lumineuse.

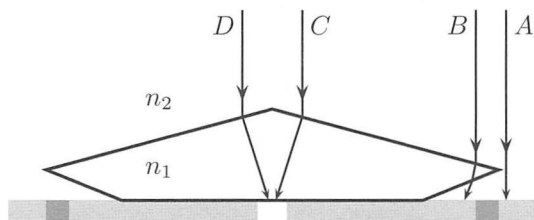


FIG. E.3.1. Réfraction des rayons dans le cas où l'indice de la pierre est plus grand que celui du liquide dans lequel elle est immergée (cas $n_1 > n_2$).

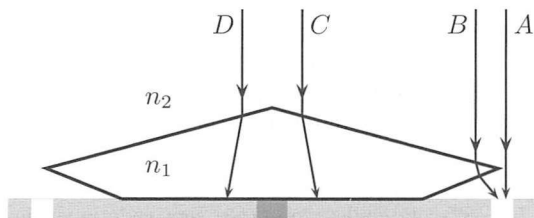


FIG. E.3.2. Réfraction des rayons dans le cas où l'indice de la pierre est plus petit que celui du liquide dans lequel elle est immergée (cas $n_1 < n_2$).

2. La moissanite flotte dans l'iodure de méthylène, les deux autres pierres coulent.
3. La pierre 1, observée à travers le verre dépoli, a des bords lumineux, l'intensité étant faible au niveau des arêtes. Cela correspond, d'après la première question, au cas où l'indice de la pierre est plus faible que l'indice du liquide; il s'agit donc du verre flint . La pierre 2 a des bords sombres et des arêtes brillantes, cela correspond au cas où l'indice de la pierre est plus grand que celui du liquide, il s'agit donc du zircon .

3 Déviation des rayons par l'atmosphère

1. D'après la section II.3 page 52, la quantité $n \sin i$ est constante, ainsi $n_0 \sin i_0 = n \sin i$. Étant donné $n > n_0$, on en déduit $i < i_0$, les rayons arrivent donc sur l'observateur avec une incidence plus grande, les étoiles apparaissent plus hautes dans le ciel qu'elles ne le sont réellement.

2. Par définition, la déviation est $D = i - i_0$, soit $i = D + i_0$, donc $n_0 \sin i_0 = n \sin(i_0 + D)$. En utilisant les formules de trigonométrie, $n_0 \sin i_0 = n(\sin i_0 \cos D + \sin D \cos i_0)$, soit, en ne conservant que l'ordre un en D , $n_0 \sin i_0 = n(\sin i_0 + D \cos i_0)$. Finalement,

$$D = \left(\frac{n_0}{n} - 1\right) \tan i_0.$$

Numériquement, $D = -5,2 \cdot 10^{-4}$ rad, soit $D = -1,8'$ (minute d'arc).

3. Du fait de la déviation des rayons par l'atmosphère, une partie du soleil est encore visible alors qu'il est passé sous la ligne d'horizon. La déviation étant plus faible pour les grandes longueurs d'onde (car n est une fonction décroissante de λ), ces rayons seront les premiers qui disparaîtront. Ne subsisteront que les rayons correspondant aux faibles longueurs d'onde.

Le dernier rayon observé devrait donc être violet. Il est possible d'observer un tel rayon violet, mais dans des conditions très particulières, en montagne notamment. Ce que l'on observe plus

b/ Soit δ la différence de chemin optique entre les deux ondes provenant de S_1 et S_2 et parvenant en M . On a vu plus haut et dans le cours que $\mathcal{I}_{\lambda_i}(M) = 2\mathcal{I}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda_i} \right) \right)$. L'intensité au point M de l'écran sera donc

$$\mathcal{I}(M) = 2\mathcal{I}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda_1} \right) \right) + 2\mathcal{I}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda_2} \right) \right),$$

soit en développant et en utilisant la relation (2.6) (voir page 24),

$$\mathcal{I}(M) = 4\mathcal{I}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\Lambda} \right) \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \right).$$

Dans cette expression, on a posé $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$, $\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right|$ et $\delta = \ell_2 - \ell_1 = \frac{\alpha x}{D}$.

c/ On remarque que $\Lambda \gg \lambda$, donc pour x variant sur une distance de l'ordre de λ , le terme $\cos \left(2\pi \frac{\delta}{\Lambda} \right)$ reste quasiment constant. On peut donc considérer que l'intensité s'écrit

$$\mathcal{I}(M) = 4\mathcal{I}_0 \left(1 + A \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \right),$$

A variant très faiblement par rapport à x . On a $\mathcal{I}_{\max} = 4\mathcal{I}_0(1 + |A|)$ et $\mathcal{I}_{\min} = 4\mathcal{I}_0(1 - |A|)$. Le contraste se calcule alors facilement, on trouve $C = |A|$. Périodiquement, le contraste devient nul, c'est à dire que les franges ne sont plus observables. Cela correspond à des points où on observe un maximum pour l'une des longueurs d'onde, et un minimum pour l'autre. En un tel point, l'éclairement semble uniforme.

Pour la frange centrale, $x = 0$ d'où $p = \frac{\delta}{\lambda} = 0 \in \mathbb{N}$; l'ordre d'interférence étant un entier, l'intensité est maximale au centre et vaut $\mathcal{I} = 8\mathcal{I}_0$; la couleur observée sera celle issue des sources (une superposition). Le contraste est maximum et vaut $C = 1$, les franges sont très contrastées et donc bien visibles.

d/ Les deux figures d'interférences, celle de longueur d'onde λ_1 et celle de longueur d'onde λ_2 se superposent. On cherche l'ordre trois pour chacune de ces deux figures. En ce qui concerne \mathcal{I}_1 , l'éclairement est maximum pour $p = \frac{\delta}{\lambda_1} = \frac{\alpha x_1^1}{\lambda_1 D} = n \in \mathbb{N}$. L'ordre 3 est tel que $n = 3$ d'où $x_3^1 = 3 \frac{\lambda_1 D}{\alpha}$. De même pour la deuxième longueur d'onde $x_3^2 = 3 \frac{\lambda_2 D}{\alpha}$ et $x_3^2 - x_3^1 = 3 \frac{D}{\alpha} (\lambda_2 - \lambda_1)$. Numériquement on trouve $x_3^1 = 1,52$ cm et $x_3^2 = 1,63$ cm, soit $x_3^2 - x_3^1 = 1,09$ mm.

e/ En $x = 7,6$ mm, on a $\delta = 608$ mm. L'ordre d'interférence pour λ_1 est

$$p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1} = 1,5 = \frac{1}{2} + 1.$$

Cette valeur demi-entière montre qu'en cette position, la longueur d'onde λ_1 est éteinte. En ce qui concerne p_2 , le calcul donne $p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2} = 1,4$. En cette position, la longueur d'onde n'est pas éteinte mais son intensité sera très faible, visuellement la position $x = 7,6$ mm correspondra donc à une frange sombre.

Chapitre 3

1 Angle de Brewster

Comme indiqué sur la figure 3.31 page 72, l'angle de réflexion avec la normale est $-i$. Dans la situation de Brewster, l'angle droit entre le rayon réfléchi et le rayon réfracté implique que $\pi = r + \pi/2 - i_B$, soit $r = \pi/2 + i_B$, puis en injectant dans $n_1 \sin i_B = n_2 \sin r$, on obtient

$$\tan i_B = n_2/n_1.$$

$$y_T(x,t) = \frac{\frac{2}{c_1}}{\sqrt{\left(\frac{M\omega}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)^2}} A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_2} \right) + \phi_T \right]$$

$$y_R(x,t) = \frac{\sqrt{\left(\frac{M\omega}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{M\omega}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)^2}} A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{c_1} \right) + \phi_R \right]$$

avec $\phi_R = \phi_n - \phi_d$ tel que $\tan(\phi_n) = -\frac{M\omega}{\frac{T_0}{c_1} - \frac{T_0}{c_2}}$ et $\tan(\phi_d) = \frac{M\omega}{\frac{T_0}{c_1} + \frac{T_0}{c_2}}$.

4 Interférences lumineuses

1. Soit $M(x,y,D)$ un point de l'écran. On note ℓ_1 le chemin optique pour aller de S_1 à M et ℓ_2 celui pour aller de S_2 à M . Le signal ne se propage que dans un seul milieu. Ces chemins optiques sont donc les distances $\ell_1 = \|\overline{S_1M}\|$ et $\ell_2 = \|\overline{S_2M}\|$. Soit E_0 l'amplitude de l'onde au niveau des deux sources $s(S_1,t) = E_0 \cos(\omega_1 t)$ et $s(S_2,t) = E_0 \cos(\omega_2 t)$ avec $\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_1}$ et $\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_2}$. On a donc $\mathcal{I}_0 = \langle s^2(S_i,t) \rangle = \frac{E_0^2}{2}$.

En M l'amplitude de l'onde s'écrit $s(M,t) = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 \ell_1) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 \ell_2)$, donc

$$\langle s^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos^2(\omega_1 t - k_1 \ell_1) \rangle + E_0^2 \langle \cos^2(\omega_2 t - k_2 \ell_2) \rangle + 2E_0^2 \langle \cos(\omega_1 t - k_1 \ell_1) \cos(\omega_2 t - k_2 \ell_2) \rangle,$$

soit, en termes d'intensité, $\mathcal{I}(M) = 2\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1$ avec $\mathcal{I}_1 = 2E_0^2 \langle \cos(\omega_1 t - k_1 \ell_1) \cos(\omega_2 t - k_2 \ell_2) \rangle$.

En supposant par exemple que $\omega_1 > \omega_2$, et en utilisant la relation (2.6) (voir page 24) à l'envers, on peut écrire

$$\mathcal{I}_1 = E_0^2 [\langle \cos(\omega t - (k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2)) \rangle + \langle \cos(\Omega t - (k_1 \ell_1 + k_2 \ell_2)) \rangle]$$

avec $\omega = \omega_1 - \omega_2$ et $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. La valeur moyenne temporelle d'un cosinus étant nulle, $\langle \cos(\Omega t - (k_1 \ell_1 + k_2 \ell_2)) \rangle = 0$ et $\mathcal{I}_1 = E_0^2 \langle \cos(\omega t - (k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2)) \rangle$.

► Si $\omega_1 \neq \omega_2$, alors $\omega \neq 0$ et $\langle \cos(\omega t - (k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2)) \rangle = 0$, ainsi $\mathcal{I}_1 = 0$, et $\mathcal{I}(M) = 2\mathcal{I}_0$: il n'y a pas d'interférences. L'éclairement de l'écran est uniforme et égal à la somme des intensités des deux sources.

► Si $\omega_1 = \omega_2$, alors $\omega = 0$ et $\langle \cos(\omega t - (k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2)) \rangle = \langle \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\ell_1 - \ell_2)\right) \rangle = \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$. On obtient donc $\mathcal{I}(M) = 2\mathcal{I}_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right)$ et on retrouve l'expression des interférences à deux ondes.

On vient donc de démontrer que pour observer des interférences, il est nécessaire que les deux sources soient synchrones, de même pulsation, c'est-à-dire de même longueur d'onde.

Remarque

En réalité, les sources de lumière n'émettent pas de façon continue, mais par *trains d'ondes*. Il faut donc que l'instant d'émission des trains d'ondes soit très proche pour les deux sources. D'autre part, les deux trains d'ondes reçus peuvent être déphasés de ϕ . Le terme d'interférence s'écrit alors sous la forme $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \phi\right)$. Ce déphasage doit rester constant pour chaque train d'onde car sinon $\phi = \phi(t)$ et $\langle \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \phi\right) \rangle = 0$, on dit que les deux sources doivent être cohérentes. En résumé, on a donc montré que pour que deux sources lumineuses puissent interférer il faut :

- qu'elles soient synchrones;
- qu'elles soient cohérentes.

2. a/ L'amplitude de l'onde en M qui provient de la source avec la longueur d'onde λ_1 ne peut pas interférer avec celle de longueur d'onde λ_2 car ces deux sources ne sont pas synchrones. Le terme d'interférence étant nul, les intensités s'additionnent : $\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}_{\lambda_1}(M) + \mathcal{I}_{\lambda_2}(M)$ avec $\mathcal{I}_{\lambda_i}(M) = \langle s_{\lambda_i}^2(M,t) \rangle$ qui résulte de l'interférence des deux sources synchrones. On observe donc la superposition de deux figures d'interférence.

En projection sur \vec{u}_x , il vient $[\vec{T}(x+dx) + \vec{T}(x)] \cdot \vec{u}_x = 0$, soit

$$T(x+dx) \cos[\alpha(x+dx)] - T(x) \cos[\alpha(x)] = 0.$$

Dans le cadre des petits mouvements, $\cos[\alpha(x+dx)] \simeq \cos[\alpha(x)] \simeq 1$, ainsi $T(x+dx) = T(x)$ pour tout x . On vient donc de montrer qu'avec nos hypothèses la tension de la corde est la même en tout point et $T(x) = T_0$.

c/ La projection T_y de la tension de la corde sur l'axe Oy est $\vec{T} \cdot \vec{u}_y = T_0 \sin[\alpha(x)] \simeq T_0 \alpha(x)$. En utilisant l'expression de α trouvée plus haut, il vient finalement $T_y \simeq T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$.

2. a/ On sait que les ondes transmises et réfléchies seront sinusoïdales de même pulsation que l'onde incidente. On peut donc écrire leurs amplitudes respectives.

► Pour l'onde transmise, $y_T(x,t) = TA \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right) + \phi_T\right]$. On pourra utiliser avantageusement la notation complexe en écrivant $y_T(x,t) = \underline{T} A e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)}$ avec $\underline{T} = T e^{i\phi_T}$.

► Pour l'onde réfléchie, $y_R(x,t) = RA \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right) + \phi_R\right]$, que l'on écrira en notation complexe $y_R(x,t) = \underline{R} A e^{i\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)}$ avec $\underline{R} = R e^{i\phi_R}$.

b/ Si on se place au voisinage du nœud vers les x positifs, soit en $x = 0^+$, alors nous sommes en présence de l'onde transmise et l'on a $y(0^+,t) = y_T(x,t) = TA \cos(\omega t + \phi_T)$, soit $y(0^+,t) = \underline{T} A e^{i\omega t}$. En ce qui concerne le voisinage du nœud en $x = 0^-$, nous sommes en présence à la fois de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, soit

$$y(0^-,t) = A \cos(\omega t) + RA \cos(\omega t + \phi_R),$$

soit en notation complexe $y(0^-,t) = A e^{i\omega t} + \underline{R} A e^{i\omega t}$. La continuité de l'amplitude se traduit donc par la relation $A e^{i\omega t} + \underline{R} A e^{i\omega t} = \underline{T} A e^{i\omega t}$, soit $1 + \underline{R} = \underline{T}$.

c/ Le nœud est soumis aux deux tensions $\vec{T}(0^-,t)$ dirigée vers les x négatifs et $\vec{T}(0^+,t)$ dirigée vers les x positifs; on néglige ici le poids. En considérant les petits mouvements, on a $\vec{T}(0^-,t) = T_x(0^-,t) \vec{u}_x + T_y(0^-,t) \vec{u}_y$, soit $\vec{T}(0^-,t) = -T_0 \vec{u}_x - T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \vec{u}_y\right)_{x=0^-}$ avec $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-} = -i \frac{\omega}{c_1} A e^{i\omega t} + i \frac{\omega}{c_1} \underline{R} A e^{i\omega t}$. De même, $\vec{T}(0^+,t) = T_0 \vec{u}_x + T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \vec{u}_y\right)_{x=0^+}$ avec $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+} = -i \frac{\omega}{c_2} \underline{T} A e^{i\omega t}$.

On écrit à présent le principe fondamental de la dynamique appliqué au nœud de masse M ;

il vient $M \frac{d^2 y_T(0^+,t)}{dt^2} = -M \omega^2 \underline{T} A e^{i\omega t} = i \frac{\omega}{c_1} A T_0 e^{i\omega t} - i \frac{\omega}{c_1} \underline{R} A T_0 e^{i\omega t} - i \frac{\omega}{c_2} \underline{T} A T_0 e^{i\omega t}$, d'où

$i \frac{M \omega^2}{T_0} \underline{T} = 2 \frac{\omega}{c_1} - \left(\frac{\omega}{c_1} + \frac{\omega}{c_2}\right) \underline{T}$, soit $\underline{T} = \frac{\frac{2}{c_1}}{i \frac{M \omega}{T_0} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1}}$. En utilisant la relation $1 + \underline{R} = \underline{T}$ on

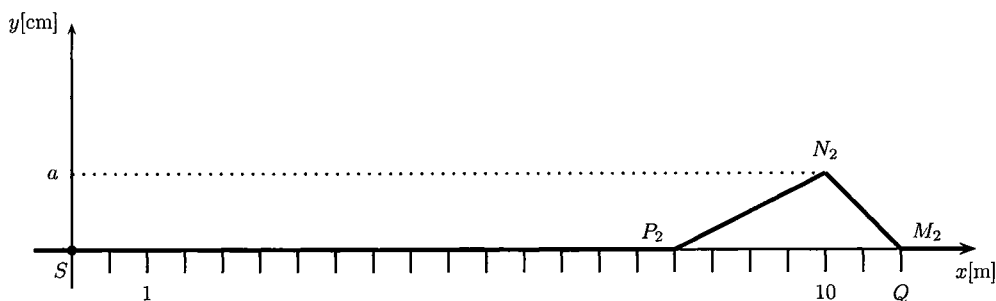
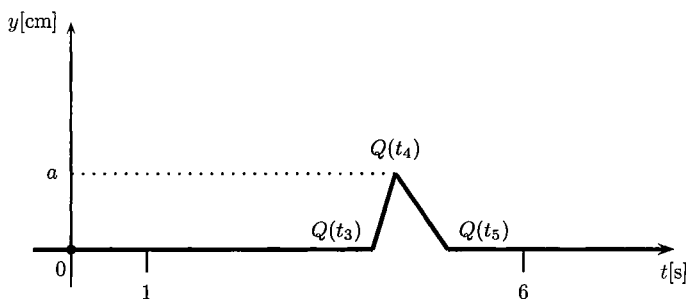
trouve alors $\underline{R} = \frac{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} - i \frac{M \omega}{T_0}}{i \frac{M \omega}{T_0} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1}}$.

d/ Si $M = 0$, les expressions se simplifient en $\underline{T} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} = T$ et $\underline{R} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = R$. On

vérifie bien que si $c_1 = c_2$, toute l'onde est transmise puisque en fait le milieu est le même et qu'il n'y a plus de discontinuité. On remarque aussi que les expressions sont réelles, il n'y a pas de déphasage. On peut donc écrire $y_T(x,t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right]$ pour l'onde transmise

et $y_R(x,t) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right]$ pour l'onde réfléchie.

e/ Dans le cas $M \neq 0$, il y aura un déphasage entre l'onde incidente et l'onde transmise. En effet, $\underline{T} = \left| \frac{\frac{2}{c_1}}{i \frac{M \omega}{T_0} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1}} \right| e^{i\phi_T}$ et donc $\underline{T} = \frac{\frac{2}{c_1}}{\sqrt{\left(\frac{M \omega}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)^2}} e^{i\phi_T}$ avec $\tan(\phi_T) = -\frac{M \omega}{\frac{T_0}{c_1} + \frac{T_0}{c_2}}$ tel que $\cos(\phi_T) > 0$. Pour les amplitudes on aura finalement

FIG. E.2.1. État de la corde à l'instant $t = 3,6$ s.FIG. E.2.2. Élongation du point Q en fonction du temps.

célérité de l'onde et donc $\lambda = \frac{c}{f}$. Pour le fondamental de fréquence f_0 , on peut donc écrire $L = \frac{c}{4f_0}$, soit $f_0 = \frac{c}{4L}$.

2. Soit L' la longueur de la flûte, le raisonnement est identique, sauf que cette fois-ci les deux extrémités sont ouvertes et correspondent donc à des ventres. Ces derniers sont consécutifs pour le fondamental (1 fuseau) et donc $L' = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f_0}$, soit $L' = 2L$.

3. On constate que les extrémités correspondent à des nœuds de vibration, elles sont donc fermées.

4. La distance entre deux nœuds vaut $\ell = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f}$, d'où $c = f\lambda = 2f\ell$. Expérimentalement, on lit $\ell = 20$ cm; on nous dit que $f = 850$ Hz, donc $c = 340$ m · s⁻¹.

5. On observe dans le tube quatre fuseaux entre 5 nœuds (en comptant les extrémités), nous sommes donc en présence de l'harmonique $n = 4$ (voir figure 2.10 page 30) de fréquence $f_4 = 850$ Hz. Nous avons vu dans le cours que $f_n = nf_1$. Numériquement, avec $n = 4$, le fondamental f_1 est à la fréquence $f_1 = \frac{850}{4} = 212$ Hz.

3 Réflexion d'une onde

1. a/ On se place ici à t fixé, on effectue donc une photographie de la corde à cet instant. Sur cette photo, on voit alors immédiatement que $\tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x}$. Dans le cadre des petits mouvements, on peut donc écrire $\alpha \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$.

b/ Soit dm la masse de la portion de corde $d\ell$ et \vec{a} son accélération. Le mouvement vertical de la portion de corde permet d'affirmer que $\vec{a} = a\vec{u}_y$. Si l'on néglige le poids $dm\vec{g}$ devant la tension, le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc $dm a\vec{u}_y = \vec{T}(x+dx) + \vec{T}(x)$.

Cinquième partie

SOLUTIONS DES EXERCICES

Chapitre 1

1 Oscillateur lancé avec une vitesse initiale

La mise en équation a été effectuée à la section II.2 page 8. Elle conduit à l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ pulsation propre de l'oscillateur (il s'agit de l'équation (1.2) page 9).

Les conditions initiales sont, d'après l'énoncé, $x(0) = 0$ et $v(0) = \dot{x}(0) = 0$. La solution générale de l'équation est $x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$ (voir équation (1.3) page 10). La condition $x(0) = 0$ conduit à $\alpha = 0$; la condition $v(0) = 0$ impose alors $\beta \omega_0 \cos(0) = v_0$, soit $\beta = v_0/\omega_0$. Ainsi, la solution est $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

2 Forces exercées par deux ressorts

Les longueurs des ressorts sont $\ell_1 = x$ et $\ell_2 = L - x$, donc $\vec{F}_1 = -k_1(x - \ell_{01})\vec{u}_x$ et $\vec{F}_2 = k_2(L - x - \ell_{02})\vec{u}_x$. La somme des forces élastiques est $\vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$, avec pour caractéristiques du ressort équivalent $k = k_1 + k_2$ et $\ell_0 = \frac{k_1 \ell_{01} + k_2(L - \ell_{02})}{k_1 + k_2}$.

Chapitre 2

1 La corde élastique

1. À l'instant $t = t_1$, le front de l'onde atteint le point M_1 , il a donc parcouru 7 m en $t_1 = 2,3$ s et la célérité de l'onde est $c = \frac{SM_1}{t_1}$, d'où $c = 3,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Si on note Δx la longueur de la portion de la corde déformée et Δt la durée du mouvement d'un point de la corde, alors $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, soit $\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{3}{3,04}$, soit $\Delta t = 0,99 \text{ s}$.

3. On se place à l'instant $t_1 = 2,3$ s, le point M_1 se met en mouvement, son ordonnée augmente comme tous les points situés entre M_1 et N_1 . Les points situés entre N_1 et P_1 sont déjà passés par leur amplitude maximale et ont une ordonnée qui diminue.

4. Le point qui correspond au front d'onde, c'est-à-dire le point qui commence à se mettre en mouvement, est à l'abscisse $x = ct_2$, soit $x = 11,0$ m.

5. À l'instant $t_2 = 3,6$ s, l'allure de la corde est représentée sur la figure E.2.1.

a/ $t_3 = \frac{SQ}{c}$, soit $t_3 = 3,94 \text{ s}$.

b/ Lorsque l'onde se sera propagée de $d = 1$ m depuis l'instant t_3 , le point Q sera à son maximum, $t_4 = t_3 + \frac{d}{c}$, soit $t_4 = 4,27 \text{ s}$.

c/ $t_5 = t_4 + \frac{2d}{c}$, soit $t_5 = 4,93 \text{ s}$.

d/ En utilisant les résultats précédents on peut représenter la fonction $y_Q(t)$. C'est l'objet de la figure E.2.2.

2 Modélisation d'un didjeridoo

1. La distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs vaut $\ell = \frac{\lambda}{2}$. Le fondamental n'est formé que d'un seul fuseau (voir figure 2.10 page 30) et l'on nous dit que l'on a un ventre à l'une des extrémités et un nœud à l'autre. L'instrument est de longueur L , on a donc $L = \frac{\lambda}{4}$. La relation entre la période spatiale de l'onde et sa période temporelle est $\lambda = cT$, c étant la

Grandeur dérivée	Nom	Symbole	Expression en unités SI de base	Expression utilisant d'autres unités SI
angle plan	radian	rad	sans unité	$\text{m} \cdot \text{m}^{-1}$
angle solide	stéradian	sr	sans unité	$\text{m}^2 \cdot \text{m}^{-2}$
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}	
force	newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	
pression, contrainte	pascal	Pa	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
énergie, travail, transfert thermique	joule	J	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{N} \cdot \text{m}$
puissance, flux énergétique	watt	W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$	$\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$
charge électrique quantité d'électricité	coulomb	C	$\text{A} \cdot \text{s}$	
différence de potentiel électrique force électromotrice	volt	V	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$	$\text{W} \cdot \text{A}^{-1}$
capacité électrique	farad	F	$\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$	$\text{C} \cdot \text{V}^{-1}$
résistance électrique	ohm	Ω	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$	$\text{V} \cdot \text{A}^{-1}$
conductance électrique	siemens	S	$\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$	
flux d'induction magnétique	weber	Wb	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$	$\text{V} \cdot \text{s}$
induction magnétique	tesla	T	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$	$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
inductance	henry	H	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$	$\text{Wb} \cdot \text{A}^{-1}$
température	degré Celsius	$^{\circ}\text{C}$	K	
flux lumineux	lumen	lm	cd	$\text{cd} \cdot \text{sr}$
éclairage lumineux	lux	lx	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$
activité d'un radionucléide	becquerel	Bq	s^{-1}	
dose absorbée, kerma	gray	Gy	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
équivalent de dose	sievert	Sv	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
activité catalytique	katal	kat	$\text{s}^{-1} \cdot \text{mol}$	

TABLEAU C.2. Unités spéciales.

II. Unités dérivées cohérentes

Parmi les unités SI dérivées cohérentes, certaines s'expriment directement à partir d'unités de base (voir tableau C.1).

Grandeur dérivée	Unité SI dérivée cohérente
superficie	m^2
volume	m^3
vitesse	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
accélération	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
nombre d'onde	m^{-1}
masse volumique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
volume massique	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
densité de courant	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
champ magnétique	$\text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
concentration de quantité de matière	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$
concentration massique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
luminance lumineuse	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$

TABLEAU C.1. Exemples d'unités SI dérivées.

D'autres unités courantes ont des noms spéciaux et des symboles particuliers. Leur liste exhaustive est donnée dans le tableau C.2.

Les symboles correspondant à des unités dérivant de noms propres commencent par une majuscule (exemples : Pa, W, J, etc.).

Annexe C

SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS DE MESURE

I. Unités de base

Le système international d'unité de mesure est composé de sept unités de base.

- ▶ Unité de longueur : le mètre (m) - Le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant un intervalle de temps de $1/299\,792\,458$ seconde.
- ▶ Unité de masse : le kilogramme (kg) - Le kilogramme est l'unité de masse égale à celle du prototype international qui est un cylindre en platine iridié (90 % platine, 10 % iridium) de 39 mm de diamètre et 39 mm de haut déposé au pavillon de Breteuil à Sèvres (92, France).
- ▶ Unité de temps : la seconde (s) - La seconde est la durée égale à 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
- ▶ Unité de courant électrique : l'ampère (A) - Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables, et distants d'un mètre dans le vide, produirait entre ces deux conducteurs, une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre linéaire.
- ▶ Unité de température thermodynamique : le kelvin (K) - Le kelvin est la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau.
- ▶ Unité quantité de matière : la mole (mol) - La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. Lors de l'utilisation de cette unité l'entité élémentaire doit être précisée. Il peut s'agir d'atomes, de molécules, d'ions, d'électrons, ou d'autres particules ou groupes de particules.
- ▶ Unité d'intensité lumineuse : la candela (cd) - La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est $1/683$ watt par stéradian.

III. Filtre

III.1. Définitions

Un filtre est un système présentant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$, la sortie étant reliée à l'entrée par une équation différentielle linéaire

$$D_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + D_1 \frac{ds(t)}{dt} + D_0 s(t) = N_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + N_1 \frac{de(t)}{dt} + N_0 e(t). \quad (\text{B.10})$$

L'ordre du filtre est l'ordre de son équation différentielle, c'est-à-dire l'ordre de dérivation le plus élevé de la fonction inconnue s (ici noté n). Un filtre est de plus un système stationnaire, ou invariant dans le temps : les coefficients de son équation différentielle sont indépendants du temps (coefficients constants).

III.2. Conséquences

Principe de superposition Soit respectivement $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les réponses du filtre aux excitations $e_1(t)$ et $e_2(t)$. Alors, à l'excitation $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$, où λ_1 et λ_2 sont des constantes, correspond la réponse $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$ par linéarité. Les causes ajoutent leurs effets et les effets sont proportionnels aux causes.

Principe de permanence Si $s(t)$ est la réponse d'un filtre (stationnaire) à l'excitation $e(t)$, alors $e(t - \tau)$, présentant un retard τ par rapport à $e(t)$, va induire en sortie $s(t - \tau)$ présentant le même retard. Cette propriété assure la reproductibilité des mesures, concept très important en physique.

III.3. Fonction de transfert

Les fonctions de la forme e^{pt} jouent donc un rôle particulier dans l'étude des systèmes linéaires, ce sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires. Pour une entrée de la forme $e(t) = e^{pt}$, il est possible d'obtenir une sortie de la même forme, soit $s(t) = \mathcal{H}(p)e^{pt}$, où \mathcal{H} est une fonction de p à la condition

$$(D_n p^n + \dots + D_1 p + D_0) \mathcal{H}(p) e^{pt} = (N_m p^m + \dots + N_1 p + N_0) e^{pt}$$

où l'on a simplement injecté e et s dans l'équation différentielle (B.10). Sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas,

$$\mathcal{H}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N_m p^m + N_{m-1} p^{m-1} + \dots + N_1 p + N_0}{D_n p^n + D_{n-1} p^{n-1} + \dots + D_1 p + D_0}. \quad (\text{B.11})$$

Étudier le cas p complexe quelconque amène à s'intéresser aux transformées de Laplace (hors programme de physique, voir le cours de sciences industrielles) ; la fonction $H(p)$ est appelée fonction de transfert opérationnelle du système. Se limiter au cas où p est imaginaire pur ($p = i\omega$) amène à s'intéresser à la transformée de Fourier (généralisation des séries de Fourier). La fonction $\underline{H}(i\omega)$ est appelée fonction de transfert complexe du filtre.

Synthèse

Équation de l'oscillateur harmonique

En supposant ω_0 réel :

- ▶ une équation de la forme $f'' + \omega_0^2 f = 0$ conduit à des solutions oscillantes ;
- ▶ une équation de la forme $f'' - \omega_0^2 f = 0$ conduit à des solutions exponentielles réelles.

II. Commentaires

II.1. Forme canonique

Les équations qui précèdent ont été présentées sous forme canonique (au sens des physiciens), c'est-à-dire une forme générale simple (le moins de coefficients possible, si possible sans dimension). Lors de la mise en équation d'un problème physique, il convient de se ramener à une telle forme afin d'une part d'éviter la lourdeur des expressions, et d'autre part parce que cela permet d'avoir immédiatement une idée du comportement de la solution (sous réserve de connaître ce qui suit). C'est le parti pris qui a été suivi tout au long de cet ouvrage.

II.2. Linéarité

Les équations sont linéaires ; si l'équation différentielle que vous étudiez comporte un second membre (cas de la réponse à un échelon, par exemple), la solution de l'équation différentielle est alors la somme d'une solution particulière f_p (solution constante dans le cas de la réponse à un échelon) et de la solution générale de l'équation homogène f_h . On doit prendre garde à utiliser la solution complète lors de l'utilisation des conditions aux limites pour déterminer les constantes.

II.3. Stabilité

Les solutions proposées dans cette annexe étaient stables⁴, c'est-à-dire ici qu'elles ne divergeaient pas lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par exemple, dans le cas d'un oscillateur amorti régi par l'équation différentielle (B.3), ξ représente un taux d'amortissement. La solution (B.7) reste cependant valable dans le cas plus général $|\xi| < 1$ et cette solution diverge si ξ est négatif (l'exponentielle devient croissante). De même, pour un système d'ordre un, la solution de l'équation (B.2) diverge si τ est négatif. On retiendra le théorème suivant.

Théorème B.2. Stabilité : critère de Routh

Si tous les coefficients d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre un ou deux sont de même signe, alors la solution est stable.

4. Nous excluons ici le cas traité à la section I.2.5.

I.2.3. Cas $0 < \xi < 1$

Le discriminant réduit est négatif, les racines sont des complexes conjugués

$$r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm i\sqrt{|\Delta'|} = -\xi\omega_0 \pm i\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}. \quad (\text{B.6})$$

La solution générale s'écrit comme à l'habitude $\alpha'_+ \exp(r_+t) + \alpha'_- \exp(r_-t)$, mais puisque r_+ et r_- sont conjugués et que la solution est réelle, on peut récrire cette solution sous la forme

$$f(t) = \exp(-\xi\omega_0 t) [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)]. \quad (\text{B.7})$$

Une nouvelle fois, les deux constantes, ici α et β , sont déterminées à l'aide de conditions aux limites. Le temps $\tau = 1/(\xi\omega_0)$ est le temps caractéristique d'évolution de l'enveloppe tandis que ω est la pseudo-pulsation des oscillations. C'est le régime que l'on obtient en cas d'amortissement faible (facteur de qualité élevé), voir page 155 dans le cas de l'étude du régime libre d'un oscillateur amorti.

Remarque L'équation (B.7) peut aussi s'écrire

$$f(t) = f_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (\text{B.8})$$

où $f_0 \geq 0$ et φ_0 sont les deux constantes à déterminer à l'aide de conditions aux limites. Cette écriture peut parfois s'avérer plus pratique que la première; on passe de l'une à l'autre en remarquant que $\alpha = f_0 \cos \varphi_0$ et $\beta = -f_0 \sin \varphi_0$. De la même manière, il est possible de choisir un sinus plutôt qu'un cosinus dans l'équation (B.8).

I.2.4. Cas $\xi = 0$

Ce cas est en fait contenu dans le précédent (voir section I.2.3), mais il n'y a alors pas lieu d'introduire de temps caractéristique car les solutions sont imaginaires pures ($r_{\pm} = \pm i\omega_0$). La solution est alors harmonique,

$$f(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t), \quad (\text{B.9})$$

et ω_0 est la pulsation oscillations (pulsation propre du système).

I.2.5. Autre cas

La discussion ne serait pas vraiment générale sans relâcher la contrainte sur le signe du coefficient en facteur de f dans l'équation (B.3). La méthode reste la même, il suffit de déterminer les racines de l'équation caractéristique³. Considérons simplement une équation du type $\frac{d^2 f}{dx^2} = f/\delta^2$, où δ est ici homogène à une longueur (on considère ici pour changer une équation différentielle en la variable d'espace x). La solution de l'équation caractéristique $r^2 = 1/\delta^2$ est réelle et conduit à des solutions exponentielles $f(t) = \alpha_+ \exp(x/\delta) + \alpha_- \exp(-x/\delta)$.

3. On peut en fait directement retrouver les résultats en supposant que ω_0 est imaginaire pur, ce qui conduit à ω_0^2 négatif dans l'équation (B.3).

En physique¹, on obtient ce résultat en séparant la fonction inconnue et la variable t selon

$$\frac{df}{f} = -\frac{1}{\tau} dt \quad \text{puis} \quad \ln \frac{f(t)}{f(0)} = -\frac{t}{\tau}, \quad \text{soit} \quad f(t) = f(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

I.2. Équation différentielle homogène du deuxième ordre

Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants du deuxième ordre suivante,

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = 0. \quad (\text{B.3})$$

Ici, le terme en facteur de f semble positif (dans l'esprit de cette annexe, ω_0 est la pulsation propre souvent rencontrée dans les classes antérieures), mais la forme est en réalité plus générale car les coefficients peuvent être complexes; nous l'excluons par la suite, sauf mention contraire. De même, sauf mention contraire, nous supposons que ξ est un réel positif ou nul.

L'équation caractéristique² est

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0. \quad (\text{B.4})$$

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta' = \omega_0^2(\xi^2 - 1)$ dont le signe va dépendre de la valeur de ξ .

Remarque Le discriminant Δ de l'équation (B.4) est $\Delta = 4\xi^2 - 4\omega_0^2 = 4\Delta'$. L'utilisation du discriminant réduit Δ' dans ce cas permet de simplifier directement les solutions par le facteur 2, que l'on retrouve alors au numérateur et au dénominateur.

I.2.1. Cas $\xi > 1$

Le discriminant réduit est positif, notons r_+ et r_- les deux solutions réelles de l'équation caractéristique, soit $r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\Delta'}$. La solution générale de l'équation différentielle est alors

$$f(t) = \alpha_+ \exp(r_+ t) + \alpha_- \exp(r_- t), \quad (\text{B.5})$$

où α_+ et α_- sont des constantes que l'on détermine à l'aide de conditions aux limites (conditions initiales sur la position et la vitesse en mécanique, par exemple).

I.2.2. Cas $\xi = 1$

Le discriminant réduit est nul, il existe donc une racine double $r = -\omega_0$. La solution générale de l'équation différentielle est alors $f(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t) \exp(rt)$, où α_0 et α_1 sont des constantes que l'on détermine à l'aide de conditions aux limites.

1. C'est-à-dire sans les précautions nécessaires à une résolution mathématique rigoureuse, mais étant toutefois entendu qu'il faut avoir fait le calcul complet une fois dans sa vie avant de prendre ces libertés.

2. Il s'agit de l'équation algébrique en r obtenue en injectant une solution de la forme $\exp(rt)$ dans l'équation, puis en simplifiant par $\exp(rt)$ qui ne s'annule jamais.

Annexe B

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

CETTE annexe rassemble les informations nécessaires à la résolution des équations différentielles *linéaires à coefficients constants* du premier et du deuxième ordre. Il s'agit des équations que l'on retrouve le plus souvent dans le programme ; la méthode de résolution doit être maîtrisée car elle figure explicitement dans les compétences exigibles.

Définition B.1. *Équation différentielle*

Une équation différentielle est une équation portant sur une fonction inconnue et reliant cette fonction à ses dérivées. L'ordre d'une équation différentielle est le degré maximal de dérivation de la fonction inconnue.

Nous nous limiterons aux équations différentielles d'ordre un ou deux, linéaires, à coefficients constants. Pour une fonction de la variable t ,

$$a_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f = b(t).$$

Les coefficients a_0 , a_1 et a_2 sont des constantes. Le terme $b(t)$ est appelé second membre de l'équation différentielle. L'équation $a_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f = 0$ est l'équation sans second membre, appelée par la suite équation différentielle *homogène*.

I. Équations différentielles homogènes

I.1. Équation différentielle homogène du premier ordre

Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire homogène à coefficient constant du premier ordre suivante,

$$\tau \frac{df}{dt} + f = 0. \tag{B.1}$$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme

$$f(t) = \alpha \exp(-t/\tau), \tag{B.2}$$

où α est une constante. Cette constante est déterminée à l'aide d'une donnée du problème (condition initiale, condition à une limite, etc.). Dans le cas d'une évolution temporelle (les résultats sont transposables à des fonctions dépendant d'une variable d'espace en remplaçant par exemple t par x), τ est le temps caractéristique d'évolution de la solution.

Remarque Pour une présentation plus générale, dont on retrouvera le principe à la section I.2, la solution est de la forme $f(t) = \alpha \exp(rt)$, où r est solution de l'équation caractéristique $\tau r + 1 = 0$; on obtient cette équation en injectant la solution proposée dans l'équation différentielle. On retrouve bien $r = -1/\tau$.

linéaire, on ne précise pas l'incertitude. Cela suppose que l'incertitude est la même pour tous les points, hypothèse que nous ferons par la suite. Introduisons les moyennes $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, la minimisation conduit aux expressions suivantes pour a , b et l'incertitude sur ces deux paramètres,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad ; \quad \sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-2} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad ; \quad \sigma_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-2} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right).$$

Il est inutile de mémoriser ces formules, on retiendra simplement qu'un logiciel permet d'obtenir a et b ainsi que l'incertitude.

V.2.2. Coefficient de corrélation

Ce même logiciel fournira un coefficient de corrélation r tel que

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Lorsque les points sont parfaitement alignés sur la droite, r est égal au signe de a , donc égal à ± 1 . *A contrario*, si les points sont complètement dispersés, le coefficient de corrélation r est nul. Certains logiciels donnent aussi un coefficient de détermination R^2 qui dans notre cas s'identifie à r^2 .

Un coefficient de corrélation (ou de détermination) proche de 1 en valeur absolue ne permet en fait pas d'affirmer avec fiabilité que la loi suivie est effectivement linéaire (il existe d'autres critères plus robustes). On retiendra cependant, dans l'esprit du programme, qu'un coefficient très proche de 1 en valeur absolue (0,99999 par exemple) permet de conclure à la linéarité.

V.1. Détermination graphique

C'est le cas en travaux pratiques lorsque l'on ne dispose pas d'un logiciel adapté. On souhaite ajuster une droite d'équation $y = ax + b$ aux données relevées, ici des couples de points (x_i, y_i) , i variant de 1 à n . Il faut tracer les points expérimentaux sur un graphe avec leur ellipse de dispersion (ellipse dont les axes sont les barres d'erreurs, horizontales et verticales dans la plupart des cas, voir figure A.6).

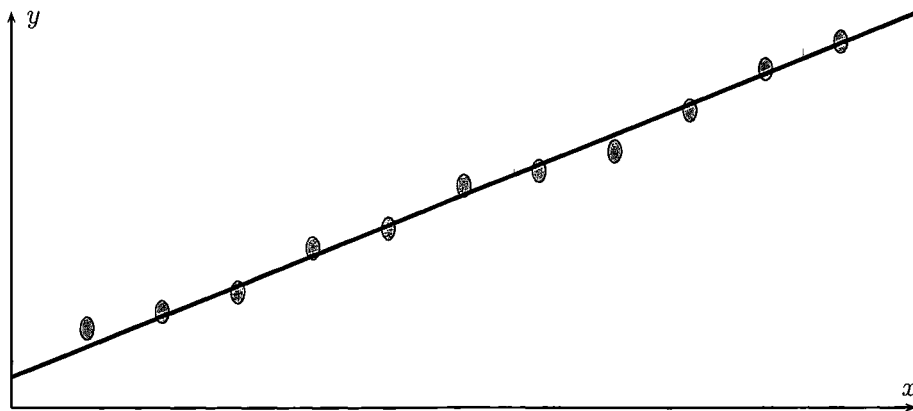


FIG. A.6. Régression linéaire : ajustement des points expérimentaux par une droite.

Si les demi-grands axes et demi-petits axes sont égaux aux écarts-types (et si la loi suivie est normale), alors 68 % des ellipses contiennent effectivement la valeur vraie de la grandeur. Toute droite passant par au moins 68 % (environ 2/3) des ellipses est alors acceptable. Parmi ces droites, celle qui a la plus grande pente et celle qui a la plus faible permettent d'obtenir un encadrement des valeurs de a et de b (soit l'incertitude). La droite ajustant le mieux les points expérimentaux (voir figure A.6) donne quant à elle une estimation de a et b .

V.2. Méthode des moindres carrés

V.2.1. Description de la méthode

On dispose de n couples de points expérimentaux (x_i, y_i) ainsi que de l'incertitude sur chacun de ces points. En pratique, l'incertitude sur l'une des deux grandeurs (x ou y) est faible par rapport à l'autre (par exemple, l'incertitude relative sur la fréquence donnée par un générateur de fonctions peut être inférieure à 10^{-3} alors qu'une tension dans le montage est mesurée à quelques pourcents près). Supposons que l'incertitude sur x est négligeable et notons σ_{y_i} l'incertitude sur y_i . L'idée est de chercher les coefficients a et b de la droite tels que la distance des points à la droite soit minimale. De manière quadratique, on peut chercher à minimiser la fonction

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_{y_i}} \right)^2.$$

La valeur χ^2 est la somme des carrés des résidus, pondérés par l'incertitude ; ainsi on accorde plus de poids aux points pour lesquels l'incertitude est plus faible. Souvent, lorsque l'on entre de telles données dans une calculatrice afin d'effectuer une régression

Remarque On accède rapidement à cette formule en effectuant une différentielle logarithmique de la formule donnant Q (on différencie $\ln Q$),

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dR}{R} + \frac{1}{2} \frac{dL}{L} + \frac{1}{2} \frac{dC}{C}. \quad (\text{A.2})$$

On combine ensuite de manière quadratique, ce qui conduit, avec les notations usuelles en physique, à

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C}\right)^2}.$$

IV.3. Intervalle de confiance

IV.3.1. Estimation pessimiste

À partir de la différentielle (A.2), on pourrait calculer l'incertitude linéairement par

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C}.$$

Cette méthode est à utiliser si les variables ne sont pas indépendantes (ce qui n'est pas le cas sur cet exemple), sans pour autant que l'on sache vraiment comment elles sont corrélées, donc sans que l'on puisse calculer les covariances.

Ce calcul de l'incertitude est en revanche à proscrire dans le cas de variables indépendantes, car il ne conserve pas l'intervalle de confiance.

IV.3.2. Conservation de l'intervalle de confiance

Considérons une grandeur Y s'exprimant en fonction de variables aléatoires, soit $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_K)$. Supposons que chaque variable X_k suit une loi normale (espérance x_{kc} , écart type σ_k). Alors Y suit aussi une loi normale, d'écart type σ_Y donné par l'équation (A.1). Considérons une incertitude élargie $m\sigma_k$ sur chaque X_k ; la probabilité que la valeur vraie de X_k soit dans l'intervalle $[x_{kc} - m\sigma_k, x_{kc} + m\sigma_k]$ est égale à P (par exemple, $P = 0,68$ pour $m = 1$ ou $0,95$ pour $m = 2$). On montre que la probabilité que la valeur vraie de Y soit dans l'intervalle $[y_c - m\sigma_Y, y_c + m\sigma_Y]$ est aussi égale à P .

Remarque Ce résultat n'est valable que lorsque l'on considère des lois normales. Or, en travaux pratiques, une partie des incertitudes types repose sur des lois uniformes. Il n'est pas rare cependant de voir un niveau de confiance de 95 % associé à des intervalles construits comme ci-dessus et mélangeant des lois normales et des lois uniformes. Il faudra savoir prendre cette liberté si un énoncé semble y conduire.

V. Régression linéaire, moindres carrés

Afin de vérifier une loi physique, ou de valider un modèle, on est amené à ajuster des données expérimentales à l'aide d'une fonction de référence modélisant le phénomène. Le plus souvent, on cherchera à se rapporter à une loi linéaire (par des opérations mathématiques comme le passage au logarithme, par exemple).

l'espérance étant $y_c = \mathbb{E}[Y] = f(x_{1c}, x_{2c}, \dots, x_{Kc})$.

Notons que lorsqu'une incertitude est beaucoup plus grande que les autres, il est loisible de simplifier cette expression.

IV.2. Exemples

IV.2.1. Cas de plusieurs sources d'erreurs indépendantes

Ce premier exemple n'est pas exactement une illustration de la situation évoquée dans la section précédente, mais il peut s'y rattacher. L'objectif est d'évaluer l'incertitude type d'une mesure obtenue à l'issue de la mise en œuvre d'un protocole présentant plusieurs sources d'erreurs indépendantes. Considérons $Y = y_c + E_1 + E_2 + \dots + E_K$, où les variables E_k représentent les différentes composantes indépendantes de l'erreur, alors

$$\text{Var}(Y) = \sum_{k=1}^K \text{Var}(E_k) \quad \text{soit} \quad \sigma_Y = \sqrt{\sum_{k=1}^K \sigma_k^2}.$$

Cette formule est utile en travaux pratiques par exemple, lorsque à l'incertitude de l'appareil s'ajoute une incertitude de lecture.

IV.2.2. Cas d'une somme

Supposons que la variable Y s'exprime en fonction de X_1 et X_2 à travers une relation $Y = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma$, alors

$$\sigma_Y = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2}.$$

C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure une distance sur un banc d'optique par différence entre deux mesures afin d'estimer une distance focale.

IV.2.3. Cas d'un produit

Supposons $Y = \gamma X_1^\alpha X_2^\beta$; il est beaucoup plus pratique de calculer l'incertitude relative

$$\frac{\sigma_Y}{|y_c|} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\sigma_1}{x_{1c}}\right)^2 + \left(\beta \frac{\sigma_2}{x_{2c}}\right)^2}.$$

Dans le cas du calcul de l'incertitude type sur la détermination du facteur de qualité d'un filtre R, L, C à partir de la formule $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, on reprend la formule précédente (en l'adaptant à trois variables) et on obtient

$$\frac{\sigma_Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_C}{C}\right)^2}.$$

En supposant que l'incertitude type sur ces composants soit de 2% par exemple,

$$\frac{\sigma_Q}{Q} = \sqrt{(2 \cdot 10^{-2})^2 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2}\right)^2} \simeq 2,5\%.$$

► Dans le cas d'un composant, en prenant l'exemple d'une résistance, l'incertitude est donnée par la couleur du dernier anneau. Un anneau de couleur or correspond à 5 % de la valeur de la résistance. En notant R la valeur indiquée de la résistance, une loi uniforme conduit à prendre une incertitude type $R \times 0,05/\sqrt{3}$, soit une incertitude relative $0,05/\sqrt{3}$.

III.2. Encadrement expérimental

La valeur mesurée est comprise entre deux valeurs x_{\min} et x_{\max} estimées par rapport au protocole de mesure. Une mesure au hasard conduirait à une valeur comprise entre x_{\min} et x_{\max} avec une densité de probabilité uniforme. Dans ce cas, la valeur de l'incertitude type σ est égale à

$$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\sqrt{12}} \simeq 0,3(x_{\max} - x_{\min}).$$

Supposons par exemple que, lors de la mesure de la distance entre un objet et son image sur un écran (par une lentille convergente), l'image est vue nette pour un intervalle de positions de l'écran de largeur 1 cm ; alors l'incertitude type sur la position de l'écran est d'environ 3 mm.

L'incertitude s'exprime avec au plus deux chiffres significatifs, et l'écriture de x_{est} doit se limiter aux chiffres sur lesquels l'incertitude porte. On utilise également l'incertitude relative $\frac{\Delta x}{x_{\text{est}}}$.

IV. Incertitude type composée

IV.1. Propagation des erreurs

Définition A.7. Incertitude type composée

C'est l'incertitude type du résultat d'un mesurage, lorsque ce résultat est obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs.

Par exemple, on détermine le facteur de qualité d'un filtre R , L , C à partir de la valeur de ces trois composants : $Q = f(R, L, C)$. Autre exemple, en optique, lorsque l'on mesure avec une certaine incertitude la position d'un objet et d'une image par rapport à une lentille, on peut en déduire, à l'aide de la formule de conjugaison, la focale de la lentille : quelle est alors l'incertitude sur la focale ?

De manière générale, posons $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_K)$, où la grandeur Y est une fonction des variables aléatoires X_k (espérance x_{kc} , écart type σ_k). En supposant les erreurs « petites » (afin de pouvoir effectuer un développement de Taylor de la fonction f) et les variables aléatoires indépendantes (il faut sinon faire intervenir des covariances), alors

$$\text{Var}(Y) = \sum_{k=1}^K \left[\frac{\partial f}{\partial X_k}(x_{1c}, x_{2c}, \dots, x_{Kc}) \right]^2 \text{Var}(X_k),$$

soit

$$\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left[\frac{\partial f}{\partial X_k}(x_{1c}, x_{2c}, \dots, x_{Kc}) \sigma_k \right]^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$\left[x_{\text{moy}} - 2 \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}, x_{\text{moy}} + 2 \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \right]$$

dès lors que l'on dépasse une dizaine de mesures.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	∞
t_n	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,20	1,96

TABLEAU A.1. Coefficients de Student.

Notons enfin que l'estimateur de l'écart type σ_{n-1} est en fait lui-même déterminé à une incertitude près. Pour 50 mesures, l'incertitude est de l'ordre de 10%. On se limitera donc le plus souvent à un chiffre significatif sur l'incertitude, le dernier chiffre significatif pour l'estimation de la grandeur mesurée devant être le même (au sens numération) que celui de l'incertitude.

III. Évaluation de type B de l'incertitude

On obtient l'incertitude type de type B à partir d'une densité de probabilité supposée, habituellement fondée sur un ensemble d'informations fiables (notice d'un appareil de mesure, par exemple). Pour évaluer l'incertitude type σ sur une mesure x d'une grandeur X , plusieurs cas peuvent donc se présenter selon l'expérience et les appareils utilisés.

III.1. Informations constructeur

La valeur est lue sur un appareil de mesure, dont la précision est fournie¹² par le constructeur.

- ▶ Dans des cas très rares, le constructeur donne directement l'incertitude type.
- ▶ Dans le cas des appareils analogiques, l'incertitude type σ est liée à la résolution de l'appareil (graduation d'une règle, d'une burette, d'un cadran à aiguille, etc.). En modélisant par une loi uniforme (voir section II.2.1), l'incertitude type est égale à $\sigma = \frac{1 \text{ division}}{\sqrt{12}}$. Par exemple, si la précision d'une balance est de 1 mg, alors on estime l'incertitude type à environ 0,3 mg.
- ▶ Lorsque le constructeur fournit une indication Δ_c (c pour constructeur) sans autre information, il faut supposer que la loi est uniforme de largeur $2\Delta_c$; l'incertitude type est alors $2\Delta_c/\sqrt{12}$, soit $\Delta_c/\sqrt{3}$.
- ▶ Dans le cas des appareils numériques (vérifiés), l'incertitude est fournie par le constructeur sous la forme $p\%$ lecture + n UL (Unité de Lecture). Par exemple, la lecture d'une tension sur un voltmètre numérique donne 2,458 V, et le constructeur fournit¹³ pour le calibre utilisé 0,1% lecture + 1 UL (ici 1 mV), donc l'incertitude fournie par le constructeur est $\Delta_c = 3,458 \text{ mV}$; l'incertitude type est alors $\Delta_c/\sqrt{3} = 2 \text{ mV}$.

12. Ces indications ne sont pas toujours dignes de confiance car les appareils dérivent en vieillissant; il faut notamment parfois les recalibrer.

13. L'incertitude diffère en mode AC ou DC, il s'agit ici de la mesure d'une tension continue.

positif, pour augmenter l'intervalle de confiance. Les valeurs typiques sont $m = 2$ et $m = 3$, correspondant respectivement à des niveaux de confiance de 95 % et 99,7 %. Certaines situations nécessitent un facteur d'élargissement m plus important, par exemple si la sécurité des utilisateurs entre en compte, ou si les aspects financiers sont importants : dans ce cas, on choisit généralement $m = 6$, ce qui permet d'avoir une confiance de $100 - 2 \cdot 10^{-7}$ %. Imaginons une entreprise qui produit des billes sphériques en métal⁸ de rayon $r = 1\,000$ cm, avec une tolérance de $\Delta r = 0,01$ mm : si le rayon est en dehors de l'intervalle $[r - \Delta r; r + \Delta r]$, la bille est inutilisable. L'entreprise va donc produire des billes dans cet intervalle, avec une confiance donnée. Un intervalle de confiance élargi avec $m = 3$ donne une confiance de l'ordre de 99,7 %, mais si l'entreprise produit 10^7 pièces par an, cela représente $3 \cdot 10^4$ pièces perdues ! En revanche, un intervalle élargi avec $m = 6$ permet d'en perdre moins d'une par an (bien évidemment, en pratique, d'autres problèmes peuvent survenir, et les pertes seront un peu plus élevées).

Autre exemple : le 4 juillet 2012, lorsque le CERN annonce la découverte d'un nouveau boson⁹, cette annonce d'importance doit être étayée. C'est un intervalle de confiance élargi à $m = 5$, soit un degré de confiance de 99,99997 %, qui a été utilisé.

Néanmoins, en séance de travaux pratiques, on choisit généralement de travailler avec l'incertitude type, ou éventuellement l'incertitude élargie avec $m = 2$.

II.3.2. Coefficient de Student

La section précédente n'est valable que si l'on connaît exactement l'écart type σ de la loi normale suivie par X . L'écart de la valeur moyenne à la valeur vraie, rapportée à l'écart type de sa propre distribution, soit $\frac{X_{\text{moy}} - x_c}{\sigma/\sqrt{n}}$, suit une loi normale standard¹⁰. Ce n'est cependant pas le cas ; seul un estimateur σ_{n-1} de l'écart type de X peut être obtenu. La variable aléatoire t , telle que

$$t = \frac{X_{\text{moy}} - x_c}{\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}},$$

ne suit alors pas une distribution gaussienne, mais une distribution de Student¹¹. La distinction n'a d'importance que lorsque le nombre d'échantillons est faible (t tend vers une distribution normale standard lorsque n tend vers l'infini), mais c'est justement souvent le cas en travaux pratiques.

Dans le cas d'un faible nombre n de mesures, il faut donc utiliser un coefficient (ou quantile) t_n de Student, de sorte que l'intervalle de confiance à 95 % devient

$$\left[x_{\text{moy}} - t_n \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}, x_{\text{moy}} + t_n \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \right].$$

Quelques coefficients sont donnés dans le tableau A.1. Lorsque n tend vers l'infini, t_n tend vers 1,96 correspondant à la loi normale. Pour cette raison, la norme ISO 9000 conseille de prendre pour *intervalle de confiance à 95 %*

8. Par exemple, pour la fabrication de roulements à billes.

9. *A priori* le boson de Higgs ; ce boson permet notamment d'expliquer pourquoi certaines particules ont une masse et d'autres non.

10. C'est-à-dire une loi normale d'espérance nulle et d'écart type unité ; on parle aussi de loi normale centrée réduite.

11. Student est le pseudonyme utilisé par le statisticien anglais William Gosset (1876-1937) qui, employé par la brasserie Guinness pour stabiliser le goût de la bière, ne pouvait publier sous son propre nom. La présence d'un statisticien dans l'entreprise constituait alors un secret de fabrication.

caractérisée par l'écart type σ . Plus σ est grand, plus des valeurs éloignées de x_c deviennent fréquentes (voir figure A.4). La probabilité qu'une mesure soit dans l'intervalle $[x; x + dx]$ est $f(x)dx$; en pratique, les petites erreurs sont donc les plus probables et les erreurs importantes sont rares (elles sont possibles, mais peu probables).

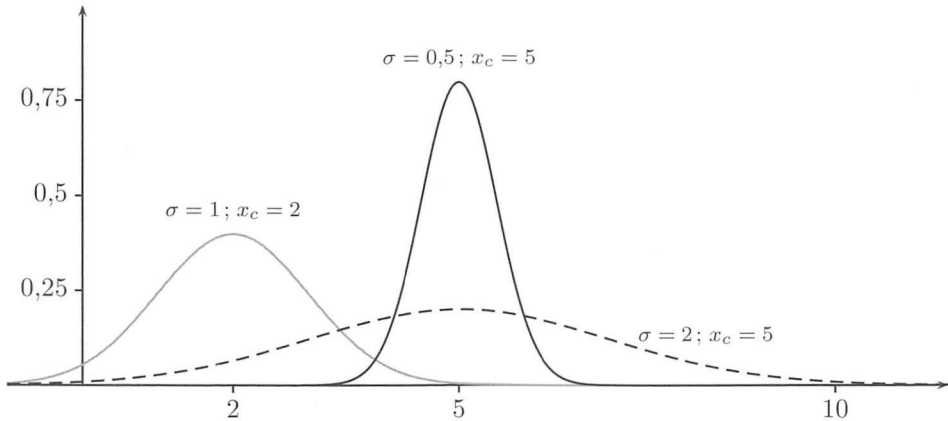


FIG. A.4. Distributions gaussiennes.

Dans le cas d'une distribution gaussienne, on peut calculer qu'environ 68 % des mesures se répartissent dans l'intervalle $[x_c - \sigma, x_c + \sigma]$ et environ 95 % dans l'intervalle $[x_c - 2\sigma, x_c + 2\sigma]$ (voir figure A.5).

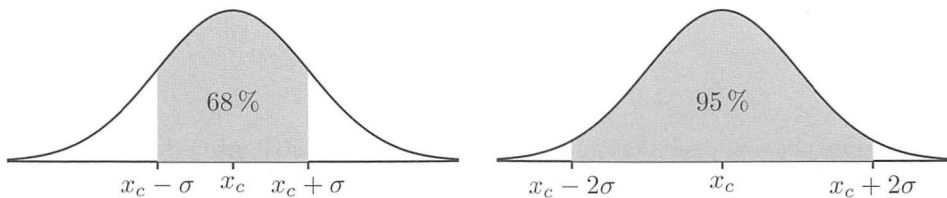


FIG. A.5. Répartition des mesures dans des intervalles centrés sur la valeur moyenne.

II.3. Intervalle de confiance

II.3.1. Incertitude élargie

Plutôt que d'associer un écart type à une valeur estimée, il est plus agréable d'introduire la notion d'intervalle de confiance, c'est-à-dire un intervalle $[x_{\text{est}} - \Delta x, x_{\text{est}} + \Delta x]$ pour lequel la probabilité qu'il contienne la valeur vraie x_c soit importante. Ainsi, dans le cas d'une variable aléatoire X suivant une loi normale (espérance x_c , écart type σ), la valeur moyenne x_{moy} suit elle aussi une loi normale de même espérance et d'écart type σ/\sqrt{n} . Alors x_c a environ 68 % de chances d'être dans l'intervalle $[x_{\text{moy}} - \sigma, x_{\text{moy}} + \sigma]$.

L'intervalle formé sur l'incertitude type correspond donc à un niveau de confiance de 68 %, néanmoins il est parfois intéressant de donner l'*incertitude élargie* $m\sigma$, m réel

II.2. Loïs de distribution

Les résultats précédents sont généraux (pour peu que la densité de probabilité admette une espérance) ; nous allons les préciser dans le cas particulier de la loi normale afin d'introduire la notion d'intervalle de confiance.

Toutes les grandeurs n'obéissent pas à une loi normale (ou loi de distribution gaussienne, voir section II.2.2). Par exemple, lors d'un sondage de second tour d'une élection, un institut interroge n électeurs (de l'ordre d'un millier) parmi la totalité des personnes en âge de voter. Cela s'apparente au tirage de boules blanches et noires dans une urne, donc à une loi de probabilité binomiale (loi discrète). Il existe une multitude de lois de probabilité, adaptées à chaque situation (loi de Poisson pour modéliser le taux d'apparition des cancers ou plus généralement l'apparition d'événements rares, loi exponentielle pour la désintégration radioactive, etc.), nous allons nous limiter à l'étude des deux lois les plus utilisées en travaux pratiques : la loi normale et la loi uniforme (nous évoquerons de plus la loi de Student à la section II.3).

II.2.1. Loi uniforme

Cette loi suppose une densité de probabilité uniforme dans un intervalle $[a, b]$, la densité étant nulle partout ailleurs. Elle est utilisée en travaux pratiques notamment lorsque la lecture se fait sur une graduation. La densité de probabilité est représentée sur la figure A.3.

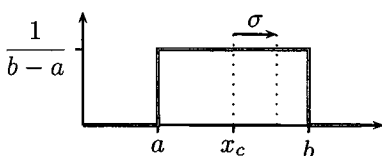


FIG. A.3. Loi uniforme continue.

L'espérance x_c d'une variable X obéissant à une telle loi est $x_c = \mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, sa variance $\text{Var}(X)$ et son écart type σ sont respectivement

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

II.2.2. Distribution gaussienne

Dans la grande majorité des cas, des mesures indépendantes x d'une grandeur physique X se répartissent selon une loi de distribution gaussienne (appelée aussi loi normale) ; c'est-à-dire en pratique qu'en réalisant un histogramme avec les résultats de N mesurages (pour une expérience donnée), l'allure de l'historgramme tend vers une gaussienne lorsque le nombre N de mesurages tend vers l'infini (on peut s'en convaincre dès que N dépasse quelques dizaines). Cette observation est justifiée théoriquement lorsque les causes d'erreurs sont multiples et d'importance comparable (théorème central limite).

La densité de probabilité f d'une loi gaussienne est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2}\right].$$

La gaussienne est centrée sur son espérance mathématique x_c (sa moyenne et sa médiane sont égales). La dispersion des mesures autour de la valeur moyenne est

[1, n] les mesures effectuées, le meilleur estimateur de la grandeur est donc

$$x_{\text{est}} = x_{\text{moy}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Il s'agit du meilleur estimateur car il est sans biais et, à partir des x_i , c'est celui dont l'écart type est le plus faible. L'estimateur x_{moy} tend vers x_c lorsque n tend vers l'infini.

II.1.2. Estimateur de l'écart type

Le meilleur estimateur, à partir des mesures x_i , de l'écart type σ est la grandeur⁷ σ_{n-1} telle que

$$\sigma_{\text{est}} = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{moy}})^2}{n-1}}.$$

L'estimateur σ_{n-1} tend vers σ lorsque n tend vers l'infini.

II.1.3. Incertitude type sur l'estimateur de la grandeur

Lorsque l'on calcule x_{moy} à partir des x_i (réalisations d'une variable aléatoire X d'espérance mathématique x_c et d'écart type σ), cette moyenne est elle-même une réalisation d'une variable aléatoire X_{moy} d'espérance mathématique x_c et d'écart type σ/\sqrt{n} .

Le résultat précédent justifie l'intérêt de réaliser plusieurs mesurages afin de minimiser l'incertitude type sur la valeur estimée. L'estimateur x_{moy} est déterminé à partir de n mesurages; une autre série de n mesurages conduirait à une valeur moyenne différente: chaque valeur moyenne est une réalisation d'une variable aléatoire parmi la population de l'infinité des valeurs moyennes possibles. Le résultat précédent montre que la dispersion de l'ensemble des valeurs moyennes, caractérisée par σ_{n-1}/\sqrt{n} , est plus faible que la dispersion de l'ensemble des mesures, caractérisée par l'écart type σ_{n-1} (la figure A.2 illustre ce phénomène). Augmenter le nombre de mesurages (indépendants) permet de diminuer l'incertitude type.

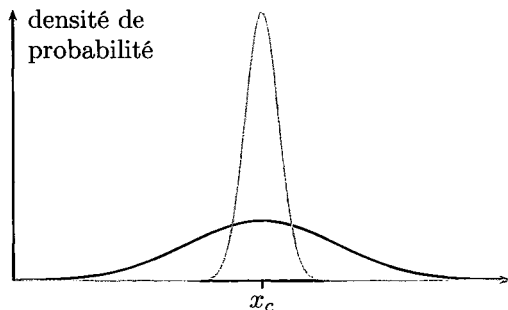


FIG. A.2. Distribution de la variable X (en noir) et de la valeur moyenne X_{moy} pour $n = 20$ (en gris).

7. La présence du $n-1$ plutôt que n se justifie par exemple dans le cas d'une mesure unique. La quantité σ_n donnerait un écart type nul, ce qui est absurde; en revanche, σ_{n-1} n'est pas défini, confortant le bon sens commun: il n'est pas possible statistiquement d'estimer d'écart type à la valeur vraie à partir d'une seule mesure.

Définition A.6. *Incertitude type*

L'incertitude type est un paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

L'évaluation de l'incertitude repose sur des lois de probabilité ; la mesure d'une grandeur est vue comme une réalisation d'une variable aléatoire, l'incertitude type sera l'écart type de cette variable.

L'évaluation de l'incertitude sur la mesure est classée en deux catégories⁵ selon la méthode employée :

- ▶ évaluation de type A : l'évaluation de l'incertitude se fait par analyse statistique de séries d'observations. La valeur mesurée est la moyenne des mesures et l'écart type renseigne sur la dispersion des résultats, donc sur l'erreur commise (voir section II) ;
- ▶ évaluation de type B : évaluation non statistique, par exemple lors d'une unique mesure (ce qui est souvent le cas en travaux pratiques). Dans ce cas, il faut évaluer l'incertitude par un modèle probabiliste (voir section III) rendant compte de la précision des appareils, des erreurs de lecture, de pointé, etc.

L'évaluation de type B nécessite souvent du bon sens, et une bonne connaissance de l'expérience effectuée.

II. Évaluation de type A de l'incertitude

Rappelons que la mesure d'une grandeur physique X est vue comme une réalisation d'une variable aléatoire. La densité de probabilité effectivement suivie par cette variable est inconnue. Il en va donc de même de son espérance (notée x_c) et de son écart type (noté σ). L'objectif est d'estimer ces deux paramètres.

II.1. Généralités

On obtient l'incertitude type de type A à partir d'une densité de probabilité déduite d'une distribution d'effectif (histogramme d'une série de mesures, par exemple). C'est le cas en travaux pratiques lorsque plusieurs élèves (ou binômes) mesurent de manière indépendante la même grandeur physique (par exemple, la longueur d'onde de la raie verte d'une lampe à vapeur de mercure). En regroupant les résultats, on peut obtenir un histogramme qui permet d'entrevoir la loi de probabilité⁶ que suit la variable aléatoire. À partir de ces résultats, il faut estimer la valeur de la grandeur mesurée ainsi qu'une incertitude type.

II.1.1. Estimateur de la grandeur mesurée

On montre que la moyenne arithmétique des mesures indépendantes d'une grandeur physique constitue le meilleur estimateur de la grandeur mesurée. En notant x_i , $i \in$

5. Il s'agit toujours du fruit d'un consensus international au travers du JCGM.

6. On ne dispose ici que d'un échantillon (quelques mesures) de la population, il faudrait une infinité de mesures indépendantes pour accéder à la densité de probabilité.

de déterminer un estimateur de la valeur vraie et de quantifier l'incertitude qui pèse sur cet estimateur (voir section I.5).

I.4. Fidélité et justesse

Avec les notations précédentes, l'erreur sur le résultat d'une mesure peut s'écrire comme la somme d'une erreur systématique et d'une erreur aléatoire,

$$x = \underbrace{(x - x_{\text{est}})}_{\text{erreur aléatoire}} + \underbrace{(x_{\text{est}} - x_c)}_{\text{erreur systématique}} + x_c.$$

- La *fidélité* d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des résultats voisins lors de chaque mesurage, il faut donc pour cela que l'erreur aléatoire soit faible (mesures peu dispersées).
- La *justesse* d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des résultats sans biais systématique (faible erreur systématique).

La figure A.1 résume ces concepts par analogie avec un tir sur une cible. Le centre de la cible représente la valeur vraie du mesurande et chaque impact est le résultat d'une mesure.

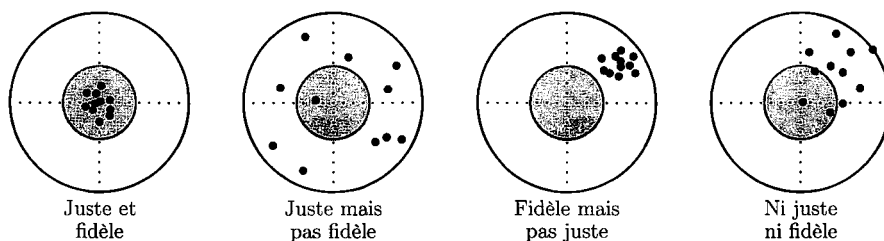


FIG. A.1. Tir sur une cible pour illustrer justesse et fidélité. Dans le premier et le troisième exemple, les impacts sont peu dispersés (erreur aléatoire faible) ; dans le premier et le deuxième exemple, les impacts sont centrés sur la cible (erreur systématique faible).

Remarque Il ne faut pas confondre erreur et incertitude. Le concept d'erreur est idéal et les erreurs ne peuvent pas être connues exactement. C'est justement cette méconnaissance (ou incertitude, le mot parle de lui-même) que l'on cherche à quantifier au moyen de l'incertitude. Par exemple, le résultat d'un mesurage après correction peut, sans qu'on le sache, être très proche de la valeur vraie (donc avoir une erreur négligeable) même s'il possède une incertitude élevée.

I.5. Évaluation de l'incertitude, incertitude type

D'après ce qui précède, il est impossible de connaître la valeur vraie du mesurande, en raison d'une part de la correction imparfaite des erreurs systématiques et d'autre part de l'incertitude provenant des effets aléatoires (variations stochastiques de grandeurs d'influence). L'objectif du mesurage est de proposer un intervalle de valeurs probables du mesurande, soit en pratique une valeur estimée et une incertitude type sur cette valeur.

I.2. Erreur systématique

Indépendamment de la variabilité des mesures, le mesurage introduit fréquemment un biais dans le résultat : on parle d'*erreur systématique*. Cela peut être dû à un problème de justesse de l'instrument utilisé (mauvaise calibration, par exemple) ou à un biais introduit par la méthode employée (par exemple en électricité, l'appareil utilisé, voltmètre ou ampèremètre, perturbe le circuit). Si l'on est capable d'identifier clairement les causes de cette erreur systématique, il est possible d'estimer la correction à apporter afin d'améliorer la justesse de la mesure. Cette estimation est cependant imparfaite et il faudra tenir compte de l'incertitude sur la correction appliquée².

I.3. Valeur vraie, erreur aléatoire

Supposons que les différentes mesures effectuées, d'un même mesurande, ont pu être corrigées de l'erreur systématique. Ces mesures restent dispersées, pour des raisons liées au mesurage ou intrinsèques à la grandeur mesurée (largeur d'une raie spectrale, par exemple).

L'approche employée par la suite est celle proposée par le Comité commun pour les guides en métrologie³ (acronyme anglais : JCGM) dans le guide *Vocabulaire international de métrologie* publié en 2012 (reprenant celui publié en 2008, à quelques corrections mineures près). Dans ce guide, deux approches s'opposent : l'une « classique », pour laquelle l'objectif de la mesure est d'obtenir une valeur la plus proche possible d'une « valeur vraie », l'autre, détaillée notamment dans le *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (GUM), qui postule que la valeur vraie n'existe pas mais qu'il existe un intervalle de valeurs possibles. Il est dans tous les cas admis que le concept de valeur vraie est idéalisé, il est même en contradiction avec la mécanique quantique. Nous retiendrons cependant sa définition usuelle :

Définition A.4. Valeur vraie

La valeur vraie du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait.

Par la suite nous supposerons que la mesure d'une grandeur est une réalisation d'une variable aléatoire (dont on ne connaît pas la loi de probabilité) ; la valeur vraie est l'*espérance mathématique* de cette variable, après correction de l'erreur systématique. En théorie, pour déterminer la valeur vraie, il faut donc accéder à la loi de probabilité en effectuant une infinité de mesures indépendantes. En pratique, un nombre fini de mesurages est effectué et il faut, à partir de ces résultats, obtenir un estimateur de cette valeur vraie. Notons X la grandeur physique⁴, x_c sa valeur vraie, x_{est} l'estimateur de cette valeur vraie à partir d'un nombre fini de mesurages, et x le résultat d'une mesure.

Définition A.5. Erreur aléatoire

On appelle erreur aléatoire la différence $x - x_{\text{est}}$.

Cette erreur varie aléatoirement à chaque mesure, on ne peut donc pas lui appliquer de correction. En revanche, un traitement statistique des résultats de mesurages permet

2. On supposera par la suite que les variations de l'erreur systématique autour de la correction effectuée sont aléatoires et obéissent à une loi de probabilité ; il sera alors possible d'estimer l'incertitude sur la correction en termes d'écart type (voir section I.5).

3. Les travaux de ce comité sont publiés sur le site du Bureau international des poids et mesures.

4. Par commodité, nous notons aussi X la variable aléatoire dont chaque mesurage est une réalisation.

Annexe A

MESURES ET INCERTITUDES

UN MODÈLE physique expliquant un phénomène doit être validé par un accord avec l'expérience. Il faut donc nécessairement être capable de mesurer des grandeurs, mais aussi d'estimer la confiance que l'on peut avoir en ces mesures. Plus généralement, la mesure¹ est fondamentale dans de nombreux domaines (mesure d'un volume ou d'un poids dans une industrie ou un commerce, mesure d'une vitesse lors d'un contrôle radar, mesure d'une concentration lors d'une analyse biologique, etc.). Enfin, la mesure de grandeurs, ainsi que l'estimation de la confiance que l'on peut avoir en elles, constitue l'activité principale des laboratoires de métrologie. Les valeurs de référence ainsi fixées servent ensuite à étalonner d'autres appareils de mesure.

Définition A.1. *Mesurande*

On appelle mesurande la grandeur que l'on veut mesurer.

Définition A.2. *Mesurage*

Le mesurage est le processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

I. Mesure physique et erreurs

I.1. Variabilité des mesures

Lorsque plusieurs mesures d'une même grandeur sont effectuées, on constate que l'on n'obtient pas exactement le même résultat à chaque fois (sous réserve que l'appareil de mesure soit adapté, c'est-à-dire suffisamment précis notamment). Cette dispersion des résultats a plusieurs origines :

- ▶ la grandeur que l'on cherche à mesurer, qui peut elle-même être amenée à varier ;
- ▶ l'instrument de mesure, selon sa fidélité et sa sensibilité ;
- ▶ l'expérimentateur, dont l'appréciation peut changer d'une mesure à l'autre.

Définition A.3. *Grandeur d'influence*

On appelle grandeur d'influence une grandeur, autre que le mesurande, qui a un effet sur le résultat du mesurage.

Notons en particulier, parmi les paramètres dont on contrôle rarement la variation au laboratoire, la température et la pression.

1. Le mot mesure a plusieurs significations, c'est pourquoi le mot mesurage a été introduit (voir définition A.2).

Circuit fixe dans un champ variable – Auto-induction

Coefficient L d'auto-inductance (en H) :

$$\phi_{\text{propre}} = L i$$

Force électromotrice auto-induite :

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

Énergie potentielle magnétique d'un circuit :

$$\mathcal{E}_{\text{ma}} = \frac{1}{2} L i^2$$

Coefficient M d'inductance mutuelle entre deux circuits :

$$M i_1 = \phi_{1 \rightarrow 2} \quad ; \quad M i_2 = \phi_{2 \rightarrow 1}$$

Énergie potentielle magnétique de deux circuits couplés :

$$\mathcal{E}_{\text{ma}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Relation du transformateur pour les tensions :

$$\frac{U_2}{U_1} = \pm \frac{N_2}{N_1}$$

Circuit mobile dans un champ stationnaire

Conversion de puissance électromécanique en champ stationnaire (relation fautive en champ temporellement variable) :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie par } e} = -\mathcal{P}_{\text{fournie par } \vec{F}_{1a}}$$

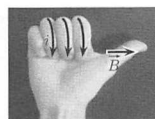
Formulaire sur l'induction

Champ magnétique

Perméabilité magnétique du vide :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Le champ créé par une bobine est orienté relativement au courant par la règle de la main droite :



Champ créé par une bobine longue (solénoïde) :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$$

Moment magnétique :

$$\vec{m} = i \vec{S}$$

Actions d'un champ magnétique

Force de Laplace élémentaire ($d\vec{\ell}_M$ est orienté dans le sens conventionnel du courant) :

$$d\vec{F}_{1a} = i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)$$

Force de Laplace exercée sur une barre de longueur ℓ par un champ uniforme :

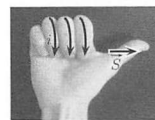
$$\vec{F}_{1a} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Moment exercé par un champ uniforme \vec{B} sur un moment magnétique \vec{m} . Ce moment tend à aligner \vec{m} sur \vec{B} :

$$\vec{M}_{1a} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Lois de l'induction

Le vecteur surface d'un circuit est déterminé par l'orientation de i et la règle de la main droite :



Flux magnétique créé par un champ \vec{B} uniforme \vec{e} travers un circuit de vecteur surface \vec{S} :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Loi de Faraday (fem induite orientée en convention générateur) :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Loi de modération de Lenz :

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

5. Moteur à entrefer plan ★★

(solution page 792)

Un moteur à courant continu à entrefer plan est constitué d'une roue en plastique,

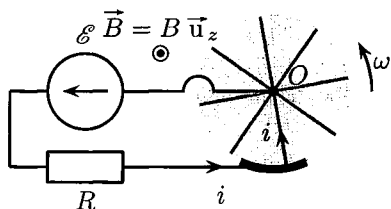


FIG. 24.12. Moteur à entrefer plan.

de rayon a et de moment d'inertie J , pouvant pivoter sans frottement autour de son axe (O, \vec{u}_z) (voir figure 24.12). Quelques rayons de cette roue sont métalliques et peuvent assurer la conduction du courant entre la périphérie et le centre de la roue. Un contacteur situé en périphérie de la roue (en gras sur le schéma) assure qu'un seul rayon à la fois participe à la conduction électrique. Le circuit filiforme ainsi formé est alimenté par un générateur de fem constante \mathcal{E} et possède la résistance électrique totale R . L'ensemble baigne dans l'entrefer d'un aimant où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$. On note ω la vitesse angulaire de rotation de la roue autour de l'axe (O, \vec{u}_z) .

1. Donner le schéma électrique équivalent au circuit et établir l'équation électrique.
2. Déterminer le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) des actions de Laplace subies par le rotor.
3. Par l'intermédiaire de son arbre de rotation, le rotor fournit un couple Γ constant à un dispositif extérieur. Établir l'équation mécanique du rotor.
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par ω et l'écrire sous forme canonique en introduisant un temps caractéristique τ et une grandeur constante, notée ω_ℓ , homogène à une vitesse angulaire. En prenant pour condition initiale $\omega = 0$, résoudre cette équation différentielle et tracer ω en fonction du temps. Interpréter la signification des grandeurs τ et ω_ℓ .
5. Lorsque le régime permanent de rotation est atteint, tracer ω_ℓ en fonction de Γ et commenter le graphe obtenu.
6. Exprimer la valeur i_{pe} de l'intensité i en régime permanent de rotation. Commenter l'expression.
7. En régime quelconque (non nécessairement permanent), effectuer un bilan énergétique sur ce moteur.
8. Pour simplifier, on suppose que les N rayons de la roue ont une résistance électrique nulle, la résistance R du circuit étant uniquement due aux autres éléments électriques. Dans toutes les questions précédentes, on a supposé qu'un seul rayon à la fois participait à la conduction électrique. On suppose maintenant que le contacteur fait tout le tour de la roue, assurant ainsi le passage du courant simultanément dans tous les rayons. On admet que la fem induite dans chaque rayon a la même expression que la fem due au mouvement d'un seul rayon. Les équations électrique et mécanique sont-elles modifiées ? Quel est l'intérêt d'alimenter tous les rayons en même temps ?

4. Impédance motionnelle d'un haut-parleur ★★ (solution page 791)

On considère le modèle du haut-parleur dans la géométrie simplifiée des rails de Laplace (voir figure 24.10). Les rails sont horizontaux et l'ensemble baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$. La barre $[CD]$, de masse m et de longueur ℓ , est la seule partie mobile. Elle est liée mécaniquement aux parties fixes du circuit par un ressort de raideur k , qui ne joue aucun rôle électrique. En plus de la réaction normale, les rails exercent sur la barre une force de frottements fluides $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ (avec $\lambda > 0$), où \vec{v} est la vitesse de la barre par rapport aux rails. La barre, en se déplaçant, entraîne avec elle une membrane qui émet des ondes sonores. De ce fait, la barre est soumise à une force résistante supplémentaire $\vec{F}_{\text{son}} = -\alpha \vec{v}$, avec $\alpha > 0$. On note L le coefficient d'auto-inductance (cela tient compte du fait que le circuit d'un vrai haut-parleur est bobiné). Ce circuit déformable est alimenté par un générateur de force électromotrice $\mathcal{E}(t) = E_m \cos(\omega t)$, où $E_m > 0$ et ω est la pulsation temporelle.

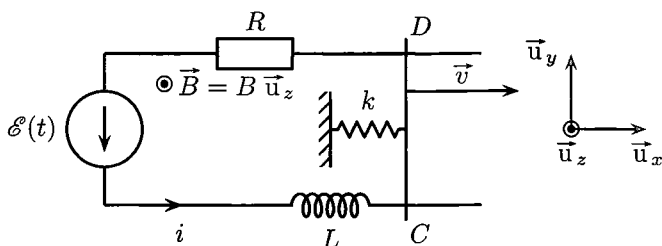


FIG. 24.10. Modèle simplifié de haut-parleur.

- Déterminer le schéma électrique équivalent et établir l'équation électrique vérifiée par l'intensité i .
- Établir l'équation mécanique vérifiée par la position $x(t)$ de la barre.
- Le découplage des équations obtenues est-il simple? Expliquer les éventuelles difficultés qui apparaissent.
- Expliquer pourquoi il est légitime de traiter le problème en utilisant la notation complexe. Pour la suite, on notera $\mathcal{E}(t) = E_m \exp(j\omega t)$, $\underline{x}(t) = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$ et $\underline{i}(t) = \underline{I}_m \exp(j\omega t)$. En éliminant \underline{x} des équations, établir une relation de la forme $\underline{\mathcal{E}} = \underline{Z} i$.

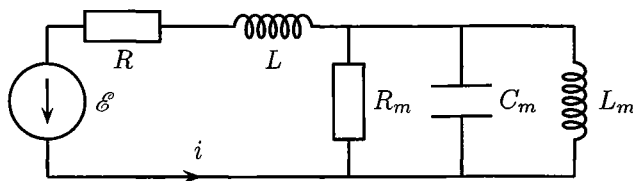


FIG. 24.11. Schéma électrique équivalent au haut-parleur.

- En déduire que, du point de vue électrique, le haut-parleur est équivalent au schéma de la figure 24.11, où R_m , L_m et C_m sont à déterminer. Pourquoi l'association en parallèle de R_m , L_m et C_m est-elle appelée impédance motionnelle?

dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$. La position de la barre est repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. On veut étudier les petits mouvements de la barre autour de la position $\theta = 0$.

1. Établir l'équation mécanique vérifiée par l'angle θ .
2. Établir l'équation électrique du circuit (vérifiée par l'intensité i , dont l'orientation a été choisie arbitrairement sur le schéma).
3. En déduire l'équation du mouvement de la barre et la mettre sous forme canonique en faisant apparaître une pulsation caractéristique ω_0 et un facteur de qualité Q .
4. Commenter et expliquer l'influence de la résistance R sur la nature du mouvement de la barre. Tous les paramètres autres que R étant fixés, faire apparaître une valeur critique R_c de R qui sépare les différents régimes.

3. Freinage magnétique ★★

(solution page 789)

Un cadre carré de cuivre, de résistance électrique totale R et d'auto-inductance négligeable, de côté ℓ et de masse m , est astreint à se déplacer sur une glissière horizontale sans frottement (voir figure 24.9). On repère par $x(t)$ la position de son côté droit. Il arrive depuis $x = -\infty$ avec la vitesse initiale $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$. Il pénètre dans la zone $x > 0$ (grisée sur le schéma) où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$.

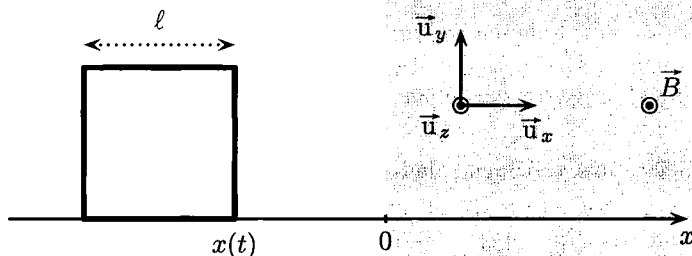


FIG. 24.9. Cadre métallique en mouvement dans un champ magnétique.

1. Établir l'équation du mouvement du cadre pour tout x (en séparant différents cas si nécessaire).
2. On prend pour origine des temps ($t = 0$) l'instant où le cadre commence à entrer dans le champ magnétique. Donner l'évolution de la vitesse $v(t)$ et de la position $x(t)$ du cadre.
3. Le dispositif est utilisé comme ralentisseur. On note T l'instant où il finit d'entrer dans la zone de champ. On souhaite que le cadre ait la vitesse αv_0 à cet instant, où α est un réel.
 - ▶ Déterminer T en fonction de α et des données.
 - ▶ Quel est l'intervalle de valeurs possibles pour α ? Est-ce normal?
 - ▶ Déterminer l'intensité $|\vec{B}|$ du champ magnétique qu'il faut imposer en fonction de α et des données. Commenter l'influence des différents paramètres sur $|\vec{B}|$.
4. Les données numériques sont $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $m = 0,10 \text{ kg}$; $R = 1,0 \Omega$. Pour chacun des deux cas $\ell = 1,0 \text{ m}$ et $\ell = 10 \text{ cm}$, déterminer l'intensité du champ magnétique nécessaire pour arrêter complètement le cadre. Ces champs sont-ils réalisables? Comment résoudre les éventuels problèmes qui apparaissent?

La puissance fournie par l'alimentation électrique \mathcal{E} sert à :

- ▶ emplir (algébriquement) le haut-parleur d'énergie (cinétique, potentielle magnétique et potentielle élastique) ;
- ▶ vaincre les frottements (effet Joule dans la résistance, frottements mécaniques de la barre sur les rails et frottements contre l'air).

Le terme αv^2 (frottements contre l'air) est la puissance sonore émise par le haut-parleur. C'est le terme utile. Idéalement, il faudrait annuler $Ri^2 + \lambda v^2$ (résistance nulle et rails sans frottements).

III. Exercices

1. Rails de Laplace ★

(solution page 787)

Deux rails rectilignes parallèles, conducteurs, sont séparés de la distance ℓ . Le plan géométrique formé par les deux rails est incliné de l'angle α par rapport à l'horizontale. Une barre de cuivre, de masse m , peut glisser le long des rails (mouvement de pure translation) en restant orthogonale aux rails. Lorsqu'elle possède la vitesse \vec{v} , elle subit de la part des rails la force de frottement $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où $\lambda > 0$ est le coefficient de frottement. L'ensemble baigne dans un champ magnétique uniforme \vec{B} orthogonal au plan des rails. Une résistance R joint les deux rails et permet de refermer le circuit formé par les rails et la barre (ces éléments étant supposés de résistance électrique nulle). L'auto-induction est négligée dans ce circuit.

1. Établir l'équation du mouvement de la barre.
2. La barre est abandonnée sans vitesse initiale à l'instant initial. Donner l'expression de sa vitesse en fonction du temps. Montrer qu'elle atteint une vitesse limite notée v_ℓ , à exprimer, et commenter l'influence des différents paramètres sur v_ℓ .
3. Établir un bilan énergétique (électrique et mécanique) sur le circuit durant le mouvement de la barre.

2. Pendule conducteur dans un champ magnétique ★★ (solution page 788)

Un pendule pesant est constitué d'une barre métallique homogène de longueur ℓ et de masse m , pouvant pivoter sans frottement (liaison pivot parfaite) par rapport à l'axe horizontal (O, \vec{u}_z) (voir figure 24.8). Son moment d'inertie par rapport à cet axe est J . Son extrémité inférieure est en contact sans frottement avec un arc de cercle métallique (point A). Le circuit électrique plan ainsi constitué est refermé par des fils et possède une résistance R . Son auto-inductance est négligée. L'ensemble baigne

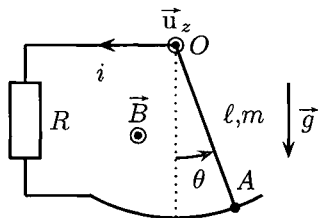
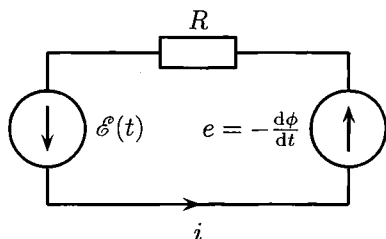


FIG. 24.8. Pendule pesant dans un champ magnétique.

Corrigé

1. On note a la longueur du rectangle formé par le circuit lorsque l'ensemble est à l'équilibre mécanique (ressort ni tendu ni comprimé). On note x l'écart algébrique de position de la barre par rapport à cet état d'équilibre. L'aire du rectangle est donc $(a+x)\ell$ et son vecteur surface associé est, d'après l'orientation choisie pour i , $\vec{S} = (a+x)\ell \vec{u}_z$. Le flux magnétique extérieur est $\phi_{\text{ext}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = (a+x)\ell B$. En tenant compte en plus du flux propre $\phi_{\text{propre}} = Li$, le flux magnétique total à travers le circuit est $\phi = \ell(a+x)B + Li$. La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell v - L\frac{di}{dt}$, où $v = \frac{dx}{dt}$ désigne la vitesse de la barre en projection sur le vecteur unitaire \vec{u}_x .



L'équation électrique de la barre est $\mathcal{E} + e = Ri$, soit $\mathcal{E}(t) - B\ell v - L\frac{di}{dt} = Ri$.

2. La barre est soumise aux actions de Laplace $\vec{F}_{\text{la}} = i\ell B \vec{u}_x$, à l'action de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ressort}} = -kx \vec{u}_x$, aux forces de frottements fluides exercées par les rails et l'air $\vec{F}_{\text{frott}} = -(\lambda + \alpha)v \vec{u}_x$, ainsi qu'à son poids $-mg \vec{u}_z$ et à la réaction normale des rails $N \vec{u}_z$. En projection sur \vec{u}_x , la loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit $i\ell B - (\lambda + \alpha)v - kx = m\frac{dv}{dt}$.

3. Les équations électrique et mécanique sont *linéaires* en $x(t)$ et $i(t)$. En imposant $\mathcal{E}(t) = E \cos(\omega t)$, un régime forcé s'installe dans lequel toutes les grandeurs i , x et v sont sinusoïdales à la pulsation temporelle ω . Ainsi, la membrane vibre en émettant une onde sonore à la même pulsation ω que le signal électrique d'alimentation, ce qui est le but du haut-parleur.

4. Pour réaliser le bilan énergétique, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par $v = \frac{dx}{dt}$,

$$\mathcal{E}i - B\ell iv = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt} - (\lambda + \alpha)v^2 + i\ell Bv.$$

On réorganise les termes et on fait apparaître des dérivées remarquables,

$$\mathcal{E}i - B\ell iv = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) + (\lambda + \alpha)v^2 = i\ell Bv.$$

Dans la première équation, le terme $-B\ell iv$ représente la puissance fournie par la fem « extérieure » induite (par le mouvement de la barre dans le champ magnétique extérieur). Dans la seconde équation, le terme $+B\ell iv$ représente la puissance fournie par les actions de Laplace à la barre. Comme d'habitude, ces deux termes sont opposés (voir théorème 24.2 page 617). On combine les deux équations de manière à faire disparaître ces deux termes,

$$\underbrace{\mathcal{E}i}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } \mathcal{E}}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) + \underbrace{Ri^2 + \lambda v^2 + \alpha v^2}_{\mathcal{P}_{\text{pour vaincre les frottements}}}.$$

$\mathcal{E}_{\text{ma}} + \mathcal{E}_{\text{c}} + \mathcal{E}_{\text{pélast}}$

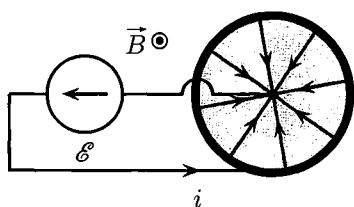


FIG. 24.7. Schéma simplifié d'un moteur rotatif à entrefer plan. La roue peut pivoter autour de son axe. Seuls quelques rayons (ici, huit rayons disposés à 45°) de la roue sont conducteurs électriques.

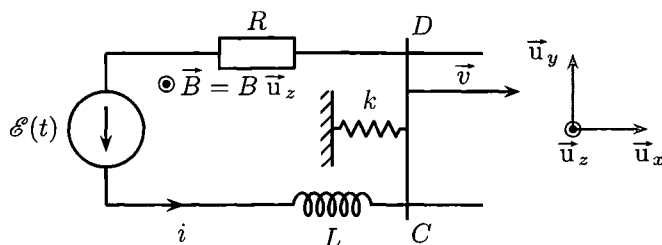
II.2. Haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur doit convertir un signal électrique (tension variable dans le temps) en signal mécanique (vibration d'une membrane pour émettre le son). C'est un transducteur électromécanique qui utilise les actions de Laplace et met en jeu des phénomènes d'induction.

La géométrie des véritables haut-parleurs rend difficile, voire impossible, le calcul du flux magnétique à travers le circuit mobile. Cela compromet l'application de la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$. Pour contourner ce problème, on raisonne sur la géométrie simplifiée des rails de Laplace. Cela donne des équations électrique et mécanique analogues à celles d'un vrai haut-parleur. Ce modèle est donc suffisant pour illustrer le principe du haut-parleur.

EXERCICE CORRIGÉ 24.4.

Modèle simplifié de haut-parleur



Dans un modèle simplifié, un haut-parleur est représenté par des rails de Laplace horizontaux, plongés dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$ orthogonal au plan du circuit. La barre $[CD]$, de masse m et de longueur ℓ , est la seule partie mobile. Elle est liée mécaniquement aux parties fixes du circuit par un ressort de raideur k , qui ne joue aucun rôle électrique. En plus de la réaction normale, les rails exercent sur la barre une force de frottements fluides $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ (avec $\lambda > 0$), où \vec{v} est la vitesse de la barre par rapport aux rails. La barre, en se déplaçant, entraîne avec elle une membrane qui émet des ondes sonores. De ce fait, la barre est soumise à une force résistante supplémentaire $\vec{F}_{\text{son}} = -\alpha \vec{v}$, avec $\alpha > 0$. On note L le coefficient d'auto-inductance (cela tient compte du fait que le circuit d'un vrai haut-parleur est bobiné).

1. Déterminer la fem induite dans le circuit lors du mouvement de la barre mobile $[CD]$. En déduire le schéma électrique équivalent ainsi que l'équation électrique du circuit.
2. Établir l'équation mécanique du mouvement de la barre.
3. Le générateur délivre la tension sinusoïdale $\mathcal{E}(t) = E \cos(\omega t)$ d'amplitude E et de pulsation temporelle ω . Expliquer sans calculs quelle est la nature du mouvement de la barre. Ce dispositif remplit-il bien sa fonction de haut-parleur ?
4. Réaliser un bilan énergétique sur l'ensemble.

En l'absence d'opérateur ($F_{op} = 0$), l'étude mécanique de la barre est analogue à celle qui mène à l'équation (24.3) (voir page 614). Sa projection sur \vec{u}_x s'écrit

$$i(t) \ell B = m \frac{dv}{dt} \quad (\text{équation mécanique}). \quad (24.9)$$

On élimine par exemple i de ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{mR} v = \frac{\mathcal{E} \ell B}{mR} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau} \quad \text{où } \tau \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{mR}{B^2 \ell^2} \text{ et } v_{lim} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\mathcal{E}}{B \ell}.$$

En supposant que la vitesse initiale de la barre soit nulle (phase de démarrage du moteur), la vitesse est donnée par (voir figure 24.6)

$$v(t) = v_{lim} [1 - \exp(-t/\tau)].$$

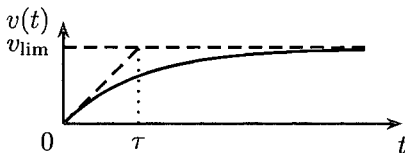


FIG. 24.6. Évolution de la vitesse du moteur linéaire de Laplace.

Force contre-électromotrice d'un moteur électrique Lorsque la vitesse limite $v_{lim} = \frac{\mathcal{E}}{B \ell}$ est atteinte, l'équation électrique (24.8) indique que le courant est nul. C'est une manifestation extrême de la loi de modération de Lenz : la fem induite est exactement opposée à la fem \mathcal{E} qui a causé le démarrage du moteur. Dans un moteur en fonctionnement normal, la force électromotrice induite tend toujours à s'opposer au générateur qui l'alimente. On parle de *force contre-électromotrice* (f_{cem}) du moteur.

Bilan énergétique On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v , et on fait la somme membre à membre des deux équations ainsi obtenues. Les termes $vB \ell i$ se simplifient (on retrouve le fait que $\mathcal{P}_{la} = -\mathcal{P}_{fem \text{ induite}}$) et il reste

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + mv \frac{dv}{dt} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{E}i}_{\mathcal{P}_{fourni \text{ par } \mathcal{E}}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{reçu \text{ par } R}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)}_{\frac{d\mathcal{E}_c}{dt}}.$$

La puissance électrique apportée par le générateur sert à échauffer la résistance d'une part, et à accroître l'énergie cinétique de la barre (objet de masse m à mettre en mouvement) d'autre part. Comme son nom l'indique, le but du moteur est de mettre la barre en mouvement et non de chauffer une résistance. On a donc intérêt à diminuer le plus possible le terme Ri^2 dans le bilan énergétique en utilisant des fils de résistance très faible.

Moteur électrique rotatif à entrefer plan La géométrie des rails de Laplace peut être modifiée pour obtenir un moteur rotatif alimenté en courant continu (voir figure 24.7). Une roue isolante, plongée dans l'entrefer d'un aimant imposant un champ magnétique uniforme, peut pivoter autour de son axe. Quelques rayons de la roue sont métalliques pour conduire le courant. Un circuit électrique contenant un générateur (de fem \mathcal{E} sur le schéma) apporte le courant par la périphérie de la roue et collecte ce courant au centre. Chaque rayon subit des actions de Laplace, ce qui met la roue en rotation. C'est le principe des moteurs électriques de type AXEM[®] (moteurs de faible puissance utilisés dans des dispositifs de précision).

Méthode

Bilan de puissance en rotation

Pour effectuer un bilan de puissance mécanique sur un solide en rotation autour d'un axe fixe, on multiplie l'équation du mouvement (équation sur les moments « $\Gamma = J \frac{d\omega}{dt}$ ») par la vitesse angulaire ω du solide. Cela fait apparaître des termes « $\Gamma \cdot \omega$ » homogènes à des puissances ainsi qu'un terme $J \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} J \omega^2)$, qui s'interprète comme la dérivée de l'énergie cinétique du solide.

II. Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

Cette section illustre le principe des moteurs électriques sur des géométries simplifiées (translation seule).

II.1. Moteur à courant continu à entrefer plan

Principe des moteurs électriques à courant continu

Un générateur électrique crée un courant dans un circuit qui baigne dans un champ magnétique. Des forces de Laplace mettent alors le circuit en mouvement (effet moteur). Cependant, le circuit devient mobile, donc des phénomènes d'induction prennent naissance.

Pour fabriquer un moteur linéaire (donnant lieu à un mouvement de translation), on reprend les rails de Laplace en les alimentant par un générateur électrique de fem \mathcal{E} (voir figure 24.5). La barre $[CD]$ étant initialement immobile, le générateur fait circuler un courant. Étant plongée dans un champ magnétique, la barre est alors soumise à une force de Laplace qui la met en mouvement. Le circuit est donc le siège d'une fem induite, ce qui donne le schéma électrique équivalent.

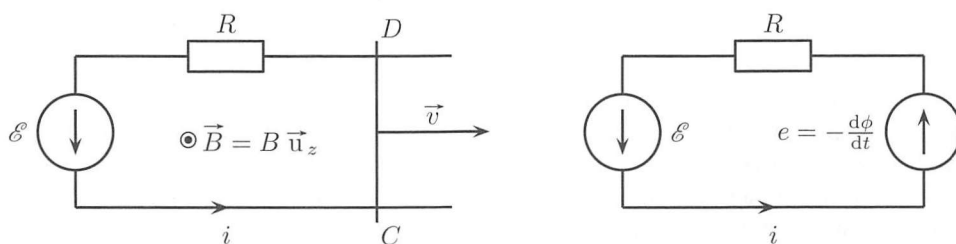


FIG. 24.5. Rails de Laplace utilisés en moteur. La force électromotrice \mathcal{E} est délivrée par un générateur extérieur. À droite, schéma électrocinétique équivalent.

En négligeant l'auto-induction et en notant ℓ la longueur de la barre, le flux magnétique et la fem induite se calculent comme cela a déjà été fait pour obtenir l'équation (24.1) (voir page 614) : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -v(t)B\ell$. Le schéma électrique équivalent de la figure 24.5 donne, par application de la loi des mailles,

$$\mathcal{E} + e = Ri \Rightarrow \mathcal{E} - v(t)B\ell = Ri \quad (\text{équation électrique}). \quad (24.8)$$

2. Le schéma électrique donne l'équation $e = Ri \iff i = \frac{e}{R} = \frac{\omega BS}{R} \sin(\omega t)$. Le courant i est *sinusoïdal alternatif*. Sa pulsation temporelle ω est égale à la vitesse angulaire de rotation du cadre.

3. On introduit le moment magnétique $\vec{m} = i\vec{S} = iS\vec{n}$ du cadre. Le champ magnétique étant uniforme, le moment des actions de Laplace s'écrit (voir théorème 21.5 page 583)

$$\vec{\Gamma}_{\text{la}} = \vec{m} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge B\vec{u}_x = \frac{\omega B^2 S^2}{R} \sin(\omega t) \underbrace{\sin(\vec{n}, \vec{u}_x)}_{=-\omega t} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_{\text{la}} \cdot \vec{u}_z = \Gamma_{\text{la}} = -\frac{\omega B^2 S^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

On remarque que ce moment (en projection sur \vec{u}_z) a toujours signe opposé à celui de ω : il a donc tendance à ralentir le cadre, conformément à la loi de modération de Lenz. Le courant induit, par son sens, tend à s'opposer (*via* les actions de Laplace) aux causes (rotation à la vitesse angulaire ω) qui lui ont donné naissance.

4. L'équation mécanique s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique au cadre en projection sur l'axe (O, \vec{u}_z) . Les seuls moments qui comptent sont Γ_{op} et Γ_{la} . En effet, le poids s'applique au centre de gravité du cadre (point O) et a donc un moment nul par rapport à l'axe. De même, les liaisons pivot sont sans frottement, donc exercent un moment nul par rapport à l'axe. Il reste

$$\Gamma_{\text{op}} + \Gamma_{\text{la}} = J \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (\text{car } \omega \text{ est constante}).$$

5. Pour le bilan de puissance électrique, on multiplie l'équation électrique par i ,

$$ei = Ri \Rightarrow \underbrace{\frac{\omega^2 B^2 S^2}{R} \sin^2(\omega t)}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } e}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}}.$$

Le bilan de puissance mécanique est obtenu en multipliant l'équation mécanique par ω (voir l'encadré « Méthode » ci-après),

$$\Gamma_{\text{op}} \cdot \omega + \Gamma_{\text{la}} \cdot \omega = 0 \Rightarrow \Gamma_{\text{op}} \cdot \omega + \underbrace{\left[-\frac{\omega^2 B^2 S^2}{R} \sin^2(\omega t) \right]}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } \vec{\Gamma}_{\text{la}}}} = 0.$$

On retrouve le fait que $\mathcal{P}_{\text{fournie par } e} = -\mathcal{P}_{\text{fournie par } \Gamma_{\text{la}}}$, conformément au théorème 24.2 (voir page 617). En sommant membre à membre les deux équations de bilan énergétique électrique et mécanique, on obtient le bilan complet

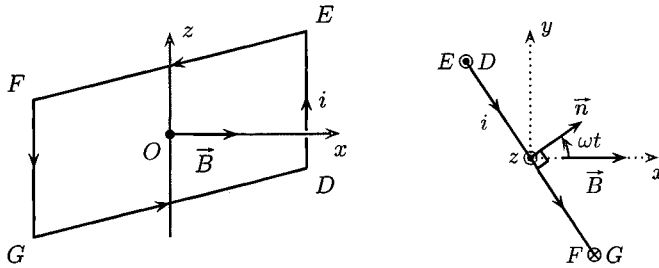
$$\underbrace{\Gamma_{\text{op}} \cdot \omega}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}}.$$

L'opérateur fournit de la puissance mécanique en faisant tourner le générateur qui, à son tour, alimente électriquement la résistance (en courant alternatif).

I.3. Circuit en rotation dans un champ magnétique uniforme

Cette section présente un générateur électrique constitué d'une bobine pivotant autour d'un axe dans un champ magnétique stationnaire. Par sa géométrie tournante, ce dispositif est plus réaliste que les rails de Laplace. Les idées physiques étant les mêmes que pour ce dernier dispositif, l'étude est présentée sous forme d'exercice corrigé.

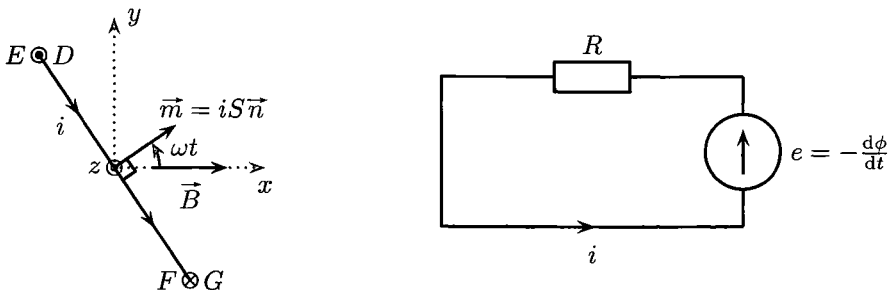
EXERCICE CORRIGÉ 24.3. Spire tournant dans un champ magnétique



On considère un circuit rectangulaire $DEFG$ d'aire S orienté arbitrairement par l'intensité électrique i . Il peut pivoter sans frottements autour de l'axe z . Il est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_x$ orthogonal à l'axe z . Les schémas donnent une vue en perspective et une vue de dessus (depuis les z positifs). Grâce à un couple $\vec{\Gamma}_{op} = \Gamma_{op} \vec{u}_z$ fourni par un opérateur, ce cadre tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (O, \vec{u}_z) . La position angulaire du cadre est repérée par l'angle orienté entre le champ magnétique et la normale unitaire \vec{n} au cadre : $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{n}) = \omega t$. On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) et R sa résistance électrique. On néglige l'auto-induction.

- Déterminer le flux magnétique à travers le circuit. En déduire la fem induite dans le circuit.
- Représenter le schéma électrique équivalent et en déduire l'équation électrique.
- Donner l'expression du moment Γ_{la} des actions de Laplace par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) . Y a-t-il accord avec la loi de modération de Lenz ?
- Établir l'équation du mouvement du cadre (équation mécanique).
- Établir un bilan de puissance électrique et mécanique pour le cadre. Interpréter le bilan complet de puissance qui en résulte.

Corrigé



- On introduit le vecteur surface \vec{S} du cadre, orienté par i et la règle de la main droite. L'angle entre \vec{B} et \vec{S} est $(\vec{B}, \vec{S}) = \omega t$. Le flux magnétique à travers le cadre s'écrit $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\omega t)$. La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = \omega BS \sin(\omega t)$.

► décroît avec B (un champ magnétique intense donne des effets d'induction plus grands et le freinage par la loi de Lenz est plus intense).

C'est le *principe des ralentisseurs électromagnétiques utilisés sur les poids lourds* (voir figure 24.4). Seule la géométrie diffère. Dans un camion, il existe un disque métallique solidaire de l'essieu : ce disque tourne à la même vitesse angulaire que les roues. Un électroaimant peut générer, sur demande du conducteur, un champ magnétique orthogonal au plan du disque. Ainsi, lorsque le camion roule, le disque en rotation est mobile dans un champ magnétique permanent : des courants induits prennent naissance dans le volume du disque (c'est l'analogie du courant induit qui apparaît dans la barre mobile des rails de Laplace). Ces courants volumiques induits, appelés *courants de Foucault*, donnent lieu à des actions de Laplace réparties sur le volume du disque. D'après la loi de modération de Lenz, ces actions de Laplace tendent à ralentir la rotation du disque, donc à freiner le camion. On peut montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire ω des roues du camion est de la même forme que l'équation (24.7) : ω décroît exponentiellement en un temps d'autant plus court que le champ magnétique imposé est intense. Les ralentisseurs électromagnétiques présentent les avantages suivants.

- Les actions de Laplace sont volumiques, donc l'échauffement au freinage est mieux réparti que sur les freins conventionnels où il se fait uniquement dans la zone de frottement entre les plaquettes et le disque.
- Il n'y a pas d'usure mécanique.
- Si jamais la roue se bloque intempestivement, le freinage cesse automatiquement (le couple de freinage est proportionnel à ω) et la roue se débloque aussitôt. Il n'y a donc aucun risque de dérapage.

Le couple de freinage électromagnétique, proportionnel à ω , n'est efficace qu'à grande vitesse. Il devient inefficace à faible vitesse. Ainsi, les ralentisseurs électromagnétiques ne sont utilisés qu'à grande vitesse et le camion finit de s'arrêter avec des freins mécaniques classiques (mâchoires qui serrent des disques solidaires des roues). Pour cette raison, on parle de *ralentisseurs* et non de freins électromagnétiques.

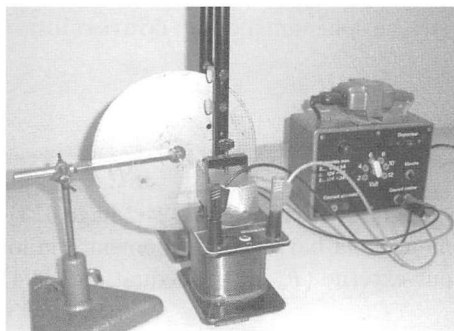


FIG. 24.4. Illustration du principe des ralentisseurs électromagnétiques de camion. Le disque métallique est lancé en rotation à la main. Il baigne en partie dans l'entrefer d'un électroaimant, dont on aperçoit les bobines. Lorsque le générateur alimente les bobines, l'électroaimant génère un champ magnétique et la rotation du disque s'arrête rapidement.

Remarque Par définition, les courants de Foucault sont répartis en volume. Leur géométrie est donc complexe et les calculs ne sont pas au programme de CPGE. En particulier, l'utilisation de la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$ n'est pas possible, car on ne peut pas identifier de circuit filiforme pour placer une fem induite ou calculer le flux magnétique (pas de surface bien définie).

En comparant les équations (24.5) et (24.6) on remarque sur cet exemple que

$$\mathcal{P}_{\text{fournie par } e} = -\mathcal{P}_{\text{fournie par } \vec{F}_{\text{la}}}.$$

On généralise ce résultat par le théorème 24.2.

Théorème 24.2. Puissance et induction dans un champ stationnaire

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la puissance mécanique fournie au circuit par les actions de Laplace induites est l'opposé de la puissance électrique fournie au circuit par la fem induite,

$$\mathcal{P}_{\text{fournie par } e} = -\mathcal{P}_{\text{fournie par } \vec{F}_{\text{la}}}.$$

Cette relation est à la base du fonctionnement de tous les convertisseurs électromécaniques.

Attention, ce résultat n'est plus valable si le champ magnétique dépend du temps, car la fem induite et donc le courant induit sont modifiés, ce qui change les équations de bilan énergétique.

En sommant membre à membre les équations (24.5) et (24.6), les termes $B\ell v i$ se simplifient et on obtient un bilan de puissance électromécanique complet,

$$\underbrace{F_{\text{op}} \cdot v}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)}_{\frac{d\mathcal{E}_c(\text{barre})}{dt}} + \underbrace{R i^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçu par } R}}.$$

La puissance fournie par l'opérateur à la barre sert, d'une part, à augmenter l'énergie cinétique de la barre (démarrage du générateur) et, d'autre part, à alimenter électriquement la résistance (une ampoule électrique, par exemple). En pratique, ce n'est pas le démarrage qui est intéressant, mais le régime permanent, qui se résume à

$$\underbrace{F_{\text{op}} \cdot v}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} = \underbrace{R i^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçu par } R}}.$$

Tous les générateurs électriques reposent sur ce phénomène de **conversion électromécanique de puissance**.

I.2. Freinage électromagnétique

Dans le dispositif des rails de Laplace étudié précédemment (voir figure 24.1 page 613), la force de Laplace tend à s'opposer au mouvement de la barre, conformément à la loi de modération de Lenz. En l'absence d'opérateur externe ($F_{\text{op}} = 0$), l'équation (24.4) du mouvement de la barre se réduit à

$$-\frac{B^2 \ell^2}{R} v = m \frac{dv}{dt} \iff \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}. \quad (24.7)$$

Cela conduit à une décroissance exponentielle de la vitesse avec un temps caractéristique $\tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$, qui :

► croît avec m (plus la barre est lourde, plus il lui faut de temps pour s'arrêter : c'est l'inertie mécanique de la barre) ;

tour crée la force de Laplace, qui tend à s'opposer au mouvement de la barre. Durant les premiers instants du mouvement, le courant induit est encore faible et ses effets le sont aussi (force de Laplace très faible). Le mouvement de la barre est donc le même que s'il n'y avait pas encore de phénomènes d'induction : la courbe de $v(t)$ se confond donc avec sa tangente à l'origine, d'équation $v(t) = \frac{F_{\text{op}}}{m} t$ (qui serait la solution du problème avec $B = 0$).

► En régime permanent, $v = v_{\text{lim}} = \frac{F_{\text{op}} R}{B^2 \ell^2}$. Cette vitesse finie est due à la force de Laplace qui compense exactement celle qu'exerce l'opérateur, car l'équation du mouvement se résume à $F_{\text{op}} + F_{\text{la}} = 0$ lorsque $\frac{dv}{dt} = 0$. Les influences de R , B et ℓ sur v_{lim} peuvent s'interpréter. Si la résistance R du circuit est grande, le courant induit est faible, donc la force de Laplace aussi : elle s'oppose peu à l'action de l'opérateur et la vitesse limite v_{lim} est grande. Si B et ℓ sont grands, les effets d'induction le sont aussi, donc F_{la} s'oppose beaucoup à l'action de l'opérateur, réduisant ainsi la vitesse v_{lim} .

► Dans la force de Laplace, le produit $B \times \ell$ intervient au carré. En effet, il intervient une première fois dans le courant $i = -\frac{B\ell v(t)}{R}$ via la fem d'induction et une autre fois dans l'expression de la force de Laplace $F_{\text{la}} = i\ell B$. Il est heureux que B intervienne au carré : la force de Laplace s'oppose ainsi au mouvement quel que soit le signe de B , conformément à la loi de modération de Lenz.

Méthode

Bilan de puissance en induction

► Pour effectuer un bilan de puissance électrique, on multiplie l'équation sur les tensions (obtenue par la loi des mailles) par l'intensité dans la maille. Cela fait apparaître des termes « $U \cdot i$ » homogènes à des puissances. On interprète ensuite chaque terme comme une puissance reçue ou donnée selon la convention (générateur ou récepteur) pour chaque dipôle.

► Pour effectuer un bilan de puissance mécanique, on multiplie scalairement l'équation du mouvement (équation sur les forces « $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ ») par la vitesse du système. Cela fait apparaître des termes « $\vec{F} \cdot \vec{v}$ » homogènes à des puissances ainsi qu'un terme $m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$, qui s'interprète comme la dérivée de l'énergie cinétique du système.

On multiplie l'équation électrique (24.2) par i ,

$$ei = Ri^2 \Rightarrow \underbrace{-Blvi}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } e}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}} \quad (\text{bilan de puissance électrique}). \quad (24.5)$$

On multiplie l'équation mécanique (24.3) par v ,

$$F_{\text{op}} \cdot v + F_{\text{la}} \cdot v = m \frac{dv}{dt} \cdot v$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{\text{op}} \cdot v}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} + \underbrace{i\ell Bv}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } F_{\text{la}}}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)}_{\frac{d\mathcal{E}_c(\text{barre})}{dt}} \quad (\text{bilan de puissance mécanique}). \quad (24.6)$$

Attention

Équations mécanique et électrique

Les équations mécanique et électrique sont couplées : toutes deux contiennent $v(t)$ et $i(t)$ qui sont des grandeurs dépendant *a priori* du temps. Il ne faut donc pas tenter de résoudre ces équations indépendamment l'une de l'autre. Il faut d'abord les découpler pour séparer v et i .

On extrait $i = -\frac{B\ell v}{R}$ de l'équation électrique (24.2) et on le remplace dans l'équation mécanique (24.3), ce qui donne

$$F_{\text{op}} - \frac{B^2 \ell^2}{R} v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \quad \text{où } \tau \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{mR}{B^2 \ell^2} \quad \text{et } v_{\text{lim}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{F_{\text{op}} R}{B^2 \ell^2}. \quad (24.4)$$

Les notations τ et v_{lim} permettent une mise sous forme canonique de l'équation et rendent les calculs plus lisibles. En prenant pour condition initiale $v(0) = 0$ et en supposant que F_{op} est constante, l'équation (24.4) a pour solution

$$v(t) = v_{\text{lim}} [1 - \exp(-t/\tau)].$$

L'intensité i s'en déduit par $i = -\frac{B\ell v}{R}$,

$$i(t) = i_{\text{lim}} [1 - \exp(-t/\tau)] \quad \text{avec } i_{\text{lim}} \stackrel{\text{def.}}{=} -\frac{F_{\text{op}}}{B\ell}.$$

Les solutions sont tracées sur la figure 24.3 pour le cas $F_{\text{op}} > 0$ et $B > 0$ (il ne faut pas oublier que ces grandeurs sont algébriques). Les grandeurs v_{lim} et i_{lim} introduites dans les calculs s'interprètent *a posteriori* comme les vitesses et intensité limites (d'où l'indice « lim ») atteintes lorsque le temps tend vers l'infini.

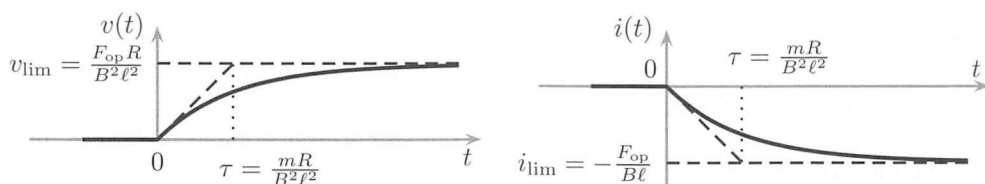


FIG. 24.3. Représentation de i et v en fonction du temps pour les rails de Laplace. Les conditions initiales sont $i = 0$ et $v = 0$, et la force exercée par l'opérateur est supposée constante. Les dessins sont faits en supposant $F_{\text{op}} > 0$ et $B > 0$.

Interprétation du phénomène avec la loi de Lenz

► S'il n'y avait pas de champ magnétique, l'équation du mouvement se réduirait à $F_{\text{op}} = m \frac{dv}{dt}$ et la vitesse de la barre serait $v(t) = \frac{F_{\text{op}}}{m} t$; le graphe de $v(t)$ serait une droite passant par l'origine de pente $\frac{F_{\text{op}}}{m}$: elle se confondrait avec la tangente à l'origine sur la figure 24.3. La vitesse tendrait vers l'infini.

► En présence d'un champ magnétique, la barre est soumise à la force de Laplace $\vec{F}_{\text{la}} = i\ell B \vec{u}_x = -\frac{B^2 \ell^2}{R} v(t) \vec{u}_x$. Cette force est résistante : elle s'oppose à la vitesse de la barre d'autant plus fort que la vitesse est grande. C'est une manifestation de la *loi de modération de Lenz* : le mouvement de la barre crée le courant induit, qui à son

Équation électrique Le flux magnétique à travers le circuit varie, car l'aire du circuit varie lors du mouvement de la barre. Avec l'orientation de i choisie, le vecteur surface du circuit est $\vec{S} = S \vec{u}_z = \ell \times x(t) \vec{u}_z$, donc

$$\phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \vec{u}_z \cdot \ell \times x(t) \vec{u}_z = B\ell x(t).$$

Dans cette expression de ϕ , seul le flux extérieur (dû au champ magnétique de l'aimant) est pris en compte. Le circuit ne contenant qu'une seule spire, son coefficient d'auto-inductance est très faible (de l'ordre du μH), ce qui permet de négliger le flux propre devant le flux extérieur.

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v(t). \quad (24.1)$$

Le schéma électrique équivalent, donné sur la figure 24.2, permet d'écrire (en négligeant l'auto-induction)

$$e = Ri \Rightarrow -B\ell v(t) = Ri(t) \quad (\text{équation électrique}). \quad (24.2)$$

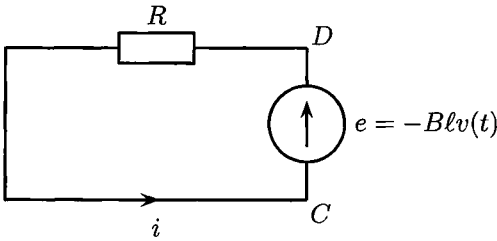


FIG. 24.2. Schéma électrique équivalent à la situation de la figure 24.1. La fem induite est orientée en convention générateur (dans le même sens que i).

Équation mécanique La barre étant parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique extérieur, elle est soumise, entre autres, à des actions de Laplace. Cela nécessite une étude mécanique. La barre de masse m est soumise à :

- ▶ son poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- ▶ la réaction des rails $\vec{N} = N\vec{u}_z$ (\vec{N} est verticale si on néglige les frottements) ;
- ▶ l'action de l'opérateur $\vec{F}_{\text{op}} = F_{\text{op}}\vec{u}_x$ (F_{op} est algébrique et supposée constante pour la suite) ;
- ▶ des actions de Laplace $\vec{F}_{\text{la}} = i\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\ell\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = i\ell B\vec{u}_x$.

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit

$$\underbrace{m\vec{g} + \vec{N}}_{\parallel \vec{u}_z} + \vec{F}_{\text{op}} + \vec{F}_{\text{la}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{avec } \vec{v} = v\vec{u}_x.$$

En projection sur \vec{u}_x , il reste

$$F_{\text{op}} + F_{\text{la}} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow F_{\text{op}} + i(t)\ell B = m \frac{dv}{dt} \quad (\text{équation mécanique}). \quad (24.3)$$

Chapitre 24

CIRCUIT MOBILE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE STATIONNAIRE

LES CONVERTISSEURS électromécaniques (moteurs et générateurs électriques) utilisent des circuits électriques en mouvement dans un champ magnétique. Le circuit électrique mobile est soumis à des actions de Laplace. Il est généralement le siège d'une force électromotrice induite. Ce chapitre utilise toutes les connaissances mises en place dans les chapitres précédents. Conformément au programme des CPGE, les géométries sont simplifiées par rapport à la réalité. Cela permet de présenter les principes physiques tout en gardant des calculs assez simples.

Définition 24.1. *Transducteur ou convertisseur électromécanique*

On appelle transducteur ou convertisseur électromécanique un dispositif qui convertit la puissance mécanique en puissance électrique (générateur) ou la puissance électrique en puissance mécanique (moteur).

I. Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

I.1. Dispositif des rails de Laplace

Les rails de Laplace sont utilisés à titre pédagogique pour mettre en évidence le principe des générateurs électriques. Il s'agit de deux rails horizontaux fixes en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre, notée $[CD]$ sur la figure 24.1, refermant le circuit. On note R la résistance du circuit. L'orientation du courant dans le circuit est fixée arbitrairement.

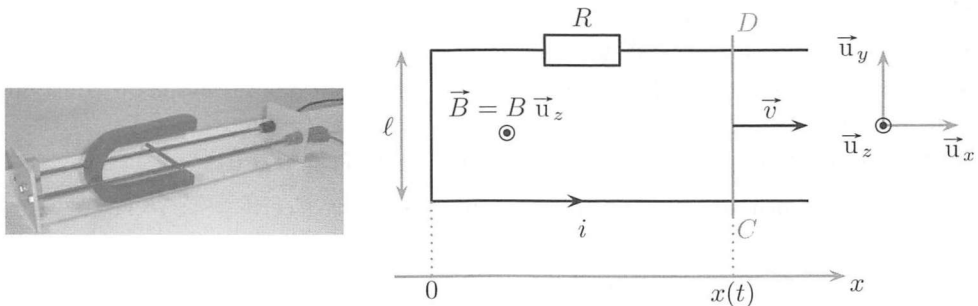


FIG. 24.1. Rails de Laplace. Le dispositif baigne dans un champ magnétique uniforme créé par un aimant en fer à cheval. La barre $[CD]$, seule partie mobile, est mise en mouvement à la vitesse \vec{v} par un opérateur. Un ampèremètre, non représenté sur le schéma, mesure l'intensité i du courant induit. L'orientation de l'intensité est arbitraire.

gnétique créé au point M de coordonnées polaires (r, θ) par un moment magnétique \vec{m} centré en O s'écrit, en coordonnées polaires de centre O et d'axe \vec{m} ,

$$\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}.$$

On donne la valeur de la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Déterminer l'expression de la fem induite dans la spire. En déduire l'expression de l'intensité du courant dans la spire.
2. Exprimer le moment magnétique \vec{m}_s de la spire. En déduire le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) des actions de Laplace subies par l'aimant.
3. Exprimer la puissance électrique reçue par la spire de la part de l'extérieur. Exprimer par ailleurs la puissance mécanique fournie par l'opérateur à l'aimant. Conclure.

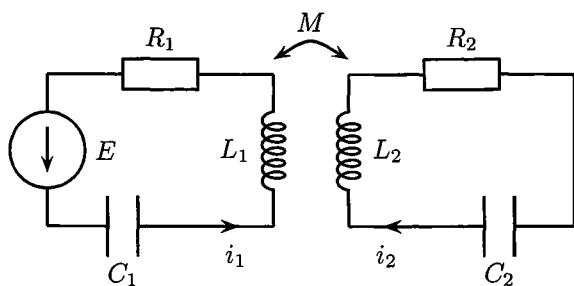


FIG. 23.11. Circuits couplés par inductance mutuelle.

2. Pour simplifier les calculs, on suppose que $R_1 = R_2$ (noté simplement R), $L_1 = L_2$ (noté L) et $C_1 = C_2$ (noté C). Exprimer les deux amplitudes complexes $\underline{I}_{1,m}$ et $\underline{I}_{2,m}$ en fonction de ω , M , L , R , C et E_m .
3. Le coefficient M est supposé positif. Pour adimensionner les expressions précédentes, on note $\omega_a = \frac{1}{RC}$, $\omega_b = \frac{R}{L}$, $\omega_c = \frac{R}{M}$ et $I_m = \frac{E_m}{R}$. Établir les expressions de $\frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m}$ et $\frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m}$ en fonction de ω et des trois pulsations caractéristiques introduites.
4. On prend $R = 10 \Omega$, $C = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, $L = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ H}$ et $M = \frac{L}{2}$. À l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice, tracer $\left| \frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m} \right|$ et $\left| \frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m} \right|$ en fonction de ω (en échelle logarithmique pour ω), en justifiant le choix fait pour l'intervalle de ω . Interpréter le graphe obtenu.
5. Tracer $20 \log \left| \frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m} \right|$ et $20 \log \left| \frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m} \right|$ en fonction de ω en échelle logarithmique. Certains aspects des graphes obtenus étaient-ils prévisibles ?

3. Un générateur électrique simple ★★★

(solution page 786)

Un opérateur fait tourner, à la vitesse angulaire constante ω , un aimant de moment magnétique \vec{m}_a devant un circuit électrique circulaire (spire) fixe d'aire S , d'auto-inductance négligée et de résistance R (voir figure 23.12). Cette résistance, non représentée sur le schéma, peut être une ampoule électrique, par exemple. Dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ orthonormé, le centre de l'aimant est au point O , la rotation de l'aimant se fait sans frottement autour de l'axe fixe (O, \vec{u}_z) , le centre de la spire est A , de coordonnées $(a, 0, 0)$, et l'axe de la spire est (A, \vec{u}_x) . La distance a est assez grande par rapport au rayon de la spire pour considérer que le champ magnétique créé par l'aimant est uniforme sur la spire. De même, le champ créé par la spire est uniforme à l'échelle de l'aimant. On admet que l'expression approchée du champ ma-

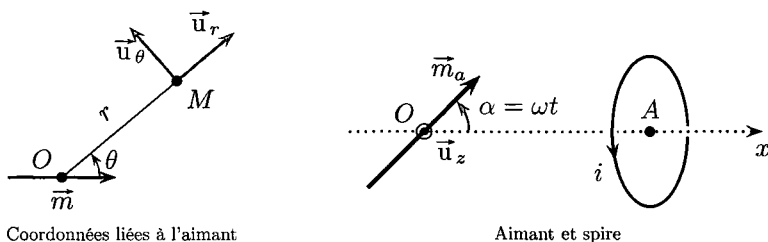


FIG. 23.12. Aimant tournant devant une spire.

III. Exercices

1. Quand peut-on négliger l'auto-induction ? ★ (solution page 783)

On considère un circuit électrique fixe rectangulaire, d'aire S , plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$, d'amplitude B_0 et dépendant du temps à la pulsation temporelle ω . On note L le coefficient d'auto-inductance du circuit (voir figure 23.10).

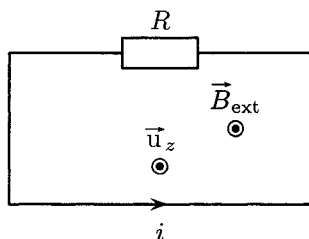


FIG. 23.10. Circuit électrique plongé dans un champ magnétique temporellement variable.

- Établir l'équation électrique vérifiée par l'intensité i . Mettre cette équation sous forme canonique en faisant intervenir un temps caractéristique, noté τ , à exprimer en fonction des données.
- Expliquer pourquoi, au bout d'un certain temps de fonctionnement (notion à expliciter), il est légitime de chercher la solution sous la forme $i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$. En expliquant la méthode utilisée (méthode au choix), déterminer l'amplitude i_0 (prise positive) de l'intensité.
- Exprimer le rapport $\text{ampl}(e_L)/\text{ampl}(e_{\text{ext}})$ des amplitudes de la fem auto-induite et de la fem extérieure. En déduire à quelle condition la fem auto-induite est négligeable (condition sur la pulsation ω).
- Pour $R = 10 \Omega$ et $L = 0,10 \text{ mH}$, déterminer la pulsation critique qui délimite les deux régimes (auto-induction négligeable ou pas). Afin de préciser ce résultat numérique, déterminer pour quelle pulsation, notée ω_1 , l'amplitude de la fem auto-induite ne représente que 1,0% de l'amplitude de la fem externe. Donner la fréquence f_1 correspondante.

2. Circuits électriques couplés ★★ (solution page 784)

On étudie deux circuits électriques d'inductances propres respectives L_1 et L_2 , couplés par l'inductance mutuelle M (voir figure 23.11). Le premier circuit contient un générateur de fem E dépendant du temps. Le second est purement passif. Cela modélise par exemple une carte RFID au voisinage d'une antenne créant un champ magnétique variable temporellement (voir page 606). Les intensités i_1 et i_2 ont été orientées arbitrairement sur le schéma. La fem délivrée par le générateur varie sinusoïdalement dans le temps à la pulsation ω avec l'amplitude $E_m > 0$: $E(t) = E_m \cos(\omega t)$. On veut trouver les expressions des intensités dans les deux circuits en régime établi.

- Expliquer pourquoi il est légitime de travailler en complexes en posant $\underline{E} = E_m \exp(j\omega t)$, $\underline{i}_1 = \underline{I}_{1,m} \exp(j\omega t)$ et $\underline{i}_2 = \underline{I}_{2,m} \exp(j\omega t)$. Établir le système d'équations vérifié par les amplitudes complexes $\underline{I}_{1,m}$ et $\underline{I}_{2,m}$.

Sur la vue de dessus de la figure 23.8, les deux points désignent les **bornes homologues** : ce sont les extrémités des enroulements qui sortent par la même face du tore, en l'occurrence la face supérieure. La présence des deux points n'est pas obligatoire car les parties visibles des fils sont explicitement dessinées. Cependant, sur d'autres représentations simplifiées des transformateurs, ces points sont nécessaires pour comprendre le sens des enroulements.

Le champ magnétique étant parfaitement canalisé dans le tore, son flux ϕ a la même valeur à travers toute section du tore : ϕ s'appelle le **flux commun**. On oriente la section S du tore selon l'indication de la figure 23.8. D'après les orientations des courants, les flux magnétiques respectifs ϕ_1 et ϕ_2 à travers ces circuits sont liés à ϕ par

$$\phi_1 = N_1 \phi \text{ et } \phi_2 = N_2 \phi.$$

Les forces électromotrices respectives e_1 et e_2 induites dans les enroulements sont données par la loi de Faraday appliquée à chaque enroulement,

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \text{ et } e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\phi}{dt} \text{ donc } \frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (23.7)$$

Elles sont représentées en convention générateur sur le schéma électrique équivalent de la figure 23.9. Cette figure montre également que $U_1 = -e_1$ et $e_2 = U_2$. D'après la relation (23.7), on en déduit le théorème 23.14.

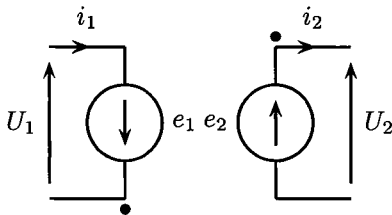


FIG. 23.9. Transformateur électrique : orientation et schéma électrique équivalent. Les points correspondent à ceux de la figure 23.8.

Théorème 23.14. Relation de transformation en tension

Les tensions au primaire et au secondaire d'un transformateur électrique sont liées au nombre de spires des enroulements par

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}.$$

Le signe « moins » provient du choix (arbitraire) des orientations des tensions U_1 et U_2 sur la figure 23.8. Un autre choix d'orientation aurait pu donner un signe « plus ».

Pour brancher un appareil américain sur le réseau français, il suffit donc de prendre un transformateur avec $N_1 = 220$ et $N_2 = 110$, de raccorder le primaire à la prise française ($U_1 = 220$ V) et de brancher l'appareil américain au secondaire du transformateur ($U_2 = 110$ V).

Remarque Le choix des orientations des tensions n'a d'importance que pour les calculs. Pour l'utilisateur d'un transformateur, le sens de branchement n'importe pas car les courants et tensions sont alternatifs (de même que n'importe quel appareil branché sur le secteur est insensible au sens de branchement de la prise).

Définition 23.12. Énergie potentielle magnétique de deux circuits

La grandeur

$$\mathcal{E}_{\text{ma}} = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$

s'interprète comme l'énergie potentielle magnétique de deux circuits. Elle correspond à l'énergie qu'ont dû fournir les générateurs aux deux circuits pour créer le champ magnétique lors de l'établissement des courants i_1 et i_2 .

II.5. Transformateur de tension

Les appareils américains fonctionnent en 110 V alternatif alors que le réseau français délivre du 220 V alternatif. Pour brancher sans dommages un appareil américain sur le réseau français, il faut donc transformer le 220 V de la prise électrique en 110 V.

Définition 23.13. Transformateur de tension

Un transformateur de tension convertit une tension alternative en une tension alternative de même fréquence mais de valeur efficace différente. Le fonctionnement du transformateur repose sur le phénomène de couplage par induction mutuelle.

Un transformateur électrique est un quadripôle composé de deux enroulements de fils autour d'un tore de matériau ferromagnétique (voir figure 23.8). L'enroulement de gauche, constitué de N_1 spires, est appelé *enroulement primaire*. Celui de droite, constitué de N_2 spires, est l'*enroulement secondaire*. Le *tore ferromagnétique* a la propriété de bien canaliser les lignes de champ magnétique : les lignes de champ sont circulaires et suivent le tore. Ainsi, toute ligne de champ qui traverse le primaire traverse aussi le secondaire. On dit que le couplage magnétique entre les deux enroulements est parfait : la plus grande valeur possible (en valeur absolue) de coefficient d'inductance mutuelle est atteinte. Toutefois, la valeur explicite de ce coefficient n'intervient pas dans les calculs ultérieurs.

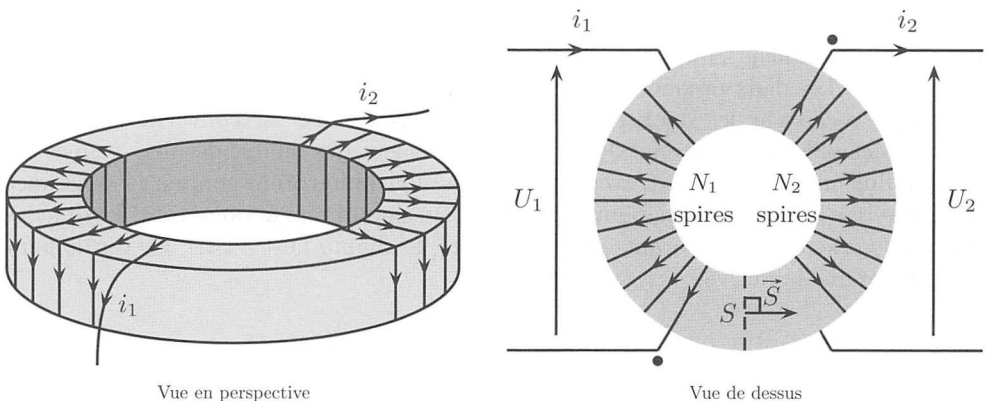


FIG. 23.8. Transformateur électrique.

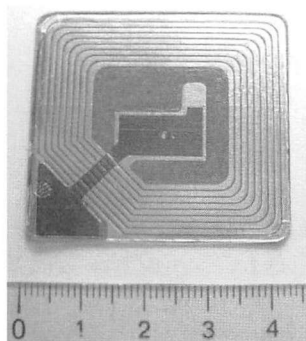


FIG. 23.7. Carte RFID servant d'antivol sur un article de magasin. L'échelle de la photographie est donnée par une règle graduée en centimètres.

- ▶ Les puces électroniques d'identification mises par les vétérinaires sous la peau des animaux domestiques ne sont autres que des cartes RFID de la taille d'un grain de riz.
- ▶ Les plaques de cuisson à induction contiennent une bobine parcourue par un courant temporellement variable et d'amplitude réglable. Cela crée un champ magnétique variable. Une casserole posée sur la plaque joue le rôle d'une seconde bobine. En effet, bien que non filiforme, le disque métallique du fond de la casserole peut être découpé par la pensée en des spires concentriques. Le champ variable créé par la plaque induit un courant dans ces spires fictives, qui s'échauffent par effet Joule.

II.4. Bilan énergétique pour deux circuits couplés

On reprend le schéma électrique de la figure 23.5 (voir page 606). Le schéma équivalent de la figure 23.6 mène aux équations électriques (23.6). Pour réaliser un bilan énergétique sur l'ensemble des deux circuits, on multiplie la première équation par i_1 et la seconde par i_2 , ce qui fait apparaître des puissances électriques. On somme les équations ainsi obtenues, ce qui donne

$$\underbrace{E_1 i_1 + E_2 i_2}_{\text{générateurs}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{effet Joule}} + \underbrace{L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}}_{\text{champ } \vec{B}}.$$

Le membre de gauche s'interprète comme la puissance fournie par les deux générateurs aux circuits. Les deux premiers termes au membre de droite représentent la puissance électrique reçue par les deux résistances. Cette puissance est convertie en énergie interne (échauffement par effet Joule). Le groupement des quatre derniers termes est lié aux flux magnétiques à travers les circuits. On l'interprète comme la puissance dépensée par les générateurs pour faire croître le champ magnétique total lorsque les courants varient (si les courants sont constants, le champ l'est aussi). Ce terme peut être vu comme la dérivée

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right).$$

Lorsqu'une puissance s'identifie à une dérivée temporelle, la grandeur dérivée peut être définie comme une énergie potentielle à une constante près. La constante est choisie nulle par convention (quand il n'y a pas de courants, il n'y a pas de champ magnétique).

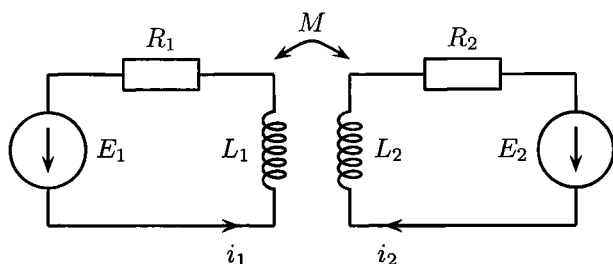


FIG. 23.5. Deux circuits couplés par inductance mutuelle.

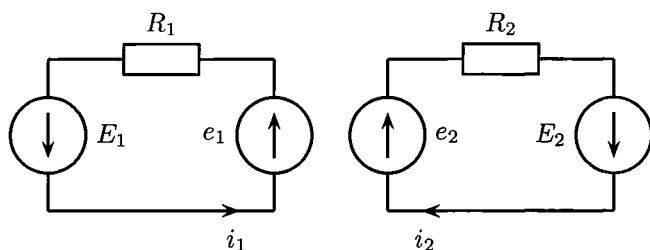


FIG. 23.6. Schéma électrique équivalent au schéma initial de la figure 23.5. Les fem induites e_1 et e_2 sont données par les expressions (23.5).

Ces équations couplent les deux courants : les intensités i_1 et i_2 interviennent simultanément dans les deux équations. Leurs variations ne sont donc pas indépendantes l'une de l'autre. Par exemple, la première des deux relations (23.6) montre que l'évolution de i_1 est conditionnée par le premier générateur (terme E_1), l'auto-induction dans le circuit 1 (terme $-L \frac{di_1}{dt}$), ainsi que par les variations du courant dans le second circuit (terme de couplage $-M \frac{di_2}{dt}$).

II.3. Exemples d'applications des circuits couplés

► Des dispositifs électriques peuvent être chargés à distance (sans contact) par couplage inductif. C'est le cas de certaines voitures électriques de location. Le châssis de la voiture est équipé d'un circuit en forme de boucle (bobine) d'axe vertical. Dans le sol, sous la place de parking, se trouve également une bobine alimentée électriquement par le courant alternatif du secteur. Lorsque la voiture est garée sur sa place de parking, les deux bobines se font face, ce qui assure une valeur satisfaisante de leur coefficient d'inductance mutuelle. Les variations du courant dans la boucle du sol induisent des courants dans la boucle de la voiture, qui servent à recharger la batterie. Cela évite d'avoir à brancher un câble de raccordement.

► Les cartes RFID (*radio frequency identification*) sont les « cartes magnétiques » lues par simple passage à distance devant un détecteur. Le lecteur est un circuit électrique parcouru par un courant variable $i_1(t)$, qui génère un champ magnétique temporellement variable dans son environnement. La carte RFID contient un bobinage (voir figure 23.7). Lorsqu'ils sont proches l'un de l'autre, carte et lecteur sont couplés par inductance mutuelle. Les variations temporelles du courant $i_1(t)$ dans le détecteur provoquent, par couplage magnétique, l'apparition d'un courant $i_2(t)$ dans la carte RFID. Ce courant $i_2(t)$ alimente une puce électronique qui le modifie (codage dans i_2 des informations contenues dans la carte). Par couplage magnétique, $i_2(t)$ induit des variations sur $i_1(t)$ dans le lecteur, qui décode ainsi le contenu de la carte. Les cartes RFID peuvent être passives (sans alimentation autonome), car la fem induite par le champ du lecteur suffit à les alimenter.

avec la définition du coefficient d'inductance mutuelle $\phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1$, on obtient $M = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} N_2 S_2 \cos \theta$. Selon la valeur de θ , M peut être positif ou négatif.

Remarque Le calcul de $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est simple alors que celui de $\phi_{2 \rightarrow 1}$ serait très compliqué, à cause de la non-uniformité du champ \vec{B}_2 . Pour calculer un coefficient d'inductance mutuelle, on doit toujours chercher lequel des deux flux est le plus simple à exprimer.

Utilisation des coefficients d'inductance La schématisation de deux circuits couplés par inductance mutuelle est donnée sur la figure 23.4. Avec les coefficients d'inductance mutuelle et d'inductance propre, les flux à travers chaque circuit s'expriment par

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad ; \quad \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 .$$

On applique la loi de Faraday à chaque circuit pour avoir les forces électromotrices induites,

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad ; \quad e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} . \quad (23.5)$$

Cela permet d'avoir le schéma électrocinétique équivalent (à droite sur la figure 23.4), sur lequel les forces électromotrices induites sont orientées en convention générateur. On parle de *couplage* car la force électromotrice dans chaque circuit dépend des courants dans les deux circuits.

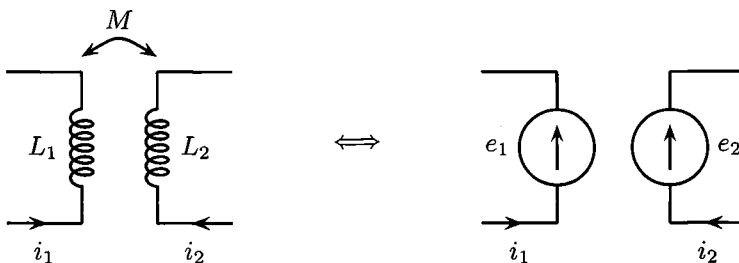


FIG. 23.4. Schématisation de deux circuits couplés par inductance mutuelle. Le couplage par inductance est symbolisé par une double flèche. Il est sous-entendu que la valeur du coefficient M est en cohérence avec les orientations (arbitraires) des courants. À droite, schéma électrocinétique équivalent, sur lequel les fem induites sont données par les expressions (23.5).

II.2. Circuits couplés par induction mutuelle

On considère deux circuits *fixes* couplés par inductance mutuelle, contenant chacun un générateur (fem respectives E_1 et E_2) et une résistance (voir figure 23.5). On note L_1 et L_2 les coefficients d'inductance propre et M le coefficient d'inductance mutuelle. Les variations éventuelles des courants provoquent des fem induites, orientées en convention générateur, dont les expressions sont données par les relations (23.5). Le schéma électrique équivalent est donné sur la figure 23.6.

Les équations électrocinétiques obtenues par application de la loi des mailles à chaque circuit s'écrivent

$$E_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad E_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 . \quad (23.6)$$

II. Bobines en interaction

II.1. Inductance mutuelle entre deux bobines

Si deux circuits électriques sont proches l'un de l'autre, chacun baigne dans le champ créé par l'autre. On note \vec{B}_1 et \vec{B}_2 les champs magnétiques créés respectivement par les courants i_1 et i_2 . Ces champs magnétiques ne sont pas nécessairement uniformes, mais, d'après le principe 20.8 (voir page 572), \vec{B}_1 est proportionnel à i_1 et \vec{B}_2 est proportionnel à i_2 . En notant $\phi_{i \rightarrow j}$ le flux magnétique créé par le circuit i à travers le circuit j , on obtient les relations de proportionnalité

$$\phi_{1 \rightarrow 2} \propto B_1 \propto i_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} \propto B_2 \propto i_2.$$

On peut donc définir des coefficients de proportionnalité $M_{i \rightarrow j}$ tels que

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} i_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} i_2.$$

Par homogénéité (analogie avec la définition $\phi = Li$ de l'inductance propre), ces coefficients $M_{i \rightarrow j}$ s'expriment en henrys. Ils caractérisent des flux magnétiques et dépendent de la forme des circuits électriques. Par des arguments théoriques hors programme, on peut démontrer qu'ils sont égaux : $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$. On note simplement M cette valeur commune, appelée coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits. Contrairement à l'inductance propre qui est toujours positive, l'inductance mutuelle M peut être de signe quelconque.

Définition 23.10. Coefficient d'inductance mutuelle

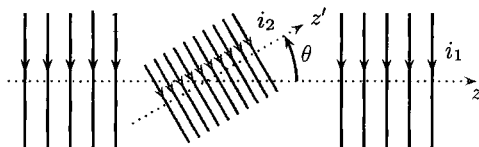
Soit deux circuits filiformes. On définit le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux circuits par

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad ; \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2.$$

Il dépend uniquement de la géométrie de l'ensemble des deux circuits et s'exprime en henrys. Son signe peut être quelconque : il dépend des orientations (arbitraires) des circuits.

EXERCICE CORRIGÉ 23.11. Calcul de coefficient d'inductance mutuelle

On considère un petit solénoïde possédant N_2 spires, de section S_2 , placé à l'intérieur d'un grand solénoïde possédant N_1 spires, de section S_1 , de longueur ℓ_1 . L'angle entre les axes des deux solénoïdes est θ (si θ vaut zéro, les courants dans les deux solénoïdes sont orientés dans le même sens). Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.



Corrigé

En négligeant les effets de bords, le champ magnétique créé par le grand solénoïde est uniforme et vaut $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i_1 \vec{u}_z$. Le flux magnétique provoqué par le grand solénoïde à travers le petit est N_2 fois le flux magnétique à travers une spire du petit solénoïde : $\phi_{1 \rightarrow 2} = \vec{B}_1 \cdot N_2 \vec{S}_2 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i_1 N_2 S_2 \cos \theta$. En identifiant cette expression

ce qui réalise automatiquement le changement de variable $t \mapsto i$ dans l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^t Ei \, dt &= \int_{t=0}^t Ri^2 \, dt + \int_{i(t=0)}^{i(t)} Li \, di \\ \Rightarrow \int_{t=0}^t Ei \, dt &= \int_{t=0}^t Ri^2 \, dt + \left[\frac{1}{2} Li^2 \right]_{i(t=0)}^{i(t)}. \end{aligned} \quad (23.3)$$

Cette dernière relation n'est autre que le résultat de l'intégration de (23.2) par rapport au temps. En notant \mathcal{E} les quantités d'énergie (données ou reçues sur l'intervalle de temps $[0, t]$), l'équation (23.3) s'interprète comme

$$\mathcal{E}_{\text{fournie par } E} = \mathcal{E}_{\text{reçue par } R} + \mathcal{E}_{\text{reçue par } e}. \quad (23.4)$$

En identifiant les derniers termes de (23.3) et (23.4), on obtient

$$\mathcal{E}_{\text{reçue par } e \text{ entre } t=0 \text{ et } t} = \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(0).$$

On remarque que cette quantité d'énergie ne dépend que des valeurs de l'intensité aux instants $t = 0$ et t , mais pas de ce qui s'est passé entre ces deux instants (i peut avoir crû et décrû, par exemple). On peut donc définir une énergie potentielle $\frac{1}{2} Li^2$. Ce terme est lié à la croissance du flux magnétique propre (et donc du champ magnétique propre) lorsque i croît.

Définition 23.8. *Énergie potentielle magnétique d'un circuit*

Un circuit magnétique d'inductance propre L , parcouru par une intensité électrique i , possède l'énergie potentielle magnétique

$$\mathcal{E}_{\text{ma}} = \frac{1}{2} Li^2.$$

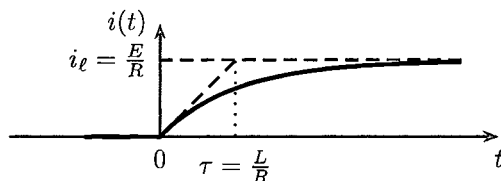
Cette énergie s'interprète comme l'énergie qu'a dépensée le générateur pour créer le champ magnétique propre lors de la croissance de i .

Étincelle de rupture Pour un circuit seul, l'énergie potentielle magnétique est $\mathcal{E}_{\text{ma}} = \frac{1}{2} Li^2$. Si on ouvre ce circuit alors qu'il est parcouru par un courant non nul, on tente d'annuler brutalement le courant, donc de faire varier brutalement l'énergie potentielle magnétique du circuit. Or, cette énergie potentielle doit être restituée sous une forme ou une autre (l'énergie est une grandeur conservative et ne peut pas être détruite) à un rythme fini (\mathcal{E}_{ma} varie continûment dans le temps, sinon la puissance de restitution $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{ma}}}{dt}$ serait infinie). La restitution se fait par effet Joule lors d'une étincelle de rupture, qui peut être interprétée de la façon suivante : lorsque i varie brutalement à la rupture du circuit, sa dérivée temporelle tend vers l'infini en valeur absolue. Par conséquent, la fem induite $e = -L \frac{di}{dt}$ aussi, ce qui force le passage d'un courant dans la zone d'ouverture (voir exercice 2 page 186).

Propriété 23.9. *Continuité de l'intensité dans une bobine*

En raison de la continuité temporelle de $\mathcal{E}_{\text{ma}} = \frac{1}{2} Li^2$, l'intensité i est toujours continue dans une branche contenant une bobine. Si on ouvre brutalement cette branche, une étincelle de rupture prend naissance.

La solution de l'équation sans second membre (équation dite homogène) s'écrit $i_h(t) = A \exp(-t/\tau)$, où la constante d'intégration A sera à déterminer à la fin. La solution particulière de l'équation avec second membre est $i_p = i_\ell$. La solution générale de l'équation est la somme des deux : $i(t) = i_h(t) + i_p$, soit $i(t) = A \exp(-t/\tau) + i_\ell$. On utilise la condition initiale $i(0) = 0$ imposée par l'interrupteur pour déterminer A , ce qui donne $A = -i_\ell$. La solution complète du problème s'écrit donc $i(t) = i_\ell [1 - \exp(-t/\tau)]$, dont la courbe représentative est donnée ci-après.



Le temps $\tau = \frac{L}{R}$ représente le temps de montée du courant vers sa valeur limite $i_\ell = \frac{E}{R}$. Par conséquent, le temps de variation du courant croît avec L , ce qui est une conséquence de la loi de modération de Lenz.

Auto-inductance et loi de modération de Lenz

Dans les circuits à fort coefficient d'auto-inductance, il est difficile d'imposer des variations brutales de courant. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz.

I.3. Aspect énergétique de l'auto-induction

On reprend le schéma électrique de la figure 23.3 en l'absence de champ magnétique extérieur, pour ne prendre en compte que l'auto-induction. Le schéma électrique équivalent est donné à droite sur la figure 23.3 et l'équation électrique associée est, d'après la loi des mailles, $E + e = U$. En multipliant membre à membre cette relation par i , on fait apparaître des puissances, qu'il conviendra d'orienter correctement,

$$Ei + ei = Ui \iff Ei = Ui - ei. \quad (23.1)$$

- Les tensions E et e sont orientées en convention générateur, donc Ei et ei sont les puissances électriques *fournies* par le générateur de fem E et la fem auto-induite e au reste du circuit. Ainsi, $(-ei)$ est la puissance *reçue* par e .
- La tension U est orientée en convention récepteur : Ui est donc la puissance *reçue* par la résistance R .

En notant \mathcal{P} les puissances, l'équation (23.1) s'interprète comme

$$\mathcal{P}_{\text{fournie par } E} = \mathcal{P}_{\text{reçue par } R} + \mathcal{P}_{\text{reçue par } e}. \quad (23.2)$$

En remplaçant $U = Ri$ et $e = -L \frac{di}{dt}$, l'équation (23.1) devient

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}.$$

On multiplie cette équation par dt et on l'intègre de $t = 0$ à un instant t quelconque, ce qui fait apparaître des quantités d'énergie. Dans le dernier terme, les dt se simplifient,

I.2. Auto-induction et loi de modération de Lenz

Dans cette section, on étudie un circuit en l'absence de champ magnétique extérieur. Le seul champ magnétique est le champ propre et la fem induite, s'il y en a une, est la fem auto-induite. En convention générateur, elle s'écrit $e_L = -L \frac{di}{dt}$. Si, pour une raison quelconque, l'intensité i croît, alors $\frac{di}{dt} > 0$ et $e_L < 0$. L'effet de e_L seule serait donc de créer un courant (auto-induit) d'intensité négative, c'est-à-dire s'opposant à la croissance de i . C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz (voir loi 22.3 page 593) : le courant induit, par son sens, a des effets qui tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance (ici, la cause est $\frac{di}{dt} \neq 0$). L'exercice corrigé 23.7 illustre ce point.

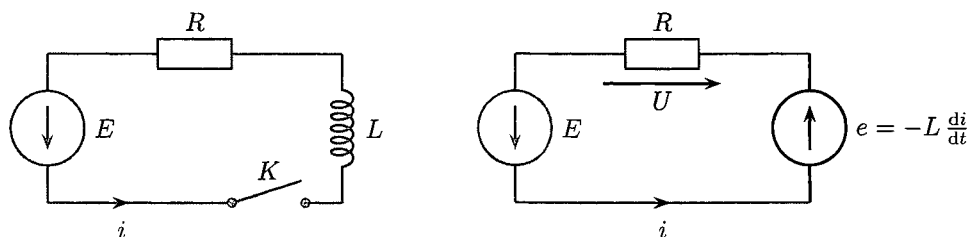


FIG. 23.3. Schéma électrique du vrai circuit et schéma électrique équivalent. La force électromotrice induite est représentée par le générateur en noir. La tension U , orientée arbitrairement, est introduite pour les calculs intermédiaires.

EXERCICE CORRIGÉ 23.7. Auto-induction et loi de modération de Lenz

On considère un circuit électrique filiforme d'auto-inductance L , de résistance R , alimenté par un générateur de force électromotrice E constante (voir schéma de gauche de la figure 23.3). Il n'y a pas de champ magnétique extérieur : le seul phénomène d'induction dans le circuit est l'auto-induction. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

1. Représenter le schéma électrique équivalent pour $t > 0$. En déduire l'équation régissant le comportement de l'intensité électrique notée i .
2. Résoudre cette équation. Commenter l'influence de L sur la solution.

Corrigé

1. Pour $t > 0$, on remplace K par un fil. En l'absence de champ magnétique extérieur, le seul flux magnétique à travers le circuit est le flux propre $\phi = Li$. La fem induite, donnée par la loi de Faraday, se résume à la fem auto-induite : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$. Elle est orientée en convention générateur, c'est-à-dire dans le sens de i sur le schéma électrique équivalent (voir schéma de droite de la figure 23.3). La loi des mailles appliquée à ce circuit s'écrit $E + e = U$, avec $U = Ri$, soit

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}.$$

2. Pour la résolution, il est préférable d'introduire des notations simplifiées (mise sous forme canonique de l'équation différentielle). On pose $\tau = \frac{L}{R}$ (homogène à un temps) et $i_\ell = \frac{E}{R}$ (homogène à une intensité), ce qui donne

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{1}{\tau} i_\ell.$$

Méthode

Circuit fixe dans \vec{B} temporellement variable

Pour étudier un circuit filiforme fixe et indéformable dans un champ magnétique dépendant du temps, il faut respecter l'ordre suivant.

1. Orienter le circuit (choix de la flèche de i).
2. Calculer le flux magnétique.
3. Exprimer la fem induite $e = e_{\text{ext}} + e_L$.
4. Représenter le schéma électrique équivalent, constitué des éléments réellement présents dans le circuit, auxquels on ajoute la fem induite orientée en convention générateur.
5. Obtenir l'équation électrique du circuit à partir du schéma équivalent (le véritable schéma peut être oublié).

EXERCICE CORRIGÉ 23.6. Schéma équivalent et équation électrique

Un circuit électrique filiforme plan, de résistance R , d'aire S et d'auto-inductance L , est plongé dans un champ magnétique uniforme variable sinusoïdalement dans le temps (pulsation temporelle ω) et orthogonal au plan du circuit : $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. Représenter le schéma électrique équivalent au circuit et établir l'équation électrique régissant le comportement de l'intensité électrique.

Corrigé

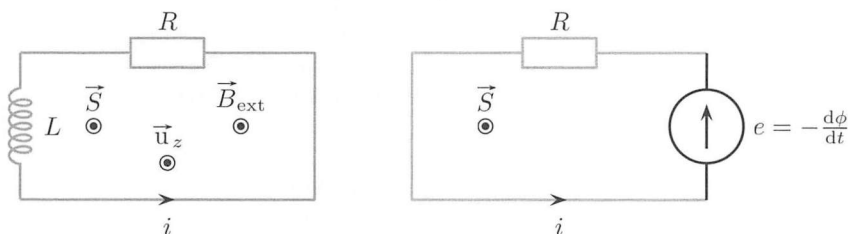
Le schéma électrique du vrai circuit est donné sur la figure de gauche ci-après. Il s'agit d'une boucle métallique d'aire S et de résistance R . On oriente arbitrairement le courant (flèche de i), ce qui donne l'orientation du vecteur surface \vec{S} par la règle de la main droite : $\vec{S} = S \vec{u}_z$. Le flux magnétique total à travers le circuit est la somme du flux extérieur et du flux propre,

$$\phi = \phi_{\text{ext}} + \phi_{\text{propre}} = \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{S} + Li = B_0 \cos(\omega t) \times S + Li.$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 S \omega \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt}.$$

Le schéma électrique équivalent s'obtient en ajoutant dans le vrai schéma un générateur (orienté comme i) délivrant la fem induite (en noir sur la figure de droite ci-après). Attention, la fem induite e tient déjà compte de la fem auto-induite. La bobine L est donc omise dans le schéma équivalent.



On déduit l'équation électrique $e = Ri$ du schéma équivalent, ce qui donne

$$B_0 S \omega \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt} = Ri \iff \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{B_0 S \omega}{L} \sin(\omega t) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Remarque Si nécessaire, on peut augmenter le coefficient d'auto-inductance d'une bobine en y introduisant un noyau ferromagnétique. Cela a pour conséquence de remplacer μ_0 par $\mu_0\mu_r$, où μ_r est la perméabilité magnétique relative (sans dimension) du matériau, qui peut atteindre des valeurs de l'ordre de 10^3 .

L'égalité $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{propre}}$ implique que, dans le cas général, le flux magnétique à travers un circuit filiforme s'écrit

$$\phi = \phi_{\text{ext}} + \phi_{\text{propre}} \quad \text{avec} \quad \phi_{\text{propre}} = Li.$$

L'application de la loi de Faraday donne la force électromotrice induite orientée en convention générateur dans le circuit,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} - \frac{d(Li)}{dt}.$$

Si le circuit ne se déforme pas au cours du temps, le coefficient d'auto-inductance L est une constante et sort de la dérivée temporelle, ce qui donne le résultat suivant.

Théorème 23.5. Force électromotrice induite dans un circuit fixe et indéformable

Dans un circuit indéformable, la force électromotrice induite s'écrit

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} - L \frac{di}{dt}.$$

► Le premier terme $e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt}$ est la contribution du champ extérieur à la force électromotrice induite.

► Le second terme $e_L = -L \frac{di}{dt}$ est appelé force électromotrice auto-induite.

Souvent, l'un des deux termes de la fem induite $e = e_{\text{ext}} + e_L$ peut être négligé devant l'autre.

► Si $|e_L| \ll |e_{\text{ext}}|$, on dit que *l'auto-induction est négligeable*.

► Si $|e_{\text{ext}}| \ll |e_L|$, on dit que la fem induite par le champ extérieur est négligeable.

Le fait de pouvoir négliger un terme est en général indiqué dans l'énoncé d'un exercice ou déterminé *a posteriori* par des considérations numériques (voir exercice 1 page 610). Pour insister sur le fait que l'auto-induction est prise en compte dans un problème, on représente une bobine dans le circuit. Par exemple, le schéma électrique de la figure 23.2 représente un circuit électrique filiforme de résistance R et d'auto-inductance L , alimenté par un générateur de force électromotrice E .

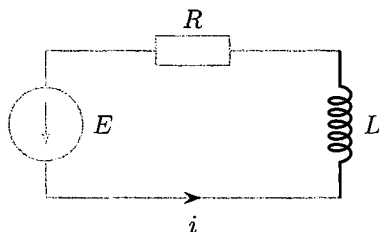


FIG. 23.2. Auto-inductance. La présence de la bobine, en noir sur le schéma, indique explicitement que l'on veut prendre en compte le phénomène d'auto-induction dans le circuit de résistance R alimenté par un générateur de force électromotrice E .

autre que le coefficient d'inductance propre déjà rencontré lors de l'étude des bobines en électricité.

Définition 23.3. Coefficient d'auto-inductance ou d'inductance propre

Un circuit électrique filiforme parcouru par un courant d'intensité i crée à travers lui-même un flux magnétique propre proportionnel à i ,

$$\phi_{\text{propre}} = Li.$$

Le coefficient L de proportionnalité, appelé coefficient d'auto-inductance ou d'inductance propre du circuit :

- ▶ est positif;
- ▶ dépend uniquement de la géométrie du circuit;
- ▶ a pour unité SI le henry (H).

La géométrie du champ propre, en général non uniforme, rend les calculs de coefficients d'auto-inductance très complexes. Le calcul est cependant simple pour une bobine longue, seul cas exigible d'après le programme. Il est présenté dans l'exercice corrigé 23.4 ci-après, en tenant compte de la remarque suivante.

Le flux magnétique créé par un champ magnétique uniforme \vec{B} à travers une bobine de N spires est

$$\phi = N \vec{B} \cdot \vec{S},$$

où \vec{S} est le vecteur surface d'une seule spire.

EXERCICE CORRIGÉ 23.4. Inductance propre d'une bobine longue

En négligeant les effets de bords, calculer le coefficient d'auto-inductance d'un solénoïde de section S et de longueur ℓ , possédant N spires. Donner sa valeur numérique avec $N = 1,0 \cdot 10^3$, $\ell = 0,10$ m, $S = 1,0 \cdot 10^{-3}$ m².

Corrigé

En négligeant les effets de bords, le champ magnétique propre dans le solénoïde est uniforme et vaut $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{u}_z$. Il y a N spires en tout, donc le flux propre à travers le solénoïde est N fois le flux à travers une de ses spires,

$$\phi = N \times \vec{B} \cdot \vec{S} = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} Si.$$

En identifiant avec la définition $\phi = Li$, le coefficient d'auto-inductance est $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$. Avec les valeurs numériques proposées, $L \simeq 12$ mH.

Dans la relation $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$, le nombre de spires N est sans dimension tandis que $\frac{S}{\ell}$ est homogène à une longueur. Cela est cohérent avec les unités : L s'exprime en H et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H · m⁻¹.

Par ailleurs, l'application numérique dans cet exercice montre que le coefficient d'auto-inductance possède une valeur très inférieure à 1 H malgré le grand nombre de spires de la bobine. On résume ces points par les assertions suivantes.

- ▶ Un coefficient d'auto-inductance est homogène à μ_0 multiplié par une longueur.
- ▶ Le henry est une « grosse » unité.

Chapitre 23

CIRCUIT FIXE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE DÉPENDANT DU TEMPS

FARADAY a établi la loi de l'induction $e = -\frac{d\phi}{dt}$ en 1831 en faisant varier le champ magnétique créé par un aimant au voisinage d'un circuit et en mesurant les courants induits dans ce circuit. Cependant, le circuit crée lui-même un champ magnétique lorsqu'il est parcouru par un courant. Ce champ, non pris en compte dans le chapitre précédent, contribue au flux magnétique à travers le circuit et participe au phénomène d'induction. On parle d'auto-induction.

I. Phénomène d'auto-induction

Définition 23.1. *Champ magnétique propre – Champ extérieur*

Lors de l'étude de l'induction dans un circuit électrique, on appelle champ propre le champ magnétique créé par ce circuit. Le champ magnétique créé par d'autres sources (autres circuits ou aimants) est appelé champ extérieur.

Le champ magnétique qui règne au voisinage d'un circuit électrique est la somme du champ propre et du champ extérieur,

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{propre}}.$$

I.1. Flux propre et inductance propre

Définition 23.2. *Flux magnétique propre*

On appelle flux propre le flux magnétique créé par un circuit à travers lui-même (flux du champ magnétique propre à travers le circuit).

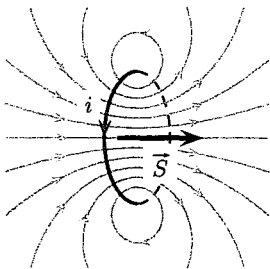


FIG. 23.1. Signe positif du coefficient d'auto-inductance. Lorsque i est positif, les lignes du champ propre de la bobine sont orientées dans le même sens que le vecteur surface dans la zone où elles traversent la bobine. Le flux propre est donc positif, comme i . Pour tout circuit, ϕ_{propre} a le signe de i .

L'intensité du champ magnétique propre est proportionnelle à l'intensité électrique i dans le circuit étudié (voir principe 20.8 page 572). Par conséquent le flux propre, qui est proportionnel au champ magnétique propre, est proportionnel à i . De plus, l'orientation du champ magnétique propre est telle que la constante de proportionnalité est positive (voir figure 23.1). Cette constante de proportionnalité, notée L , n'est

1. Détailler les phénomènes d'induction et leurs conséquences sur la chute de l'aimant.
2. On introduit le même aimant dans un tuyau de cuivre vertical d'un mètre de longueur et on l'abandonne sans vitesse initiale. On constate qu'il met une dizaine de secondes pour parvenir en bas du tuyau. Interpréter.

2. Spire qui tombe près d'un aimant ★★

(solution page 782)

Une spire de cuivre circulaire d'axe horizontal tombe verticalement en chute libre. Une glissière parfaite (sans frottement) assure que sa chute est rectiligne. Un barreau aimanté d'axe horizontal est maintenu fixe à proximité de la glissière (voir figure 22.4). Pour simplifier, son axe est parallèle à celui de la spire et le plan géométrique vertical passant par l'axe de l'aimant est plan de symétrie de la situation.

1. Détailler les phénomènes d'induction et leurs conséquences sur la chute de la spire.
2. Le guidage est-il absolument nécessaire ?

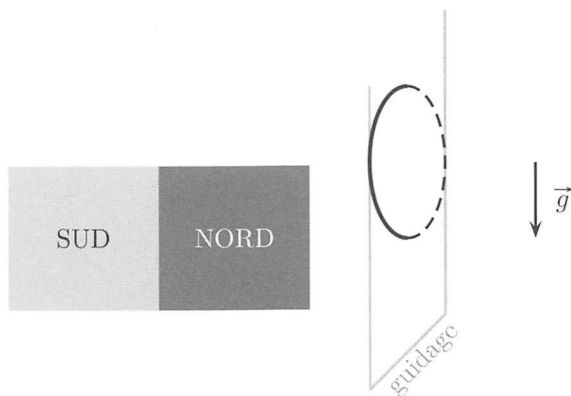


FIG. 22.4. Spire guidée en chute libre devant un aimant fixe.

orienté de la droite vers la gauche. Le côté nord de la bobine est donc à gauche de la bobine : il fait face au pôle nord et tend à repousser celui-ci (l'opposition à la cause est ici une répulsion mécanique *via* des forces magnétiques).

2. La cause de la naissance du courant est l'augmentation de l'intensité du champ magnétique \vec{B} créé par l'aimant au niveau de la spire (du fait du rapprochement de l'aimant), ce champ étant dirigé de la gauche vers la droite. Le courant induit dans la spire tend à créer un champ magnétique (champ induit) dirigé vers la gauche. Il tend donc à s'opposer à la croissance du champ magnétique de l'aimant ($\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_{\text{aimant}} + \vec{B}_{\text{ind}}$ croît moins vite que \vec{B}_{aimant} seul).

Méthode

Loi de modération de Lenz

À la fin de la résolution d'un problème d'induction, il faut toujours tester l'accord des prévisions avec la loi de modération de Lenz. Cela permet de détecter d'éventuelles erreurs de signes.

La loi de modération de Lenz est implicitement contenue dans le signe « moins » de la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$: le signe de la fem induite e est toujours opposé à celui de la croissance algébrique $d\phi$ du flux magnétique.

Les lois de l'induction seront étudiées en détail dans les chapitres 23 et 24.

III. Exercices

1. Aimant dans un tuyau de cuivre ★

(solution page 781)

Un petit barreau aimanté, guidé sans frottement verticalement, tombe en chute libre vers une spire de cuivre fixe ayant le même axe que lui (voir figure 22.3).

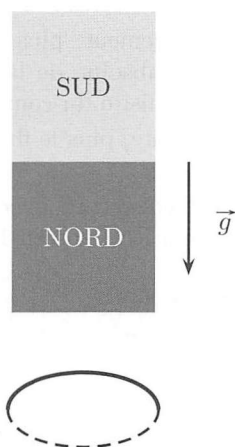


FIG. 22.3. Aimant guidé en chute libre au-dessus d'une spire de cuivre.

On peut appliquer cette méthode à l'expérience de la figure 22.1 pour vérifier que la loi proposée par Faraday est en accord avec les phénomènes observés. On choisit un sens d'orientation pour la spire (choix du sens de la flèche de i) et on en déduit le vecteur surface \vec{S} de la spire (voir figure 22.2 à gauche). Malheureusement, le flux magnétique n'est pas calculable explicitement ici, car le champ magnétique créé par l'aimant n'est pas uniforme à l'échelle de la spire. Cependant, ce champ est orienté dans le même sens que \vec{S} , donc « $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ » (expression non rigoureuse ici) est positif. Ce flux croît lorsque l'aimant s'approche, car l'intensité de \vec{B} augmente au niveau de la spire. Par conséquent, $\frac{d\phi}{dt}$ est positif. La loi de Faraday donne la fem induite $e = -\frac{d\phi}{dt}$, qui est ici négative. Sur le schéma électrique équivalent, e doit être orientée en convention générateur (dans le même sens que i , voir figure 22.2 à droite). En notant R la résistance électrique de la spire, l'équation électrique du circuit équivalent s'écrit $e = Ri$, ce qui montre que i est négatif. Ainsi, le sens du courant induit réel est opposé à l'orientation de i qui avait été arbitrairement choisie. Ce résultat est en accord avec le sens du courant induit observé expérimentalement (représenté sur la figure 22.1 page 591).

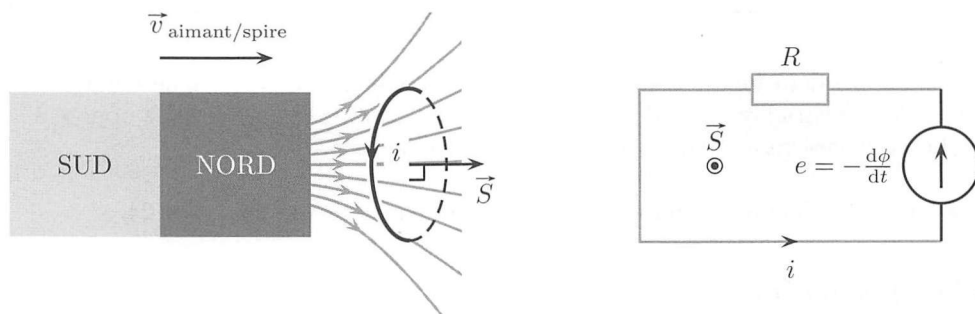


FIG. 22.2. Induction dans une spire fixe dont on approche un aimant. À gauche, schéma de la situation avec orientation arbitraire de i qui impose celle du vecteur surface \vec{S} . À droite, schéma électrique équivalent : la fem induite doit être orientée comme i .

Cette étude est bien en accord avec les trois faits observés expérimentalement.

1. Plus l'aimant est approché rapidement, plus le flux magnétique ϕ croît vite, donc plus $\frac{d\phi}{dt}$ est grand. La valeur absolue de la force électromotrice induite est donc grande, ce qui fait croître l'intensité du courant induit.
2. Plus la surface de la spire augmente, plus le flux ϕ est grand et plus $\frac{d\phi}{dt}$ l'est, ce qui fait croître $|i|$.
3. Le sens du courant induit est en accord avec la loi de modération de Lenz, formulée par le physicien russe Heinrich Lenz en 1833.

Loi 22.3. Loi de modération de Lenz

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

Cette loi est générale et nécessite, pour être appliquée correctement, de bien identifier les causes du phénomène d'induction. Deux visions sont possibles ici.

1. La cause de la naissance du courant induit est le déplacement de l'aimant. Le courant induit est dans un sens tel que la spire acquiert un moment magnétique

En vue de formaliser les lois de l'induction, on introduit le flux magnétique, grandeur mathématique permettant un « comptage » des lignes de champ passant à travers la spire. Conformément au programme, on se limite au cas où le champ magnétique est uniforme à l'échelle de la spire.

Définition 22.1. Flux magnétique

Soit un circuit électrique orienté (arbitrairement) par le sens conventionnel du courant (flèche de i). Soit \vec{S} le vecteur surface du circuit défini par le sens de i et la règle de la main droite. Si le circuit baigne dans un champ magnétique \vec{B} uniforme, le flux magnétique ϕ à travers le circuit est défini par le produit scalaire

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (\text{en Wb}).$$

L'unité SI du flux magnétique est le weber (Wb) : $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

L'apparition d'un courant électrique induit montre que tout se passe comme si le circuit contenait un générateur. La difficulté consiste à exprimer la force électromotrice de ce générateur. En relation avec les points expérimentaux observés et à la suite de mesures précises, Faraday a établi la loi qui porte son nom.

Loi 22.2. Loi de Faraday de l'induction (1831)

Soit un circuit électrique filiforme orienté arbitrairement par le sens conventionnel de i .

Soit \vec{S} le vecteur surface de ce circuit, orienté par i et la règle de la main droite.

Le circuit est le siège d'une force électromotrice induite e , orientée conventionnellement dans le même sens que i (convention générateur) et telle que

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

L'unité SI de e est le volt (V).

Méthode

Utilisation de la loi de Faraday

La loi de Faraday nécessite de mettre en place des orientations et de les respecter durant toute la résolution d'un problème d'induction.

1. Orienter (arbitrairement) le circuit en choisissant un sens conventionnel pour le courant (flèche de i).
2. En déduire le vecteur surface \vec{S} du circuit par la règle de la main droite.
3. Calculer le flux magnétique à travers le circuit : $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ (expression valide seulement si \vec{B} est uniforme à l'échelle du circuit).
4. En déduire la force électromotrice induite $e = -\frac{d\phi}{dt}$.
5. Dessiner le schéma électrique équivalent au circuit. Il s'agit du schéma de départ auquel on ajoute un générateur électrique de force électromotrice e orientée dans le même sens que i (convention générateur).
6. Le schéma équivalent permet d'écrire une ou plusieurs équations électriques pour calculer l'intensité du courant induit.

Chapitre 22

LOIS DE L'INDUCTION

LE PHÉNOMÈNE d'induction électromagnétique est le nom donné à l'apparition de courants, dits induits, dans un circuit soumis à un champ magnétique dans certaines conditions. L'induction est technologiquement très importante car elle constitue le principe de base de tous les dispositifs électrotechniques (générateurs électriques de type dynamo, transformateurs électriques).

I. Aspect expérimental de l'induction

En 1831, le Britannique Michael Faraday a constaté qu'en approchant un aimant d'un circuit fermé (spire de cuivre), un courant électrique prend naissance dans la spire alors qu'il n'y a pas de générateur (voir figure 22.1).

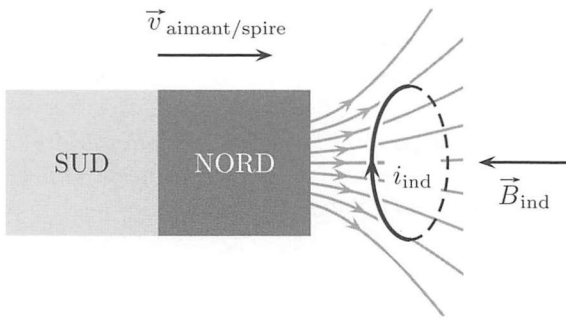


FIG. 22.1. Induction dans une spire. Lors de l'approche de l'aimant, un courant électrique est induit dans la spire dans le sens indiqué par la flèche i_{ind} . Ce courant crée un champ magnétique induit \vec{B}_{ind} .

Les caractéristiques de ce courant, appelé *courant induit*, sont les suivantes.

- ▶ L'intensité du courant induit croît avec la vitesse d'approche de l'aimant.
- ▶ L'intensité du courant induit croît si la surface de la spire croît.
- ▶ Le sens du courant induit est tel qu'il génère un champ magnétique (appelé champ induit et noté \vec{B}_{ind} sur la figure 22.1) tendant à s'opposer à la croissance du champ magnétique dû au rapprochement de l'aimant.

Les mêmes résultats sont obtenus si l'aimant est fixe et si la spire est approchée de l'aimant. Seul le déplacement *relatif* de l'aimant par rapport à la spire compte.

II. Formalisation des lois de l'induction

On cherche à établir des règles permettant de prévoir le sens et l'intensité du courant induit dans tous les cas. On s'appuie pour cela sur les résultats de l'expérience décrite à la figure 22.1.

Plus la spire est grande, plus il y a de lignes de champ de l'aimant qui la traversent. Lorsque l'aimant s'approche de la spire, de plus en plus de lignes de champ magnétique de l'aimant traversent la spire (ce qui revient à dire que l'intensité du champ magnétique augmente dans la région de la spire).

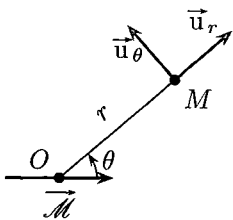


FIG. 21.7. Repère polaire lié au moment magnétique \vec{M} .

de la création du champ magnétique terrestre. Sachant que le rayon terrestre est $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m et que l'expérience décrite dans les questions précédentes a été effectuée en France (latitude d'environ 45°), déterminer la norme \mathcal{M}_T du moment magnétique terrestre.

6. À quel endroit sur la Terre la composante horizontale du champ magnétique est-elle la plus grande? Quelle est sa valeur?

4. Champ non uniforme (PCSI) ★★★

(solution page 779)

Une barre métallique homogène, de longueur ℓ et de masse m , peut pivoter sans frottement (liaison pivot parfaite) par rapport à l'axe horizontal (O, \vec{u}_z) (voir figure 21.8). Son extrémité inférieure est en contact sans frottement avec un arc de cercle métallique (point A) pour que l'ensemble constitue un circuit électrique plan. Un générateur impose un courant constant d'intensité i . Un dispositif approprié crée, dans la zone où se trouve la barre, un champ magnétique non uniforme dont l'expression en coordonnées cylindriques d'axe (O, \vec{u}_z) est $\vec{B} = B_0 \frac{r}{\ell} \vec{u}_z$. La position de la barre est repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. On veut déterminer la position d'équilibre de la barre.

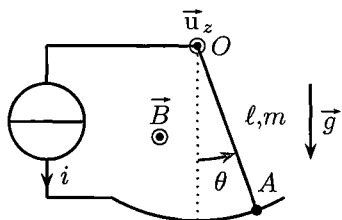


FIG. 21.8. Barre métallique parcourue par un courant électrique et plongée dans un champ magnétique.

1. En coordonnées cylindriques, déterminer l'expression de la force de Laplace élémentaire s'appliquant sur un élément de la barre. En déduire la résultante (force de Laplace totale) s'exerçant sur la barre. La comparer à la force qui aurait été produite par un champ uniforme d'intensité B_0 .

2. Déterminer le moment élémentaire par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) de la force de Laplace élémentaire calculée précédemment. En déduire le moment total des actions de Laplace subies par la barre. Le comparer au moment qu'aurait produit un champ uniforme d'intensité B_0 .

3. Déterminer l'angle θ_{eq} repérant la position d'équilibre de la barre. Donner l'application numérique pour $i = 1,0$ A, $m = 20$ g, $\ell = 20$ cm, $B_0 = 0,10$ T.

4. Les actions de Laplace sont des efforts répartis sur toute la barre. On peut définir le point d'application des actions de Laplace comme le point théorique N de la barre où s'appliquerait la résultante pour produire le même moment que les efforts répartis. Déterminer N et commenter sa position.

suspendu en A . La partie de gauche, en gris, est parcourue par un système de fils électriques alimentés par un courant i connu. Il règne, dans la région grisée, un champ magnétique horizontal uniforme (entrefer d'un aimant, par exemple) dont on veut déterminer la valeur. Le champ magnétique est nul ailleurs. Les portions ab et cd de fil électrique sont des arcs de cercle de centre O . Les autres parties du câblage sont rectilignes. On note P le milieu de $[bc]$. Cette partie gauche de la balance est soumise à des forces de Laplace. L'idée de la mesure est de placer des masses marquées à droite pour compenser exactement les forces de Laplace, de manière à équilibrer la balance. On montre, dans cet exercice, que la connaissance de la masse m permet de remonter à la valeur du champ magnétique.

1. Calculer le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) du poids de la masse m située sur le plateau.
2. Calculer le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) des forces de Laplace s'appliquant sur la partie du câblage qui baigne dans \vec{B} .
3. En traduisant l'équilibre de la balance, donner la relation entre B , i , g , m et les dimensions de la balance. Si le champ magnétique \vec{B} pointe comme indiqué sur le schéma, quel signe faut-il donner au courant i pour observer l'équilibre de la balance ?
4. Avec un courant $i = 1,0$ A, $\ell = 10$ cm, $\ell' = 1,0$ cm, $OP = 10$ cm, quelle intensité de champ magnétique peut-on mesurer, sachant que les masses marquées à disposition sont d'un décigramme ?

3. Champ magnétique terrestre ★★

(solution page 778)

En un point de la surface de la Terre, on veut déterminer l'intensité B_h de la composante horizontale du champ magnétique terrestre en étudiant les petites oscillations d'une boussole dans le plan horizontal. Cette boussole est un petit solide qui peut pivoter sans frottements autour de son axe vertical (O, \vec{u}_z) . Elle est assimilable à un dipôle de moment magnétique \vec{m} horizontal et de moment d'inertie J par rapport à son axe (O, \vec{u}_z) . On pose $\alpha = (\vec{u}, \vec{m})$, où \vec{u} a la direction et le sens de la composante horizontale du champ magnétique terrestre à l'endroit considéré.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la boussole (équation vérifiée par l'angle $\alpha(t)$). Quelle est la position d'équilibre stable de la boussole ?
2. En déduire la période τ_0 des petites oscillations en fonction de B_h , J et $m = |\vec{m}|$.
3. Les valeurs de m et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique \vec{B}_e créé par une bobine parcourue par un courant pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine de façon que \vec{B}_e et \vec{B}_h soient parallèles et de même sens, puis on mesure la période τ_1 des petites oscillations. On inverse ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle période τ_2 des oscillations. Exprimer τ_1 et τ_2 (en supposant $B_h < B_e$). En déduire B_h en fonction de l'intensité B_e du champ créé par la bobine et du rapport τ_1/τ_2 .
4. On mesure $\tau_1/\tau_2 = 0,78$ et $B_e = 0,10$ mT. En déduire la valeur de B_h .
5. On admet que l'expression du champ magnétique créé au point M de coordonnées polaires (r, θ) par un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ centré en O s'écrit, en coordonnées polaires de centre O et d'axe $\vec{\mathcal{M}}$ (voir figure 21.7),

$$\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3}.$$

On donne la valeur de la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H · m⁻¹. Rappeler sur un schéma comment est placé le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_T$ responsable

4. Établir l'équation mécanique du cadre (équation différentielle vérifiée par la position angulaire θ du cadre). Mettre cette équation sous forme canonique en faisant apparaître une pulsation temporelle caractéristique ω_0 et un facteur de qualité Q .
5. En déduire que la position d'équilibre θ_{eq} est proportionnelle à l'intensité i à mesurer.
6. Comment peut-on influencer sur les différents paramètres α , λ et J pour éviter que l'aiguille n'oscille trop longtemps avant d'atteindre sa position d'équilibre ?
7. À l'intérieur du multimètre se trouve une résistance R de grande valeur. Le cadre mobile a une résistance négligeable devant R . On suppose que tous les branchements électriques sont possibles dans l'appareil sans affecter le comportement mécanique du cadre. Quels branchements faut-il effectuer pour transformer l'ampèremètre étudié en un voltmètre apte à mesurer une tension constante ?
8. Un wattmètre est destiné à mesurer la puissance moyenne \mathcal{P} reçue par un dipôle dans un circuit en régime temporellement variable. On note $U(t)$ la tension aux bornes de ce dipôle et $i(t)$ le courant qui le traverse (U et i étant orientés en convention récepteur). On suppose que le dipôle est linéaire et que le circuit qui le contient fonctionne en régime sinusoïdal à la pulsation ω . Peut-on mesurer \mathcal{P} en mesurant $U(t)$ et $i(t)$ séparément ?
9. Un wattmètre analogique est une adaptation de l'ampèremètre étudié précédemment. Le courant $i(t)$ passe dans le cadre. L'aimant est remplacé par un électroaimant alimenté par la tension $U(t)$. On admet que l'intensité B_0 du champ magnétique des questions précédentes est alors remplacée par $B(t) = KU(t)$, où K est une constante de proportionnalité. Montrer que, si $\omega \gg \omega_0$, l'aiguille atteint une position d'équilibre dont l'angle de déviation est proportionnel à \mathcal{P} .

2. Balance de Cotton (PCSI) ★★

(solution page 778)

De nos jours, on utilise des teslamètres à effet Hall ou des méthodes de résonance magnétique pour mesurer les champs magnétiques. La balance de Cotton, appareil un peu désuet, est l'ancêtre du teslamètre. Son principe consiste à mesurer les forces de Laplace exercées par le champ magnétique duquel on cherche à déterminer l'intensité. Une balance de Cotton fonctionne comme une balance de pesée à deux plateaux (voir figure 21.6). Le dispositif peut pivoter sans frottements autour de l'axe horizontal (O, \vec{u}_z). La partie de droite, en noir, peut recevoir des masses marquées sur un plateau

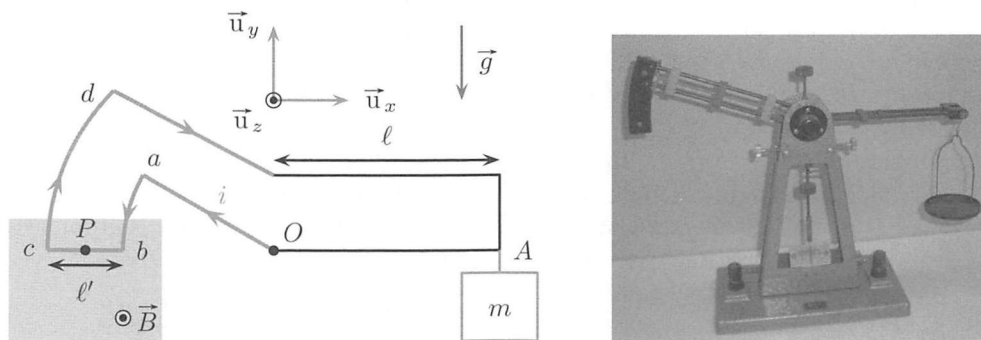


FIG. 21.6. Balance de Cotton.

L'expression de ce champ n'est valable qu'au point O . À cause de l'écartement des lignes de champ en sortie de chaque bobine, les champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 ne sont pas uniformes, donc \vec{B} non plus. Cependant, si les bobines sont assez proches de O et si on considère une zone de petite extension spatiale autour de O , on fera l'approximation d'uniformité du champ magnétique dans cette zone.

IV. Exercices

1. Multimètre analogique ★★

(solution page 776)

Un ampèremètre analogique indique la valeur d'un courant électrique mesuré sur un cadran à aiguille. Pour remplir cette fonction, l'aiguille est solidaire d'un cadre de cuivre parcouru par le courant d'intensité i constante, à mesurer. Ce cadre, de largeur $2a$ et de hauteur b , est monté sur une liaison pivot d'axe (O, \vec{u}_z) vertical ascendant (voir figure 21.5). Les points A et C sont les points de branchement avec le circuit électrique dans lequel on cherche à mesurer le courant. Les branchements électriques en A et C ne gênent pas la rotation du cadre. L'ensemble baigne dans le champ magnétique \vec{B} créé par un aimant. Ce champ, non uniforme, est partout perpendiculaire à l'axe (O, \vec{u}_z) . En $r = a$, c'est-à-dire au niveau des côtés verticaux du cadre de cuivre, sa norme est B_0 .

- ▶ Il est radial sortant au niveau du côté du cadre où i est montant : $\vec{B} = B_0 \vec{u}_r$.
- ▶ Il est radial entrant au niveau du côté du cadre où i est descendant : $\vec{B} = -B_0 \vec{u}_r$.

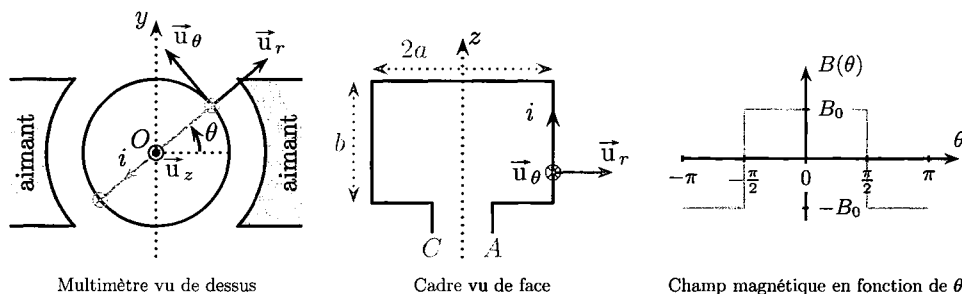


FIG. 21.5. Schéma de la partie articulée d'un multimètre analogique et variations du champ magnétique avec l'angle.

Le cadre a pour moment d'inertie J par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) . La liaison pivot exerce sur lui un couple de frottement fluide de moment $\Gamma_f = -\lambda \dot{\theta}$, où $\lambda > 0$ est le coefficient de frottement et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du cadre. Un fil de torsion, non représenté sur le schéma, exerce sur le cadre un couple de rappel de moment $\Gamma_r = -\alpha \theta$, où $\alpha > 0$ est la constante de torsion du fil. Les éventuels phénomènes d'induction, qui seront étudiés aux chapitres 22, 23 et 24, sont supposés négligeables dans tout cet exercice.

1. Exprimer les forces de Laplace subies par les côtés verticaux du cadre.
2. Les forces de Laplace subies par les côtés horizontaux du cadre auront-elles une influence sur la rotation du cadre autour de l'axe (O, \vec{u}_z) ?
3. Exprimer le moment Γ_{la} par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) des actions de Laplace subies par le cadre.

l'influence de l'autre. Sous l'effet des inévitables frottements des liaisons pivot, leur rotation s'atténue et ils se stabilisent lorsque le pôle nord de l'un fait face au pôle sud de l'autre.

III. Effet moteur d'un champ magnétique tournant

Si on parvient à générer un champ magnétique tournant, un moment magnétique plongé dans ce champ va lui aussi tourner en cherchant à s'aligner sur ce champ sous l'effet du couple magnétique de Laplace. C'est le principe des machines électriques dites « à champ tournant » (moteurs synchrone et asynchrone).

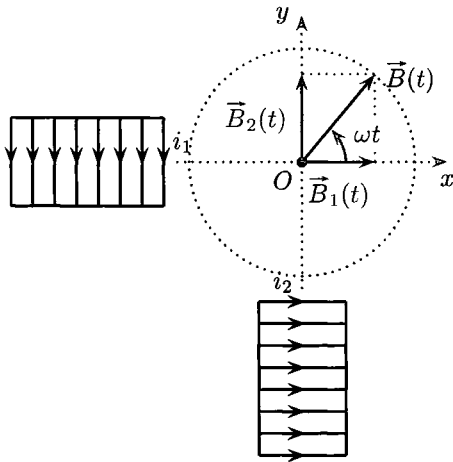


FIG. 21.4. Génération d'un champ magnétique tournant par superposition de deux champs magnétiques sinusoïdaux déphasés dans le temps. Le vecteur champ magnétique \vec{B} résultant tourne à la vitesse angulaire ω : son extrémité se déplace sur le cercle en pointillé.

Comme indiqué sur la figure 21.4, on dispose orthogonalement deux bobines identiques dont les axes définissent le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Au point O , chaque bobine crée un champ magnétique dirigé selon l'axe de la bobine et proportionnel à l'intensité du courant qui parcourt la bobine (attention : l'expression $B = \mu_0 n i$ n'est plus vraie en dehors de la bobine) :

- ▶ la bobine 1 crée $\vec{B}_1(t) = K i_1(t) \vec{u}_x$;
- ▶ la bobine 2 crée $\vec{B}_2(t) = K i_2(t) \vec{u}_y$.

Si les bobines sont identiques et situées à la même distance du point O , la constante de proportionnalité K est la même pour les deux bobines. Par superposition, le champ magnétique résultant en O est la somme $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = K i_1(t) \vec{u}_x + K i_2(t) \vec{u}_y$. Pour que ce champ soit qualifié de tournant, il faut que sa norme soit constante et que sa direction change régulièrement au cours du temps. Pour cela, on alimente les bobines avec deux courants de même amplitude i_0 , même pulsation temporelle ω , et déphasés de $\pi/2$: $i_1(t) = i_0 \cos(\omega t)$ et $i_2(t) = i_0 \sin(\omega t)$. Dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , le champ magnétique résultant s'écrit $\vec{B} = K i_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x + K i_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$ ou encore, en notant $B_0 = K i_0$,

$$\vec{B}(t) = B_0 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} : \text{champ tournant à la pulsation } \omega \text{ et de norme } B_0.$$

définit l'angle orienté $\alpha = (\vec{m}, \vec{B})$. En exprimant le produit vectoriel, le couple de Laplace subi par \vec{m} s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \vec{m} \wedge \vec{B} = mB \sin \alpha \vec{u}_z.$$

Son sens dépend du signe de $\sin \alpha$.



FIG. 21.3. Effet mécanique du couple $\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ sur un moment magnétique \vec{m} .

- ▶ Si $\alpha \in]0, \pi[$ (cas de gauche sur la figure 21.3), alors $\vec{\mathcal{M}}_{1a}$ pointe selon $+\vec{u}_z$ et tend à faire tourner \vec{m} dans le sens trigonométrique.
- ▶ Si $\alpha \in]-\pi, 0[$ (cas de droite sur la figure 21.3), alors $\vec{\mathcal{M}}_{1a}$ pointe selon $-\vec{u}_z$ et tend à faire tourner \vec{m} dans le sens antitrigonométrique.

Dans les deux cas, le couple de Laplace fait tourner \vec{m} dans un sens qui fait diminuer la valeur absolue de l'angle α , ce qui tend à aligner \vec{m} sur \vec{B} (le vecteur \vec{m} étant de même sens que \vec{B}).

La position $\alpha = 0$ est une position d'équilibre stable. En effet, si on éloigne légèrement α de zéro, le couple tend à faire diminuer $|\alpha|$, c'est-à-dire à faire revenir \vec{m} vers la position $\alpha = 0$.

La position $\alpha = \pi$ est également une position d'équilibre, car $\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \vec{0}$. Cet équilibre est cependant instable. En effet, éloigner légèrement \vec{m} de la position $\alpha = \pi$ revient à le placer dans un des deux cas $\alpha \in]0, \pi[$ ou $\alpha \in]-\pi, 0[$. Le couple magnétique tend alors à diminuer $|\alpha|$ (pour l'amener à 0), ce qui éloigne \vec{m} de sa position initiale $\alpha = \pi$. Cette étude est résumée dans le théorème 21.6 ci-après.

Théorème 21.6. Effet mécanique du couple de Laplace

Le couple de Laplace $\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ subi par un moment magnétique \vec{m} tend à aligner \vec{m} sur \vec{B} , où « aligner » signifie « mettre parallèle et de même sens ». Cette configuration est la seule position d'équilibre stable.

Remarques

- ▶ Le théorème 21.6 illustre ce que subit une boussole (aiguille aimantée de moment magnétique \vec{m}) : elle s'aligne sur le champ ambiant, qui est le champ magnétique terrestre si on se trouve loin de tout aimant ou courant (voir exercice 3 page 588).
- ▶ Dans le théorème 21.6, le champ magnétique \vec{B} est créé par une source (circuit ou aimant). Le couple de Laplace $\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ traduit en réalité l'action à distance de la source de \vec{B} sur le circuit ou l'aimant de moment \vec{m} . Le champ magnétique n'est qu'un outil pratique pour traduire les actions à distance. D'après le principe des actions réciproques, la source de \vec{B} subit, de la part de \vec{m} , le moment opposé $-\vec{\mathcal{M}}_{1a}$. Ainsi, si on approche l'un de l'autre deux aimants libres de tourner (deux boussoles ou deux aimants suspendus à des fils, par exemple), chacun se met à tourner sous

2. Pour calculer leur moment en O , on exprime chaque force de Laplace (on les numérote de 1 à 4 comme sur le schéma). On introduit le vecteur unitaire \vec{u}_r faisant l'angle θ avec \vec{u}_x , de sorte que $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$. On note α le complémentaire à $\pi/2$ de θ .

$$\blacktriangleright \vec{F}_1 = i\overline{PQ} \wedge \vec{B} = ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_x = ibB(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x) = ibB\vec{u}_y$$

$$\blacktriangleright \vec{F}_2 = i\overline{QR} \wedge \vec{B} = i(-a\vec{u}_r) \wedge B\vec{u}_x = -iaB\vec{u}_r \wedge \vec{u}_x = +iaB \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\blacktriangleright \vec{F}_3 = i\overline{RS} \wedge \vec{B} = -i\overline{PQ} \wedge \vec{B} = -\vec{F}_1 = -ibB\vec{u}_y$$

$$\blacktriangleright \vec{F}_4 = i\overline{SP} \wedge \vec{B} = -i\overline{QR} \wedge \vec{B} = -\vec{F}_2 = -iaB \sin \theta \vec{u}_z$$

On introduit les milieux M_i des quatre côtés. Le moment en O de ces quatre forces est la somme de quatre termes, dont deux sont nuls car $\overline{OM}_2 \parallel \vec{F}_2$ et $\overline{OM}_4 \parallel \vec{F}_4$,

$$\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \overline{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \underbrace{\overline{OM}_2 \wedge \vec{F}_2}_{=\vec{0}} + \overline{OM}_3 \wedge \vec{F}_3 + \underbrace{\overline{OM}_4 \wedge \vec{F}_4}_{=\vec{0}}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \frac{a}{2} \vec{u}_r \wedge ibB\vec{u}_y + \left(-\frac{a}{2} \vec{u}_r\right) \wedge (-ibB\vec{u}_y) = a\vec{u}_r \wedge ibB\vec{u}_y$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{1a} = iabB(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_y) = iabB \sin \alpha \vec{u}_z.$$

On remarque que ce moment ne dépend pas du point O . C'est toujours le cas quand il s'agit du moment relatif à des actions dont la résultante est nulle. Un tel moment s'appelle un couple.

3. Le moment magnétique du cadre est défini par $\vec{m} = i\vec{S}$, où \vec{S} est le vecteur surface du circuit, orienté par le sens conventionnel de i et la règle de la main droite (voir définition 20.12 page 576). Ici $\vec{m} = iab\vec{n}$, où \vec{n} , défini sur le schéma, fait l'angle α avec \vec{u}_x . On remarque que $|\vec{\mathcal{M}}_{1a}| = |\vec{m}| \times |\vec{B}| \times |\sin \alpha|$, ce qui suggère un produit vectoriel. On vérifie que $\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ donne bien le résultat de la question précédente.

Le résultat de cet exercice corrigé, démontré dans le cas particulier de la spire rectangulaire, reste vrai dans le cas d'un circuit de forme quelconque plongé dans un champ magnétique uniforme (résultat admis). De plus, un aimant, comme un circuit électrique, est caractérisé par un moment magnétique (voir définition 20.13 page 577). Par conséquent, le résultat établi à la fin de l'exercice corrigé 21.4 se généralise par le théorème 21.5 ci-après.

Théorème 21.5. Moment dans un champ magnétique uniforme

Un moment magnétique \vec{m} (circuit électrique ou aimant) plongé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} subit, de la part de ce champ, des actions de Laplace dont la résultante est nulle et le moment (couple) est

$$\vec{\mathcal{M}}_{1a} = \vec{m} \wedge \vec{B}.$$

Attention : si le champ magnétique n'est pas uniforme à l'échelle du dipôle magnétique, la résultante des actions magnétiques n'est pas nulle.

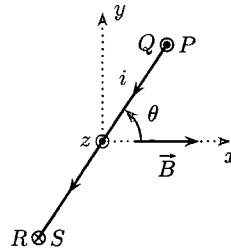
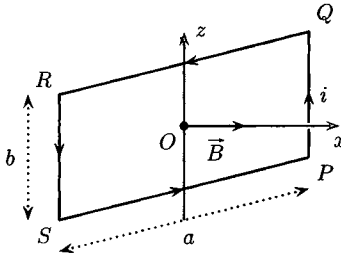
Grâce à la description en termes de moment magnétique, il est facile d'analyser les effets mécaniques du champ magnétique \vec{B} sur un circuit ou un aimant de moment magnétique \vec{m} . Sur la figure 21.3, \vec{m} et \vec{B} sont contenus dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) et on

II. Actions de Laplace sur une spire ou un aimant

Pour comprendre l'effet mécanique des actions de Laplace sur un moment magnétique (aimant ou circuit électrique parcouru par un courant), on calcule les effets des actions de Laplace sur le cas simple d'une spire rectangulaire, conformément au programme de CPGÉ. Ces calculs, utiles pour comprendre le principe de certains moteurs électriques, sont présentés dans l'exercice corrigé 21.4 ci-après.

EXERCICE CORRIGÉ 21.4.

Spire dans un champ magnétique



On considère un circuit rectangulaire $PQRS$ de côtés a et b parcouru par un courant électrique d'intensité i . Ce circuit peut pivoter autour de l'axe z . Il est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_x$ orthogonal à l'axe z . Les schémas donnent une vue en perspective et une vue de dessus (depuis les z positifs).

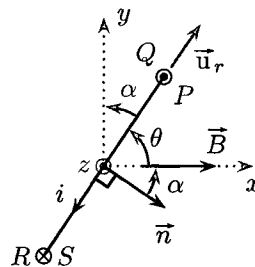
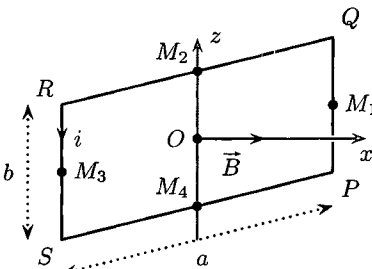
1. Calculer la résultante des actions de Laplace subies par ce circuit. (Il n'est pas nécessaire d'expliciter les forces de Laplace dans la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) pour obtenir le résultat.)
2. Après avoir exprimé la force de Laplace subie par chaque côté du cadre, exprimer \vec{M}_{1a} , le moment par rapport au point O (centre du cadre) des actions de Laplace dans la base orthonormée ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$). Ce moment dépend-il du point O ? Est-ce normal?
3. Après avoir rappelé la définition du moment magnétique \vec{m} du cadre, montrer que \vec{M}_{1a} s'exprime simplement en fonction de \vec{m} et \vec{B} .

Corrigé

1. Par définition, la résultante est la somme des forces de Laplace subies par chaque côté,

$$\vec{F}_{1a} = i\vec{PQ} \wedge \vec{B} + i\vec{QR} \wedge \vec{B} + i\vec{RS} \wedge \vec{B} + i\vec{SP} \wedge \vec{B} = i(\underbrace{\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} + \vec{SP}}_{=\vec{0}}) \wedge \vec{B}.$$

Ainsi, $\vec{F}_{1a} = \vec{0}$, ce qui signifie que le champ magnétique n'a pas tendance à déplacer le centre de masse du cadre. Son seul effet, s'il en a un, sera de faire tourner le cadre autour de son centre de masse. Attention, ce résultat n'est valable que si le champ magnétique \vec{B} est uniforme. Si \vec{B} n'est pas uniforme, il n'a pas la même valeur sur les quatre côtés du cadre et ne peut pas être mis en facteur dans le calcul qui précède.



Dans la pratique, cela ne peut pas avoir lieu, car la barre, en se déplaçant dans le champ magnétique, est le siège de phénomènes d'induction (étudiés au chapitre 22) qui font décroître l'intensité i . Les actions de Laplace sont donc de moins en moins intenses et on montre que la barre atteint une vitesse limite.

2. Par définition, on calcule une puissance comme le produit scalaire de la force par le vecteur vitesse du point d'application de cette force. La puissance mécanique fournie par les actions de Laplace à la barre est donc

$$\mathcal{P}_{1a} = \vec{F}_{1a} \cdot \vec{v} = i\ell B \vec{u}_x \cdot v \vec{u}_x \Rightarrow \mathcal{P}_{1a} = i\ell Bv.$$

3. Le poids et la réaction des rails sont orthogonaux à la vitesse des points auxquels ils s'appliquent. Ils donnent donc une puissance nulle à la barre. La seule puissance qui intervient dans le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la barre est celle de la force de Laplace,

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{1a} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = i\ell Bv \Rightarrow mv \frac{dv}{dt} = i\ell Bv.$$

Cette dernière équation est, au facteur multiplicatif v près, la même que celle obtenue à la question 1 en appliquant le théorème de la quantité de mouvement.

PC ∇ On peut particulariser la définition de la force de Laplace à chaque élément infinitésimal $d\vec{\ell}$ de fil électrique, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 21.3. Force de Laplace élémentaire

Un élément de fil situé au point M , de longueur $d\vec{\ell}_M$, orienté par l'intensité électrique i et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$ subit la force de Laplace élémentaire (voir figure 21.2)

$$d\vec{F}_{1a} = i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M).$$

Cette définition étant valable au point M où se trouve l'élément de fil, elle fait intervenir la valeur du champ en ce point. Elle peut donc être utilisée même si le champ magnétique est non uniforme. La résultante des actions de Laplace s'exerçant sur un fil est la somme (intégrale) des actions de Laplace élémentaires,

$$\vec{F}_{1a} = \int_{\text{fil}} d\vec{F}_{1a} = \int_{M \in \text{fil}} i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M).$$

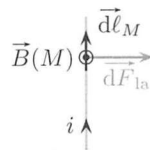


FIG. 21.2. Force de Laplace élémentaire.

Attention

Sens d'intégration

L'intégrale le long du fil doit être calculée dans le sens conventionnel de i , car, dans la définition de la force de Laplace, $d\vec{\ell}_M$ est orienté dans le sens de i .

Le découpage en forces élémentaires de Laplace est utile si le champ magnétique n'est pas uniforme ou si le fil électrique n'est pas rectiligne (voir exercice 2 page 587 et exercice 4 page 589).

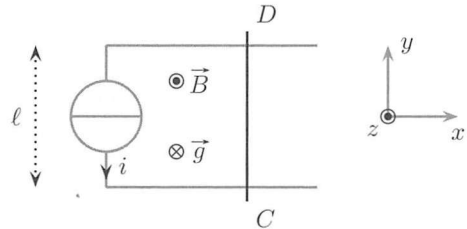
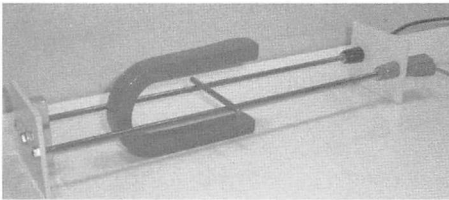
Pour une intensité de 1 A, dans un champ magnétique uniforme de 1 T, un fil rectiligne de 1 m de longueur subit une force de Laplace de 1 N, soit approximativement le poids d'une masse de 100 g. C'est une force relativement faible malgré des valeurs conséquentes de champ magnétique et de courant. Pour obtenir des forces importantes dans les moteurs électriques, on réalise des bobinages avec de nombreux tours de fils. Cela augmente la longueur effective de fil et multiplie les effets des forces de Laplace.

L'exercice corrigé 21.2 présente le dispositif des rails de Laplace (à connaître) et les calculs usuels qui s'y rapportent. Cela illustre dans une géométrie simple le principe des moteurs électriques.

EXERCICE CORRIGÉ 21.2.

Rails de Laplace

Le schéma ci-après présente le dispositif des rails de Laplace : la partie du circuit électrique représentée en gris (deux rails parallèles et un générateur de courant) est fixe dans le laboratoire. La barre $[CD]$, de masse m et de longueur ℓ , referme le circuit mais peut se déplacer (glissement possible sans frottement sur les rails aux points C et D). L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$ orthogonal au plan formé par les rails. On suppose que le seul mouvement possible de la barre $[CD]$ est une translation parallèle à la direction x avec la vitesse $\vec{v}(t) = v(t) \vec{u}_x$.



La photographie montre le dispositif expérimental, dans lequel le champ magnétique est généré par un aimant en forme de fer à cheval.

1. Établir l'équation du mouvement de la barre. La résoudre en supposant que le générateur délivre une intensité électrique i constante et que la vitesse initiale de la barre est nulle. Commenter le résultat.
2. Déterminer la puissance des actions de Laplace s'exerçant sur la barre.
3. Vérifier que l'on retrouve le résultat de la question 1 en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la barre.

Corrigé

1. On applique la définition 21.1 avec les notations de l'énoncé,

$$\vec{F}_{\text{la}} = i \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B} = i\ell \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i\ell B \vec{u}_x.$$

Les seules autres forces auxquelles est soumise la barre sont son poids $m\vec{g}$ et la réaction \vec{R} des rails. Elles sont verticales et donneront une projection nulle sur \vec{u}_x . La loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit, dans le référentiel galiléen du laboratoire,

$$\vec{F}_{\text{la}} + \vec{R} + m\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow i\ell B = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{i\ell B}{m}.$$

Si l'intensité i est constante et la vitesse initiale de la barre est nulle, cette équation s'intègre en $v(t) = \frac{i\ell B}{m} t$. On remarque que la vitesse de la barre tend vers l'infini.

Chapitre 21

ACTIONS D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

UN CIRCUIT électrique parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique ambiant subit des actions mécaniques dites de Laplace. Ces actions sont mises à profit dans tous les moteurs électriques.

I. Forces de Laplace

Un fil électrique rectiligne parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique uniforme subit une force, dite force de Laplace, qui vérifie les caractéristiques suivantes.

- ▶ Elle est perpendiculaire au champ magnétique et au fil.
- ▶ Le trièdre formé par le courant orienté, le champ magnétique et la force de Laplace est direct (voir figure 21.1).
- ▶ Sa norme est proportionnelle à la longueur du fil, à l'intensité du courant dans le fil et à l'intensité du champ magnétique.

Ces faits expérimentaux conduisent à la définition suivante.

Définition 21.1. Force de Laplace

Soit un fil électrique rectiligne de longueur ℓ , parcouru par une intensité électrique i , plongé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . En définissant le vecteur $\vec{\ell}$ de norme ℓ , confondu avec le fil et orienté par i , la force de Laplace subie par le fil s'écrit

$$\vec{F}_{\text{la}} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

Cette force s'exerce sur le milieu du fil.

Attention : ces résultats ne sont vrais que si le champ magnétique est uniforme.

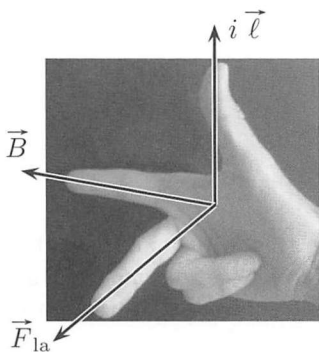


FIG. 21.1. La règle des trois doigts de la main droite permet de trouver rapidement l'orientation de la force de Laplace : les trois vecteurs $i\vec{\ell}$, \vec{B} et \vec{F}_{la} sont dans l'ordre pouce \rightarrow index \rightarrow majeur.

Remarque On peut démontrer (hors programme) que la force de Laplace est une conséquence de la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{\text{lo}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, exercée par le champ magnétique sur les porteurs de charges mobiles responsables du courant électrique dans le fil.

IV. Exercices

1. Champ créé par un moment magnétique ★ (solution page 776)

On considère un moment magnétique \vec{m} (un aimant, par exemple) de centre O . On note \vec{u} le vecteur unitaire colinéaire à \vec{m} et de même sens que \vec{m} (donc $\vec{m} = m \vec{u}$). On admet que l'expression du champ magnétique créé par \vec{m} en un point M situé hors de l'aimant sur l'axe (O, \vec{u}) est approximativement $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} m r^p \vec{u}$, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, r est la distance OM et p est un nombre réel.

1. Déterminer la valeur de p .
2. Cette valeur est-elle en accord avec l'allure des lignes du champ magnétique créé par un aimant ?

2. Rapport gyromagnétique d'un atome ★ (solution page 776)

On considère le modèle classique de Bohr de l'atome d'hydrogène. L'électron, de masse m et de charge $q = -e$, a une trajectoire circulaire uniforme de rayon r et de vitesse \vec{v} autour du noyau situé au point O . On note (O, \vec{u}_z) l'axe de cette trajectoire circulaire.

1. En fonction de m , r et ω , la vitesse angulaire de rotation de l'électron, exprimer le moment cinétique \vec{L} de l'électron par rapport au point O (\vec{L} s'appelle le moment cinétique orbital).
2. Exprimer l'intensité électrique circulant dans la spire équivalente à la boucle de courant formée par l'électron en rotation. En déduire le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de cette spire.
3. Montrer que $\vec{\mathcal{M}} = \alpha \vec{L}$, où α , à exprimer, s'appelle le rapport gyromagnétique orbital de l'atome. Donner sa valeur numérique sachant que $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Remarque L'orientation du courant (flèche de i) est arbitraire et ne préjuge en rien du sens réel du courant dans le circuit. Elle indique simplement que l'intensité est comptée positive si le courant circule effectivement dans le sens de la flèche. L'intensité i est donc algébrique, c'est-à-dire qu'elle peut être positive ou négative dans toutes les relations données. Par exemple, l'expression du champ $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ du solénoïde infini est toujours valable, quel que soit le signe de i : si on inverse le sens du courant, on inverse aussi le sens du champ magnétique. De même, i est algébrique dans la définition $\vec{m} = i \vec{S}$ du moment magnétique. Le vecteur surface \vec{S} est orienté par le sens arbitraire de la flèche de i (et par la règle de la main droite). Le sens de \vec{S} est donc fixé une fois pour toutes, indépendamment du signe de i . Ainsi, si le sens du courant change, le sens de $\vec{m} = i \vec{S}$ aussi. Cela inverse les pôles nord et sud de la bobine, ce qui est normal, car le sens du champ magnétique créé est aussi inversé.

Définition 20.13. Moment magnétique d'un aimant

Puisqu'un aimant droit et un solénoïde génèrent des champs magnétiques de même géométrie, on peut définir le moment magnétique d'un aimant droit comme le moment magnétique $\vec{m} = N i \vec{S}$ du solénoïde de même taille que l'aimant et qui produirait le même champ que l'aimant.

EXERCICE CORRIGÉ 20.14. Moment magnétique d'un aimant

On considère un aimant droit cylindrique de section $S = 1,0 \text{ cm}^2$, de longueur $L = 10 \text{ cm}$, générant en son pôle nord un champ magnétique $\vec{B}_a = B_a \vec{u}_z$ d'intensité $B_a = 0,10 \text{ T}$, où \vec{u}_z est le vecteur unitaire dirigé selon l'axe du cylindre du sud vers le nord de l'aimant. Déterminer le moment magnétique \vec{m} de cet aimant.

Corrigé

On considère un solénoïde fictif, de mêmes dimensions que l'aimant, possédant N spires. Le nombre de spires par unité de longueur est $n = N/L$ et le champ magnétique créé est donné par l'expression classique $\vec{B}_s = \mu_0 n i \vec{u}_z$. En toute rigueur, cette expression est valable uniquement pour un solénoïde infiniment long.

Estimons le rapport longueur/rayon. En notant r le rayon, $S = \pi r^2$, donc $r = \sqrt{S/\pi} \simeq 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ et $L/r \simeq 18$.

Ce rapport est grand devant 1, donc le solénoïde peut être considéré comme long. Cependant, l'expression est valable *dans* le solénoïde et commence à devenir fautive près de ses extrémités (zones où les lignes de champ magnétique s'écartent les unes des autres, donc où l'intensité du champ décroît). Faute de mieux, on admet (approximation) que le champ à l'extrémité du solénoïde est encore donné par cette expression. On veut que le solénoïde fictif modélise le comportement de l'aimant, ce qui impose

$$\vec{B}_a = \vec{B}_s = \mu_0 \frac{N}{L} i S \vec{u}_z \Rightarrow N i = \frac{L}{\mu_0 S} B_a.$$

Enfin, le moment magnétique du solénoïde est

$$\vec{m} = N i S \vec{u}_z = \frac{L}{\mu_0} B_a \vec{u}_z \Rightarrow \vec{m} = \frac{L}{\mu_0} \vec{B}_a \Rightarrow |\vec{m}| \simeq 8 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

Cette valeur numérique n'est qu'un ordre de grandeur, car le raisonnement repose sur une approximation. L'expression de \vec{m} ne fait pas intervenir la section S du cylindre. Cependant, cette section intervient dans le fait que l'on puisse considérer le cylindre comme « infiniment long ».

Définition 20.11. Vecteur surface d'un circuit filiforme plan

Soit un circuit filiforme plan dont le contour délimite une aire S . On oriente ce circuit arbitrairement en plaçant une flèche pour le courant (voir figure 20.9). Le vecteur surface est défini comme $\vec{S} = S \vec{n}$, où \vec{n} est le vecteur unitaire :

- ▶ orthogonal au plan contenant le circuit ;
- ▶ orienté par le sens d'orientation du courant et la règle de la main droite.

Le vecteur surface \vec{S} a pour unité le m^2 dans le système SI.

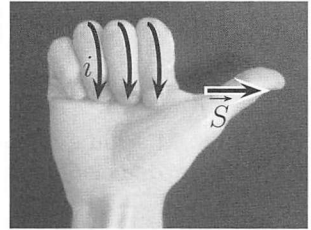
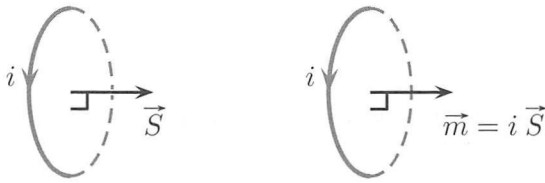


FIG. 20.9. Vecteur surface \vec{S} et moment magnétique \vec{m} d'un circuit plan.

Définition 20.12. Moment magnétique

Soit un circuit filiforme de vecteur surface \vec{S} parcouru par un courant d'intensité i (voir figure 20.9). Le moment magnétique \vec{m} du circuit est défini par

$$\vec{m} \stackrel{\text{déf.}}{=} i \vec{S}.$$

Le vecteur moment magnétique :

- ▶ s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^2$ en unités SI ;
- ▶ pointe du sud vers le nord du circuit (voir figure 20.10).

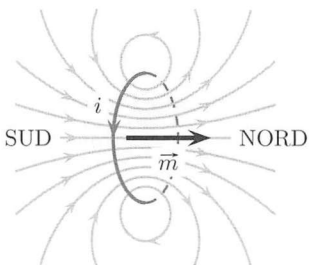


FIG. 20.10. Moment magnétique et lignes de champ magnétique pour une spire. Le moment magnétique pointe du sud vers le nord.

Un enroulement de N spires jointives (solénoïde) parcourues par l'intensité i est équivalent à une seule spire parcourue par l'intensité Ni . En conséquence, le moment magnétique d'une bobine de N spires est

$$\vec{m} = N i \vec{S}.$$

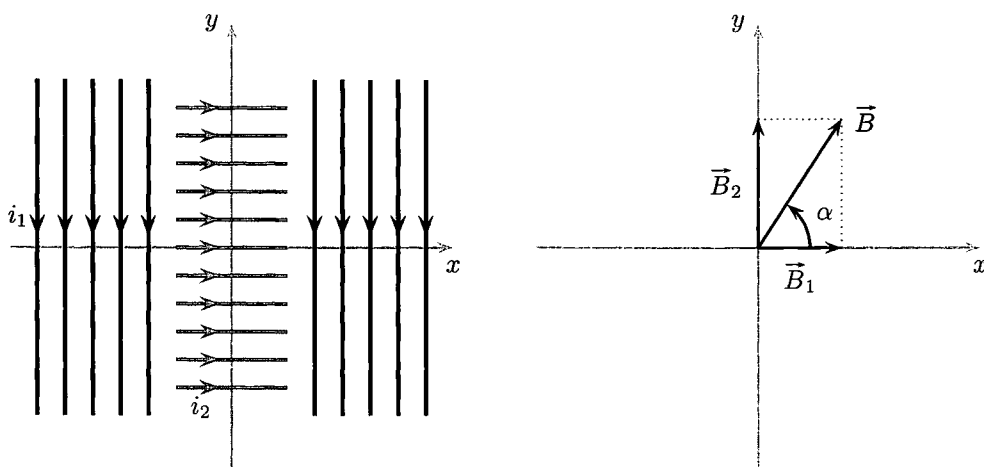


FIG. 20.8. Mise en évidence du principe de superposition des champs magnétiques à l'aide de deux solénoïdes et d'une boussole. Le solénoïde 2 (en gris) est dans le solénoïde 1 (en noir). Le solénoïde noir n'a pas été représenté en entier pour des raisons de clarté.

Or, pour chaque solénoïde, $B = \mu_0 ni$, donc

$$\tan \alpha = \frac{B_2}{B_1}.$$

Cette relation montre que le champ résultant est simplement la somme des champs créés par les deux solénoïdes,

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Ce résultat est général. S'il existe N sources de champ magnétique (aimants ou circuits), le champ résultant en un point M est

$$\vec{B}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i(M).$$

Principe 20.10. Principe de superposition des champs magnétiques

Dans le vide, les champs magnétiques en un point de l'espace se somment vectoriellement.

Ce résultat n'est *a priori* vrai que dans le vide. Au sein d'une masse ferreuse, les champs magnétiques ne se somment pas toujours vectoriellement (phénomènes non linéaires dans le fer).

III. Moment magnétique

La notion de moment magnétique introduite dans cette section permet d'unifier la description des différentes sources de champ magnétique (circuits électriques et aimants). Cette notion nécessite de définir le vecteur surface d'un circuit électrique. Conformément au programme, on se limite aux circuits contenus dans un plan.

Corrigé

Le rapport longueur/diamètre du solénoïde vaut 10. C'est donc une bobine très longue et on peut appliquer l'expression du champ magnétique du solénoïde infiniment long. L'enroulement contient 500 spires pour 10 cm de longueur de solénoïde, soit $n = 5 \cdot 10^3$ spires par mètre, d'où

$$B = \mu_0 n i = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 5 \cdot 10^3 \times 1 \simeq 6 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

On retrouve le fait que le tesla est une « grosse unité ». Ce champ est faible malgré un nombre de spires important et une intensité de courant assez forte. Pour comparaison, rappelons le champ à l'extrémité d'un aimant, qui peut atteindre $5 \cdot 10^{-1} \text{ T}$ pour les aimants au néodyme (voir encadré page 571).

Pour augmenter l'intensité du champ magnétique créé, on peut introduire un noyau de fer doux (fer sans impuretés) dans le solénoïde. Le champ magnétique est alors simplement multiplié par μ_r , la perméabilité relative (sans dimension) du fer doux, qui est de l'ordre de 10^3 (la valeur précise dépend du matériau). Cela permet d'atteindre des champs de l'ordre du tesla. Un solénoïde équipé d'un noyau de fer doux est un *électroaimant*, c'est-à-dire un aimant commandable par passage du courant.

Malgré l'usage des noyaux de fer, il est difficile de générer des champs de plus de quelques teslas. Générer un fort champ magnétique avec un solénoïde nécessiterait d'augmenter simultanément le nombre de spires et l'intensité du courant. Ces deux besoins sont antagonistes, car un fort courant nécessite de gros fils et rend le bobinage plus encombrant, réduisant le nombre de spires réalisable. On peut s'affranchir de ce problème en utilisant des fils supraconducteurs (de résistance électrique rigoureusement nulle), mais le comportement supraconducteur n'est atteint que pour de très basses températures et nécessite un gros système de refroidissement. L'autre problème majeur pour la réalisation de champs intenses est l'énormité des forces magnétiques mises en jeu. Elles ont tendance à étirer les spires vers l'extérieur, faisant littéralement exploser le solénoïde. Le record actuel est d'environ 45 T, avec un électroaimant spécial de 32 tonnes réalisé au National High Magnetic Field Laboratory (États-Unis). Pour résister aux énormes forces magnétiques, cet électroaimant est réalisé avec des blocs (et non des fils) de supraconducteur. Il fonctionne à basse température ($T = -271 \text{ °C}$).

II.3. Principe de superposition des champs magnétiques

Le principe 20.8 énonce la proportionnalité entre l'intensité électrique dans un circuit et le champ magnétique créé par ce circuit. Mathématiquement, on dit qu'il y a une relation linéaire entre le champ et le courant. Cette notion de linéarité est étendue avec le principe de superposition des champs magnétiques dans le vide.

On fabrique un dispositif constitué de deux longs solénoïdes orthogonaux, le solénoïde 2 étant dans le solénoïde 1 (voir figure 20.8). Les deux solénoïdes ont le même nombre n de spires par unité de longueur.

Une boussole, placée à l'intersection des axes des deux solénoïdes, s'aligne sur le champ résultant. Expérimentalement, on constate que l'angle α repérant la boussole vérifie

$$\tan \alpha = \frac{i_2}{i_1}.$$

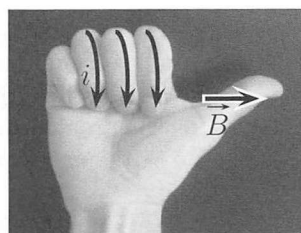
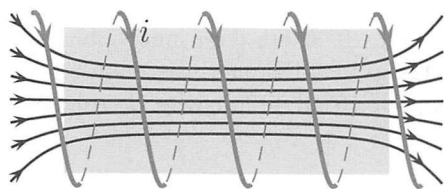


FIG. 20.7. Règle de la main droite. En fermant la main droite, les doigts indiquent le sens du courant et le pouce indique le sens du champ magnétique résultant dans le solénoïde.

Remarque Si un morceau de fer est à proximité du circuit, il peut perturber le champ magnétique et il n'y a plus nécessairement proportionnalité entre le champ magnétique et le courant. La loi de proportionnalité est donc *a priori* valable « dans le vide ».

Un exemple simple de champ magnétique est celui du solénoïde « infiniment long », c'est-à-dire dont la longueur est beaucoup plus grande que le diamètre. Le champ magnétique dans un tel solénoïde est *uniforme* (\vec{B} est le même en tout point) et est donné par une expression simple.

À l'intérieur d'un solénoïde infini d'axe de direction \vec{u}_z , comportant n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant i , le champ magnétique est uniforme et vaut

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z.$$

La constante de proportionnalité μ_0 , nécessaire pour assurer l'homogénéité de l'expression, est appelée *perméabilité magnétique du vide* et vaut

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \text{ exactement.}$$

L'unité H (henry) trouvera sa pleine utilité au chapitre 23.

Remarque Dans la relation $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$, le vecteur \vec{u}_z est unitaire. L'équation aux dimensions associée est donc, exprimée dans les unités SI,

$$[B] = [\mu_0] [n] [i] \Rightarrow \text{T} = \text{H} \cdot \text{m}^{-1} \text{m}^{-1} \text{A} \Rightarrow \text{T} = \text{H} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{A}.$$

Cette relation donne le lien entre les henrys, les teslas et les ampères.

EXERCICE CORRIGÉ 20.9.

Champ dans un solénoïde

Déterminer le champ magnétique dans un solénoïde de 500 spires, de 10,0 cm de longueur, de 10,0 mm de diamètre et parcouru par un courant de 1,00 A.

l'autre, et parcourues par des courants de même sens et même intensité, on obtient le dispositif des bobines de Helmholtz qui a la propriété de créer entre les bobines un champ magnétique quasiment uniforme (voir figure 20.6). Ce dispositif est très utile pour les expériences nécessitant un champ uniforme, d'autant plus que la zone est facilement accessible.

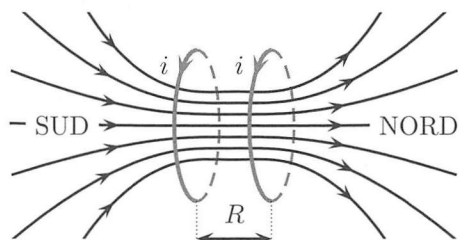


FIG. 20.6. Bobines de Helmholtz et lignes de champ magnétique. Le champ est quasi uniforme entre les bobines si la distance entre celles-ci est égale au rayon des bobines.

Synthèse

Création d'un champ magnétique uniforme

Un champ magnétique uniforme peut être obtenu à l'aide :

- ▶ de bobines de Helmholtz ;
- ▶ d'un solénoïde long.

II.2. Lien entre courant et champ magnétique

Le vecteur champ magnétique est usuellement noté \vec{B} .

Cette section présente les deux aspects du vecteur champ magnétique créé par une bobine :

- ▶ la direction et le sens de \vec{B} ;
- ▶ la norme de \vec{B} (appelée aussi intensité du champ magnétique).

La règle de la main droite est un moyen mnémotechnique simple pour déterminer le sens du champ magnétique créé par une bobine.

Règle de la main droite

Le champ magnétique créé par une bobine est orienté relativement au courant par la règle de la main droite (voir figure 20.7).

En fermant le poing de la main droite et en gardant le pouce tendu, les doigts indiquent le sens du courant et le pouce indique le sens du champ qui en résulte.

La norme du champ magnétique créé par une bobine obéit à la loi empirique suivante.

Principe 20.8. Proportionnalité entre champ magnétique et courant

Dans le vide, l'intensité du champ magnétique créé par un circuit électrique est proportionnelle à l'intensité du courant dans ce circuit.

L'unité SI de champ magnétique a été choisie en hommage à Nikola Tesla (1856-1943), ingénieur en électricité américain d'origine serbe.

Comme tout champ, le champ magnétique se mesure par ses effets. Son action sur les particules chargées a déjà été étudiée au chapitre 12 (voir page 313). Cet effet à l'échelle microscopique sur les particules se manifeste aussi à l'échelle macroscopique : un fil électrique parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique extérieur subit une force, dite de Laplace, dont l'intensité est proportionnelle au champ magnétique (les forces de Laplace seront étudiées au chapitre 21, page 579). On peut donc mesurer un champ magnétique en mesurant une force de Laplace. Il apparaît également une légère tension électrique, appelée tension de Hall, entre les bords latéraux opposés de ce fil électrique. La tension de Hall, dont l'étude est hors programme, est proportionnelle au champ magnétique dans lequel le fil électrique est plongé, permettant ainsi une mesure de ce champ. De nos jours, les champs magnétiques sont mesurés avec des teslamètres à effet Hall. Les ordres de grandeur suivants sont à connaître.



Nikola Tesla

Le tesla est souvent qualifié de « grosse unité » à cause des faibles ordres de grandeur numériques des champs magnétiques.

Composante horizontale du champ magnétique terrestre à la surface de la Terre	$5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
Champ à l'extrémité d'un aimant usuel	$5 \cdot 10^{-2}$ à $5 \cdot 10^{-1} \text{ T}$ selon le matériau
Appareil d'imagerie médicale à résonance magnétique	6 T

II.1. Lien entre intensité et carte du champ magnétique

On constate expérimentalement deux phénomènes lorsqu'on s'éloigne de la source (aimant ou bobine) qui crée un champ magnétique :

1. l'intensité du champ magnétique décroît ;
2. les lignes de champ magnétique s'écartent les unes des autres, comme le montrent les figures 20.2, 20.4 et 20.5.

Ces deux faits sont liés et constituent une propriété fondamentale du champ magnétique qui sera détaillée en seconde année.

Propriété 20.7. *Lien entre intensité et lignes du champ magnétique*

Deux lignes de champ voisines dans une zone où le champ est intense s'éloignent l'une de l'autre dans une zone où le champ décroît en intensité.

En conséquence, le champ magnétique est uniforme (direction et norme identiques en tout point) dans toute zone où les lignes de champ sont parallèles.

Le cœur d'un solénoïde long est donc une zone où le champ magnétique est uniforme. On peut également générer un tel champ avec des bobines de Helmholtz. En plaçant deux bobines plates de même rayon R sur le même axe, à la distance R l'une de

Du fait de la présence de pôles, une bobine possède des propriétés magnétiques analogues à celles d'un aimant. Le pôle sud d'une bobine repousse le pôle sud d'une autre bobine ou d'un aimant, et attire le pôle nord d'une autre bobine ou d'un aimant.

1.2.2. Bobine longue ou solénoïde

En enroulant un fil sur un cylindre, on fabrique une bobine en forme d'hélice appelée solénoïde. Un champ magnétique est créé lorsque ce fil est parcouru par un courant électrique (voir figure 20.5). Le champ à l'intérieur du solénoïde est quasiment uniforme et parallèle à l'axe du solénoïde. En grec, *sôlên* signifie canal : le solénoïde est un tube qui « canalise » le champ magnétique. Comme pour toute bobine, les lignes de champ entrent par la face sud et ressortent par la face nord.

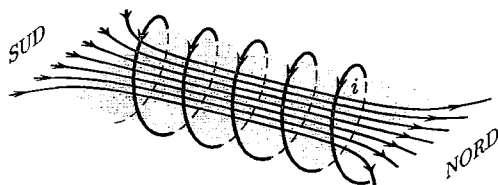
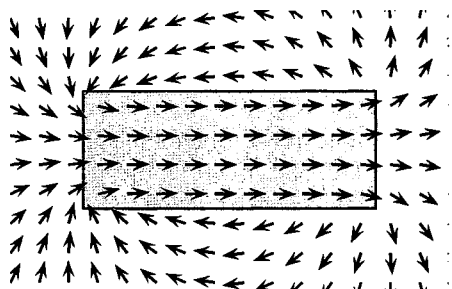
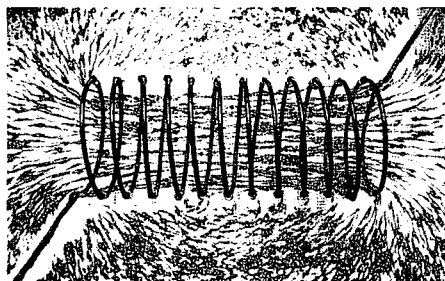


FIG. 20.5. Spectre magnétique d'un solénoïde. À l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ magnétique sont quasiment parallèles à l'axe du solénoïde.

L'uniformité du champ dans le solénoïde est d'autant meilleure que le solénoïde est « long », c'est-à-dire que le rapport (sans dimension) de sa longueur sur son diamètre est grand.

II. Intensité du champ magnétique

Qualitativement, un champ magnétique est intense si une boussole placée dans ce champ se stabilise immédiatement. C'est le cas d'une boussole près de laquelle on approche soudainement un gros aimant. Si on place la même boussole dans un champ magnétique peu intense, elle a tendance à osciller plusieurs fois avant de se stabiliser dans la direction du champ. C'est le cas d'une boussole dans le champ magnétique terrestre.

Définition 20.6. *Unité SI du champ magnétique*

L'unité SI de champ magnétique est le tesla (symbole T).

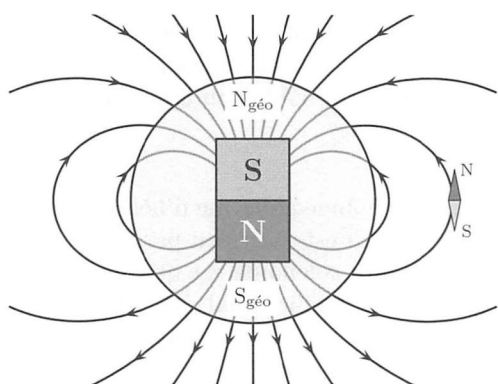


FIG. 20.3. Lignes du champ magnétique terrestre. La boussole s'aligne sur les lignes locales du champ magnétique terrestre. Le nord de la boussole pointe vers le nord géographique, qui est un pôle sud magnétique.

I.2. Champs magnétiques créés par des courants

En 1820, le physicien danois Hans Christian Oersted montra expérimentalement qu'une boussole, à proximité d'un fil rectiligne parcouru par un courant, s'oriente perpendiculairement à ce fil. Ce fut la première preuve que le courant électrique crée un champ magnétique.

I.2.1. Bobine plate

Une bobine plate, ou spire, est un fil électrique de forme circulaire (voir figure 20.4). Si un courant parcourt ce fil, un champ magnétique est créé. On constate expérimentalement que les deux faces de la bobine jouent le même rôle que les pôles d'un aimant.

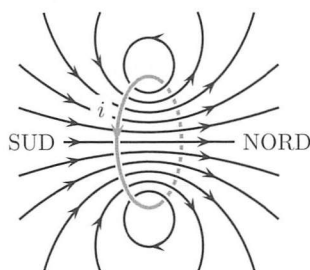


FIG. 20.4. À gauche, spectre magnétique d'une bobine plate visualisé par de la limaille de fer. À droite, la spire est représentée en gris, en perspective, et les lignes de champ magnétique en noir. Elles entrent dans la spire par la face sud et en ressortent par la face nord.

Définition 20.5. Pôles d'une bobine plate

Les lignes de champ magnétique entrent par la face sud (pôle sud) d'une bobine et ressortent par la face nord (pôle nord).

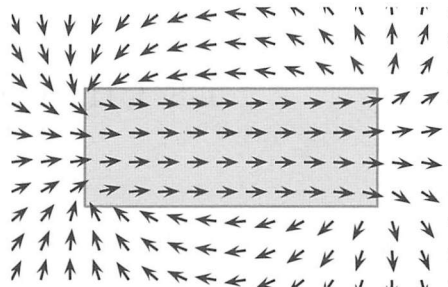
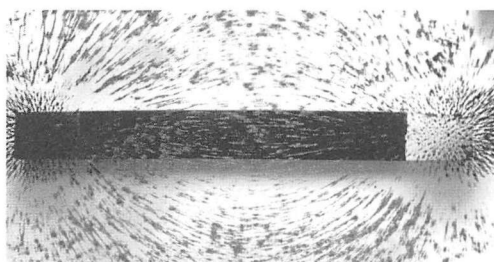


FIG. 20.1. Spectre magnétique d'un aimant droit. À gauche, de la limaille de fer déposée sur une plaque de verre posée sur un aimant droit permet de visualiser le spectre magnétique. À droite, carte du champ magnétique créé par un aimant droit : chaque flèche indique la direction du champ magnétique à l'endroit considéré.

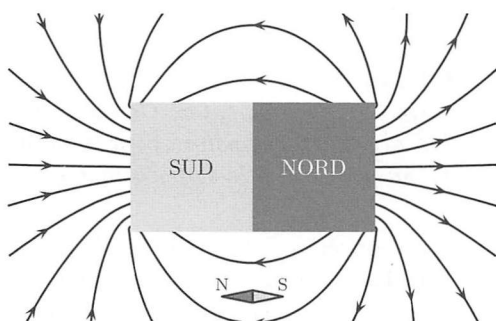


FIG. 20.2. Lignes de champ magnétique d'un aimant droit.

Propriété 20.3. Interactions entre deux aimants

Tout aimant possède un pôle nord et un pôle sud magnétiques (l'un n'existe pas sans l'autre). Les interactions entre deux aimants obéissent à la loi suivante.

- ▶ Deux pôles de même nature se repoussent.
- ▶ Deux pôles de natures distinctes s'attirent.

Cette loi d'interaction permet de placer correctement les pôles nord et sud de l'aimant droit de la figure 20.2 à l'aide d'une boussole (qui est elle-même un aimant servant de référence). De cet exemple, on déduit le lien entre les pôles d'un aimant droit et l'orientation des lignes du champ qu'il génère.

Définition 20.4. Pôles magnétiques d'un aimant

Un aimant crée un champ magnétique tel que les lignes de champ sortent de l'aimant par le pôle nord et entrent dans l'aimant par le pôle sud.

Du point de vue du champ magnétique créé, la Terre est assimilable à un gros aimant droit. Le nord géographique de la Terre est un sud magnétique, et inversement (voir figure 20.3).

Chapitre 20

LE CHAMP MAGNÉTIQUE

POUR avoir dès notre plus jeune âge manipulé les aimants qui équipent les jouets, nous connaissons tous leurs propriétés : deux aimants peuvent s'attirer ou se repousser selon leur orientation relative. Cette interaction à distance peut être modélisée en faisant intervenir la notion de champ magnétique.

Le champ magnétique peut être mis en évidence à l'aide d'un petit aimant en forme d'aiguille (aiguille aimantée), libre de prendre toutes les orientations possibles. En particulier, loin de tout aimant et de toute masse ferreuse perturbatrice, une aiguille aimantée libre de pivoter autour d'un axe vertical s'aligne toujours sensiblement sur la direction sud-nord géographique : c'est le principe de la boussole.

Définition 20.1. Boussole et pôles magnétiques

Une boussole n'est autre qu'une aiguille aimantée libre de s'orienter. On convient d'appeler pôle nord magnétique de la boussole l'extrémité qui pointe vers le nord géographique et pôle sud magnétique l'extrémité qui pointe vers le sud géographique.

Cette définition des pôles magnétiques est une pure convention. En un point donné de l'espace, une boussole s'oriente sous l'influence du champ magnétique terrestre. C'est donc qu'en tout point, le champ magnétique est caractérisé par une direction et un sens. Le champ magnétique est donc un champ vectoriel :

- ▶ sa direction est indiquée par une boussole ;
- ▶ son sens est défini par convention par rapport à la boussole.

Propriété 20.2. Le vecteur champ magnétique

Une aiguille aimantée placée en un point s'aligne sur le vecteur champ magnétique qui règne en ce point. Le champ magnétique est dirigé du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille.

I. Sources et cartes du champ magnétique

Plusieurs dispositifs classiques permettent de créer des champs magnétiques de géométrie simple. Pour chaque dispositif, on peut visualiser le champ magnétique créé à l'aide de limaille de fer : chaque grain de limaille se comporte comme une petite boussole et s'oriente dans le champ, matérialisant ainsi le *spectre magnétique* du dispositif.

I.1. Aimant droit

L'aimant droit, ou barreau aimanté, génère un champ magnétique dont la carte est donnée sur la figure 20.1.

On peut également donner les *lignes de champ magnétique*, définies comme des courbes orientées tangentes en chacun de leur point au champ magnétique local (voir figure 20.2).

Quatrième partie

INDUCTION ET FORCES DE LAPLACE

Dans la partie « Mécanique » du cours, le champ magnétique a été étudié par ses effets sur les particules chargées *via* la force magnétique de Lorentz. Dans la présente partie, on propose une description des sources responsables de la création du champ magnétique.

On analyse ensuite les forces de Laplace, nom donné aux effets mécaniques du champ magnétique sur un circuit électrique parcouru par un courant. Ces forces, d'une importance technologique fondamentale, sont à la base du principe des moteurs électriques. On étudie après les phénomènes d'induction électromagnétique. Lorsqu'un circuit électrique est plongé dans un champ magnétique temporellement variable, le courant dans ce circuit est modifié comme s'il existait un générateur électrique supplémentaire. Il en va de même si le circuit est mobile dans le champ magnétique créé par une source fixe. Les phénomènes d'induction sont donc à prendre en compte dans l'étude des moteurs électriques, composés de circuits électriques mobiles dans des champs magnétiques.

Statique des fluides

Force de pression élémentaire :

$$\overrightarrow{dF} = p(M) \, dS_M \, \vec{n}$$

Relation locale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur terrestre :

$$dp = \varrho(z) g(z) dz$$

Relation locale de la statique des fluides (cas général) :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p(M) + \varrho(z) \vec{g}(z) = \vec{0}$$

La probabilité qu'un système à l'équilibre thermique ait l'énergie E_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$\exp \left[-\frac{E_i}{k_B T} \right]$$

Premier principe appliqué au fluide pour un cycle :

$$W + Q_f + Q_c = 0$$

Deuxième principe appliqué au fluide pour un cycle (inégalité de Clausius) :

$$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} + S_{\text{créé}} = 0$$

$$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0$$

Le rendement ou l'efficacité est défini comme le rapport de l'énergie utile sur l'énergie coûteuse.

Rendement énergétique d'un moteur :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c}$$

Efficacité énergétique d'une machine frigorifique :

$$\varepsilon = \frac{Q_f}{W}$$

Efficacité énergétique d'une pompe à chaleur :

$$\varepsilon = \frac{-Q_c}{W}$$

Théorème de Carnot :

Le rendement ou l'efficacité maximal théorique d'une machine cyclique ditherme est obtenu lorsque celle-ci fonctionne de façon réversible.

Rendement maximal théorique d'un moteur cyclique ditherme :

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Machines à écoulement permanent

Pour une machine à écoulement permanent, le premier principe « industriel » lie les grandeurs en amont et les grandeurs en aval de la machine.

Premier principe « industriel » exprimé avec des échanges d'énergie massiques :

$$\left(h_B + \frac{V_B^2}{2} \right) - \left(h_A + \frac{V_A^2}{2} \right) = w_i + q$$

Premier principe « industriel » exprimé avec des puissances :

$$D_m \left[\left(h_B + \frac{V_B^2}{2} \right) - \left(h_A + \frac{V_A^2}{2} \right) \right] = \mathcal{P}_{w_i} + \mathcal{P}_Q$$

Deuxième principe de la thermodynamique

Énoncé du deuxième principe : il existe une fonction d'état S extensive appelée entropie telle que, pour un système fermé :

$$\Delta S = S_{\text{reçu}} + S_{\text{créé}}$$

Entropie créée lors d'une évolution :

$$\text{réversible} \quad S_{\text{créé}} = 0$$

$$\text{irréversible} \quad S_{\text{créé}} > 0$$

Entropie reçue :

$$S_{\text{reçue}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

Formule de Boltzmann :

$$S = k_B \ln \Omega$$

Loi de Laplace pour un gaz parfait en évolution adiabatique réversible :

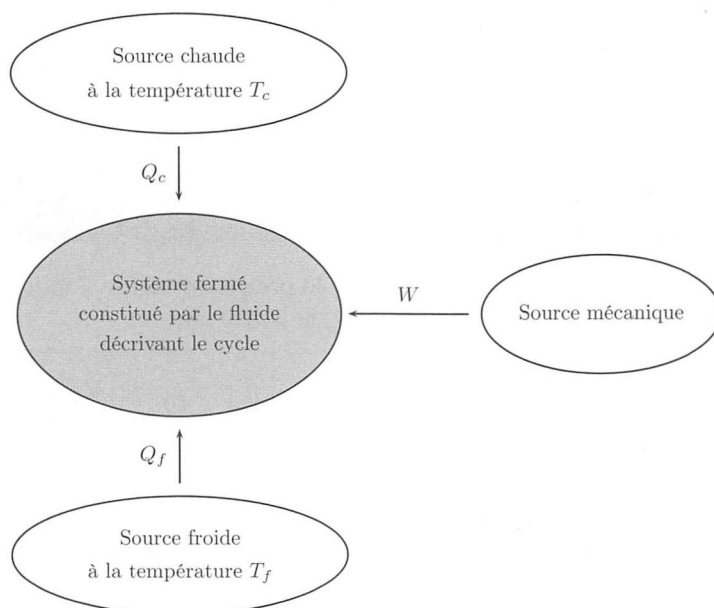
$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$$

Entropie de transition de phase :

$$\Delta s_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{\Delta h_{\alpha \rightarrow \beta}}{T_{\alpha\beta}}$$

Machines cycliques dithermes

Dans ce formulaire, les grandeurs W , Q_f et Q_c désignent les quantités d'énergie reçues par la machine au cours d'un cycle.



Échanges d'énergie

Travaux des actions exercés sur un système de volume V par la pression extérieure uniforme :

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV$$

Premier principe de la thermodynamique : il existe une fonction d'état extensive U telle que, pour un système fermé :

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = W + Q$$

Pour un système fermé en évolution cyclique :

$$W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = 0$$

Transfert thermique reçu par un gaz parfait ou une phase condensée :

$$Q = C_v \Delta T$$

L'enthalpie est une fonction d'état extensive :

$$H = U + pV$$

Évolution isobare :

$$\Delta H = Q_p = C_p \Delta T$$

Capacité thermique à pression constante $C_p = \frac{dH}{dT}$ d'un gaz parfait :

$$\begin{array}{l} \text{monoatomique } C_p = \frac{5}{2}nR \\ \text{diatomique } C_p = \frac{7}{2}nR \end{array}$$

Relation de Mayer pour le gaz parfait :

$$C_p - C_v = nR$$

Exposant adiabatique :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Enthalpie massique de changement d'état :

$$L_{\alpha \rightarrow \beta} = h_\beta - h_\alpha$$

Formulaire de thermodynamique

Système à l'équilibre

L'échelle mésoscopique est intermédiaire entre le libre parcours moyen λ et l'échelle macroscopique L :

$$\lambda \ll \ell \ll L$$

Libre parcours moyen :

gaz 0,1 μm

liquide 1 nm

Pression cinétique d'un gaz :

$$p = \frac{1}{3}n^*mu^2$$

La température cinétique T d'un gaz est définie par :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

Équation d'état du gaz parfait :

$$pV = nRT$$

Énergie interne :

$$U = e_c + e_p$$

Énergie interne du gaz parfait :

monoatomique $U = \frac{3}{2}nRT$

diatomique $U = \frac{5}{2}nRT$

Capacité thermique à volume constant $C_v = \frac{dU}{dT}$ d'un gaz parfait :

monoatomique $C_v = \frac{3}{2}nR$

diatomique $C_v = \frac{5}{2}nR$

Règle des moments :

$$x_\ell \overline{NL} + x_g \overline{NG} = 0$$

2. a/ Si l'on recule le viseur d'une distance D , cela signifie que $\overline{AA'} = D$. Or,

$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = x + \overline{OA'} \text{ car } \overline{OA} < 0,$$

donc, en injectant dans la relation de conjugaison, $1/x + 1/(D - x) = V_2 = 1/f'_2$, d'où

$$\boxed{f'_2 = x(D - x)/D = x(1 - x/D)}.$$

b/ Numériquement, $\boxed{f'_2 = -24,5 \text{ cm}}$.

3. a/ Sans la lentille divergente, l'image est dans le plan focal de \mathcal{L}_0 , en F'_0 . Notons A' la nouvelle image lorsque l'on insère la lentille divergente; il faut éloigner l'écran d'une distance D , donc $\overline{F'_0A'} = D$. Le centre de la lentille divergente étant en F_0 , $f'_2 = \overline{F_0F'_2}$ (voir figure E.3.12). D'après la relation de conjugaison de Newton, dans laquelle on injecte les expressions précédentes, $\overline{F_0F'_2} \times \overline{F'_0A'} = f'_2 \times D = -f_0'^2$, soit $\boxed{f'_2 = -f_0'^2/D}$.

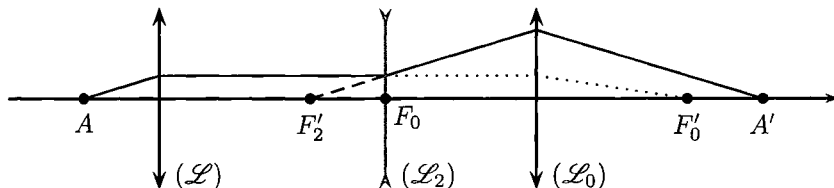


FIG. E.3.12. Montage de la méthode de Badal pour la détermination de la distance focale d'une lentille divergente. Cette lentille est en gris sur la figure. Le prolongement du trajet des rayons lorsque cette lentille n'était pas insérée est en pointillé. Le faisceau étant parallèle lorsqu'il arrive sur la lentille divergente, il ressort en semblant provenir du foyer image F'_2 ; le prolongement virtuel est en tirets d'après les conventions usuelles.

b/ Numériquement, $\boxed{f'_2 = -24,0 \text{ cm}}$.

Chapitre 4

1 Constante de Planck

1. Nous allons déterminer les 3 nombres α , β et γ dans \mathbb{Q} tels que le produit $\mathcal{G}^\alpha \hbar^\beta c^\gamma$ ait la dimension d'une énergie, c'est-à-dire le joule, $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Notons $[X]$ l'unité de la grandeur X . Pour déterminer l'unité de la constante gravitationnelle on peut utiliser l'expression de la force de gravitation $[F] = [\mathcal{G}] \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^2}$, soit $[\mathcal{G}] = [F] \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, soit $[\mathcal{G}] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. L'unité de \hbar est $[\hbar] = [h] = J \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. La relation $[\mathcal{G}^\alpha \hbar^\beta c^\gamma] = J$ implique donc $\text{kg}^{-\alpha} \cdot \text{m}^{3\alpha} \cdot \text{s}^{-2\alpha} \cdot \text{kg}^\beta \cdot \text{m}^{2\beta} \cdot \text{s}^{-\beta} \cdot \text{m}^\gamma \cdot \text{s}^{-\gamma} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. On obtient donc finalement le système d'équations

$$\begin{cases} -\alpha + \beta & = & 1 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma & = & 2 \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta & = & 1 + \alpha \\ \beta & = & -\alpha \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & -1/2 \\ \beta & = & 1/2 \\ \gamma & = & 5/2. \end{cases}$$

On en déduit une expression de l'énergie de Planck $\boxed{\mathcal{E}_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{\mathcal{G}}}}$. Cette expression est le fruit d'un raisonnement dimensionnel, une étude théorique devrait être en mesure de retrouver cette expression à une constante multiplicative près. Numériquement, on trouve $\boxed{\mathcal{E}_{\text{pl}} = 1,96 \cdot 10^9 \text{ J}}$. Cette énergie est colossale à l'échelle microscopique considérée ici. Cela représente l'énergie cinétique d'une grosse voiture en excès de vitesse sur l'autoroute que l'on souhaiterait concentrer dans un atome d'une trentaine d'ordre de grandeur moins massif!

2. Par une méthode analogue, nous pouvons construire la longueur de Planck

$$\text{kg}^{-\alpha} \cdot \text{m}^{3\alpha} \cdot \text{s}^{-2\alpha} \cdot \text{kg}^{\beta} \cdot \text{m}^{2\beta} \cdot \text{s}^{-\beta} \cdot \text{m}^{\gamma} \cdot \text{s}^{-\gamma} = \text{m}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta & = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma & = 1 \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta & = \alpha \\ \alpha + \beta & = 1 \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 1/2 \\ \beta & = 1/2 \\ \gamma & = -3/2. \end{cases}$$

On obtient donc l'expression $\mathcal{L}_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$. Soit numériquement, $\mathcal{L}_{\text{pl}} = 1,61 \cdot 10^{-35} \text{ m}$: le rapport entre la longueur de Planck et le rayon de l'atome est le même que celui entre 1 mètre et la taille d'une galaxie!

3. En ce qui concerne le temps de Planck, on montre facilement que $\mathcal{T}_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$. Numériquement, on trouve $\mathcal{T}_{\text{pl}} = 5,38 \cdot 10^{-44} \text{ s}$. Ce temps est très petit, il correspond au temps mis par un photon pour parcourir la longueur de Planck.

2 Différents photons

L'énergie d'un photon de fréquence $\nu = c/\lambda$ est donnée par la relation de Planck-Einstein $\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Pour obtenir l'énergie en électronvolts, il suffit de diviser le résultat par la valeur numérique de la charge de l'électron $q = 1,60 \cdot 10^{-19}$. Le nombre n de photons émis par seconde est simplement le rapport de la puissance émise par l'énergie du photon $n = \frac{\mathcal{P}}{h\nu} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}}$. On peut donc remplir le tableau suivant.

	Rayons X	Émetteur radio	Lampe au sodium
λ [nm]	$5,00 \cdot 10^{-1}$	$2,00 \cdot 10^{12}$	$5,40 \cdot 10^2$
E [eV]	$2,48 \cdot 10^3$	$6,21 \cdot 10^{-10}$	2,10
n	$5,04 \cdot 10^{14}$	$1,21 \cdot 10^{31}$	$1,19 \cdot 10^{20}$

C'est l'émetteur radio qui émet de loin le plus de photons, mais ceux-ci sont très peu énergétiques.

3 Étude d'une cellule photoélectrique au potassium

1. Le travail d'extraction correspond à une fréquence seuil ν_0 et donc à une longueur d'onde seuil $\lambda_0 = c/\nu_0$. Ce travail est donné par la relation $W_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$. Un électron ne pourra être extrait de la cathode que si $\nu > \nu_0$ ou $\lambda < \lambda_0$. Numériquement, on trouve pour le potassium $\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = 552 \text{ nm}$. Ainsi, seule la radiation de longueur d'onde $\lambda = 490 \text{ nm}$ permettra d'arracher des électrons de la cathode.

2. En prenant l'origine de l'énergie potentielle au niveau de la cathode, l'énergie mécanique d'un électron qui vient d'être émis est purement cinétique, $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_e v^2$ si l'on note m_e la masse de l'électron et v la vitesse qu'il possède au moment de son émission. Cette énergie correspond à celle du photon qui a été absorbé diminuée du travail fourni pour l'extraction, soit $\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$; en rapprochant les deux expressions de l'énergie de l'électron émis on obtient

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{hc}{\lambda} - W_0, \text{ soit } v = \sqrt{\frac{2}{m_e} \left(\frac{hc}{\lambda} - W_0 \right)}. \text{ Numériquement, on trouve } v = 316 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Par définition, l'intensité d'un courant électrique est le produit du nombre d'électrons qui y contribuent chaque seconde par le module q de la charge de ce quanton. Sous les hypothèses proposées, le nombre n_e d'électrons émis est donc $n_e = I_s/q$. Le nombre n_p de photons émis par la source de rayonnement de puissance \mathcal{P} et de longueur d'onde λ est le rapport

de cette puissance par l'énergie $\mathcal{E}_1 = \frac{hc}{\lambda}$ de chaque photon constituant ce rayonnement ; ainsi $n_p = \frac{P\lambda}{hc}$. Le rendement quantique γ de cette cellule photoélectrique est donc $\gamma = \frac{n_e}{n_p} = \frac{I_s hc}{P q \lambda}$.

Numériquement, on trouve $\gamma = 11,3\%$, ce qui est un peu surestimé par rapport à la réalité dans laquelle, par exemple, tous les électrons émis ne contribuent pas au courant...

4 Expériences de Young avec des électrons

1. L'interfrange est donnée par la relation $\mathcal{I} = \frac{\lambda D}{d}$, λ étant la longueur d'onde de de Broglie avec $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v}$. On a donc $\mathcal{I} = \frac{hD}{d m_e v}$.

La force électrostatique étant conservative, l'énergie mécanique \mathcal{E}_m est constante. Au niveau de la cathode émettrice portée au potentiel V_C , nous avons $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e v_C^2 - eV_C$. Au niveau de l'anode réceptrice portée au potentiel V_A , nous avons $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e v_A^2 - eV_A$. Supposons une vitesse d'émission nulle (pour le moins négligeable devant celle acquise à l'anode), alors la vitesse au niveau des fentes sera $v_A = v = \sqrt{\frac{2e(V_A - V_C)}{m}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Numériquement, on trouve $v = 4,19 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $\frac{v}{c} = 0,14$. C'est un peu rapide mais valide tout de même l'expression non relativiste de la quantité de mouvement. On trouve donc $\lambda = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,2 \text{ nm}$ et l'interfrange est alors $\mathcal{I} = 17,4 \mu\text{m}$.

2. Expérience de Shimizu

a/ La longueur d'onde de de Broglie est dans ce cas $\lambda = \frac{h}{mv_{th}} = 15,96 \text{ nm}$. Pour l'interfrange on a toujours $\mathcal{I} = \frac{\lambda D}{d}$, soit $\mathcal{I} = \frac{hD}{d m v_{th}}$; on calcule donc $\mathcal{I} = 0,3 \text{ mm}$.

b/ Pour $T = 300 \text{ K}$, la vitesse thermique est $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 611 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c/ La vitesse thermique est reliée à la température par $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. Si l'on souhaite que $v_{th} < \langle v \rangle$, il faut choisir $T < T_{th} = \frac{m v_{th}^2}{3k_B} = 1,25 \text{ mK}$. C'est très froid, c'est pour cela que les atomes utilisés sont ainsi qualifiés...

5 Effet photoélectrique en mécanique classique

La source émet de façon isotrope, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de directions privilégiées. Si on se place à la distance d de la source, toute la puissance émise est répartie de façon uniforme sur une sphère de rayon d . La puissance par unité de surface à cette distance est donc $\mathcal{P}_s = \frac{P}{4\pi d^2}$. Le faisceau est intercepté par une ouverture de rayon r très petite, ce qui signifie que l'on peut considérer que cette ouverture est dans le plan tangent à la sphère de rayon d ; dans ces conditions, la puissance reçue par cette ouverture est $\mathcal{P}_r = \pi r^2 \mathcal{P}_s = P \frac{r^2}{4d^2}$.

L'énergie \mathcal{E} reçue après un temps t par la feuille d'aluminium face à l'ouverture de rayon r s'écrit $\mathcal{E} = P \frac{r^2 t}{4d^2}$. Dans l'hypothèse ondulatoire classique, un électron soumis à ce rayonnement absorbe cette énergie et atteindra, au bout d'un temps τ , l'énergie d'extraction. On a donc $P \frac{r^2 \tau}{4d^2} = W_0$, d'où l'on tire $\tau = \frac{W_0}{P} \frac{4d^2}{r^2}$. Numériquement, on trouve $\tau = 134 \text{ s}$. La théorie classique prévoit donc un retard entre le début de l'éclairement du potassium et l'extraction de l'électron, ce qui est contraire à l'observation qui donne un délai inférieur à 10^{-9} s . On peut évidemment imaginer augmenter la surface sur laquelle l'électron collecte son énergie, mais on demeurera toujours très loin des 10^{-9} s ! D'autant plus que le rayon considéré est déjà celui de l'atome qui est bien supérieur à celui d'un électron, si tant est que l'on puisse parler d'un rayon pour l'électron...

Chapitre 5

1 Résistance équivalente

La ligne AB est une ligne de symétrie pour la répartition des résistances, donc les courants circulant dans les deux résistances R_1 sont identiques, de même pour les résistances R_2 (voir figure E.5.1).

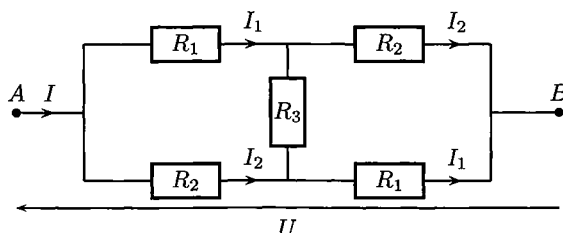


FIG. E.5.1. Résistance équivalente du dipôle AB .

La résistance équivalente R_{eq} est telle que

$$R_{\text{eq}} = \frac{U}{I}.$$

D'après la loi des nœuds en A et l'additivité des tensions et des courants,

$$\frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{R_2 I_2 + R_1 I_1}{I_1 + I_2}. \quad (5.1)$$

La loi des mailles sur la maille constituée de R_1 , R_2 et R_3 s'écrit $R_2 I_2 = R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2)$, donc

$$I_2 = I_1 \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_3}.$$

En remplaçant dans l'équation (5.1), on obtient la résistance équivalente

$$R_{\text{eq}} = \frac{2R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3}.$$

Il est possible de vérifier cette formule sur deux cas particuliers :

► si R_3 tend vers l'infini (circuit ouvert), alors il y a deux résistances $R_1 + R_2$ en parallèle, équivalentes à une résistance $\frac{R_1 + R_2}{2}$ cohérente avec le résultat obtenu en faisant tendre R_3 vers l'infini dans R_{eq} ;

► si R_3 est nulle, un calcul direct montre qu'il y a deux groupements parallèles (R_1 , R_2) en série. La résistance équivalente est donc $\frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, résultat identique à celui obtenu en prenant $R_3 = 0$ dans R_{eq} .

2 Montage courte ou longue dérivation

1. Dans le montage courte dérivation, le voltmètre est directement branché aux bornes de la résistance, c'est donc le montage le plus adapté à la mesure de la tension. Le montage longue dérivation est adapté à la mesure du courant dans la résistance puisque l'ampèremètre est monté en série avec R .

2. a/ La valeur de la résistance mesurée dans le montage longue dérivation est donnée par le rapport U/I . Or, d'après la loi d'Ohm, $U = (R + R_A)I$, donc la résistance mesurée est $R_{LD} = R + R_A$. L'erreur systématique est donc $R_A/R > 0$. AN : on trouve $\varepsilon_{LD} \simeq 0,1$ pour $R = 100 \Omega$, et $\varepsilon_{LD} \simeq 10^{-4}$ pour $R = 100 \text{ k}\Omega$. La méthode ne fournit une mesure correcte (d'erreur systématique faible) que si $R \gg R_A$.

b/ Avec le montage courte dérivation, la résistance mesurée est U'/I' . La résistance et le voltmètre sont en parallèle et sont donc équivalents à une résistance $\frac{RR_V}{R+R_V}$ parcourue par le courant i' . La loi d'Ohm donne la résistance mesurée dans ce cas $R_{CD} = \frac{RR_V}{R+R_V}$. L'erreur systématique est donc $\frac{R}{R+R_V} < 0$. AN : on trouve $\varepsilon_{CD} \simeq 10^{-4}$ pour $R = 100 \Omega$, et $\varepsilon_{CD} \simeq 0,1$ pour $R = 100 \text{ k}\Omega$. La méthode ne fournit une mesure correcte (d'erreur systématique faible) que si $R \ll R_V$.

c/ On veut $\frac{R_A}{R} < \frac{R}{R+R_V}$, ce qui conduit à $R^2 - R_A R - R_A R_V > 0$. Cette inégalité est vérifiée si $R > \frac{R_A + \sqrt{R_A^2 + 4R_A R_V}}{2} \simeq \sqrt{R_A R_V}$ puisque $R_A \ll R_V$. La condition cherchée est donc $R > \sqrt{R_A R_V}$. AN : $\sqrt{R_A R_V} \simeq 3 \text{ k}\Omega$, donc la résistance de 100Ω est mesurée plus précisément avec le montage courte dérivation, et celle de $100 \text{ k}\Omega$ avec le montage longue dérivation (ce qui est cohérent avec les premières questions).

3 Adaptation d'impédance

1. Le schéma du circuit étudié est représenté sur la figure E.5.2.

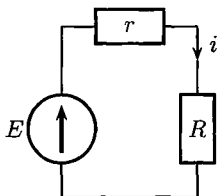


FIG. E.5.2. Schéma du circuit.

La puissance reçue par R est $\mathcal{P} = Ri^2$. La loi des mailles $E - ri - Ri = 0$ donne le courant qui circule dans le circuit (loi de Pouillet),

$$i = \frac{E}{r + R}.$$

D'où

$$\mathcal{P} = R \left(\frac{E}{r + R} \right)^2.$$

Pour déterminer la valeur de R qui maximise cette puissance, il faut dériver \mathcal{P} par rapport à R et chercher la valeur de R telle que $\frac{d\mathcal{P}}{dR} = 0$. On obtient après calculs

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = \frac{E^2(r - R)}{(R + r)^3},$$

d'où la solution évidente qui répond au problème $R = r$.

Pour vérifier que cela correspond bien à un maximum, il faut calculer la dérivée seconde et l'évaluer en $R = r$. Cela donne

$$\left(\frac{d^2\mathcal{P}}{dR^2} \right)_{R=r} = -\frac{E^2}{8r^3} < 0.$$

C'est donc bien un maximum.

2. La puissance consommée par la résistance R est alors égale à celle reçue par r ,

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4r}.$$

Faire le choix $r = R$ s'appelle adapter les impédances. Cela permet de maximiser la puissance que transmet une source à un appareil. Ce problème se présente par exemple lors du branchement d'un haut-parleur sur une chaîne hi-fi : il faut que les résistances de la chaîne et du haut-parleur soient égales pour maximiser la puissance transmise.

3. D'après ce qui précède, $\mathcal{P}/\mathcal{P}_{\max} = \frac{4Rr}{(R+r)^2} = \frac{4x}{(1+x)^2} = f(x)$. Cette fonction est maximale pour $x = 1$, nulle si $x = 0$ et si $x \rightarrow \infty$. La dérivée $\frac{d\mathcal{P}}{dR}$ calculée à la question précédente permet d'écrire $\frac{df(x)}{dx} = \frac{4(1-x)}{(1+x)^3}$. La fonction est donc croissante jusqu'en $x = 1$, puis décroissante. De plus, la tangente à l'origine est de pente égale à 4. La courbe est représentée sur la figure E.5.3.

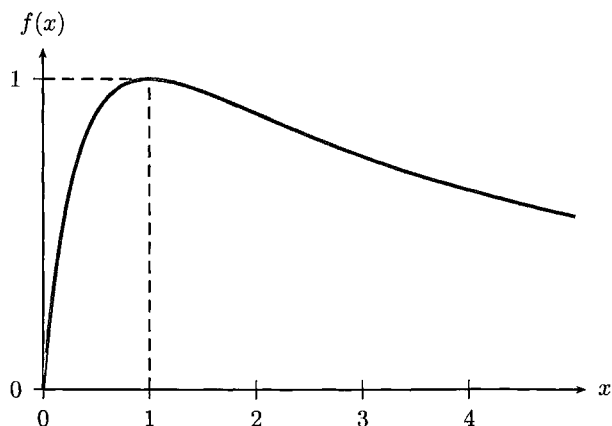


FIG. E.5.3. Puissance réduite consommée par la charge.

4 Point de fonctionnement

1. Les résistances R_1 et R_2 sont en série, donc $R_T = R_1 + R_2 = 50 \Omega$. Les deux tensions E_1 et E_2 s'ajoutent ici, donc la fem de Thévenin est $E = E_1 + E_2 = 4,4 \text{ V}$. On place alors la droite $u = 4,4 - 50i$ sur le graphe (u en volts et i en ampères; si on souhaite exprimer i en mA, alors l'équation de la droite est $u = 4,4 - 0,05i$) et on en déduit le point de fonctionnement (voir figure E.5.4, il s'agit de la droite la plus haute sur le graphe; le point de fonctionnement est noté M). Numériquement, la tension de fonctionnement est de $\boxed{2,6 \text{ V}}$ et le courant est de

$$\boxed{36 \text{ mA}}.$$

2. À un instant donné, on a toujours $E = E_1 + E_2$, mais les variations de E_2 entraînent une variation de E entre deux valeurs extrêmes $E_{\min} = 1,8 \text{ V}$ et $E_{\max} = 4,4 \text{ V}$. Les deux droites sont représentées sur la figure E.5.4, leur intersection avec la caractéristique permet de définir deux points de fonctionnement extrêmes (le point de fonctionnement oscillant le long de la caractéristique entre ces deux positions limites). On peut alors mesurer l'amplitude crête à crête Δi des variations d'intensité (voir figure) ainsi que celle des variations de tension.

Numériquement, $\boxed{\Delta i = 16 \text{ mA}}$ et $\Delta u = 2,6 - 0,8 \text{ V}$, soit $\boxed{\Delta u = 1,8 \text{ V}}$.

5 Pont de Wheatstone : mesure de température

1. Introduisons les points A , B , C et D sur la figure E.5.5.

Lorsque le pont est équilibré, $V_A - V_B = RI = 0$, donc

$$V_A = V_B.$$

Les résistances R_1 et R_2 sont donc parcourues par le même courant, de même que R_3 et R_4 . Ainsi, un diviseur de tension entre C et A pour la branche CD du haut, puis entre C et B pour la branche CD du bas donne

$$V_C - V_A = E \frac{R_1}{R_1 + R_2} = E \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

D'où la condition nécessaire et suffisante cherchée entre les résistances ($E \neq 0$),

$$\boxed{R_1 R_3 = R_2 R_4}.$$

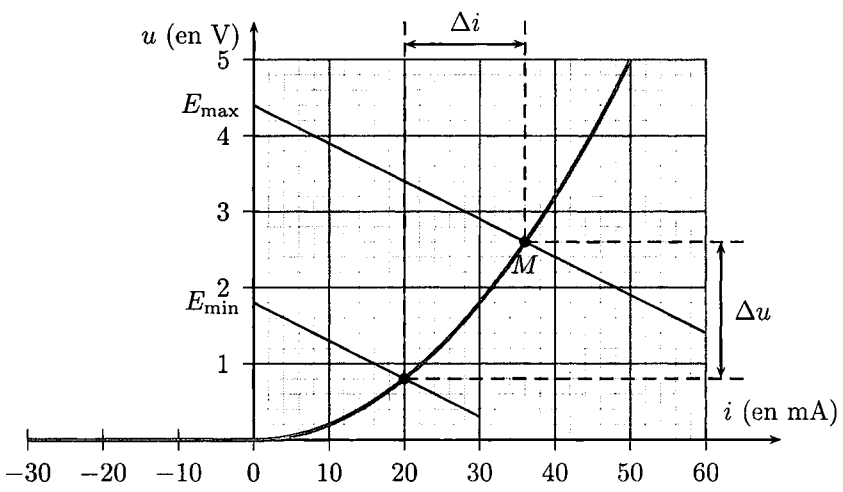


FIG. E.5.4. Caractéristique du dipôle non linéaire et points de fonctionnement.

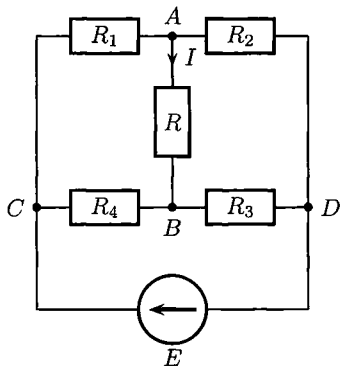


FIG. E.5.5. Pont de Wheatstone.

2. a/ Comme le voltmètre est de résistance infinie, les résistances R_1 et R_2 sont encore parcourues par le même courant, de même que R_3 et R_4 . Ainsi, les mêmes diviseurs de tension qu'à la question précédente donnent

$$V_C - V_A = E \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad ; \quad V_C - V_B = E \frac{R_4}{R_3 + R_4} .$$

La différence des deux donne la tension U ,

$$U = V_A - V_B = E \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) .$$

La première fraction s'exprime simplement en fonction de x en divisant haut et bas par R_4 . Pour la seconde, il suffit de l'écrire

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_{10}(1 + \alpha T)}{R_{10}(1 + \alpha T) + R_2} = \frac{1 + \alpha T}{(1 + \alpha T) + \frac{R_2}{R_{10}}} .$$

Or, lorsque le pont est équilibré, $T = 0^\circ\text{C}$ et donc $R_{10}R_3 = R_2R_4$ d'après la première question. D'où $\frac{R_2}{R_{10}} = x$. Finalement

$$U = V_A - V_B = E \frac{-\alpha x T}{(x + 1)(1 + \alpha T + x)} .$$

On remarque que U est bien nulle pour $T = 0^\circ\text{C}$.

b/ La tension $|U|$ est maximale à T fixée lorsque $\frac{dU}{dx} = 0$. La dérivée vaut

$$\frac{dU}{dx} = E \frac{\alpha T(x^2 - 1 - \alpha T)}{(1+x)^2(1+\alpha T+x)^2},$$

donc la valeur de x qui annule la dérivée est $x^2 = 1 + \alpha T$. Pour des températures usuelles, le terme $\alpha T \ll 1$, donc $x \simeq 1$. Le choix $R_3 = R_4$ est donc celui qui permet d'avoir la meilleure sensibilité dans cette zone de température.

c/ D'après la question précédente, $x \simeq 1$ et $\alpha T \ll 1$, donc l'équation donnant U se simplifie en $U = -E \frac{\alpha T}{4}$. D'où $T = -\frac{4U}{\alpha E}$. AN : $T \simeq 18^\circ\text{C}$. Le dispositif étudié permet, après étalonnage à 0°C (bain eau-glace fondante), de mesurer une température par lecture de la tension de déséquilibre du pont de Wheatstone.

Chapitre 6

1 Lampe témoin

1. Initialement, le courant i_L dans la bobine est nul. Comme il doit être continu, on en déduit $i_L(0^+) = 0$. Ainsi, le circuit est équivalent à celui de la figure E.6.1 (partie gauche).

Le courant cherché vaut $i(0^+) = \frac{E}{5R} > \frac{E}{8R}$. La lampe s'allume lorsqu'on ferme l'interrupteur.

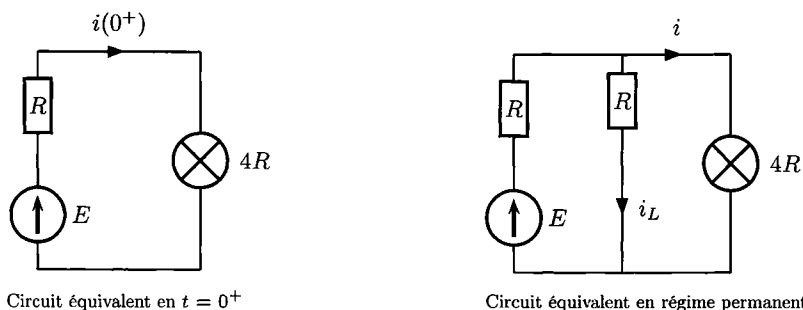


FIG. E.6.1. Circuits équivalents.

2. Lorsque le régime permanent est atteint, la bobine est équivalente à un fil ($u_L = L \frac{di}{dt} = 0$ car i constant en régime permanent). Le circuit est donc équivalent à celui de la figure E.6.1 (partie droite). La résistance équivalente de l'ensemble du circuit est $R_{\text{eq}} = R + \frac{4R}{5} = \frac{9R}{5}$. Le courant débité par le générateur vaut donc $i_T = \frac{5E}{9R}$. Le courant i dans la lampe s'obtient à l'aide d'un diviseur de courant,

$$i = \frac{5E}{9R} \frac{R}{5R} = \frac{E}{9R} < \frac{E}{8R}.$$

La lampe est donc éteinte en régime permanent.

3. Une fois l'interrupteur ouvert, le courant i est forcément égal à celui qui circule dans la bobine. Or, ce dernier est continu, donc il est égal à celui en régime permanent. Ainsi,

$$i = i_L = i_T - i = \frac{4E}{9R} > \frac{E}{8R}.$$

La lampe s'allume lors de l'ouverture de l'interrupteur.

La lampe sert de témoin pour l'ouverture ou la fermeture de l'interrupteur, et elle n'est éteinte qu'en régime permanent. Cela peut servir d'indicateur pour signaler une coupure de courant, un problème de fonctionnement (le fonctionnement normal étant le régime permanent), etc.

2 Bobine et source de courant

Supposons l'interrupteur fermé; d'après la loi des nœuds, $\eta = i + u_{CD}/r$, et d'après la loi des mailles, $u_{CD} = Ri + u_{AB}$. Ainsi, $u_{AB} = r(\eta - i) - Ri = r\eta - (r + R)i$. Remarquons que cela revient à remplacer la source réelle alimentant la bobine par son modèle de Thévenin équivalent (nous l'avons déjà fait dans l'exercice corrigé 5.34 page 131). Le problème se ramène donc à celui d'un simple circuit RL , de résistance $r + R$ et d'inductance L , soumis à un échelon de tension ηr . D'où

$$i(t) = \frac{\eta r}{r + R} (1 - \exp(-t/\tau))$$

avec $\tau = \frac{L}{R+r}$ constante de temps du circuit.

3 Étude d'un circuit en régime transitoire

1. L'interrupteur est ouvert depuis longtemps, le régime permanent est donc atteint et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Ainsi, en $t = 0^-$, $i = i_1 = i_2 = 0$.

2. La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. Or, à $t = 0^-$, la tension aux bornes de C est égale à E (la tension aux bornes de R est nulle puisque $i = 0$), donc $u(0^+) = u(0^-) = E$. La tension aux bornes de $R/2$ est E , donc, d'après la loi d'Ohm, $i_2(0^+) = \frac{2E}{R}$. Comme $u(0^+) = E$, il est évident que la tension aux bornes de R est nulle, donc $i(0^+) = 0$ d'après la loi d'Ohm. La loi des nœuds donne $i_1(0^+) = i(0^+) - i_2(0^+)$, donc $i_1(0^+) = -\frac{2E}{R}$.

3. Quand t tend vers l'infini, le circuit est en régime permanent, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i_{1,\infty} = 0$. Le circuit est ainsi équivalent à E branché sur une résistance $3R/2$. Donc $i_{\infty} = i_{2,\infty} = \frac{2E}{3R}$. D'après la loi d'Ohm, $u_{\infty} = \frac{R}{2} i_{2,\infty} = \frac{E}{3}$.

4. D'après la loi des nœuds, $i = i_1 + i_2$, soit $(E - u)/R = i_1 + 2u/R$ et ainsi $u = \frac{E}{3} - \frac{R}{3} i_1$; le condensateur semble alimenté par une source de Thévenin de fem $E/3$ et de résistance $R/3$ (voir figure E.6.2, circuit de gauche).

Le circuit est donc bien équivalent à un simple circuit RC en charge.

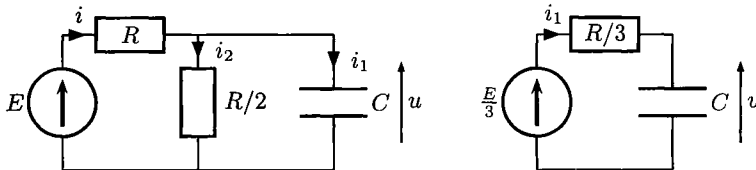


FIG. E.6.2. Circuits équivalents.

5. La loi des mailles s'écrit donc $\frac{E}{3} = \frac{R}{3} i_1 + u$; or, $i_1 = C \frac{du}{dt}$, donc $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{E}{3}$ avec $\tau = \frac{RC}{3}$ la constante de temps du circuit. Or, $u(0) = E$, donc $u(t) = \frac{E}{3} (1 + 2 \exp(-t/\tau))$.

La courbe est représentée sur la figure E.6.3.

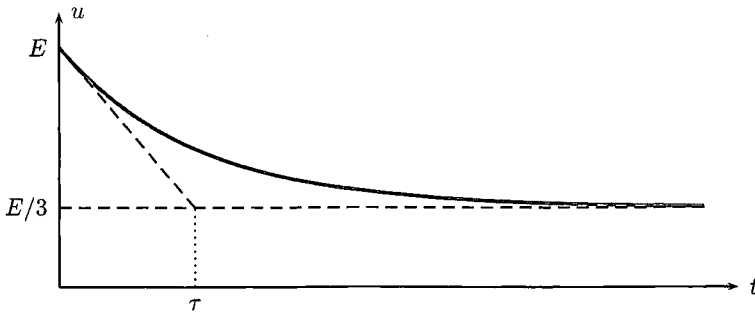
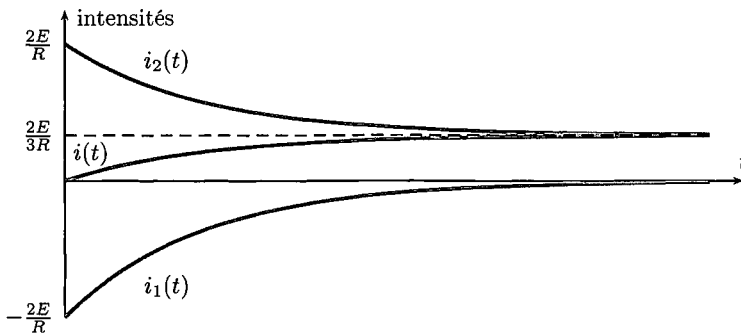
FIG. E.6.3. Évolution de la tension $u(t)$.

FIG. E.6.4. Évolution des intensités.

6. On sait que $i_1 = C \frac{du}{dt}$, donc $i_1(t) = -\frac{2E}{R} \exp(-t/\tau)$. D'après la loi d'Ohm, $i_2(t) = \frac{2u(t)}{R}$, donc $i_2(t) = \frac{2E}{3R} (1 + 2 \exp(-t/\tau))$.

La loi des nœuds permet d'obtenir $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{2E}{3R} (1 - \exp(-t/\tau))$. Ces résultats sont bien cohérents avec ceux des premières questions. Les courbes sont représentées sur la figure E.6.4.

4 Conditions initiales et régime permanent

1. L'intensité qui circule dans une bobine est toujours continue, donc $i(0^-) = i(0^+) = 0$. Par conséquent, la branche centrale peut être remplacée par un circuit ouvert à $t = 0$ et le circuit équivalent est représenté sur la figure E.6.5 (à gauche). Le courant qui parcourt R_1 et R_2 est donc le même. On le pose égal à i_0 , il est alors facile de le calculer en écrivant la loi des mailles $E = R_1 i_0 + R_2 i_0$. D'où $i_1(0) = i_2(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}$.

2. Au bout d'un temps long, le régime permanent est atteint et les courants sont constants. La bobine se comporte alors comme un fil, et le circuit est équivalent à celui représenté sur la figure E.6.5 (à droite).

La pile de fem E débite dans une résistance équivalente R_1 en série avec R et R_2 en parallèle, donc

$$R_{\text{eq}} = R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}$$

Par conséquent,

$$i_{1\infty} = \frac{E}{R_{\text{eq}}} = \frac{E}{R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}}$$

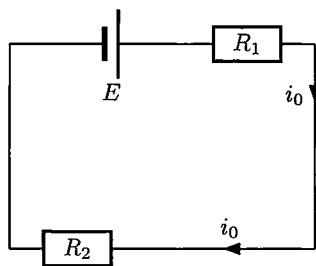
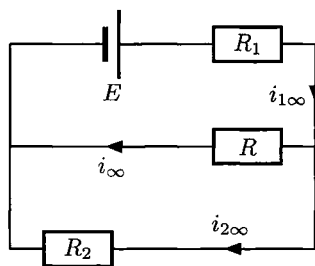
Circuit équivalent à $t = 0$ Circuit équivalent pour $t \rightarrow \infty$

FIG. E.6.5. Circuits équivalents.

Un diviseur de courant donne directement les deux autres courants

$$i_{\infty} = \frac{E}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} \frac{R_2}{R+R_2} = \frac{R_2 E}{RR_2 + RR_1 + R_1 R_2},$$

$$i_{2\infty} = \frac{E}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} \frac{R}{R+R_2} = \frac{RE}{RR_2 + RR_1 + R_1 R_2}.$$

La loi des nœuds est bien vérifiée, $i_{1\infty} = i_{\infty} + i_{2\infty}$.

3. La loi des mailles sur la maille constituée de E , R_1 et R_2 donne

$$E - R_1 i_1 = R_2 i_2.$$

En utilisant la loi des nœuds $i_1 = i + i_2$, on trouve

$$i_2 = \frac{E - R_1 i}{R_1 + R_2}. \quad (6.1)$$

Sur la maille avec E , R_1 , L et R , la loi des mailles s'écrit

$$R_2 i_2 = L \frac{di}{dt} + Ri. \quad (6.2)$$

Les équations (6.1) et (6.2) permettent de trouver l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$,

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{E}{L},$$

avec

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{L} \left(R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right).$$

La solution de cette équation est de la forme $i(t) = i_{\infty} + Ae^{-t/\tau}$ (le terme i_{∞} correspond au régime permanent, c'est la solution particulière). Or, $i(0) = 0$, donc $A = -i_{\infty}$ et

$$i(t) = i_{\infty} \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Les autres courants vont être de la même forme et seront donc des combinaisons linéaires de $e^{-t/\tau}$. Comme il faut respecter les conditions initiales et les valeurs en régime permanent, on en déduit

$$i_1(t) = i_{1\infty} + (i_1(0) - i_{1\infty}) e^{-t/\tau},$$

$$i_2(t) = i_{2\infty} + (i_2(0) - i_{2\infty}) e^{-t/\tau}.$$

5 Étude d'un tube à décharge

1. Lorsque le tube est éteint, la résistance est infinie, donc $i = 0$. Si l'on augmente la tension, $i = 0$ tant que $u < U_a$. Lorsque u dépasse U_a , le tube s'allume et il vérifie alors la loi d'Ohm $i = u/r$. Ensuite, tant que la tension augmente, le point de fonctionnement reste sur la droite d'équation $i = u/r$. C'est aussi le cas lorsque l'on diminue la tension, jusqu'à ce que $u = U_e$, tension d'extinction. D'où la caractéristique représentée sur la figure E.6.6.

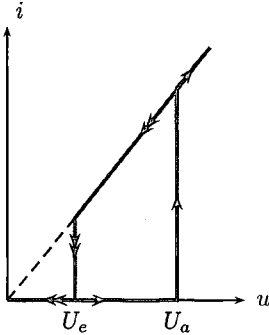
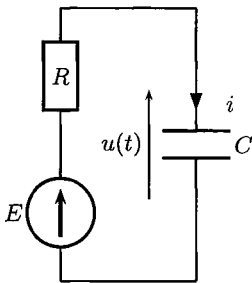


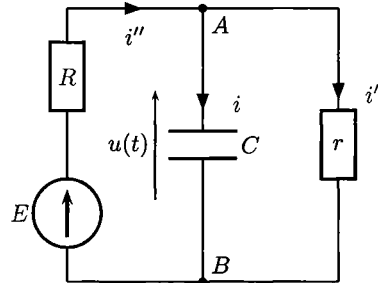
FIG. E.6.6. Caractéristique d'un tube à décharge.

Ce dipôle est non linéaire (il est en revanche linéaire par morceaux) et passif puisque la caractéristique passe par zéro (courant de court-circuit et tension à vide nuls).

2. Comme la lampe est éteinte, elle est équivalente à un circuit ouvert. Le circuit est donc réduit au circuit RC en charge de la figure E.6.7 (partie gauche).



Circuit équivalent avant allumage du tube



Circuit équivalent après allumage du tube

FIG. E.6.7. Circuits équivalents avant et après allumage du tube.

La loi des mailles s'écrit $u = E - Ri$; or, $i = C \frac{du}{dt}$, d'où l'équation différentielle cherchée

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{E}{\tau},$$

avec $\tau = RC$ constante de temps du circuit. Les solutions sont de la forme

$$u(t) = E + A \exp(-t/\tau);$$

or, $u(0) = 0$ (tension continue aux bornes du condensateur qui est initialement déchargé). Donc $A = -E$ et finalement

$$u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau)). \quad (6.3)$$

3. Pour que le tube puisse s'allumer, il faut que $E > U_a$; ainsi, il existe un instant t_0 pour lequel $u(t_0) = U_a$, ce qui allume le tube.

4. Il suffit de résoudre $u(t) = U_a$ avec $u(t)$ donnée par l'équation (6.3). On obtient

$$t_0 = \tau \ln \frac{E}{E - U_a}.$$

5. Après allumage, le tube est équivalent à une résistance r (voir figure E.6.7, partie droite). D'après la loi des nœuds en A , $i'' = i + i'$, soit $(E - u)/R = i + u/r$ ou encore $u = \frac{R_e}{R} E - R_e i$ en posant $R_e = \frac{rR}{r+R}$. Finalement, puisque $i = C \frac{du}{dt}$,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{R_e C} u = \frac{E}{RC}.$$

On pose $\tau' = R_e C$. Une solution particulière évidente est $E \frac{R_e}{R}$, donc les solutions sont de la forme

$$u(t) = E \frac{R_e}{R} + A \exp(-t/\tau').$$

Or, à $t = t_0$, la tension est telle que $u(t_0) = U_a$, donc

$$A = \left(U_a - E \frac{R_e}{R} \right) \exp(t_0/\tau').$$

D'où la solution de l'équation différentielle

$$u(t) = E \frac{R_e}{R} + \left(U_a - E \frac{R_e}{R} \right) \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau'}\right). \quad (6.4)$$

6. D'après l'équation (6.4), si $U_a < E \frac{R_e}{R}$, alors la fonction $u(t)$ est croissante et la lampe ne pourra pas s'éteindre. Une première condition est donc d'avoir

$$U_a > E \frac{R_e}{R}.$$

Si la condition précédente est vérifiée, alors la tension $u(t)$ décroît jusqu'à atteindre $E \frac{R_e}{R}$ (l'exponentielle tend vers zéro), mais pour que la lampe s'éteigne, cette tension doit être plus petite que U_e , d'où la seconde condition nécessaire,

$$U_e > E \frac{R_e}{R}.$$

Finalement, les tensions doivent vérifier $U_a > U_e > E \frac{R_e}{R}$.

7. Le tube s'éteint lorsque $u(t) = U_e$, avec $u(t)$ donnée par l'équation (6.4). D'où

$$t_1 = t_0 + \tau' \ln \frac{(r+R)U_a - rE}{(r+R)U_e - rE} > t_0.$$

8. À partir de l'instant t_1 , le circuit devient de nouveau équivalent à celui de la figure E.6.7 (partie gauche), avec comme condition initiale $u(t_1) = U_e$, d'où

$$u(t) = E + (U_e - E) \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau}\right).$$

La tension $u(t)$ augmente alors jusqu'à atteindre U_a (le tube s'allume) en $t = t_2$ tel que $U_a = E + (U_e - E) \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right)$, donc

$$t_2 = t_1 + \tau \ln \frac{U_e - E}{U_a - E}.$$

La tension se met alors à rediminuer jusqu'à U_e (extinction) et ainsi de suite avec une période

$$T = t_2 - t_0 = \tau \ln \frac{U_e - E}{U_a - E} + \tau' \ln \frac{(r+R)U_a - rE}{(r+R)U_e - rE}.$$

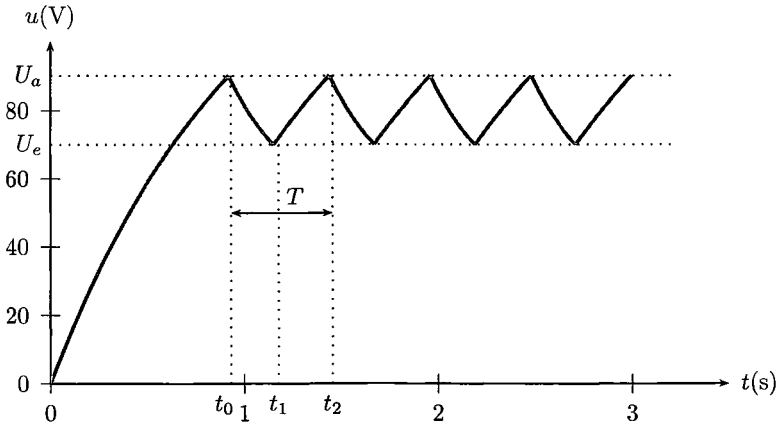


FIG. E.6.8. Évolution de la tension aux bornes du tube à décharge.

9. La courbe de $u(t)$ est représentée sur la figure E.6.8.

10. On trouve $T \simeq 0,5 \text{ s}$.

Chapitre 7

1 Régime libre d'un circuit

D'après la loi des mailles, $u_c(t) = u_L(t) + u_R(t) = L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t)$. Or, avec la convention imposée sur la figure, $i(t) = -C \frac{du_c}{dt}(t)$. Ainsi l'équation vérifiée par $u_c(t)$ est

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0,$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ conformément à la section I.1.2 page 153. Le discriminant réduit est $\Delta' = \omega_0^2(\xi^2 - 1)$; une nouvelle fois, la valeur du taux d'amortissement ξ comparée à 1 permet de discriminer les régimes. L'amortissement faible suppose $\xi < 1$. Les solutions sont alors complexes conjuguées, ce qui amène à introduire une pseudo-pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$. La tension est continue aux bornes du condensateur, donc $u_c(0) = E$. De plus, le courant est continu dans la bobine, donc $i(0) = 0$, soit $\frac{du_c}{dt}(0) = 0$. La solution est alors

$$u_c(t) = E \exp(-\xi\omega_0 t) \left[\cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega t) \right].$$

2 Étincelle de rupture

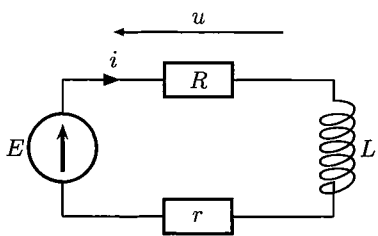
1. a/ En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil, donc le circuit est équivalent à une résistance r branchée sur le générateur. On ne tient pas compte de R puisque l'interrupteur est fermé, donc

$$i_0 = \frac{E}{r} = 4 \text{ A}.$$

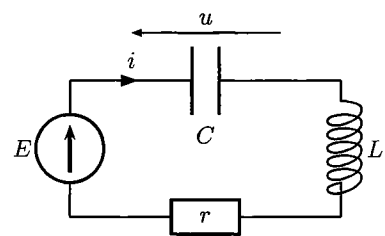
b/ Une fois l'interrupteur ouvert, le circuit est équivalent à celui de la figure E.7.1 (circuit de gauche).

C'est donc un simple circuit RL . La loi des mailles s'écrit $E = (R + r)i + L \frac{di}{dt}$, d'où l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R + r}{L} i = \frac{E}{L}.$$



Circuit équivalent après ouverture de l'interrupteur



Circuit équivalent avec condensateur

FIG. E.7.1. Circuits équivalents.

Posons $\tau = \frac{L}{R+r}$ la constante de temps du circuit. Les solutions sont de la forme

$$i(t) = \frac{E}{R+r} + A \exp(-t/\tau).$$

Or, le courant qui circule dans la bobine doit être continu, donc en $t = 0^+$ il est égal à celui en $t = 0^-$, c'est-à-dire à i_0 . D'où $\frac{E}{R+r} + A = i_0$, et l'expression du courant $i(t)$

$$i(t) = \frac{E}{R+r} + \left(\frac{E}{r} - \frac{E}{R+r} \right) \exp(-t/\tau).$$

Le courant tend vers $\frac{E}{R+r}$, ce qui est normal puisqu'en régime permanent, le circuit de la partie gauche de la figure E.7.1 est équivalent à E branché sur R et r en série. Comme R est très importante, le courant tend donc vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini : plus aucun courant ne circule, ce qui paraît normal.

c/ La tension $u(t)$ est donnée par la loi d'Ohm $u(t) = Ri(t)$, donc

$$u(t) = E \frac{R}{R+r} + E \left(\frac{R}{r} - \frac{R}{R+r} \right) \exp(-t/\tau).$$

Donc $u(0) = E \frac{R}{r}$ et, lorsque t tend vers l'infini, $u(t) \rightarrow E \frac{R}{R+r}$. Pour de très grandes valeurs de R , ce qui est le cas en pratique, on constate que $u(0)$ devient très grande devant E , alors que $u(\infty)$ tend vers E , ce qui est normal. Le fait que $u(0)$ puisse prendre de très grandes valeurs risque de provoquer des étincelles au niveau de l'interrupteur, si la tension $u(0)$ dépasse la tension de claquage de l'air¹. L'application numérique donne $u(0) = 40$ kV, ce qui suffit à provoquer une étincelle sur un interrupteur de taille standard.

2. a/ C'est un circuit RLC série, représenté sur la partie droite de la figure E.7.1. La loi des mailles s'écrit $E = ri + L \frac{di}{dt} + u$, d'où l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$, sachant que $i(t) = C \frac{du}{dt}$,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{E}{LC}.$$

b/ On peut poser $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et le coefficient d'amortissement $2\lambda = \frac{r}{L}$ (le coefficient λ est préféré ici au taux d'amortissement car nous ne cherchons pas l'équation réduite; le choix de λ permet d'alléger les expressions qui suivent). L'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E.$$

1. Tension au-delà de laquelle l'air devient conducteur, de l'ordre de 30 kV pour un centimètre d'air.

Il faut calculer $\lambda^2 - \omega_0^2$ pour connaître la forme de la solution. AN : $\lambda^2 - \omega_0^2 = -1,2 \cdot 10^9 \text{ s}^{-2}$. Comme il est négatif, le régime est pseudo-périodique, donc les solutions sont de la forme (avec la solution particulière E qui est évidente)

$$u(t) = E + \exp(-\lambda t) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Or, $u(0) = 0$ car le condensateur est déchargé, et $i(0) = E/r$ car l'interrupteur était fermé et i continu, donc $E + A = 0$ et $-C\lambda A + CB\omega = \frac{E}{r}$. D'où

$$A = -E \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{\omega} \left(\frac{1}{rC} - \lambda \right).$$

Finalement

$$u(t) = E - E \exp(-\lambda t) \left(\cos(\omega t) + \left(\frac{\lambda}{\omega} - \frac{1}{r\omega C} \right) \sin(\omega t) \right).$$

D'après les valeurs numériques de l'énoncé, $\lambda = 500 \text{ s}^{-1}$ et $\omega = 3,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. La tension aux

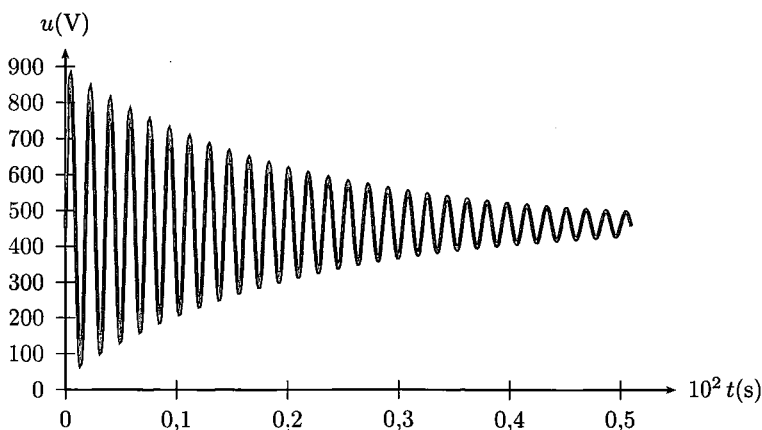


FIG. E.7.2. Tension aux bornes de l'interrupteur.

bornes de l'interrupteur atteint des valeurs nettement plus basses (voir figure E.7.2), de l'ordre de 400 volts au maximum, ce qui est insuffisant pour provoquer une étincelle. Ce problème d'étincelle arrive uniquement avec des appareils qui possèdent une ou plusieurs bobines, ce qui en pratique concerne les appareils qui contiennent un moteur, par exemple.

3 Circuit RLC et représentation de Fresnel

D'après la loi des mailles, $e(t) = u_c(t) + u_L(t) + u_R(t)$ avec $u_R = Ri = RI_m \cos(\omega t)$, $u_L = L \frac{di}{dt} = -L\omega I_m \sin(\omega t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ et $i = C \frac{du_c}{dt}$, soit

$$u_c = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{I_m}{C\omega} \sin(\omega t) = \frac{I_m}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

conformément au théorème 7.12 page 169. La loi des mailles indique que dans la représentation de Fresnel, la somme des trois vecteurs associés aux tensions u_R (en phase avec i , donc sur l'axe x à $t = 0$), u_L (dans la direction et le sens de y à $t = 0$ du fait de la rotation de $\pi/2$) et u_c (dans la direction de y mais de sens opposé à $t = 0$ du fait de la rotation de $-\pi/2$) est égale au vecteur associé à $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$ (formant donc un angle φ avec l'axe x à $t = 0$), comme représenté sur la figure E.7.3.

En projetant sur les axes x et y ,

$$E_m \cos \varphi = RI_m \quad \text{et} \quad E_m \sin \varphi = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I_m.$$

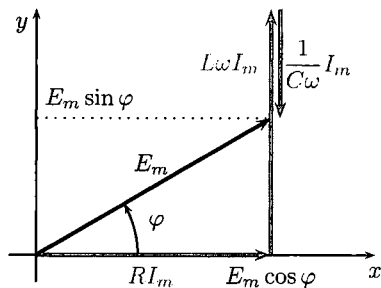


FIG. E.7.3. Représentation de Fresnel de la loi des mailles du circuit RLC série. Le vecteur associé à la tension du condensateur a été légèrement décalé pour la lisibilité de la figure.

On déduit de ces deux équations $\tan \varphi = \frac{1}{R} (L\omega - \frac{1}{C\omega})$. Or, puisque $RI_m > 0$, $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\tan \varphi$ définit φ de manière univoque, $\varphi = \arctan \left[\frac{1}{R} (L\omega - \frac{1}{C\omega}) \right]$. Connaissant φ , on

peut alors calculer $I_m = \frac{E_m}{R} \cos \varphi$.

4 Circuit déphaseur

La tension $V_A - V_M = E/2$ et est en phase avec $e(t)$, alors que $V_B - V_M = -E/2$ et est donc en opposition de phase avec $e(t)$. La tension $u_c(t)$ est déphasée par rapport à $e(t)$, nous l'orienterons arbitrairement sur la figure. Par additivité $E = -u_c + u_{R'}$, et u_c est tournée de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport à $u_{R'}$: en effet, cette dernière est proportionnelle au courant qui circule dans la branche (loi d'Ohm) et U_C est déphasée de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant puisque c'est la tension aux bornes d'une capacité. De plus, la tension de sortie $u_S = E/2 + u_c = -E/2 + u_{R'}$. L'ensemble des tensions, et de leurs propriétés, est représenté sur la figure E.7.4. Il est alors évident que l'extrémité S des vecteurs de Fresnel associés à $u_c, u_{R'}$ et u_S se déplace sur un cercle de rayon $E/2$. Par conséquent, l'amplitude de u_S est constante égale à $E/2$ et sa phase change selon la valeur des composants. En conclusion, la tension en sortie est d'amplitude constante, seule sa phase peut changer (par exemple, en modifiant la résistance R') ; ce circuit peut être utilisé comme déphaseur : la tension en sortie est déphasée par rapport à $e(t)$.

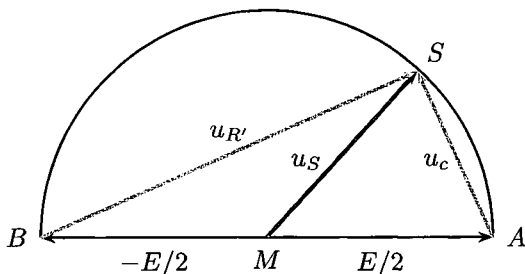


FIG. E.7.4. Représentation de Fresnel.

5 Loi des nœuds et grandeurs efficaces

La loi des nœuds pour les grandeurs complexes s'écrit $\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2$. Pour obtenir le courant efficace associé à i , il faut prendre le module de l'expression précédente, et diviser tout par $\sqrt{2}$. Le module au carré s'obtient en multipliant par la quantité conjuguée,

$$I^2 = \frac{1}{2} \dot{i} \dot{i}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{i}_1 + \dot{i}_2) (\dot{i}_1 + \dot{i}_2)^* .$$

En développant, les courants efficaces I_1 et I_2 apparaissent,

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + \frac{1}{2} (\dot{i}_1 \dot{i}_2^* + \dot{i}_1^* \dot{i}_2) .$$

Appelons φ le déphasage de i_2 par rapport à i_1 , alors

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2 (e^{-i\varphi} + e^{+i\varphi}) = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos \varphi .$$

Le calcul précédent est valable pour n'importe quels dipôles en parallèle. Généralement, φ est différent de zéro, donc $I \neq I_1 + I_2$. Ici, $\varphi = \pi/2$, d'où $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$.

6 Pont de Wien

Le plus simple est d'utiliser la formule du diviseur de tension, car la tension u_s est prise aux bornes d'un groupement parallèle. Appelons $Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega}$ l'impédance équivalente à R et C en série, et $Y_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$ l'admittance équivalente au groupement parallèle R et C . Le schéma équivalent est représenté sur la figure E.7.5.

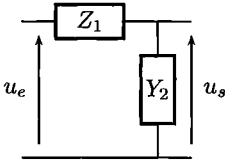


FIG. E.7.5. Pont de Wien.

La formule du diviseur de tension aux bornes de Y_2 s'écrit alors

$$u_s = u_e \frac{1}{1 + Z_1 Y_2} = u_e \frac{1}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}$$

7 Modèle de condensateur en haute fréquence

1. Le circuit est donc un simple circuit RLC série. L'impédance équivalente s'obtient en utilisant la loi d'association série $Z = R_s + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$. D'où l'expression du module

$$|Z| = \sqrt{R_s^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

2. Seul le second terme sous la racine est variable. Comme il est positif ou nul, le module de Z est minimum lorsque $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, donc pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. C'est la pulsation propre du circuit, mais aussi la pulsation de résonance en intensité : à cette pulsation, l'intensité dans le circuit est maximale, donc le module de l'impédance est minimal puisque $U = |Z|I$, avec I l'amplitude du courant dans le circuit et U l'amplitude de la tension à ses bornes. Pour cette pulsation $Z(\omega_0) = R_s$, le condensateur est donc équivalent à la résistance R_s .

3. À basse fréquence, le terme dominant est $\frac{1}{C\omega}$, donc $|Z| \sim \frac{1}{C\omega}$. Le condensateur est équivalent à une capacité C .

À haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), le terme dominant est $L\omega$, donc $|Z| \sim L\omega$. Le condensateur se comporte alors comme une inductance L . Dans les processeurs, des condensateurs de découplage sont utilisés pour éviter des fluctuations de tension d'alimentation. Néanmoins, aux fréquences élevées où fonctionnent les processeurs, le comportement inductif des condensateurs est problématique. Il est nécessaire d'employer des condensateurs de conception spéciale qui permettent de minimiser cette inductance parasite.

4. Posons la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R_s}$. Le module de Z s'écrit alors $|Z| = R_s \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}$. L'étude précédente permet de tracer la courbe représentative du module de Z en fonction de la pulsation réduite (voir figure E.7.6). On observe bien le comportement inductif à haute fréquence, c'est-à-dire au-delà de la pulsation de résonance en intensité ω_0 (donc $x = 1$).

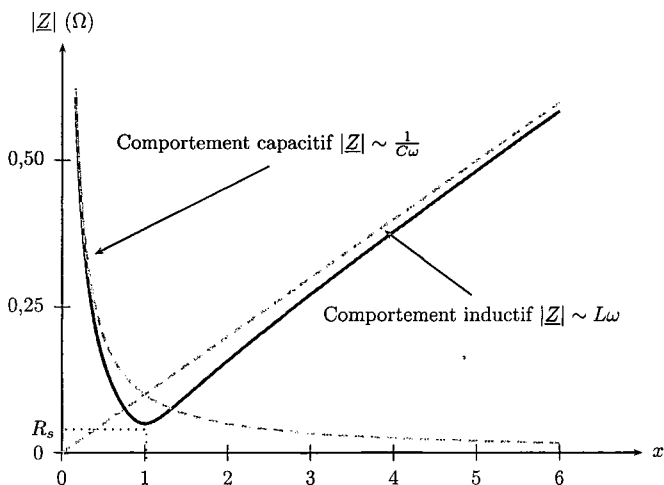


FIG. E.7.6. Impédance d'un condensateur selon la pulsation réduite.

8 Ponts de Sauty, Maxwell et Nernst

1. Lorsque le pont est équilibré, la tension aux bornes de l'ampèremètre est nulle, puisque son amplitude vaut $|\underline{Z}_A \hat{i}|$ et que le courant i est nul. Les tensions aux bornes de \underline{Z}_1 et \underline{Z}_4 sont donc égales. Comme il n'y a aucun courant dérivé dans l'ampèremètre, les impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 sont en série, de même pour \underline{Z}_3 et \underline{Z}_4 . Il est donc possible d'appliquer un diviseur de tension pour ces deux impédances. D'où

$$E \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = E \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}.$$

Cette dernière relation donne la condition cherchée, $\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_4$.

2. a/ La condition d'équilibre s'écrit également $\underline{Y}_4 \underline{Z}_3 = \underline{Y}_1 \underline{Z}_2$ avec \underline{Y} l'admittance. Donc

$$\left(jC_4 \omega + \frac{1}{R_4} \right) R_3 = \left(jC_1 \omega + \frac{1}{R_1} \right) R_2.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les expressions des deux grandeurs inconnues, $R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}$ et $C_1 = C_4 \frac{R_3}{R_2}$. La première relation correspond à l'équilibre du pont en régime continu (les capacités sont équivalentes à un circuit ouvert, et le pont est un simple pont de Wheatstone, vu dans l'exercice 5 page 136 et corrigé page 676). Il faut donc d'abord équilibrer le pont en régime continu, par exemple en choisissant R_2 variable. Une fois cela fait, on ne touche plus aux résistances, et il faut équilibrer le pont en régime sinusoïdal forcé en réglant C_4 , qu'il faut donc choisir variable (boîte de capacités, par exemple).

b/ La condition d'équilibre s'écrit également $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 \underline{Y}_3$. Donc

$$jL_1 \omega + R_1 = R_2 R_4 \left(jC_3 \omega + \frac{1}{R_3} \right).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les expressions des deux grandeurs inconnues, $R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}$ et $L_1 = R_2 R_4 C_3$. Il faut tout d'abord équilibrer le pont en régime continu, comme précédemment. Ensuite, sans toucher aux résistances, il faut équilibrer le pont en régime sinusoïdal forcé en réglant C_3 .

c/ La condition d'équilibre s'écrit $2 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right) = \frac{R_4}{R_3}$. L'identification des parties réelles et imaginaires donne $R_4 = 2R_3$ et $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$. Comme précédemment, il faut régler le pont en régime continu, de manière à obtenir $R_4 = 2R_3$. On équilibre alors le pont en régime sinusoïdal forcé, par exemple en réglant les capacités C : lorsque l'équilibre est réalisé, les valeurs des composants donnent la fréquence par $f = \frac{1}{2\pi RC}$.

9 Détermination des caractéristiques d'une bobine

1. On mesure

$$U_m = 8 \text{ V}, I_m = \frac{U_{Rm}}{R} = 0,2 \text{ A}, T = 4 \text{ ms}, \text{ donc } \omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 1,57 \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

2. La tension $u(t)$ passe par zéro $\Delta t = 0,5 \text{ ms}$ avant $i(t)$, donc

$$\varphi = -\frac{2\pi\Delta t}{T} \simeq -45^\circ < 0$$

(signe négatif puisque $i(t)$ est en retard sur $u(t)$).

3. En dérivant la loi des mailles par rapport au temps, on obtient $\frac{du(t)}{dt} = \frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}$.

Le passage en notation complexe donne, après simplification par $e^{j\omega t}$ et quelques calculs (identiques à ceux de la résonance en intensité du cours), $\underline{i} = U_m \frac{1}{R+j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$. On en déduit

l'amplitude de l'intensité du courant $I_m = U_m \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$ et $\tan \varphi = -\frac{1}{R} (L\omega - \frac{1}{C\omega})$.

L'amplitude peut donc s'écrire

$$I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}. \quad (7.1)$$

Si $R = 20 \Omega$, alors l'équation (7.1) donne $\tan^2 \varphi = 3$. Or, on mesure $\varphi = -45^\circ$, donc $\tan^2 \varphi = 1$. La valeur de la résistance du circuit n'est pas correcte, il faut en particulier tenir compte de la résistance interne de la bobine (ce que propose l'énoncé).

4. Il suffit de remplacer R par $R + r$ dans l'équation (7.1). En remplaçant $\tan^2 \varphi$ par 1 dans cette équation, on obtient $R + r \simeq 28 \Omega$, donc $r \simeq 8 \Omega$.

5. Comme $\tan \varphi = -\frac{1}{R} (L\omega - \frac{1}{C\omega})$, et $\tan \varphi = -1$, on en déduit $L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{R+r}{\omega} \simeq 59 \text{ mH}$.

10 Excitation en vitesse

Prenant en compte la force $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$ de tension du ressort et la force de frottement donnée, la projection horizontale du principe fondamental de la dynamique est $m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + h\dot{x}_B$ ou, en notations complexes, $-m\omega^2 \underline{x}_0 = -k\underline{x}_0 - h j \omega \underline{x}_0 + h j \omega b$. On en déduit le rapport demandé,

$$\frac{h j \omega}{-m\omega^2 + h j \omega + k}.$$

11 Exploitation d'une courbe de résonance

1. Il suffit de mesurer la tension aux bornes de la résistance. D'après la loi d'Ohm, elle est proportionnelle au courant qui circule dans le circuit.

2. À la résonance, l'amplitude (voir équation (7.19) page 182) vaut E/R . On mesure

$$I_{\max} \simeq 50 \text{ mA}, \text{ donc } R = \frac{E}{I_{\max}} \simeq 100 \Omega.$$

3. D'après la courbe (voir figure E.7.7), la résonance a lieu à la pulsation $\omega_r = 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. La largeur de la résonance correspond à l'intervalle $\Delta\omega$ tel que l'amplitude soit égale à $I_{\max}/\sqrt{2}$, soit environ 35 mA. On mesure sur le graphique $\Delta\omega \simeq 2 \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Il faut donc résoudre les deux équations

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 5.$$

On obtient $C \simeq 0,1 \mu\text{F}$ et $L \simeq 0,1 \text{ H}$. D'après la question précédente, $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} \simeq 5$.

12 Antirésonance

1. La loi des nœuds (voir figure E.7.8) s'écrit $i = i_C + i_L$, donc $i = C\frac{du_c}{dt} + i_L$. Dérivons l'expression précédente par rapport au temps, en utilisant que $i = u/R$ et $e = u + u_c$,

$$\frac{1}{R} \frac{du}{dt} = C \frac{d^2e}{dt^2} - C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}.$$

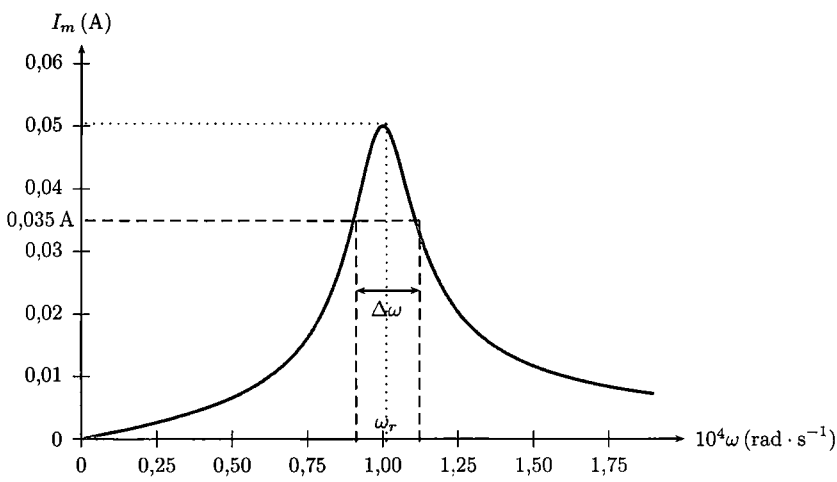


FIG. E.7.7. Courbe de résonance en intensité.

Or, $u_c = L \frac{di_L}{dt}$, d'où, après réarrangement, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 e(t) + \frac{d^2e(t)}{dt^2}. \tag{7.2}$$

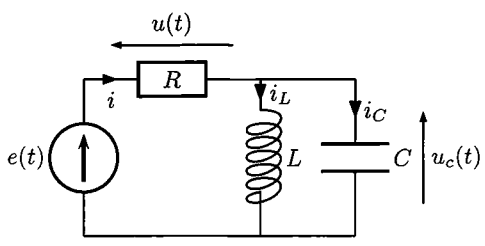


FIG. E.7.8. Circuit antirésonant.

2. La tension $e(t)$ sert de référence de phase. Posons la tension complexe $\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$, avec $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe. En l'introduisant dans l'équation différentielle (7.2) et en simplifiant par $e^{j\omega t}$, on obtient $-\omega^2 \underline{U}_m + 2\lambda j\omega \underline{U}_m + \omega_0^2 \underline{U}_m = (\omega_0^2 - \omega^2) E$, donc

$$\underline{U}_m = E \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda j\omega}.$$

En introduisant le facteur de qualité et la pulsation réduite x , on trouve (en divisant haut et bas par ω_0^2)

$$\underline{U}_m = E \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}. \tag{7.3}$$

3. Le module de l'équation (7.3) vaut

$$U_m(x) = E \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

On trouve que $U_m(0) = E$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_m = E$. De plus, la fonction s'annule de manière évidente en $x = 1$. On en déduit donc qu'il y a **antirésonance en $\omega = \omega_0$** . Pour tracer la courbe, calculons

la dérivée de

$$f(x) = E \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}},$$

où l'on a retiré la valeur absolue afin de simplifier le calcul (il faudra en tenir compte ensuite). On trouve après calcul

$$\frac{df(x)}{dx} = E \frac{\frac{-x}{2Q^2}(1 + x^2)}{\left((1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right)^{3/2}} < 0.$$

La fonction $f(x)$ possède donc une tangente horizontale en $x = 0$ et décroît ensuite de manière monotone. Cela signifie que $U_m(x)$ est décroissante monotone pour $x < 1$, où elle s'annule², puis est croissante. La courbe représentative de $U_m(x)$ est tracée sur la figure E.7.9.

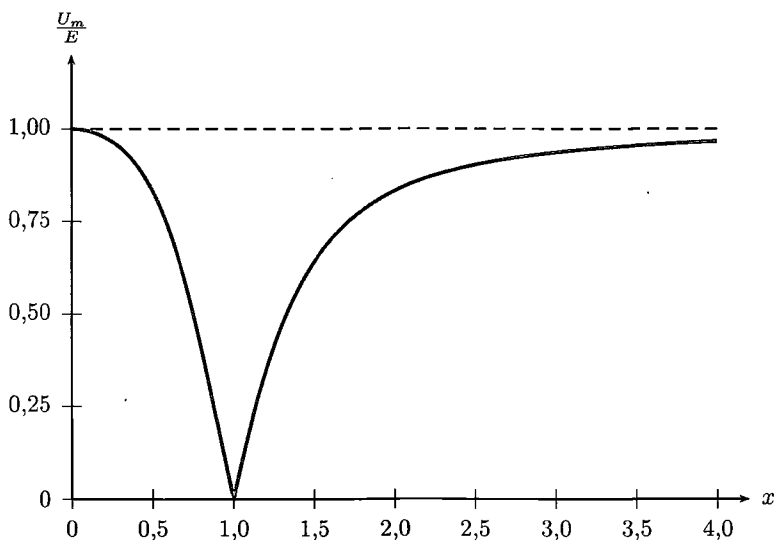


FIG. E.7.9. Courbe d'antirésonance pour $Q = 1$.

13 Modélisation d'un quartz

1. L'admittance équivalente vaut $\underline{Y} = jC_2\omega + \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}$. On en déduit l'impédance équivalente

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1 - LC_1\omega^2 + jRC_1\omega}{j\omega(C_1 + C_2 - LC_1C_2\omega^2 + jRC_1C_2\omega)}.$$

Si R est négligeable, alors l'impédance équivalente devient

$$\underline{Z} = j \frac{LC_1\omega^2 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - LC_1C_2\omega^2)}.$$

Elle est imaginaire pure. Suivant le signe de la partie imaginaire, l'impédance sera capacitive ou inductive.

2. La dérivée est discontinue en ce point.

2. Les pulsations particulières sont celles qui annulent le dénominateur et le numérateur. D'où

$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$ et $\omega_p = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}$. Si l'on factorise par ω_s dans l'expression de ω_p , on obtient $\omega_p = \omega_s \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_2}} > \omega_s$. Comme $C_2 \gg C_1$, alors $\sqrt{1 + \frac{C_1}{C_2}} \simeq 1 + \frac{C_1}{2C_2}$, donc $\varepsilon = \frac{C_1}{2C_2} \ll 1$.

3. L'impédance équivalente s'écrit ($\omega = 2\pi f$)

$$\underline{Z} = j \frac{\frac{f^2}{f_s^2} - 1}{2\pi(C_1 + C_2)f \left(1 - \frac{f^2}{f_p^2}\right)},$$

donc le signe de la partie imaginaire dépend de celui de $\frac{\frac{f^2}{f_s^2} - 1}{1 - \frac{f^2}{f_p^2}}$. Par conséquent,

► si $f < f_s < f_p$ ou $f > f_p > f_s$, alors la partie imaginaire de \underline{Z} est négative, donc \underline{Z} est capacitive;

► si $f \in [f_s; f_p]$, alors la partie imaginaire de \underline{Z} est positive, donc \underline{Z} est inductive

Étant donné que $f_p \simeq f_s$, la zone inductive est très étroite.

4. Le module de \underline{Z} est

$$|\underline{Z}| = \frac{1}{2\pi(C_1 + C_2)f} \left| \frac{1 - \frac{f^2}{f_s^2}}{1 - \frac{f^2}{f_p^2}} \right|.$$

Cette fonction s'annule en f_s et tend vers l'infini en f_p et pour f tendant vers zéro. À très basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), $|\underline{Z}| \sim \frac{1}{2\pi C_2 f}$ et à très haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), $|\underline{Z}| \sim \frac{1}{2\pi C_2 f}$ également. Du fait de la valeur absolue, la dérivée est discontinue en f_s . La courbe représentative de $|\underline{Z}|$ est tracée sur la figure E.7.10, ainsi que celle de $\frac{1}{2\pi C_2 f}$ (les échelles relatives n'ont pas été respectées pour la lisibilité de la figure, mais en réalité f_s est très proche de f_p).

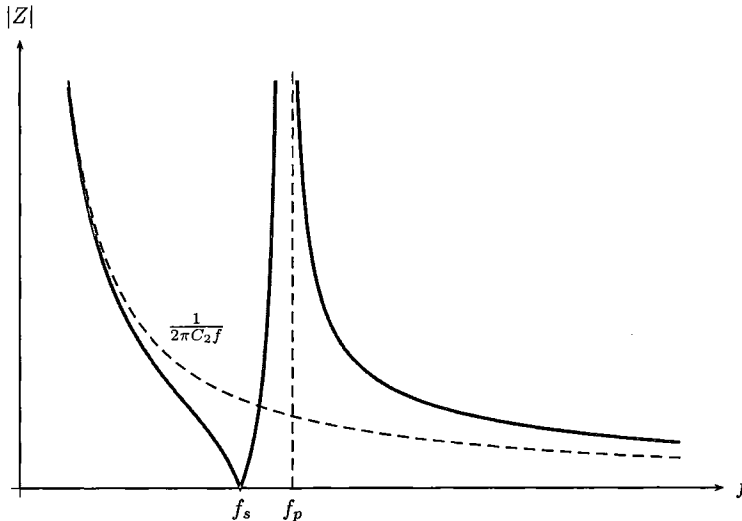


FIG. E.7.10. Impédance d'un quartz sans amortissement.

5. S'il existe un amortissement, l'amplitude en f_p est nécessairement bornée, et celle en f_s non nulle. L'allure de la courbe est tracée sur la figure E.7.11. On trouve $f_s \simeq 100,7$ kHz,

3. On rappelle qu'au voisinage de $x = 0$, $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.

$f_p \simeq 101,3 \text{ kHz}$ et $Q \simeq 79 \cdot 10^3$. Cette valeur de facteur de qualité est très importante par rapport à des circuits classiques type RLC . Le quartz permet d'obtenir des facteurs de qualité jusqu'à 10^6 . Dans un oscillateur à quartz (comme ceux des montres à quartz), il est utilisé dans sa zone inductive, qui est très étroite, ce qui permet une grande précision en fréquence. Néanmoins, il est nécessaire de disposer d'une boucle de rétroaction afin d'assurer une bonne stabilité des oscillations.

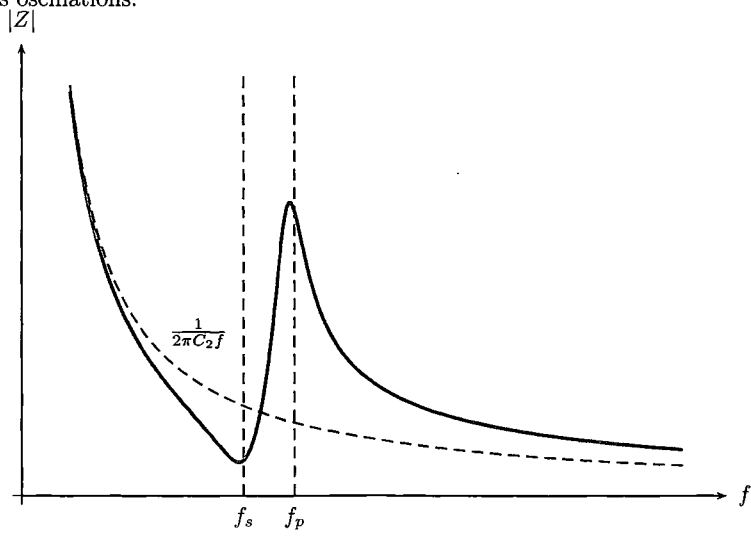


FIG. E.7.11. Impédance d'un quartz avec amortissement.

14 Étude d'un haut-parleur électrodynamique

1. D'après les lois d'association des impédances,

$$\underline{Z} = \underbrace{R_e + jL_e\omega}_{\underline{Z}_e} + \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{R_m} + j\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)}_{\underline{Z}_m}}$$

2. Il suffit de multiplier \underline{Z}_m par son complexe conjugué haut et bas, puis d'additionner \underline{Z}_e ;

on trouve $R(\omega) = \frac{R_m}{1 + (R_m C_m \omega - \frac{R_m}{L_m \omega})^2}$ et $X(\omega) = R_m \frac{\frac{R_m}{L_m \omega} - R_m C_m \omega}{1 + (R_m C_m \omega - \frac{R_m}{L_m \omega})^2}$.

3. La fonction $R(\omega)$ possède un maximum lorsque le dénominateur est minimum, donc pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$. Le maximum est égal à R_m . De plus, $R(\omega) \sim_0 \frac{L_m^2 \omega^2}{R_m}$, donc la tangente à l'origine est horizontale, et $R(\omega) \sim_\infty \frac{1}{R_m C_m^2 \omega^2}$, donc la fonction tend vers zéro à l'infini comme $1/\omega^2$. La courbe est représentée sur la figure E.7.12.

La fonction $X(\omega)$ s'annule en ω_0 . De plus, $X(\omega) \sim_0 L_m \omega$, donc la tangente à l'origine est de pente non nulle, et $X(\omega) \sim_\infty -\frac{1}{C_m \omega}$, ce qui signifie que la fonction tend vers zéro à l'infini par valeurs négatives, et comme $1/\omega$, donc moins vite que $R(\omega)$. Elle possède donc un maximum entre 0 et ω_0 , et un minimum après ω_0 . Pour les déterminer, il faut résoudre $\frac{dX(\omega)}{d\omega} = 0$. Posons $u(\omega) = R_m C_m \omega - \frac{R_m}{L_m \omega}$. On peut alors écrire $\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{dX}{du} \frac{du}{d\omega}$. Comme l'équation $\frac{du}{d\omega}$ n'admet pas de solution acceptable ($\omega \geq 0$), il suffit de résoudre $\frac{dX}{du} = 0$, ce qui est plus simple. On obtient $\frac{dX}{du} = R_m \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$. Cela revient donc à résoudre $u = \pm 1$. Cette dernière équation est le trinôme $\omega^2 \pm \frac{1}{R_m C_m} \omega - \omega_0^2 = 0$, dont les seules solutions acceptables physiquement ($\omega \geq 0$) sont

$\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{2R_m C_m} + \sqrt{\frac{1}{(2R_m C_m)^2} + \omega_0^2}$. D'après les variations de $X(\omega)$, la plus petite pulsation (ω_1) correspond à un maximum, et la plus grande (ω_2) à un minimum. La courbe est représentée sur la figure E.7.12. Pour les équivalents de $|\underline{Z}_m(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$, il suffit de conserver

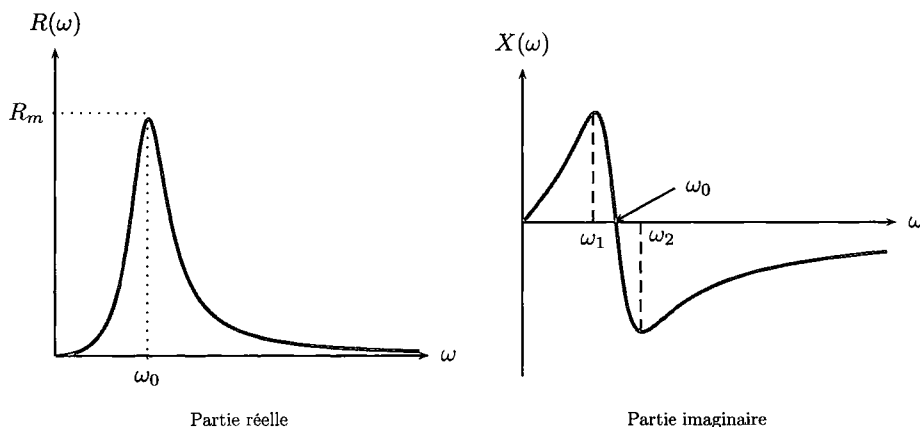


FIG. E.7.12. Parties réelle et imaginaire de l'impédance équivalente d'un haut-parleur.

le terme dominant entre parties réelle et imaginaire. En zéro, c'est la partie imaginaire qui tend le moins vite vers zéro, donc $|\underline{Z}_m(\omega)| \underset{0}{\sim} L_m \omega$, le circuit est équivalent à la bobine d'inductance L_m . En l'infini, c'est également la partie imaginaire qui tend le moins vite vers zéro, donc $|\underline{Z}_m(\omega)| \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{C_m \omega}$, le circuit est alors équivalent à la capacité C_m .

4. D'après la première question, le module de \underline{Z}_m est $|\underline{Z}_m| = \frac{R_m}{1 + (R_m C_m \omega - \frac{R_m}{L_m \omega})^2}$. Il admet un maximum en $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, de valeur R_m . AN : $\omega_0 \simeq 120 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $|\underline{Z}_m|_{\text{max}} = R_m = 57,8 \Omega$.

5. Il faut résoudre $(R_m C_m \omega - \frac{R_m}{L_m \omega})^2 = 1$, donc $R_m C_m \omega - \frac{R_m}{L_m \omega} = \pm 1$. Cette équation est équivalente au trinôme $\omega^2 \pm \frac{1}{R_m C_m} \omega - \omega_0^2 = 0$, déjà résolu lors de l'étude de la fonction $X(\omega)$.

On obtenait $\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{2R_m C_m} + \sqrt{\frac{1}{(2R_m C_m)^2} + \omega_0^2}$. La quantité $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = \frac{1}{R_m C_m}$ est la largeur de la courbe (voir figure E.7.13) de $|\underline{Z}_m(\omega)|$. La grandeur $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ est le facteur de qualité : plus il est grand, plus la courbe est étroite. AN : $\Delta\omega = 2,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q \simeq 43$, ce qui est déjà un bon facteur de qualité.

6. Nous avons vu que $\underline{Z}_e = R_e + jL_e \omega$. Dans le plan complexe, cela correspond donc à un segment de droite vertical, d'abscisse $R_e = 630 \Omega$, et d'ordonnée $L_e \omega$ comprise entre $1,9 \Omega$ et $21,4 \Omega$ (limites fixées par les fréquences vocales), voir figure E.7.14.

7. Pour les fréquences vocales, la partie motionnelle est négligeable ($\omega \gg \omega_0$), donc le graphe relatif au point d'affixe $\underline{Z}(\omega)$ est identique à celui de la figure E.7.14 : l'impédance du haut-parleur est purement résistive.

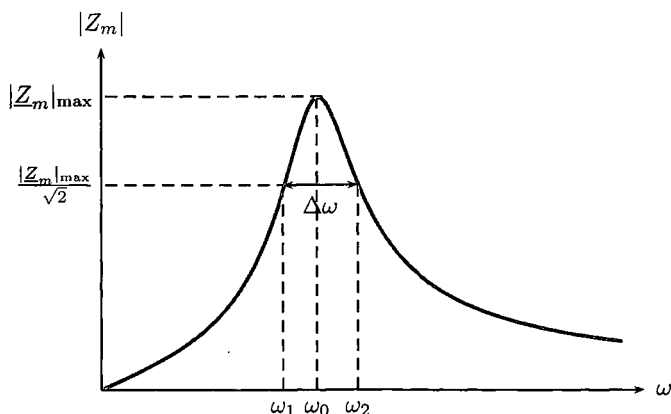


FIG. E.7.13. Module de l'impédance motionnelle du haut-parleur.

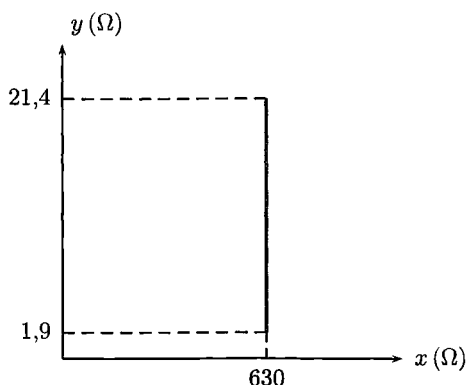


FIG. E.7.14. Impédance électrique.

Chapitre 8

1 Impédances d'entrée et de sortie

De manière évidente, R et C sont parcourus par le courant débité par le générateur, dont la tension s'applique aux bornes de l'ensemble. L'impédance d'entrée est donc l'impédance équivalente à R et C en série, donc
$$\underline{Z}_E = R + \frac{1}{jC\omega}.$$

2 Égalisation RIAA

1. Le filtre RIAA laisse passer les basses fréquences car $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H} = 1$. Cela permet d'éliminer les deux courbes en gris sur la figure 8.25 page 225. Par ailleurs, à haute fréquence, $\underline{H} \sim -j\tau_1/(\tau_2\tau_3\omega)$, ce qui donne une pente de -20 dB/décade. Cela permet d'éliminer la courbe en tirets noirs dont l'asymptote a clairement une pente de -40 dB/décade.

Sans rentrer dans les détails, à l'enregistrement d'un disque vinyle, les hautes fréquences sont renforcées et les basses fréquences diminuées; il faut donc faire le contraire à la lecture du disque à l'aide du filtre RIAA, cela permet de réduire les bruits parasites (hautes fréquences) tels que le souffle et les claquements.

2. Les trois constantes de temps τ_i proposées correspondent aux fréquences $1/(2\pi\tau_i)$ suivantes : 50 Hz, 500 Hz et 2,12 kHz. Ces fréquences sont suffisamment éloignées pour que l'on puisse voir l'effet de chaque terme $1 + j\tau_i\omega$ se combiner. Schématiquement, ce terme est égal à 1 pour $f < 1/(2\pi\tau_i)$ et conduit à une pente de ± 20 dB/décade pour $f > 1/(2\pi\tau_i)$, selon que ce

terme est au numérateur ou au dénominateur. À basse fréquence ($\forall i, f < \tau_i$), la courbe est pratiquement horizontale, puis le gain diminue, donc la fréquence la plus basse dans les trois valeurs correspond à un terme au dénominateur, soit $\tau_2 = 3180 \mu\text{s}$ et ainsi $f_2 = 50 \text{ Hz}$. Le gain a ensuite une inflexion et diminue plus lentement, la fréquence 500 Hz correspond donc au terme au numérateur, soit $\tau_1 = 318 \mu\text{s}$, et enfin $\tau_3 = 75 \mu\text{s}$, soit $f_1 = 500 \text{ Hz}$ et $f_3 = 2,12 \text{ kHz}$.

3. À 50 Hz, le gain repéré sur la figure est d'environ -3 dB ; cette fréquence est en effet la fréquence de coupure du filtre de fonction de transfert $1/(1 + j\tau_2\omega)$, et à cette fréquence, $(1 + j\tau_1\omega)/(1 + j\tau_3\omega) \simeq 1$.

4. Une lecture sur le graphe donne une fréquence de 8 kHz .

3 Fonction de transfert et équation différentielle

La fonction de transfert s'obtient avec un diviseur de tension

$$\underline{u} = e \frac{1}{1 + \underline{Y}_{\text{eq}} R},$$

avec $\underline{Y}_{\text{eq}}$ l'admittance équivalente du groupement parallèle (L, C). Donc

$$\underline{\mathcal{H}} = \frac{1}{1 + \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \right) R}.$$

Ainsi, $e = \underline{u} + jRC\omega\underline{u} + \frac{R}{jL\omega}\underline{u}$. En multipliant tout par $j\omega$, on obtient

$$j\omega e = j\omega\underline{u} + RC(j\omega)^2\underline{u} + \frac{R}{L}\underline{u}.$$

Comme une multiplication par $j\omega$ correspond à une dérivation temporelle, on en déduit

$$\boxed{\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = \frac{1}{RC} \frac{de(t)}{dt}}$$

4 Circuit RL

1. À basse fréquence, la bobine se comporte comme un court-circuit, donc $u_s = 0$. À haute fréquence, elle est équivalente à un interrupteur ouvert, donc $u_s = u_e$ puisque le filtre est en sortie ouverte (pas de courant de sortie). Ce circuit est donc un **filtre passe-haut**.

2. On note \underline{U}_e et \underline{U}_s les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie. Un diviseur de tension donne $\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} \underline{U}_e = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{U}_e$. On en déduit la fonction de transfert

$$\boxed{\underline{\mathcal{H}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega}}}$$

On pose $\omega_c = \frac{R}{L}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_c}$, donc $\underline{\mathcal{H}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}}$ qui est la forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre, de pulsation de coupure ω_c . Le lecteur est renvoyé à la section III.2 page 212 pour l'étude détaillée.

3. Le gain est $G(x) = |\underline{\mathcal{H}}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$, donc $G_{\text{dB}} = 20 \log G(x) = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$.

À basse fréquence, $x \ll 1$, donc $G_{\text{dB}} \sim 20 \log(x)$. À haute fréquence, $G_{\text{dB}} \rightarrow 0$. La phase est $\varphi(x) = \arg(\underline{\mathcal{H}}(jx)) = -\arg \left(1 + \frac{1}{jx} \right) = \arctan \frac{1}{x}$. Dans $\arg \left(1 + \frac{1}{jx} \right)$, le nombre complexe dont on prend l'argument est de partie imaginaire négative, donc $\sin \varphi > 0$. Par conséquent, $\varphi \in [0; \pi]$. Si $x \rightarrow 0$, alors $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et si $x \rightarrow \infty$, alors $\varphi \rightarrow 0$. De plus, le point de coordonnées $(0, \frac{\pi}{4})$ est centre de symétrie. Le lecteur est renvoyé à la section III.2 page 212 pour une étude plus détaillée. Le diagramme de Bode du gain est représenté sur la figure E.8.1.

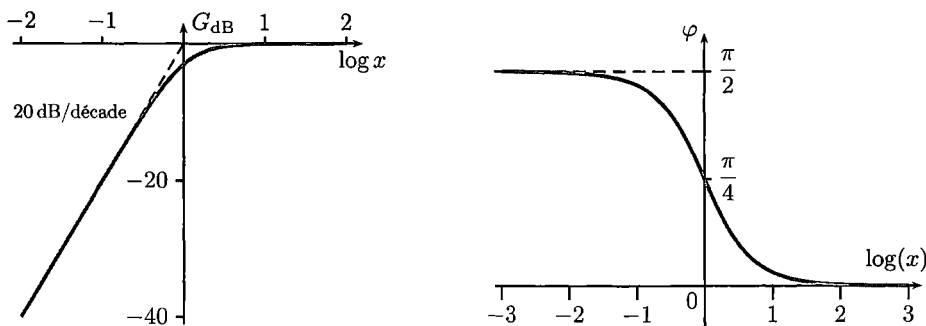


FIG. E.8.1. Diagramme de Bode d'un circuit RL passe-haut du premier ordre.

5 Entrée d'un oscilloscope

1. Le lecteur est renvoyé au cours, section III.1 page 210. Ce filtre est un passe-bas du premier ordre, de fréquence de coupure $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$. Pour $R = 1 \text{ k}\Omega$, on trouve $f_c \simeq 16 \text{ kHz}$ et pour $R = 100 \text{ k}\Omega$, on obtient $f_c \simeq 0,16 \text{ kHz}$.

2. Notons \underline{Y} l'admittance du groupement (C, R_0, C_0) en parallèle, $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R_0} + jC_0\omega$. En introduisant les amplitudes complexes des tensions, un diviseur de tension donne $\underline{u}_s = \underline{u}_e \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}}$. On en déduit la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + R \left(j(C + C_0)\omega + \frac{1}{R_0} \right)} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec $H_0 = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0}}$ et $\omega_c = \frac{1 + \frac{R}{R_0}}{R(C + C_0)}$. L'ensemble se comporte donc comme un filtre passe-bas

du premier ordre, de fréquence de coupure $f_c = \frac{1 + \frac{R}{R_0}}{2\pi R(C + C_0)}$. Pour $R = 1 \text{ k}\Omega$, on trouve $f_c \simeq 16 \text{ kHz}$ et pour $R = 100 \text{ k}\Omega$, on obtient $f_c \simeq 0,18 \text{ kHz}$. On constate que la présence de l'oscilloscope modifie la fréquence de coupure du filtre de manière notable (environ 10 %) dans le cas où R n'est pas petite devant R_0 . En revanche, pour $R \ll R_0$, la modification est de moins de 0,5 % (en gardant plus de chiffres significatifs), ce qui est bien plus petit que la précision des mesures (ou même que la précision sur les valeurs des composants). Remarquons également que le gain H_0 n'est que de 0,9 pour $R = 100 \text{ k}\Omega$, il y a donc aussi une atténuation du signal. Lors d'une mesure, il est fondamental de se demander quelle est l'influence de l'appareil de mesure.

6 Gabarit d'un filtre passe-bande

1. Le gabarit est tracé sur la figure E.8.2 (les petites graduations ont été retirées pour plus de lisibilité).

2. Le gain sur la figure E.8.2 ne coupe pas les gabarits dessinés, le filtre respecte donc le cahier des charges. Les asymptotes du filtre ont des pentes de $\pm 20 \text{ dB/décade}$ conformément à un filtre passe-bande d'ordre deux.

Sur la figure, on repère la fréquence centrale $f_0 = 5 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ et puisque

$$f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 1 / (2\pi\sqrt{LC}),$$

cela permet d'obtenir $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.

3. Pour estimer la valeur du facteur de qualité Q , il faut repérer les fréquences de coupures à -3 dB , soit $3,1 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ et $8,1 \cdot 10^2 \text{ Hz}$, puis déterminer la largeur de la bande passante $\Delta f = 5 \cdot 10^2 \text{ Hz}$, et enfin utiliser $Q = f_0 / \Delta f = 1$.

La formule $Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ permet de déterminer la valeur de la résistance, $R = 0,3 \text{ k}\Omega$.

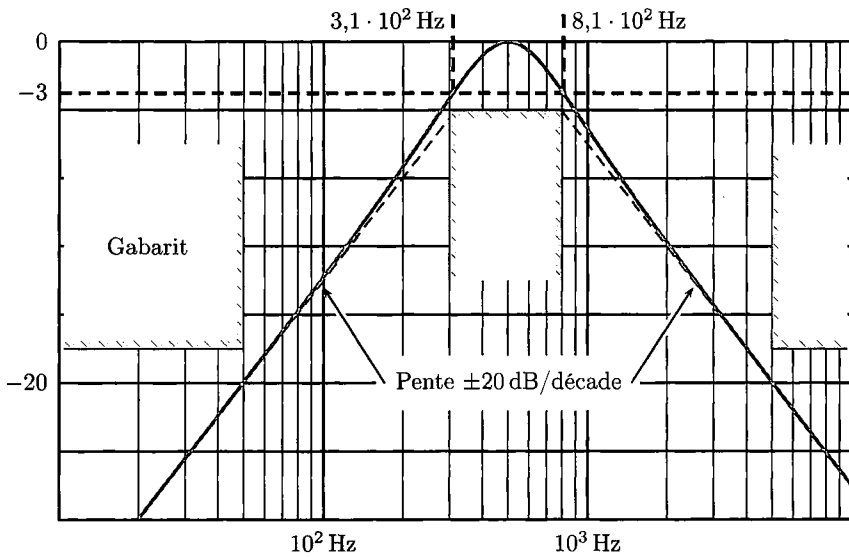


FIG. E.8.2. Filtre passe-bande et compatibilité avec un gabarit imposé.

7 Effet d'un filtre passe-bas sur un signal créneau

1. Il faut tout d'abord déterminer la fréquence de coupure du filtre, $RC = 10^3 \times 10^{-9} \text{ s} = 1,0 \mu\text{s}$, soit $f_c = 1/(2\pi RC) = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Hz}$, c'est-à-dire 100 fois la fréquence du fondamental du signal en entrée. Puisque le filtre est un passe-bas, le signal passe sans déformation notable (voir figure E.8.3).

2. La valeur de la capacité a été multipliée par 10^3 , donc la fréquence de coupure est maintenant $f_c = 1/(2\pi RC) = 0,16 \text{ kHz}$, soit 10 fois moins que la fréquence du fondamental du signal en entrée. Le signal est dans la bande rejetée, son amplitude doit être faible. D'autre part, le filtre passe-bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur à haute fréquence, on doit donc observer un signal triangulaire de faible amplitude (voir figure E.8.3).

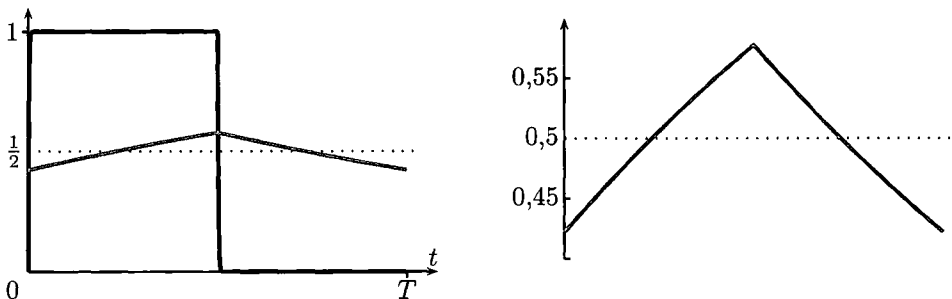


FIG. E.8.3. Effet d'un filtre passe-bas sur un signal créneau. En noir pour un filtre dont la fréquence de coupure est 100 fois plus grande que celle du fondamental ; en gris pour un filtre dont la fréquence de coupure est 10 fois plus faible. À droite, agrandissement de ce dernier cas ; on reconnaît un triangle.

8 Effet d'un filtre passe-bande sur un signal

1. Le filtre a un facteur de qualité peu élevé, il laisse passer une large gamme de fréquences autour de sa fréquence centrale. Le triangle étant relativement bien reproduit par ses premiers harmoniques, le signal de sortie doit être triangulaire dans le cas où la fréquence du signal d'entrée est égale à la fréquence centrale du filtre; cependant, puisque le filtre passe-bande rejette la composante continue, le signal est à valeur moyenne nulle conformément à la courbe gris foncé sur la figure 8.29 page 228.

Dans le cas d'une fréquence centrale 100 fois plus faible que celle du signal, les harmoniques sont dans la bande rejetée, l'amplitude du signal de sortie est faible. Par ailleurs, le filtre passe-bande du deuxième ordre a une asymptote de pente -20 dB/décade à haute fréquence, ce filtre se comporte donc comme un intégrateur. En sortie, on observe ainsi des arcs de paraboles de faible amplitude (voir partie droite de la figure 8.29 page 228).

2. Les deux filtres considérés sont maintenant très sélectifs (facteur de qualité élevé).

Dans le premier cas, la fréquence du fondamental du créneau est égale au cinquième de la fréquence centrale du passe-bande. Cela signifie que la fréquence de l'harmonique $n = 5$ coïncide avec la fréquence centrale du filtre. Puisque le filtre est très sélectif, seul cet harmonique passe; on observe donc une sortie sinusoïdale dont la fréquence est cinq fois celle du signal d'entrée (voir figure 8.30 page 228).

Dans le second cas, la fréquence du fondamental est supérieure à la fréquence centrale du filtre; tous les harmoniques du créneau sont donc dans la bande rejetée, l'amplitude du signal de sortie est faible. Par ailleurs, le filtre passe-bande du deuxième ordre se comporte comme un intégrateur à haute fréquence (et c'est assez bien vérifié même pour le fondamental, dont la fréquence n'est que le double de la fréquence centrale car le facteur de qualité du filtre est élevé), la sortie a donc une allure triangulaire de moyenne nulle (voir partie droite de la figure 8.30 page 228).

Chapitre 9

1 Mouvement de la Terre

1. La période de rotation de la Terre autour du Soleil est de 365,25 jours, soit $3,156 \cdot 10^8$ s, la vitesse angulaire de la Terre est donc de $\omega = \frac{2\pi}{3,156 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse

moyenne sera donc de $v = R\omega = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Le mouvement est tacitement supposé circulaire uniforme, l'accélération tangentielle est donc nulle et le module de l'accélération normale est $a_n = \frac{v^2}{R} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2 Mouvement circulaire

1. Un calcul direct donne $\dot{\theta} = \frac{4\pi^2}{\tau} \cos(2\pi \frac{t}{\tau})$. Si $t \in [\frac{\tau}{4}, \frac{3\tau}{4}]$, la vitesse angulaire de M est négative. Le point circule dans le sens horaire. À $t = \frac{\tau}{4}$, M est en $\theta = 0$ et possède une vitesse nulle (mais une accélération non nulle!). Le point fait deux tours et revient en $\theta = 0$ avec une vitesse nulle à l'instant $t = \frac{3\tau}{4}$. Lorsque $t \in [\frac{3\tau}{4}, \frac{5\tau}{4}]$, le processus est le même mais dans le sens direct (anti-horaire). Le cycle recommence ensuite. Le mouvement est donc périodique, la période P correspond à la durée de $\boxed{4 \text{ tours}}$ (voir figure E.9.1).

2. Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v_0 \cos(\frac{2\pi t}{\tau}) \vec{u}_\theta$ avec $v_0 = \frac{4\pi^2 R}{\tau}$. Le vecteur \vec{u}_θ est orthogonal au vecteur \vec{u}_r , et dans le sens de la variation de θ , il change donc de sens au cours du mouvement. Le point M et son vecteur vitesse sont représentés sur la figure E.9.2.

3. Le vecteur accélération s'écrit $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; en utilisant l'expression de la vitesse obtenue à la question précédente, il vient $\vec{a} = -a_0 \cos^2(\frac{2\pi t}{\tau}) \vec{u}_r - \frac{a_0}{2\pi} \sin(\frac{2\pi t}{\tau}) \vec{u}_\theta$ avec $a_0 = R \left(\frac{4\pi^2}{\tau}\right)^2$. En notant $a_r = \vec{a} \cdot \vec{u}_r$ et $a_\theta = \vec{a} \cdot \vec{u}_\theta$, on peut remplir le tableau suivant.

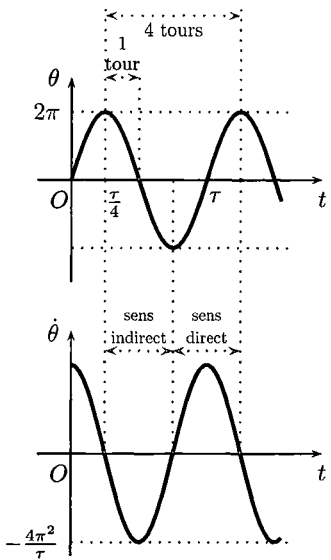


FIG. E.9.1. Évolution de l'angle et de la vitesse angulaire en fonction du temps.

t	0	$\tau/25$	$\tau/12$	$\tau/4$	$\tau/2$	$3\tau/4$
a_r	$-a_0$	$15a_0/16$	$-3a_0/4$	0	$-a_0$	0
$a_\theta \times \pi$	0	$-a_0/8$	$-a_0/4$	$-a_0/2$	0	$a_0/2$

Le vecteur accélération est représenté sur la figure E.9.2. À $t = 0$, le mobile passe par le point $\theta = 0$ avec une vitesse maximale et une accélération tangentielle nulle. De $t = 0$ à $t = \tau/4$, la vitesse diminue, l'accélération tangentielle est opposée au sens du mouvement, d'où le freinage. À $t = \tau/4$, la vitesse est nulle avec l'accélération selon $-\vec{u}_y$, ce qui engendre une rotation dans le sens indirect.

3 Mouvement d'une hélice

1. À partir de l'instant $t = 0$, la vitesse angulaire de l'hélice va diminuer. Notons $-\alpha = \frac{d\omega}{dt} < 0$, $-\alpha$ représente la décélération angulaire supposée constante. À $t = 0$, $\omega = \omega_0$, d'où $\omega = -\alpha t + \omega_0$. L'angle θ parcouru par l'hélice vérifie $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, soit

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

où θ_0 est l'angle que fait l'hélice à l'instant initial $t = 0$ par rapport à une référence. Notons t_f l'instant d'arrêt, l'angle parcouru depuis $t = 0$ est $\theta_f - \theta_0$ correspondant à 90 tours, d'où $\theta_f - \theta_0 = -\frac{1}{2}\alpha t_f^2 + \omega_0 t_f$. À cet instant, la vitesse angulaire est nulle, $0 = -\alpha t_f + \omega_0$ soit $\alpha = \frac{\omega_0}{t_f}$ et donc $\theta_f - \theta_0 = -\frac{1}{2}\omega_0 t_f + \omega_0 t_f = \frac{1}{2}\omega_0 t_f$. On a donc $t_f = 2\frac{\theta_f - \theta_0}{\omega_0}$ et $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)$. Numériquement, on trouve $t_f = 2\frac{90}{1200} = 0,15 \text{ min} = 9 \text{ s}$.

2. À l'instant $t = 2 \text{ s}$, $\omega = \frac{7}{9}\omega_0 = 933,3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = 97,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La trajectoire (Γ) d'un point A situé à l'extrémité de l'hélice est circulaire de rayon $b = 2 \text{ m}$. En coordonnées cylindriques dans le référentiel (\mathcal{R}) = (O, C), on a $\vec{OA} = b\vec{u}_r$, la vitesse est orthoradiale, tangente en A à Γ , soit $\vec{v}_A = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta = b\omega\vec{u}_\theta$. Numériquement, $v = b\omega = 195,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'accélération est celle d'un point sur une trajectoire circulaire, $\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = -b\omega^2\vec{u}_r + b\dot{\omega}\vec{u}_\theta = -b\omega^2\vec{u}_r - b\alpha\vec{u}_\theta = -b\omega^2\vec{u}_r - \frac{b\omega_0}{t_f}\vec{u}_\theta$.

On a ici deux composantes :
 ► la composante tangentielle a un module constant lors du mouvement. Elle est la cause du freinage car elle est bien dirigée en sens inverse du mouvement ;

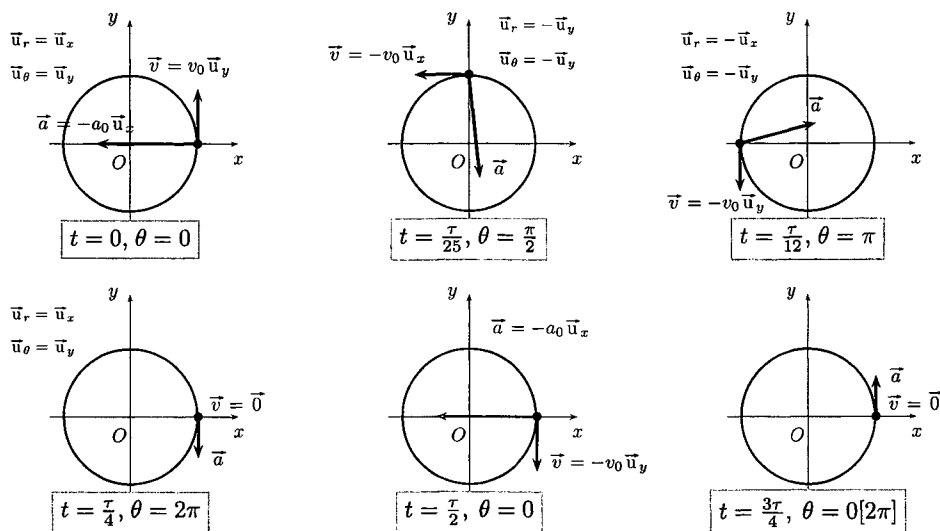


FIG. E.9.2. Représentation des vitesses et accélérations.

► la composante normale est, comme il se doit, dans le sens de la concavité de la trajectoire ($-\vec{u}_r$) et son module dépend du temps $\|\vec{a}_{nA}\| = b\omega_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^2$.

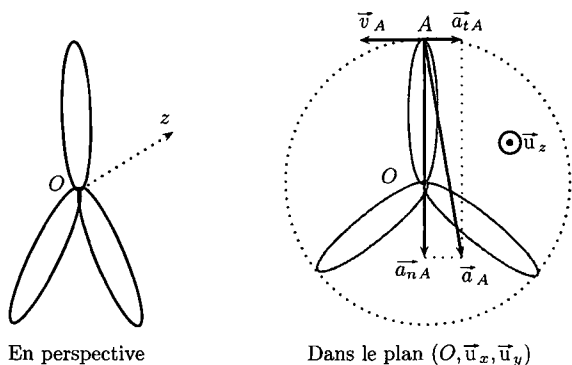


FIG. E.9.3. Mouvement d'une hélice.

Numériquement, on obtient au bout de 2 secondes

$$\|\vec{a}_{tA}\| = 27,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad \|\vec{a}_{nA}\| = 3,16 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Le module de l'accélération de l'hélice est donc de $\|\vec{a}_A\| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \approx a_n$. En comparant avec l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, on peut imaginer que les contraintes mécaniques doivent être particulièrement importantes dans l'hélice.

4 Mouvement parabolique

1. La composante de la vitesse instantanée \vec{v}_M sur \vec{u}_x à l'instant $t = n\tau$ peut être approchée par l'expression $v_x(n\tau) = \frac{x((n+1)\tau) - x(n-1)\tau}{(n+1)\tau - (n-1)\tau}$. Pour tout n , $v_x(n\tau) = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: la composante sur \vec{u}_x du vecteur vitesse reste constante lors du mouvement. On procède de même sur \vec{u}_y , avec maintenant $v_y(M(n\tau)) = \frac{y((n+1)\tau) - y(n-1)\tau}{(n+1)\tau - (n-1)\tau} = \frac{x^2((n+1)\tau) - x^2((n-1)\tau)}{8\tau}$. On en déduit le module de la vitesse instantanée $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Numériquement, on dresse alors le tableau suivant :

t [s]	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40
v_y [m · s ⁻¹]	-	2	4	6	8	10	12	14	16	18	-
v [m · s ⁻¹]	-	10,2	10,8	11,7	12,8	14,1	15,6	17,2	18,9	20,6	-

2. Un vecteur tangent en un point M de la trajectoire est donné par

$$\vec{T} = \vec{u}_x + \frac{dy}{dx} \vec{u}_y = \vec{u}_x + \frac{1}{2a} x \vec{u}_y.$$

Le vecteur unitaire \vec{u}_t sera donc $\vec{u}_t = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4a^2}}} (\vec{u}_x + \frac{1}{2a} x \vec{u}_y)$.

On relève l'abscisse du point A , $x = 3,2$ m, qui correspond à la position du mobile M à l'instant $t = 8\tau = 0,32$ s. Numériquement, en A , \vec{u}_t s'écrit donc $\vec{u}_t = 0,53\vec{u}_x + 0,85\vec{u}_y$.

Le vecteur \vec{u}_n de composantes (α, β) dans \mathcal{K} est unitaire, donc $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ et orthogonal à \vec{u}_t , donc $\vec{u}_t \cdot \vec{u}_n = 0,53\alpha + 0,85\beta = 0$. La solution de ce système avec $x < 0$ (car \vec{u}_n est orienté par la concavité de la parabole) est $\vec{u}_n = -0,85\vec{u}_x + 0,53\vec{u}_y$.

La vitesse est toujours tangente à la trajectoire, donc $\vec{v} = v\vec{u}_t = 18,9\vec{u}_t$. On peut retrouver l'expression du vecteur tangent à partir de l'expression du vecteur vitesse,

$$\vec{u}_t(A) = \frac{1}{v} (v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y) = \frac{1}{18,9} (10\vec{u}_x + 16\vec{u}_y) = 0,53\vec{u}_x + 0,85\vec{u}_y.$$

Soit θ l'angle entre les vecteurs \vec{u}_t et \vec{u}_x , $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}_t \cdot \vec{u}_x}{\|\vec{u}_t\| \|\vec{u}_x\|} = \vec{u}_t \cdot \vec{u}_x = 0,53$. On en déduit

$$\theta = 1,01 \text{ rad} = 58^\circ.$$

3. Soit $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ la base locale cylindrique et ϕ l'angle entre le vecteur tangent \vec{u}_t et le vecteur radial \vec{u}_r . Le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = x\vec{u}_x + \frac{x^2}{4}\vec{u}_y$, or $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ et ainsi $\vec{u}_r = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{16}}} (\vec{u}_x + \frac{x}{4}\vec{u}_y)$. On écrit enfin que $\cos(\phi) = \vec{u}_t \cdot \vec{u}_r = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{x^2}{4})(1 + \frac{x^2}{16})}} (1 + \frac{x^2}{8})$.

Au point A , on trouve $\phi = 0,337 \text{ rad} = 19,33^\circ$.

On pourrait également commencer par déterminer l'angle ψ entre \vec{u}_r et \vec{u}_x , on aura alors $\phi = \theta - \psi$. On calcule ensuite $\cos(\psi) = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \sqrt{1 + \frac{x^2}{16}}$. Numériquement, en A on obtient $\psi = 0,675 \text{ rad} = 38,66^\circ$ et on retrouve bien la valeur de θ .

Finalement $\vec{v}_A = v_A \vec{u}_t = v_A \cos(\phi) \vec{u}_r + v_A \sin(\phi) \vec{u}_\theta$. On lit sur le tableau de la première question $v_A = 18,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; les composantes de \vec{v}_A dans \mathcal{C} sont donc (voir figure E.9.4)

$$v_r = v_A \cos(\phi) = 17,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_\theta = v_A \sin(\phi) = 6,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

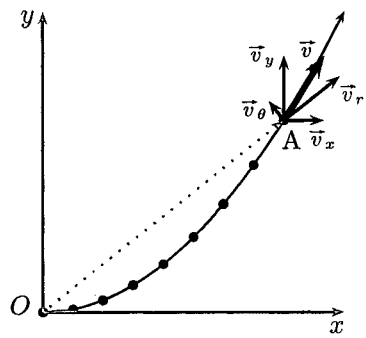


FIG. E.9.4. Trajectoire, vecteur vitesse et ses composantes dans les deux bases (cartésienne et cylindrique).

4. La composante selon \vec{u}_x de la vitesse étant constante, on en déduit que la composante de l'accélération sur cet axe est nulle, $a_x = 0$. En ce qui concerne a_y , on peut écrire qu'à $t = n\tau$, $a_y(M(n\tau)) = \frac{v_y((n+1)\tau) - v_y(n\tau)}{(n+1)\tau - n\tau}$, on aura donc $a = |a_y|$. Numériquement, on trouve une accélération a_y constante le long du parcours : pour tout n , $a(n\tau) = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On peut donc écrire l'accélération au point A et dans \mathcal{K} sous la forme $\vec{a}_A = 50\vec{u}_y$. On a vu que $\vec{u}_y = 0,85\vec{u}_t + 0,53\vec{u}_n$, on obtient donc l'expression de \vec{a}_A dans \mathcal{I} sous la forme $\vec{a}_A = 42,5\vec{u}_t + 26,5\vec{u}_n$. Dans la base cylindrique, on écrit l'accélération sous la forme

$\vec{a} = a(\sin(\psi)\vec{u}_r + \cos(\psi)\vec{u}_\theta)$, soit numériquement $\vec{a}_A = 31,2\vec{u}_r + 39,0\vec{u}_\theta$. Toutes ces composantes sont bien sûr exprimées en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

5 Mouvement cycloïdal

1. Choisissons l'origine de sorte que $\overline{OC} = v_0 t \vec{u}_x$. Il est clair que $\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM}$. En inspectant la figure E.9.5 on peut déduire que $\overline{CM} = r(\cos\theta \vec{u}_x - \sin\theta \vec{u}_z)$. Il est tout aussi clair que $\theta = \omega t$, soit $\theta = \omega t$ car nous avons bien choisi l'origine. En rassemblant ces informations on obtient $x = v_0 t + r \cos \omega t$ et $z = -r \sin \omega t$. La coordonnée y reste évidemment nulle au cours du mouvement.

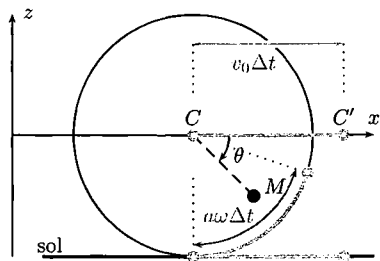


FIG. E.9.5. Mouvements d'un point d'une roue.

En intégrant et en considérant les conditions initiales, on en déduit $\dot{x} = v_0 - r\omega \sin \omega t$ et $\dot{z} = -r\omega \cos \omega t$.

2. Si $r = a$, M est sur la périphérie de la roue. Lorsque $\theta = \pi/2$, ce point vient en contact avec le sol avec une vitesse $\dot{x} = v_0 - a\omega$, $\dot{y} = 0$. Il y aura dérapage sauf si $\dot{x} = 0$, ce qui impose $v_0 = a\omega$ (le signe de ω dépend des conventions choisies pour les angles).

On peut aussi, de manière équivalente, remarquer que lorsque le point C passe en C' en parcourant la distance $v_0 \Delta t$, la périphérie de la roue roule de la même longueur $a\omega \Delta t$: c'est aussi une manifestation de l'absence de dérapage.

3. Le tracé sera effectué avec Scilab en choisissant $v_0 = 1$ et $a = 1$, donc $\omega = 1$ soit ici, avec les trois valeurs $r/a = 0,5$, puis $r/a = 1$ et enfin $r/a = 1,5$:

```
t=linspace(0,4*pi,1000);
hold on;
r=0.5; plot(t+r*cos(t),-r*sin(t),'k');
r=1; plot(t+r*cos(t),-r*sin(t),'-k');
r=1.5; plot(t+r*cos(t),-r*sin(t));
a=gca(); a.box='off';
a.axes_visible=[$'off','off'$];
a.isoview='on';
```

Les tracés obtenus sont des *cycloïdes* (voir figure E.9.6). Pour $r/a = 0,5$ la vitesse horizontale ne change jamais de signe : le point M , à l'intérieur de la roue, avance toujours dans le même sens que le centre de la roue. Pour $r/a = 1$, les points de rebroussement de la courbe correspondent aux points d'annulation de la vitesse lorsque M , situé sur la périphérie de la roue, vient en contact avec le sol (courbe en tirets sur la figure E.9.6). Enfin, dans le cas (fictif) où $r/a = 1,5$, le point M (extérieur au bord de la roue) revient parfois en arrière au cours de certaines phases de son mouvement (courbe en gris sur la figure E.9.6).

6 Mouvement d'une tige

La vitesse angulaire étant la même pour les deux roues, \overline{OA} et \overline{OB} font, à chaque instant, le même angle θ (voir figure E.9.7). Les vecteurs \overline{OA} et \overline{OB} restent parallèles au cours du mouvement. Le mouvement de la tige est un mouvement de translation circulaire. On peut

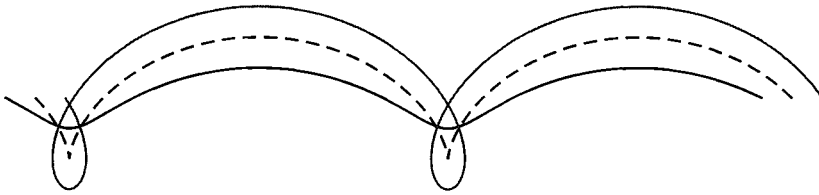


FIG. E.9.6. Différentes trajectoire d'un point de la roue.

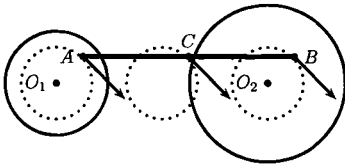


FIG. E.9.7. Mouvement d'une tige.

donc écrire $\vec{v}_A = a\omega\vec{u}_t$ où \vec{u}_t est le vecteur tangent à la trajectoire en A . $\forall M \in \mathcal{T}$, $\vec{v}_M = a\omega\vec{u}_t$, ainsi $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C$.

7 Mouvement de translation circulaire

1. Notons $\vec{v}_{i=1,2,3}$ le vecteur vitesse du point $A_{i=1,2,3}$. Ce vecteur est tangent au cercle de centre O et de rayon R . Dans le cas d'un mouvement de translation, le champ de vitesse est uniforme et on a donc $\vec{v}_{B_i} = \vec{v}_{C_i} = \vec{v}_i$. Dans le cas du mouvement de rotation, chaque point M du solide se déplace sur un cercle de centre O et de rayon OM . On remarque sur la figure E.9.8 que les orientations des vitesses dépendent de la position du point. D'autre part, pour un point $M \in \Sigma$, $\vec{v}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \Omega OM \vec{u}_\theta(M)$, d'où $\frac{\|\vec{v}(C)\|}{\|\vec{v}(A)\|} = \frac{OC}{OA}$.

2. Dans le cas du mouvement de translation, le solide se déplace parallèlement à lui-même. Il suffit de placer le point A conformément à l'angle indiqué, puis de positionner le solide. Tous les vecteurs vitesses seront équipotents à \vec{v}_A mais cette valeur commune ne sera pas nécessairement la même qu'à l'instant $t = 0$.

Dans le cas de la rotation, A , B et C se déduisent de A_0 , B_0 et C_0 par une rotation sur leur trajectoire circulaire respective de centre O du même angle que celui indiqué pour A .

3. La vitesse angulaire de A sur sa trajectoire est $\omega = \frac{v_A}{R}$. Il ne faut pas confondre cette vitesse angulaire avec le vecteur rotation instantanée qui est nul : il n'y a pas de rotation du solide dans le référentiel d'étude. On peut écrire ici $\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$, mais O n'est pas un point du solide. Dans le mouvement de translation circulaire, chaque point est sur une trajectoire circulaire dont les centres sont différents, mais elles sont toutes de rayon R .

8 Le système bielle-vilebrequin

1. En considérant la projection orthogonale de D sur l'axe (Ox) , on dessine deux triangles rectangles pour lesquels on peut écrire $r \sin(\theta) = l \sin(\phi)$; en dérivant cette expression par rapport au temps il vient $l \dot{\phi} \cos(\phi) = r \dot{\theta} \cos(\theta)$. Si $l \gg r$, alors $\phi \approx \sin \phi \ll 1$; ainsi au premier ordre $\phi \approx \frac{r}{l} \sin(\theta)$ et $\dot{\phi} \approx \frac{r}{l} \dot{\theta} \cos(\theta)$.

2. Le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = x \vec{u}_x$ avec $x = r \cos(\theta) + l \cos(\phi)$; la contrainte sur le mouvement de M impose $x \in [l-r, l+r]$. En dérivant le vecteur position on obtient $\vec{v}_M = \dot{x} \vec{u}_x$ avec $\dot{x} = -r \dot{\theta} \sin(\theta) - l \dot{\phi} \sin(\phi)$. En utilisant les expressions obtenues à la question précédente on obtient d'abord $\dot{x} = -r \dot{\theta} \sin(\theta) - r \dot{\theta} \tan(\phi) \cos(\theta)$ et finalement

$$\dot{x} = -r\omega \sin(\theta) \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\theta)}} \right).$$

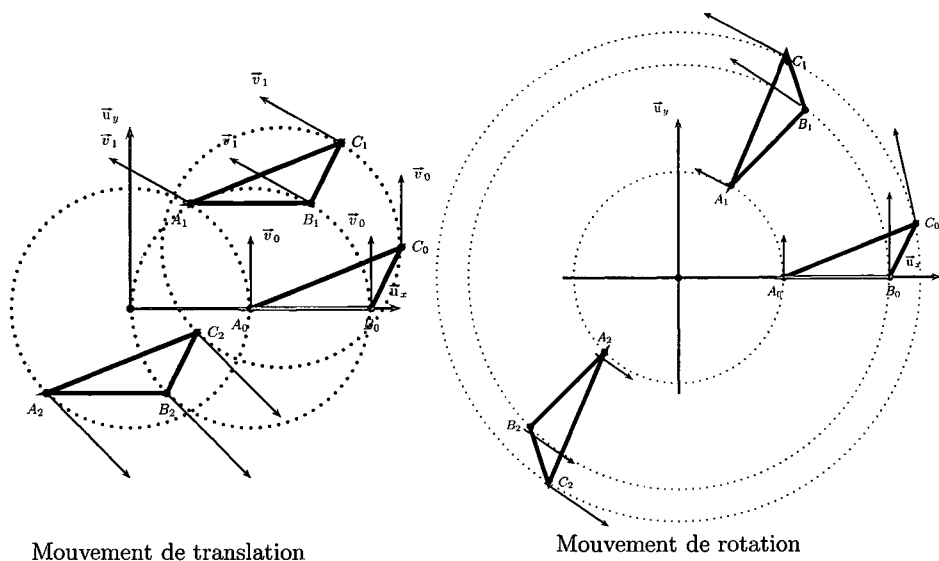


FIG. E.9.8. Mouvement de translation circulaire.

Au premier ordre en $\frac{r}{\ell}$ il ne reste plus que $\boxed{\dot{x} \approx -r\omega \sin(\theta) \left(1 + \frac{r}{\ell} \cos(\theta)\right)}$.

Chapitre 10

1 La Lune, notre satellite ?

Il est bien connu que c'est la Lune qui tourne autour de la Terre et que nous tournons autour du Soleil. La tradition attribuée à Copernic la paternité de cette dernière affirmation sur des bases astronomiques. En fait, c'est Aristarque de Samos qui au III^e siècle av. J.-C. montra, après avoir estimé correctement des valeurs minimales de distances et de tailles relatives, qu'il était plus logique de faire tourner la Terre autour du Soleil. Un millénaire et demi plus tard, Copernic parvint effectivement à la même conclusion, sans connaître les travaux de son illustre ancien qui avaient été perdus ! Les travaux d'Aristarque n'avaient pas reçu l'approbation de ses collègues contemporains, car à l'époque le système solaire et l'univers n'étaient pas considérés aussi grands, qu'ils le sont devenus dans les observations modernes. Un mouvement de la Terre entraînait donc un trop grand mouvement de parallaxe des étoiles qui n'était pas observé. Les premiers mouvements de parallaxes stellaires, inférieurs ou de l'ordre de la seconde d'arc, ont été observés dans la première moitié du XIX^e siècle par Bessel.

L'origine du mouvement des corps célestes est bien évidemment la force de gravitation. Les indications numériques fournies permettent de calculer la valeur du module des forces exercées par la Terre sur la Lune $F_{T \rightarrow L}$ et par le Soleil sur la Terre $F_{S \rightarrow T}$. On trouve

$$F_{T \rightarrow L} \simeq \frac{Gm_T m_L}{d_{TL}^2} = 2,03 \cdot 10^{20} \text{ N} \quad \text{et} \quad F_{S \rightarrow T} \simeq \frac{Gm_S m_T}{d_{TS}^2} = 3,41 \cdot 10^{22} \text{ N}.$$

La variation de distance entre le Soleil et la Lune due à son parcours autour de la Terre n'affecte que le troisième chiffre significatif de la distance Terre-Soleil. On peut donc prendre en moyenne $d_{SL} \simeq d_{TS}$, on en déduit l'ordre de grandeur

$$F_{S \rightarrow L} = \frac{Gm_S m_L}{d_{TS}^2} = 4,21 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

L'intensité de la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la Lune est donc du même ordre de grandeur que celle exercée par la Terre sur son satellite ! C'est l'une des raisons pour

lesquelles on pense que la Terre n'a pas capturé son satellite, mais que la Lune se serait formée dans des conditions plus catastrophiques...

2 Frottement fluide

Nous allons utiliser le repère $(\mathcal{R}) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, \vec{u}_x dirigeant la route rectiligne, \vec{u}_z indiquant la verticale ascendante, \vec{u}_y complétant la base afin qu'elle soit directe. Le point O correspond à la position de la voiture à $t = 0$.

1. Étude de la vitesse

► Inventaire des forces

Une fois le moteur coupé, le véhicule est soumis :

- ◊ à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- ◊ à la force de frottement \vec{F} qui s'oppose au mouvement, $\vec{F} = -h\vec{v} = -h v \vec{u}_x = -h \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$;
- ◊ à la réaction de la route sur le véhicule. Une réaction existe au niveau de chaque contact et on considère ici la résultante \vec{R} de toutes ces actions. Cette force est *a priori* dans le plan perpendiculaire à l'axe de la route, ainsi $\vec{R} = R_y \vec{u}_y + R_z \vec{u}_z$.

► Application du principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel de la route supposé galiléen

La masse du véhicule est supposée constante. On a alors

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg \vec{u}_z - h \vec{v} + R_y \vec{u}_y + R_z \vec{u}_z.$$

On projette cette équation vectorielle sur les trois axes du repère et l'on obtient $m \frac{dv}{dt} = -hv$ sur $(0, \vec{u}_x)$; $R_y = 0$ sur $(0, \vec{u}_y)$ et $0 = -mg + R_z$ sur $(0, \vec{u}_z)$.

► Résolution des équations

Deux de ces équations sont algébriques, elles fournissent $R_y = 0$ et $R_z = mg$. La réaction \vec{R} de la route est donc opposée au poids à chaque instant. À l'instant initial, la vitesse de la voiture n'a pas de composante sur \vec{u}_y et \vec{u}_z , la résultante des forces appliquées à la voiture n'a pas non plus de composante selon ces vecteurs. Seule la composante v de la vitesse selon \vec{u}_x peut donc varier. Son expression est obtenue en résolvant l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} = -\frac{h}{m}v = -\frac{v}{\tau}$ avec $\tau = \frac{m}{h}$. La solution s'écrit $v(t) = Ae^{-t/\tau}$, où A est une constante d'intégration.

► Solution du problème posé : détermination de la constante d'intégration

À $t = 0$, la voiture est en $x = 0$ et sa vitesse est $v(0) = v_0$, en se plaçant en $t = 0$ pour la solution de l'équation différentielle, on trouve $v_0 = A$ et donc finalement $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

2. En coordonnées cartésiennes, la composante selon \vec{u}_x de la position est la primitive de la composante selon \vec{u}_x de la vitesse. On a donc $x(t) = \int v_0 e^{-t/\tau} dt = -v_0 \tau e^{-t/\tau} + B$ où B est une constante d'intégration. Nous savons que $x(t = 0) = 0$, ainsi $0 = -v_0 \tau + B$ et finalement

$$x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

Cette relation montre que τ représente un temps caractéristique de l'arrêt du véhicule.

3 Glissement sur un plan incliné

Avant toute chose, il est toujours bon de faire un schéma, indiquant les vecteurs unitaires que l'on va utiliser ainsi que les différentes forces dans les deux cas (voir figure E.10.1).

1. Nous allons établir l'équation horaire ainsi que l'expression de la vitesse du mobile, et déterminer les conditions pour lesquelles $x(A) = a$ et $\vec{v}(A) = \vec{0}$. Nous procéderons en 5 étapes successives :

1. Bilan des forces : deux forces s'exercent sur le mobile, le poids

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg \sin(\alpha) \vec{u}_x - mg \cos(\alpha) \vec{u}_z$$

ainsi que la réaction du support \vec{R} , que l'on peut écrire ici $\vec{R} = N \vec{u}_z$ car on a supposé qu'il n'y a pas de frottements.

2. Application du PFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}$, ce qui donne, en projection sur l'axe (Oz) , $0 = -mg \cos(\alpha) + N$ et sur l'axe (Ox) , $m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sin(\alpha)$, qui est l'équation du mouvement.

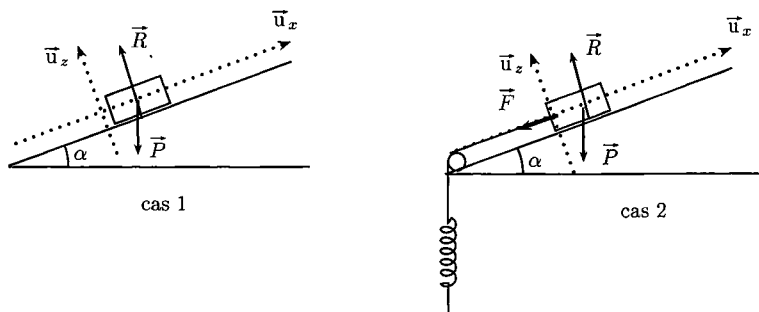


FIG. E.10.1. Visualisation des forces et des vecteurs unitaires.

3. Résolution des équations : une première intégration de l'équation du mouvement donne la vitesse, $m \frac{dx}{dt} = mv = -mg \sin(\alpha)t + \lambda$, où λ est une constante d'intégration. Une deuxième intégration donne la position x sur le plan incliné, soit $x(t) = -\frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2 + \frac{\lambda}{m}t + \mu$, où μ est une deuxième constante d'intégration.

4. Détermination des constantes : on sait d'une part que $x(0) = 0$ qui permet de fixer $\mu = 0$ et, d'autre part, que $v(0) = v_0$ qui fixe $mv_0 = \lambda$. On trouve donc les deux expressions suivantes $v(t) = -g \sin(\alpha)t + v_0$ et $x(t) = -\frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2 + v_0 t$.

5. Résolution du problème posé : soit t_1 l'instant où le mobile atteint le point A ,

$$v(t_1) = 0 = -g \sin(\alpha)t_1 + v_0 \text{ d'où } t_1 = \frac{v_0}{g \sin(\alpha)};$$

on sait de plus que $x(t_1) = a = -\frac{1}{2}g \sin(\alpha) \left(\frac{v_0}{g \sin(\alpha)} \right)^2 + \frac{v_0^2}{g \sin(\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g \sin(\alpha)}$, on trouve donc

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2ga \sin \alpha}}.$$

2. On procède de la même manière en prenant en compte la force due au ressort :

1. Bilan des forces : aux forces précédentes on rajoute celle exercée par le ressort, qui s'écrit $\vec{F} = -kx \vec{u}_x$ car d'une part on suppose que la poulie et le fil transmettent les efforts (verticaux au niveau du ressort), et d'autre part l'allongement du ressort est égal à x compte tenu du fait que $\ell = \ell_0$ à $t = 0$.

2. Application du PFD : $m \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$, ce qui donne en projection sur l'axe (Oz) $0 = -mg \cos(\alpha) + N$ et sur l'axe (Ox) $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = -mg \sin(\alpha)$, c'est la nouvelle équation du mouvement.

3. Résolution des équations : l'équation homogène $m \frac{d^2x_h}{dt^2} + kx_h = 0$ admet pour solution générale la fonction $x_h(t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où l'on a posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, X et φ sont deux constantes d'intégration. La solution particulière est constante $x_p(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} \sin(\alpha)$. La solution de l'équation du mouvement s'écrit donc $x(t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{g}{\omega_0^2} \sin(\alpha)$; en dérivant, on obtient la vitesse $v(t) = \dot{x} = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

4. En utilisant les conditions initiales, on détermine les constantes d'intégration

$$x(t=0) = 0 = X \cos(\varphi) - \frac{g}{\omega_0^2} \sin(\alpha) \text{ et } v(t=0) = v_1 = -X\omega_0 \sin(\varphi).$$

On écrit alors $X^2 \sin^2(\varphi) = \frac{v_1^2}{\omega_0^2}$ et $X^2 \cos^2(\varphi) = \frac{g^2}{\omega_0^2} \sin^2(\alpha)$. Finalement, en effectuant la

somme de ces deux carrés, on obtient $X = \frac{v_1}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{g^2 \sin^2(\alpha)}{\omega_0^2 v_1^2}}$ et $\tan(\varphi) = \frac{v_1 \omega_0}{g \sin(\alpha)}$ avec

$\varphi \in [-\pi, -\pi/2]$ car $\sin(\varphi)$ et $\cos(\varphi)$ sont tous les deux négatifs. Les lecteurs avertis pourront retrouver ces résultats en utilisant la représentation complexe...

5. La résolution du problème posé est en vue : soit t_2 l'instant où la vitesse du chariot s'annule, alors $\sin(\omega_0 t_2 + \varphi) = 0$. À cet instant, la position est

$$x(t_2) = X \cos(\omega_0 t_2 + \varphi) - \frac{g}{\omega_0^2} \sin(\alpha) = X - \frac{g}{\omega_0^2} \sin(\alpha).$$

On souhaite que $x(t_2) = a$, par conséquent $X^2 = \left(a + \frac{g}{\omega_0^2} \sin(\alpha)\right)^2$ après simplification, on trouve que $v_1 = \sqrt{2ag \sin(\alpha) + a^2 \omega_0^2}$, soit finalement $v_1 = \sqrt{v_0^2 + a^2 \omega_0^2}$.

4 Oscillateurs à ressorts

Nous supposons galiléen un référentiel (\mathcal{R}) lié à l'axe $(Oz) = (O, \vec{u}_z)$.

1. a/ Les contacts en O et A sont parfaits, les réactions des supports en ces points n'ont donc pas de projection le long de (Oz) .

Les seules forces ayant une projection verticale sont donc le poids $-mg\vec{u}_z$ et la force de tension du ressort, $\vec{F} = -k(z - \ell_1)\vec{u}_z$, donc $m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_1)$.

b/ À l'équilibre, $\ddot{z} = 0$ donc $z_0 = \ell_1 - \frac{mg}{k}$.

c/ La solution générale de l'équation différentielle est $z(t) = z_0 + \alpha \cos(\omega t + \varphi)$, où α et φ sont des constantes d'intégration, et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

d/ La force exercée par le ressort est maintenant $\vec{F} = k(H - z - \ell_1)\vec{u}_z$, la relation d'équilibre s'écrit donc $H - z'_0 = \ell_1 + \frac{mg}{k}$: le ressort s'allonge au lieu de se raccourcir à l'équilibre. La solution générale de l'équation différentielle du mouvement est ici toujours de la forme $z = z'_0 + \alpha' \cos(\omega t + \varphi')$, mais ω est inchangé, ainsi que la période T .

2. a/ Cette fois-ci, la force exercée par le ressort (1) est $\vec{F}_1 = -k_1(z - \ell_1)\vec{u}_z$ et la force exercée par le ressort (2) est $\vec{F}_2 = k_2(H - z - \ell_2)\vec{u}_z$, l'équation différentielle du mouvement s'écrit donc $m\ddot{z} + (k_1 + k_2)z = k_1\ell_1 + k_2(H - \ell_2) - mg$.

b/ On retrouve les caractéristiques du ressort fixé en O en identifiant l'équation du mouvement, ce qui impose $k = k_1 + k_2$ et $\ell = \frac{k_1\ell_1 + k_2(H - \ell_2)}{k_1 + k_2}$.

Notons qu'on évite facilement toute erreur de signe dans l'établissement des forces exercées par les ressorts en vérifiant qu'il s'agit toujours de forces de rappel. En particulier, les termes dérivant des ressorts dans l'équation du mouvement doivent toujours fournir des termes en $-kz$ dans l'expression de $m\ddot{z}$, jamais de termes de $+kz$. On remarquera en effet que la solution de $m\ddot{x} = +kx$ n'est pas sinusoïdale, mais exponentielle, ce qui correspond à une croissance indéfinie de l'amplitude du mouvement, *physiquement inacceptable* bien sûr.

On déduit de cette équation $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$.

c/ La même méthode montre que $k' = k_1 + k_2$ et $\ell' = \frac{k_2\ell_2 + k_1(H - \ell_1)}{k_1 + k_2}$. Les rôles des deux ressorts sont échangés, mais la raideur équivalente et donc la période des oscillations restent inchangées, de même d'ailleurs que la position d'équilibre; il ne s'agit que de changer de modélisation pour l'étude du même phénomène physique.

3. a/ Cette fois-ci, on écrit $m\ddot{z} = k_1(H - z - \ell_1) + k_2(H - z - \ell_2) - mg$.

b/ Cette équation s'écrit $m\ddot{z} = k''(H - z - \ell'') - mg$ avec $k'' = k_1 + k_2$ et $\ell'' = \frac{k_1\ell_1 + k_2\ell_2}{k_1 + k_2}$

et la nouvelle longueur à vide ℓ'' correspond à deux ressorts tendus en sens inverse (par exemple, $\ell_1 < \ell'' < \ell_2$), mais dont les tensions se compensent. On remarque aussi que la période des oscillations est inchangée par rapport aux cas précédents.

5 Un peu de balistique

1. En l'absence de frottement, la seule force exercée sur le mobile est son poids, ainsi $m\vec{a} = -m\vec{g}$ et donc $\vec{a} = -g\vec{u}_z$; on pourra donc se référer à l'exercice corrigé 9.7 page 260 pour toutes les solutions.

a/ La portée du tir est $x_P = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$; elle est maximale lorsque $\alpha = \pi/4$.

b/ On a déterminé l'équation de la parabole de sûreté,
$$z = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$
.

2. a/ Une analyse dimensionnelle simple montre que τ est une **durée** qui s'exprime en seconde. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit ici $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + m\vec{g}$. En coordonnées cartésiennes, les projections sur les trois axes donnent $m\ddot{x} = -\frac{m}{\tau}\dot{x}$, $m\dot{y} = -\frac{m}{\tau}\dot{y}$ et $m\ddot{z} = -mg - \frac{m}{\tau}\dot{z}$. On peut écrire la troisième équation $\dot{v}_z + \frac{1}{\tau}v_z = -g$, sa solution générale est $v_z = -g\tau + \lambda \exp(-t/\tau)$, soit
$$v_z = -g\tau + (v_0 \cos \alpha + g\tau) \exp(-t/\tau)$$
, compte tenu des conditions initiales. Les deux autres équations ont des solutions analogues en faisant $g = 0$; on a donc, compte tenu des conditions initiales,
$$v_x = v_0 \sin \alpha \exp(-t/\tau) \quad \text{et} \quad v_y = 0$$
. Ces trois équations fournissent $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$ et $\dot{z} = v_z$ et s'intègrent directement selon
$$x = v_0\tau \sin \alpha [1 - \exp(-t/\tau)]$$
, $y = 0$ et $z = -g\tau t + \tau(v_0 \cos \alpha + g\tau)[1 - \exp(-t/\tau)]$ au vu des conditions initiales.

b/ La vitesse limite est $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{v}(t) = -g\tau \vec{u}_z$; la portée limite correspondante (atteinte au bout d'une durée infinie, en pratique lorsque $t \gg \tau$) est $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v_0\tau \sin \alpha$.

3. a/ Le mouvement se fait ici selon la verticale descendante; l'équation du mouvement s'obtient en projetant le principe fondamental sur la verticale,
$$m\ddot{z} = -g + \lambda z^2$$
.

b/ On peut encore écrire l'équation différentielle pour $v_z = \dot{z}$ sous la forme $\frac{dv_z}{dt} = \frac{\lambda}{m}(v_z^2 - v_{\text{lim}}^2)$ où la vitesse limite de la chute, atteinte lorsque v_z ne varie plus, donc lorsque $\frac{dv_z}{dt} \rightarrow 0$, correspond à $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$; la limite est ici $\vec{v} = -v_{\text{lim}} \vec{u}_z$. En séparant les variables v_z et t , il vient $\frac{dv_z}{v_z^2 - v_{\text{lim}}^2} = \frac{\lambda}{m} dt$. On décompose en éléments simples le premier terme sous la forme $\frac{1}{v_z^2 - v_{\text{lim}}^2} = \frac{1}{2v_{\text{lim}}} \left[\frac{1}{v_z - v_{\text{lim}}} - \frac{1}{v_z + v_{\text{lim}}} \right]$ et comme $|v_z - v_{\text{lim}}| = v_{\text{lim}} - v_z$, l'équation s'intègre selon $\frac{1}{2v_{\text{lim}}} \ln \left(\frac{v_{\text{lim}} - v_z}{v_{\text{lim}} + v_z} \right) = \frac{\lambda}{m} t$; lorsque $v_z = -\frac{99}{100} v_{\text{lim}}$, on obtient
$$t = \frac{m}{2\sqrt{\lambda g}} \ln 199$$
.

6 Mouvement d'un pendule

1. On utilise la base locale cylindro-polaire associée au mouvement de M ; la force de tension exercée par le fil est alors $\vec{F} = -F \vec{u}_r$. Le principe fondamental de la dynamique, projeté sur les vecteurs de la base locale cylindro-polaire, donne les deux équations $m(-\ell_0 \dot{\theta}^2) = -F + mg \cos \theta$ (qui permet d'obtenir F) et, puisque $r = \ell_0$ est une constante,

$$m\ell_0 \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad \text{qui est l'équation du mouvement que l'on écrit} \quad \ddot{\theta} = -\Omega_0^2 \sin \theta$$

2. Attendu que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, en écrivant $\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\theta}$ on en déduit que $\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$; en utilisant le résultat précédent, il vient $\omega \frac{d\omega}{d\theta} = -\Omega_0^2 \sin \theta$, qu'on peut aussi écrire $\frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{d\theta} = \Omega_0^2 \frac{d \cos \theta}{d\theta}$. On en déduit, compte tenu des conditions initiales,
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega_0^2 (\cos \theta - 1)$$
.

3. Pour de petites oscillations nous avons $\ddot{\theta} \simeq -\Omega_0^2 \theta$, qui s'intègre, au vu des conditions initiales, selon $\theta(t) = \frac{\omega_0}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t$ et la période des petites oscillations s'écrit
$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$
.

Si l'amplitude des oscillations n'est plus négligeable, $|\sin \theta| < |\theta|$ et l'accélération de rappel $\ddot{\theta}$ est, en valeur absolue, légèrement inférieure à celle qu'on a utilisée dans la résolution approchée ci-dessus; le mouvement est donc plus lent, surtout pour les grandes valeurs de θ , et donc
$$T > T_0$$
.

4. On a vu à la première question que $F = mg \cos \theta + m\ell_0 \omega^2$; en utilisant le résultat de la deuxième question, on a donc
$$F = m\ell_0 \omega_0^2 + mg(3 \cos \theta - 2)$$
; le fil reste tendu si $F > 0$, donc seulement si $\cos \theta > \frac{2 - \omega_0^2/\Omega_0^2}{3}$. Les valeurs limites de θ sont données par $\dot{\theta} = \omega = 0$, donc

encore par $|\theta| \leq \theta_{\max}$ avec $\cos \theta_{\max} = 1 - \frac{\omega_0^2}{2\Omega_0^2}$; on aura ainsi toujours $\cos \theta \leq 1 - \frac{\omega_0^2}{2\Omega_0^2}$. Le fil restera donc tendu pendant toute la durée du mouvement seulement si $1 - \frac{\omega_0^2}{2\Omega_0^2} < \frac{2 - \omega_0^2/\Omega_0^2}{3}$, soit si $\boxed{\omega_0 > \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}}$: il faut lancer le pendule avec une vitesse angulaire initiale suffisante.

5. a/ La trajectoire a pour équations $r = \text{cte}$, $z = \sqrt{\ell_0^2 - r^2} = \text{cte}$, donc l'accélération du mobile est donnée par $\vec{a} = -r\Omega^2 \vec{u}_r + r\dot{\Omega} \vec{u}_\theta$. Les forces appliquées sont le poids $-mg \vec{u}_z$ et la tension du fil qui est un vecteur du plan (\vec{u}_r, \vec{u}_z) . Ces forces n'ont pas de composante sur \vec{u}_θ , donc $\boxed{\Omega = \text{cte}}$.

b/ On a alors $-mr\Omega^2 = F_r$ et $0 = -mg + F_z$; d'autre part, \vec{F} est aligné avec le fil, donc $\frac{F_r}{F_z} = -\frac{r}{z}$, d'où $g = z\Omega^2$ qui n'a de sens que si $z < \ell_0$, donc $\boxed{\Omega > \Omega_{\min} = \Omega_0}$.

7 Perle sur un anneau

1. Nous allons étudier le mouvement du mobile dans le repère cylindro-polaire $(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

1. Inventaire des forces : le mobile est soumis à son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ et à la réaction du support $\vec{R} = -T \vec{u}_\theta + N_r \vec{u}_r + N_z \vec{u}_z$. La composante normale \vec{N} de la réaction du support peut avoir deux composantes, l'une sur \vec{u}_z et l'autre sur \vec{u}_r . On suppose qu'on lance le mobile dans le sens de \vec{u}_θ , la force de frottement \vec{T} qui s'oppose au mouvement doit donc vérifier $\vec{T} \cdot \vec{u}_\theta < 0$. Par conséquent, on a ici $T > 0$ tel que $T = f\sqrt{N_r^2 + N_z^2}$.

2. Principe fondamental de la dynamique : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg \vec{u}_z + N_z \vec{u}_z + N_r \vec{u}_r - T \vec{u}_\theta$. Or $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ d'où $\frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{u}_r$; en projection sur les trois vecteurs de base on obtient trois équations, $0 = -mg + N_z$ qui fournit l'expression de N_z , $-m \frac{v^2}{R} = N_r$ qui fournit l'expression de N_r et $m \frac{dv}{dt} = -T$ qui est l'équation du mouvement.

3. Équation du mouvement : on utilise l'expression de T donnée par la loi de Coulomb; en remplaçant N_r et N_z par leurs expressions, il vient $\boxed{\frac{dv}{dt} = -fg\sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}}}$.

2. Le changement de variable proposé permet d'écrire $\sqrt{gR} \frac{du}{dt} = -fg\sqrt{1 + u^4}$ et donc $\frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = -f\sqrt{\frac{g}{R}} dt$. La vitesse passe de v_0 à 0 pendant la durée $\tau = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$

avec $u_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$. On a donc $\boxed{\beta = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{R}{g}}}$ et $\boxed{\alpha = u_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}}$.

3. Sur l'intervalle d'intégration, $u < u_0 \ll 1$, on peut donc considérer que l'intégrale vaut u_0 et donc $\tau = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$, soit finalement $\boxed{\tau = \frac{v_0}{fg}}$.

Chapitre 11

1 Travail d'une force

► Travail de la force \vec{F}_1 - Soit $\vec{t}(M)$ le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire. Par définition de la vitesse nous avons ici $\vec{v}_M = v_0 \vec{t}(M)$. En notant $d\ell$ un élément de longueur de la trajectoire suivie, on a

$$W_{\vec{F}_1, \gamma} = \int_{\gamma_i} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_i} (-kv_0 \vec{t}) \cdot d\ell \vec{t} = -kv_0 \int_{\gamma_i} d\ell = -kv_0 \ell_i$$

où ℓ_i est la longueur de la trajectoire γ_i . Il est absolument clair que $\gamma_1 = a + b$ et que $\gamma_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, ainsi $\boxed{W_{\vec{F}_1, \gamma_1} = W_{\vec{F}_1, \gamma_2} = -kv_0(a + b)}$ et $\boxed{W_{\vec{F}_1, \gamma_3} = -kv_0\sqrt{a^2 + b^2}}$. La force \vec{F}_1 est une force de frottement fluide, le travail de cette force dépend du chemin suivi, elle est non conservative.

► Travail de la force \vec{F}_2 - En écrivant que $d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$ il vient

$$W_{\vec{F}_2, \gamma_i} = \int_{\gamma_i} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \alpha \int_{\gamma_i} (ydx + xdy) = \alpha \int_{\gamma_i} d(xy).$$

Les trois chemins γ_i partent de O et arrivent en K , l'utilisation du résultat ci-dessus donne directement $\forall i = 1, 2, 3 \quad W_{\vec{F}_2, \gamma_i} = [xy]_O^K = ab$. Le travail de la force \vec{F}_2 est indépendant

du chemin suivi. On peut aussi écrire que $\delta W_{\vec{F}_2} = -d\mathcal{E}_{p2} = \alpha d(xy)$: la force \vec{F}_2 dérive du potentiel $\mathcal{E}_{p2} = -\alpha xy$ à une constante additive près. Elle est conservative.

► Travail de la force \vec{F}_3 - L'expression de $d\vec{r}$ utilisée pour $W_{\vec{F}_2}$ donne à présent

$$W_{\vec{F}_3, \gamma} = \alpha \int_{\gamma} (ydx - xdy)$$

que l'on décompose le long des 3 chemins :

◇ sur le chemin γ_1 , de O à A , $y = 0$ et $dy = 0$, ainsi $W_{\vec{F}_3, O \rightarrow A} = \alpha \int_0^a (0 \cdot dx - x \cdot 0) = 0$. Puis

de A à K , $x = a$ et $dx = 0$, soit $W_{\vec{F}_3, A \rightarrow K} = \alpha \int_0^b (y \cdot 0 - a \cdot dy)$ et donc $W_{\vec{F}_3, \gamma_1} = -\alpha ab$;

◇ sur le chemin γ_2 , de O à B , $x = 0$ et $dx = 0$, ainsi $W_{\vec{F}_3, O \rightarrow B} = \alpha \int_0^b (y \cdot 0 - 0 \cdot dy) = 0$. Puis

de B à K , $y = b$ et $dy = 0$, ainsi $W_{\vec{F}_3, B \rightarrow K} = \alpha \int_0^b (b \cdot dx - x \cdot 0)$ et donc $W_{\vec{F}_3, \gamma_2} = \alpha ab$;

◇ sur le chemin direct γ_3 , l'équation de la droite (OK) est $y = \frac{b}{a}x$, ainsi $dy = \frac{b}{a}dx$. On peut donc écrire $W_{\vec{F}_3, \gamma_3} = \alpha \int_{\gamma_3} (ydx - xdy) = \alpha \int_{\gamma_3} (\frac{b}{a}x dx - x \frac{b}{a} dx)$, soit $W_{\vec{F}_3, \gamma_3} = 0$.

Le travail produit par \vec{F}_3 dépend donc du chemin suivi, elle n'est donc pas conservative.

2 Le bungey : saut à l'élastique

Soit \vec{OM} le vecteur position du point M de masse m , $\vec{OM} = z\vec{u}_z$. On suppose ici que l'axe (Oz) est dirigé vers le bas.

1. Le mouvement s'effectue en deux phases, tout d'abord une chute libre de 30 m, puis l'action de l'élastique sur une distance de 30 m également pour atteindre le point le plus bas. Toutes les forces sont conservatives, elles dérivent donc d'un potentiel.

► Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ d'où $\delta W = -d\mathcal{E}_{p,g} = mg\vec{u}_z \cdot d\vec{r}$, d'où $\mathcal{E}_{p,g} = -mgz$. La constante d'intégration a été choisie nulle, ce qui signifie que l'on a fixé l'origine de l'énergie potentielle en $z = 0$.

► La force élastique $\vec{F}_k = -k(z - \ell_0)\vec{u}_z$, z étant bien la longueur de l'élastique et ℓ_0 sa longueur à vide. On en déduit $\delta W = -d\mathcal{E}_{p,k} = k(z - \ell_0)dz$ et donc $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$, qui est bien nulle en $z = 0$ alors que l'élastique possède sa longueur à vide.

Initialement, le mobile est à l'origine des coordonnées $z(t = 0) = 0$. D'autre part, le mobile est libéré sans vitesse initiale, c'est-à-dire que $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$. L'élastique n'est pas encore en action. L'énergie mécanique du système s'écrit $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_{p,P} + \mathcal{E}_{p,k}$. En $t = 0$, on a donc $\mathcal{E}_m = 0$, cette valeur est conservée durant tout le mouvement. À la fin de la descente, au point le plus bas, on a $z = 2\ell_0$ et la vitesse du mobile est nulle d'où $-2mg\ell_0 + \frac{1}{2}k(2\ell_0 - \ell_0)^2 = 0$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}k\ell_0^2 = 2mg\ell_0$ soit $k = 4\frac{mg}{\ell_0}$. Numériquement, $k = 131 \text{ N} \cdot \text{m}$.

2. La hauteur de chute est maintenant de $\ell = 2\ell_0 + \ell_1$. L'utilisation de la conservation de l'énergie donne maintenant $-mg(2\ell_0 + \ell_1) + \frac{1}{2}k(2\ell_0 + \ell_1 - \ell_0)^2 = 0$, d'où $m = \frac{k(\ell_0 + \ell_1)^2}{2g(2\ell_0 + \ell_1)}$.

Numériquement, on trouve $m = 152 \text{ kg}$.

3 Potentiel non quadratique

1. La fonction $\mathcal{E}_p(x) = x^2(a - bx)$ est une cubique qui s'annule en $x = 0$ et $x = \frac{a}{b}$. Sa dérivée s'annule en $x = 0$ et en $x = \frac{2a}{3b}$, cette dérivée est positive entre ses racines et négative à l'extérieur de ses racines. La courbe présente un minimum local en $x = 0$ tel que $\mathcal{E}_p(0) = 0$ et un maximum local en $x = \frac{2a}{3b}$ tel que $\mathcal{E}_p(\frac{2a}{3b}) = \frac{8a^3}{27b^2}$, elle fait l'objet de la figure E.11.1.

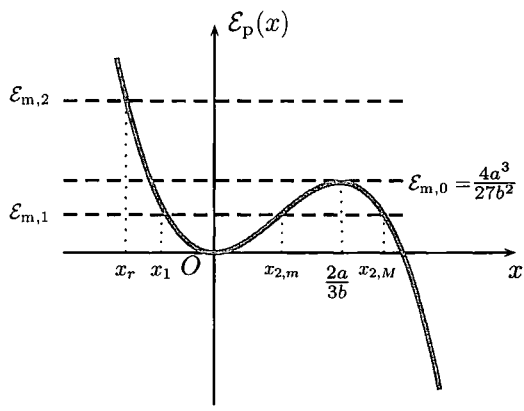


FIG. E.11.1. Énergie potentielle non quadratique.

2. La seule force subie par M dérive d'une énergie potentielle, elle est donc conservative. L'énergie mécanique est conservée, $\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_m = \text{cte}$. Cette constante s'obtient en calculant \mathcal{E}_m à $t = 0$ où $x = 0$ et donc $\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(0) = \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2$, soit $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2$. On en déduit que l'abscisse x de la particule est telle que $\frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$, soit $\mathcal{E}_p(x) < \frac{1}{2}mv_0^2$. Nous devons donc envisager plusieurs cas.

► La vitesse initiale est telle que $\frac{1}{2}mv_0^2 > \frac{4a^3}{27b^2} \Leftrightarrow |v_0| > \sqrt{\frac{8a^3}{27mb^2}}$. Il s'agit de la situation correspondant à $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2}$ sur la figure E.11.1. L'équation $bx^3 - ax^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$ possède une seule solution réelle $x_r < 0$.

◊ Si $v_0 > 0$, le mobile est lancé dans le sens des x positifs. Dans une première phase, l'énergie cinétique du mobile diminue, car son énergie potentielle augmente jusqu'à ce que \mathcal{E}_p atteigne son maximum local $\frac{4a^3}{27b^2}$. En ce point, la vitesse du mobile est minimale et son vecteur vitesse est $\vec{v}_{\min} = \sqrt{v_0^2 - \frac{8a^3}{27mb^2}} \vec{u}_x$. Une fois ce point passé, l'énergie potentielle diminue et le point va s'éloigner de l'origine des coordonnées en augmentant sa vitesse. Le mobile ne reste pas confiné dans une région de l'espace.

◊ Si $v_0 < 0$, le mobile commence par s'éloigner de l'origine des coordonnées vers les x négatifs. Son énergie cinétique diminue car son énergie potentielle augmente. La vitesse de M diminue jusqu'à s'annuler au point d'abscisse x_r . Cette position ne peut pas être dépassée, car alors l'inégalité $\frac{1}{2}mv_0^2 \geq \mathcal{E}_p(x)$ ne serait plus vérifiée. Elle n'est pas non plus une position d'équilibre, car l'énergie potentielle n'y est pas minimale. Le mobile rebrousse donc chemin en transformant son énergie potentielle en énergie cinétique et repasse par le point origine avec une vitesse de module $|v_0|$ orienté vers les x positifs : on se retrouve alors dans le cas précédent.

► La vitesse initiale est telle que $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{4a^3}{27b^2} \Leftrightarrow |v_0| < \sqrt{\frac{8a^3}{27mb^2}}$. Il s'agit de la situation correspondant à $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,1}$ sur la figure E.11.1. L'équation $bx^3 - ax^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$ possède dans ce cas trois solutions $x_1 < 0$, et $x_{2,M} > x_{2,m} > 0$.

◊ Supposons que $v_0 > 0$, le mobile est lancé dans le sens des x positifs. Comme précédemment, l'énergie cinétique diminue, mais cette fois, elle va s'annuler pour $x = x_{2,m}$. Le mobile rebrousse chemin, passe par l'origine $x = 0$ avec une vitesse $\vec{v} = -v_0 \vec{u}_x$ pour atteindre le point d'abscisse $x = x_1$. Ayant négligé tout frottement, le mobile va donc effectuer un mouvement oscillatoire sur l'intervalle $[x_1, x_{2,m}]$. Le mouvement est donc périodique.

◊ Le raisonnement est le même si le mobile est lancé initialement vers les x négatifs.

3. Durant la période T du mouvement oscillatoire, le mobile effectue un aller-retour $x_1 \rightarrow x_{2,m} \rightarrow x_1$. En écrivant que $\frac{dx}{dt} = v$ soit $dt = \frac{dx}{v}$, on tire la vitesse v de l'expression de la conservation de l'énergie et l'on a

$$T = 2 \times \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mathcal{E}_p}{m}}}$$

Dans le cas des petits mouvements $x \ll \frac{a}{b}$, on écrit que $bx^3 \ll ax^2$ et l'on peut donc considérer l'énergie potentielle quadratique (ou harmonique) $\mathcal{E}_p = ax^2$. La conservation de l'énergie devient $\frac{1}{2}mv^2 + ax^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ax^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$ et en dérivant par rapport au temps on retrouve l'équation du mouvement $m\ddot{x} + ax = 0$, on reconnaît le cas d'un oscillateur harmonique. La période est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}$ et la solution temporelle est $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Les oscillations sont isochrones, c'est-à-dire que la période est indépendante des conditions initiales, ce qui ne sera plus le cas lorsque l'approximation $x \ll \frac{a}{b}$ n'est plus valable.

4. Dans le cas très particulier où $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{4}{27} \frac{a^3}{b^2}$, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors $\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_{m,0}$. Une étude montrerait que l'expression de la période T obtenue à la question précédente diverge! Si le mobile part du côté des x négatifs ($v_0 < 0$), il atteint le point d'abscisse x_1 au bout d'un temps fini, rebrousse chemin, repasse par l'origine avec une vitesse inversée et se dirige vers le point d'abscisse $x = \frac{2a}{3b}$ qu'il n'atteindra qu'au bout d'un temps infini. S'il part avec une vitesse orientée selon \vec{u}_x , il suit uniquement la dernière portion du trajet. La raison de cette dissymétrie tient dans le fait que le point où il rebrousse chemin n'est pas un équilibre, ce qui n'est pas le cas de son alter ego. Ce point d'équilibre avec cette condition initiale si particulière est une solution de l'équation du mouvement à lui tout seul, donc aucune autre solution avec ces conditions initiales ne peut passer par ce point : il ne peut donc être atteint qu'à la limite. Il s'agit là d'une application du théorème d'unicité de la solution d'une équation différentielle, étudié en mathématique. Bien sûr, ce cas est irréalisable en pratique, il faudrait en effet donner à M une vitesse initiale avec une précision infinie.

4 Traction ferroviaire

On utilisera une base cartésienne adaptée à la pente, l'axe (Ox) étant dirigé selon la direction du mouvement. Les forces exercées sur le train sont le poids $-m\vec{g} = -mg \sin \alpha \vec{u}_x - mg \cos \alpha \vec{u}_y$, la force de réaction normale du support $\vec{N} = N \vec{u}_y$, la force tangentielle $\vec{T} = -T \vec{u}_x$ et la force de traction dont on connaît seulement la puissance \mathcal{P} .

1. Seules les forces colinéaires à l'axe (Ox) ont une puissance non nulle puisque la vitesse du train est $\vec{v} = v \vec{u}_x$; il vient donc $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt} = \mathcal{P} - (T + mg \sin \alpha) v$. Au démarrage $v = 0$, donc $\left(\frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt}\right)_{t=0} = \mathcal{P} > 0$, donc le train commence par accélérer; ensuite, les forces résistantes $T + mg \sin \alpha$ diminuent cet effet jusqu'à atteindre éventuellement une situation de vitesse constante v_0 pour laquelle $\left(\frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt}\right)_{v=v_0} = 0$; on a donc $v_0 = \frac{\mathcal{P}}{T + mg \sin \alpha}$.

2. On peut écrire l'équation différentielle de la question précédente comme $v \frac{dv}{dt} = \frac{R}{m} (v_0 - v)$, qu'on mettra sous la forme $\frac{v}{v-v_0} dv = -\frac{R}{m} dt$. Pour intégrer cette équation, on remarque que $\frac{v}{v-v_0} = 1 + \frac{v_0}{v-v_0}$, ainsi la solution de l'équation différentielle s'écrit

$$v(t) + v_0 \ln |v(t) - v_0| = -\frac{R}{m} t + C,$$

où C est une constante d'intégration que l'on détermine en écrivant que $v(t=0) = 0$. Comme $v < v_0$, on obtient finalement $v + v_0 \ln \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) = -\frac{R}{m} t$. On ne peut pas isoler $v(t)$, on peut par contre tracer la fonction $t(v)$ (sur la figure E.11.2), puis lire la valeur de v pour un instant t quelconque. Au voisinage de $v = 0$, $\ln \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \simeq -\frac{v}{v_0} - \frac{v^2}{2v_0^2} + o(v^2)$; ainsi dans ce régime de faibles vitesses $v \simeq \sqrt{\frac{2v_0 R}{m}} t$, la courbe démarre comme une racine carrée!

5 Point oscillant sur un cerceau

1. Le point matériel est soumis à la force de réaction du support (sans frottement et donc ne travaillant pas), à son poids qui est conservatif et qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,g} = mgz$ (l'axe vertical étant dirigé vers le haut), soit $\mathcal{E}_{p,g} = mgR(1 - \cos \theta)$, et à la force exercée par le ressort qui est également conservative et dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$, soit $\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2}kR^2 \sin^2 \theta$. Les forces dérivent donc de $\mathcal{E}_p(\theta) = mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}kR^2 \sin^2 \theta$.

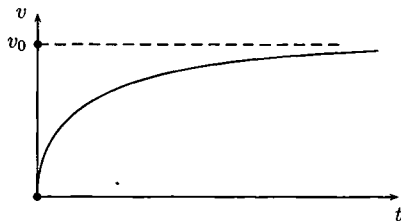


FIG. E.11.2. Vitesse du train en phase d'accélération.

2. On calcule $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = \sin\theta (mgR + kR^2 \cos\theta)$. Les positions d'équilibre annulent cette dérivée et correspondent ainsi à $\sin\theta = 0$, donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, mais aussi à $\cos\theta = -\alpha$; si $\alpha < 1$, on a donc deux positions d'équilibre supplémentaires $\theta_{\pm} = \pm \arccos(-\alpha)$. La stabilité de ces positions dépend de la valeur de $K(\theta) = \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = kR^2 (\alpha \cos\theta + 2\cos^2\theta - 1)$ au point d'équilibre. On calcule $K(0) = kR^2(1 + \alpha) > 0$, la position $\theta = 0$, au bas du cerceau, est toujours stable. On a $K(\pi) = kR^2(1 - \alpha)$; la position située en haut du cerceau est donc stable si $\alpha < 1$: il faut pour cela que l'effet du ressort soit prépondérant sur le poids. Finalement, $K(\theta_{\pm}) = kR^2(\alpha^2 - 1)$ est toujours négatif car $\alpha < 1$, ces positions d'équilibre sont donc toujours instables.

3. Au voisinage de l'équilibre $\theta = 0$, on peut prendre un développement limité des fonctions trigonométriques dans l'expression de l'énergie potentielle qui devient à l'ordre deux $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(mgR + kR^2)\theta^2$ tandis que $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$; la conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc $\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = \frac{2\mathcal{E}_m}{mR^2} = \text{cte}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{k}{m}}$; en dérivant par rapport au temps il vient $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$: les oscillations sont isochrones et périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

6 Looping

1. a/ Le mobile est soumis aux forces de contact du support (qui ne travaillent pas, en l'absence de frottement) et à son poids, force conservative. On peut donc écrire la conservation de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$, l'axe des y étant orienté vers le haut. Les valeurs initiale et finale de l'énergie sont alors égales, soit $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_H^2 + 2mgR$ si v_H est la vitesse atteinte au point H . Comme $v_H^2 \geq 0$, on en déduit $v_0 \geq v_1 = 2\sqrt{gR}$.

b/ La projection radiale du principe fondamental de la dynamique en coordonnées cylindropolaires impose $-mR\dot{\theta}^2 = -F + mg \cos\theta$, où l'on a posé $\vec{F} = -F\vec{u}_r$, pour la force de réaction du support toujours dirigé vers le centre du cercle si le point est en appui sur le circuit, ce qui impose $F > 0$; le cas $F = 0$ donnant la condition de décollage. Au cours du mouvement, $y = R(1 - \cos\theta)$ et $v = R\dot{\theta}$, la loi de conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2 + gR(1 - \cos\theta), \text{ soit aussi } \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2 + 2gR(\cos\theta - 1)}{R^2}.$$

En reportant cette expression dans la projection radiale du PFD, on en déduit

$$F = mg(3 \cos\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}.$$

c/ On a vu que $F > 0$ pour éviter tout décollage. La valeur minimale de F est atteinte pour $\theta = \pi$ et vaut $F_{\min} = m\frac{v_0^2}{R} - 5mg$; on doit donc imposer $v_0 > v_2 = \sqrt{5gR}$.

d/ Si $v_0 = \sqrt{6gR} > v_2$, un tour complet est possible, avec la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g(2 + \cos\theta)}{R}}$; la durée dt nécessaire à une variation $d\theta$ de l'angle θ est alors $dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$ et la durée totale du tour est égale au double de la durée de montée de B à H , soit $T = 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$ qui s'écrit

$$T = \sqrt{\frac{2R}{g}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{2 + \cos\theta}} = 1,06 \text{ s}.$$

2. a/ Le travail, résistant, de la force T s'écrit $W = -TR\theta$ pour un parcours de longueur $R\theta$ entre le point B et un point de la trajectoire caractérisé par θ . Le théorème de l'énergie mécanique, écrit entre le point B et le point repéré par θ , atteint à la vitesse v , devient

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}mv_0^2 = -TR\theta, \text{ donc } v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2TR}{m}\theta - 2gR(1 - \cos\theta)}.$$

b/ Le point le plus haut atteint pour $\theta = \theta_{\max} = \theta_0$ correspond à $\dot{\theta} = 0$ ou $v = 0$, d'où l'équation $mgR(1 - \cos\theta_0) + TR\theta_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

c/ On écrit $\cos\theta_0 \simeq 1 - \frac{\theta_0^2}{2} + o(\theta_0^2)$ dans cette équation; si l'ordre 1 suffit, on obtient

$$\theta_0 \simeq \frac{mv_0^2}{2TR}.$$

Chapitre 12

1 Principe d'un oscilloscope

1. La détermination de la trajectoire est analogue à ce qui a été fait dans le cours (voir équation (12.8) page 318) pour le cas $\alpha = 0$. Dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, l'équation de la trajectoire est

$$y = \frac{qE}{2m v_0^2} x^2, \text{ où } E = -\frac{U}{d} \text{ et } q = -e \Rightarrow y = \frac{eU}{2m v_0^2 d} x^2. \quad (12.1)$$

2. Une fois sorti de l'espace interarmatures du condensateur, l'électron n'est plus soumis à aucune force (poids toujours négligé). Sa trajectoire est donc une droite, dont il faut déterminer la pente et un point. La pente p est la dérivée de la trajectoire en $x = \ell$, abscisse de sortie du condensateur. On l'obtient en dérivant la relation (12.1),

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\ell} = \frac{eU\ell}{m v_0^2 d}.$$

Le point de sortie du condensateur est un point particulier de cette trajectoire, dont on note les coordonnées

$$x_s = \ell \text{ et } y_s = \frac{eU}{2m v_0^2 d} \ell^2.$$

L'équation de la droite après la sortie est

$$y - y_s = p \times (x - x_s) \Rightarrow y = \frac{eU\ell}{m v_0^2 d} \left(x - \frac{\ell}{2}\right). \quad (12.2)$$

On remarque que cette droite coupe l'axe horizontal $y = 0$ en $x = \frac{\ell}{2}$ (voir figure E.12.1). C'est une propriété de la parabole (théorème de Poncelet) : la tangente en C à la parabole coupe le segment $[OH]$ en son milieu (point A).

3. Le point d'impact I correspond à l'intersection de la trajectoire droite avec l'écran, en $x = \ell + \ell'$, soit, d'après l'équation (12.2),

$$y_I = \frac{eU\ell}{m v_0^2 d} \left(\ell' + \frac{\ell}{2}\right).$$

L'ordonnée y_I est bien proportionnelle à la tension U entre les deux plaques. La déviation verticale du spot d'un oscilloscope est donc proportionnelle à la tension U que l'on veut mesurer.

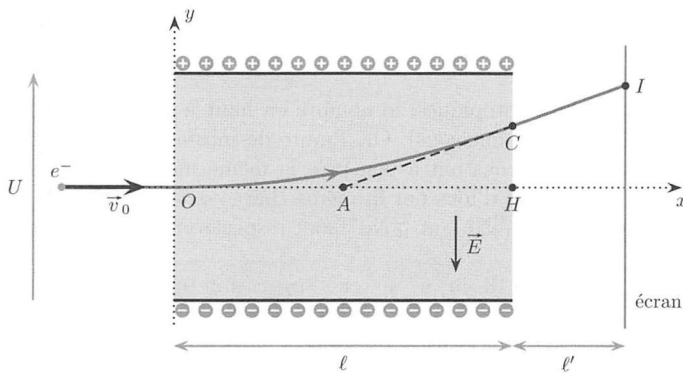


FIG. E.12.1. Faisceau d'électrons dans un oscilloscope.

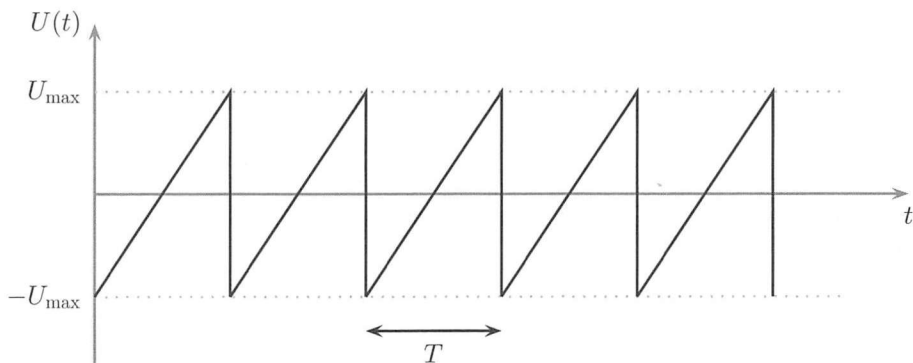


FIG. E.12.2. Forme de la tension à imposer entre les plaques assurant la déviation horizontale du faisceau d'électrons dans un oscilloscope.

4. Dans cette question, y représente la déviation *horizontale* du spot sur l'écran de l'oscilloscope. Ce spot doit balayer horizontalement l'écran, périodiquement et à vitesse constante : son abscisse $y(t)$ doit donc être une fonction périodique dont la croissance sur chaque période est linéaire ($\frac{dy}{dt}$ est constante par morceaux). Or, $y(t)$ est proportionnelle à la tension imposée entre les deux plaques verticales. Donc la tension $U(t)$ doit être une suite de rampes montantes (voir figure E.12.2).

2 Sélecteur d'isotopes

1. Dans le référentiel galiléen des plaques M et N , une particule de masse m entre les deux plaques est soumise à :

- ▶ l'action du champ électrique horizontal créé par la différence de potentiel $U = V_M - V_N$;
- ▶ son poids, dont l'effet est négligeable devant celui de la force électrique ;
- ▶ l'action des autres particules chargées du faisceau de particules, qui est négligée.

Le travail fourni par le champ électrique à une particule de charge q est l'opposé de la variation d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = qV$ de la particule, où V est le potentiel électrostatique. Cela permet une application facile du théorème de l'énergie cinétique à la particule entre les points M et N ,

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_M^N = W_{M \rightarrow N} = -[qV]_M^N \iff \frac{1}{2} m v_N^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m v_M^2}_{\ll \frac{1}{2} m v_N^2} = -q \underbrace{(V_N - V_M)}_{-U}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_N^2 \simeq qU \Rightarrow \boxed{v_N \simeq \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

Par définition des notations isotopiques, le nombre en haut à gauche s'appelle le nombre de masse de l'isotope (nombre de nucléons). Or, l'unité de masse atomique représente la masse d'un nucléon (protons et neutrons ont à peu près la même masse). Donc $m_1 = 20 \text{ u.m.a}$ et $m_2 = 22 \text{ u.m.a}$. Les deux types d'ions ont la même charge $q = +e$. Avec les valeurs fournies, les vitesses en N pour les ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ et ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$ sont respectivement

$$\boxed{v_{20} \simeq 4,4 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_{22} \simeq 4,2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

2. En négligeant le poids des ions et les actions entre particules, un ion néon de charge q et de masse m est soumis, dans le référentiel galiléen des plaques, à l'action :

- du champ électrique $q\vec{E}$;
- du champ magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ion s'écrit

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

On souhaite que le mouvement de l'ion soit rectiligne uniforme, c'est-à-dire que son vecteur vitesse soit constant, $\vec{v} = v\vec{u}_x$. Dans ce cas,

$$m\vec{a} = q[E\vec{u}_y + v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z] = q(E - vB)\vec{u}_y.$$

On remarque que, si $E = vB$, l'accélération de l'ion est nulle. Un ion ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ a un mouvement rectiligne uniforme entre N et O si

$$\boxed{E = v_{20}B} \Rightarrow \boxed{E = 4,4 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}}$$

3. Lorsqu'ils arrivent au point N , les ions ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$ sont plus lents que les ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$. Pour eux, $v < v_{20}$, donc $|vB|$ sera inférieur à $v_{20}B = E$. Par conséquent, la force électrique $q\vec{E}$ l'emportera sur la force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Leur accélération sera donc dans le sens de $q\vec{E}$ et la trajectoire d'un ion ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$ sera incurvée dans la direction de $q\vec{E}$. Ces ions ne passeront donc pas par O , mais viendront frapper la plaque P_O dans laquelle est percé O . Ainsi, seuls les ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ passeront par O . Le dispositif étudié permet de sélectionner l'isotope 20 du néon.

- D'une manière générale, il permet de faire le tri entre des particules ayant la même charge mais ayant des masses différentes.
- Pour un type de particules donné, il permet de trier les particules ayant une certaine vitesse. Celles qui ont la vitesse désirée vont en ligne droite dans la zone où règnent \vec{E} et \vec{B} . Celles qui sont plus lentes ou plus rapides y sont déviées et arrêtées par la plaque P_O . Utilisé de cette façon, le dispositif s'appelle un sélecteur de vitesse. Il permet de fabriquer un faisceau de particules homocinétique (dans lequel toutes les particules ont la même vitesse).

3 Déflexion d'électrons

1. On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron de masse m et de charge q dans le référentiel (galiléen) où les plaques sont fixes. Dans ce référentiel, l'électron est soumis à la force électrostatique et à son poids, qui est négligé,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} dt.$$

On projette cette relation dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) et on l'intègre par rapport au temps en tenant compte de la condition initiale $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{u}_x$,

$$\begin{cases} dv_x = 0 \\ dv_y = \frac{qE}{m} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{qE}{m} t. \end{cases}$$

En intégrant encore par rapport au temps la relation sur \vec{u}_x , on obtient $x = v_0 t$. Pour avoir les composantes de la vitesse à la sortie, il faut déterminer l'instant de sortie, noté t_s , de la zone entre les deux plaques. Cet instant est défini par $x = \ell = v_0 t_s \Rightarrow t_s = \frac{\ell}{v_0}$. On en déduit les composantes de la vitesse à la sortie, notées avec l'indice s,

$$\begin{cases} v_{xs} = v_0 \\ v_{ys} = \frac{qE\ell}{mv_0} \end{cases}$$

L'angle α est défini par $\tan \alpha = \frac{v_{ys}}{v_{xs}} = \frac{qE\ell}{mv_0^2}$.

Remarque Pour les électrons, $q < 0$, donc E doit être négatif si on veut que les électrons soient déviés vers le haut ($\alpha > 0$).

2. En notant $U \stackrel{\text{déf.}}{=} V_{P_2} - V_{P_1}$, le champ électrostatique créé par le condensateur plan est $\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{u}_y$, donc $E = \frac{U}{d}$. Cela donne

$$\tan \alpha = \frac{qU\ell}{mv_0^2 d} \iff U = \frac{mv_0^2 d \tan \alpha}{q\ell}$$

Avec les valeurs numériques données, on obtient

$$U = 1,0 \text{ V pour } \alpha = 10^\circ ; U = 2,1 \text{ V pour } \alpha = 20^\circ ; U = 3,3 \text{ V pour } \alpha = 30^\circ$$

3. On veut que les électrons aient la même vitesse en sortie de la zone de déflexion en utilisant un champ magnétique uniforme. D'après le cours, la trajectoire d'un électron dans un tel champ est un cercle, car la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique. Le champ magnétique est orthogonal au plan du cercle, donc au plan du schéma. En refaisant la démonstration du cours, dont les résultats sont rappelés à la section III.1 (voir page 324), on établit que le rayon du cercle est $R = \frac{mv_0}{|qB|}$. En traduisant cela sur un schéma (voir figure E.12.3), on voit que la

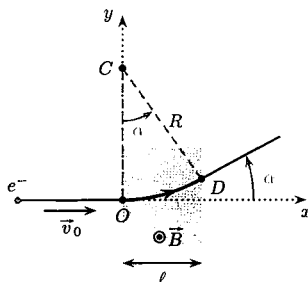


FIG. E.12.3. Déviation par un champ magnétique.

particule doit décrire un arc de cercle dont l'angle au centre ($\widehat{CO, CD}$) est l'angle de déviation α . La condition pour réaliser cela se lit également sur le schéma (projection du segment $[CD]$ sur l'horizontale),

$$R \sin \alpha = \ell \iff \frac{mv_0}{|qB|} \sin \alpha = \ell \Rightarrow |B| = \frac{mv_0 \sin \alpha}{|q\ell|}$$

Pour $\alpha = 30^\circ$, cela donne $|B| \simeq 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$, c'est-à-dire un champ dont l'intensité est de l'ordre de celle du champ magnétique terrestre. Pour les électrons, $q < 0$, donc le champ magnétique doit pointer vers le lecteur si on veut que la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ pointe vers le haut (déviation avec $\alpha > 0$).

4 Cyclotron

On néglige le poids du proton devant les forces électromagnétiques qu'il subit. On raisonne dans le référentiel galiléen où les dés sont fixes.

1. Avec ces hypothèses de travail, le proton est soumis uniquement à l'action du champ magnétique uniforme \vec{B} dans un dé. Sa vitesse à l'entrée du dé étant orthogonale à \vec{B} , son mouvement est circulaire et uniforme dans le dé (voir le cours dont les résultats principaux sont donnés à la section III.1, page 324).

2. Le rayon de la trajectoire circulaire est $R = \frac{mv}{|qB|}$. La longueur d'un demi-cercle est πR , donc le temps de parcours de ce demi-cercle est

$$t = \frac{\pi R}{v} \Rightarrow t = \frac{\pi m}{|qB|}.$$

Ce temps ne dépend pas de la norme de la vitesse du proton. Numériquement,

$$t = \frac{3,14 \times 1,67 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,0} \Rightarrow t \simeq 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

3. À chaque passage d'un proton dans l'espace entre les dés, le champ électrique sinusoïdal doit être proche de son maximum en norme et dans le sens de la vitesse du proton afin d'accélérer celui-ci au mieux (points C et D sur la courbe de la figure E.12.4). Le champ doit donc changer de sens (une demi-période T de la sinusoïde) durant le passage du proton dans un dé,

$$\frac{T}{2} = t \iff T = 2t \simeq 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Par définition, la fréquence f du champ électrique est l'inverse de la période,

$$f = \frac{1}{T} \simeq 1,5 \cdot 10^7 \text{ Hz}.$$

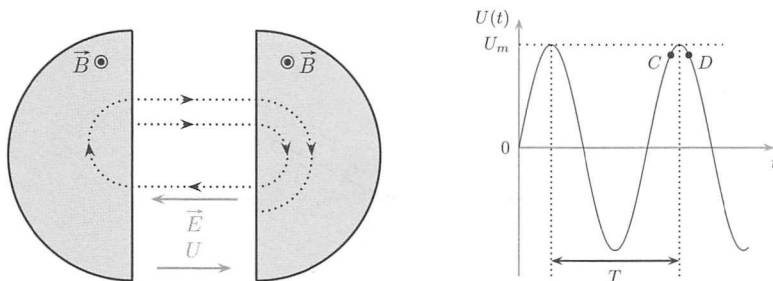


FIG. E.12.4. Évolution temporelle de la tension accélératrice entre les dés du cyclotron.

4. Entre les dés, le proton est soumis uniquement à l'action du champ électrique, qui dérive de l'énergie potentielle qV . Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au proton entre deux points C et D s'écrit

$$\Delta \mathcal{E}_c = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_C^D = W_{C \rightarrow D} = - [qV]_C^D = q(V_C - V_D) = qU(t).$$

La grandeur $\Delta \mathcal{E}_c$ représente le gain d'énergie cinétique cherché. Lorsque le champ électrique sinusoïdal est bien synchronisé, $U(t)$ vaut U_m au moment du passage du proton. Finalement,

$$\Delta \mathcal{E}_c = qU_m \Rightarrow \Delta \mathcal{E}_c = 4,0 \cdot 10^{-16} \text{ J}.$$

Pour convertir les joules en électronvolts, il suffit de diviser $\Delta\mathcal{E}_c$ par la charge élémentaire $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, ce qui donne 2,5 keV. Nous retrouvons tout simplement la valeur numérique de U_m .

5. Le nombre de demi-tours à effectuer avant la sortie est

$$\frac{\text{gain total d}'\mathcal{E}_c}{\text{gain d}'\mathcal{E}_c \text{ par demi-tour}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\text{finale}}^2}{\Delta\mathcal{E}_c} = \frac{0,5 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times (25 \cdot 10^6)^2}{4,0 \cdot 10^{-16}} \simeq 1,3 \cdot 10^3.$$

En divisant par deux, on obtient le nombre de tours : environ 650 tours. Cette opération dure 650 périodes de la sinusoïde : durée $\simeq 650 T \simeq 4,3 \cdot 10^{-5}$ s.

6. Le rayon d'un arc de cercle est

$$R = \frac{mv}{qB} \simeq \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \times (25 \cdot 10^6)}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,0} \simeq 0,26 \text{ m}.$$

Un accélérateur de cette dimension est très réalisable en laboratoire.

5 Modèle de l'atome de Thomson

1. On suppose que l'électron n'est soumis qu'à l'influence du champ électrique. On suppose que son mouvement est circulaire (de rayon $r_0 < R$) et uniforme (de vitesse angulaire θ_0). Pour un tel mouvement, l'expression de l'accélération est simple, $-r_0\theta_0^2 \vec{u}_r$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel de la boule, supposé galiléen, s'écrit, en coordonnées polaires centrées sur O ,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{E} \Rightarrow -mr_0\theta_0^2 \vec{u}_r = \frac{-qqr_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \Rightarrow \theta_0^2 = \frac{\alpha}{m} \text{ avec } \alpha = \frac{q^2}{3\epsilon_0}.$$

Le coefficient α joue le rôle d'une constante de raideur (analogie avec la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ de l'oscillateur masse-ressort) : tout se passe comme si l'électron était lié au centre de la boule par un ressort de raideur α .

2. a/ La trajectoire étant plane, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit, en coordonnées polaires,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{E} \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta = -\alpha r \vec{u}_r.$$

b/ En projection sur \vec{u}_θ , on obtient $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$. En multipliant par r puis en intégrant cette relation par rapport au temps, on trouve $r^2\dot{\theta} = \text{cte}$, qui n'est autre que la conservation du moment cinétique de l'électron pour ce mouvement à force centrale. La constante se détermine avec les conditions initiales $r^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0$.

c/ On remplace $\dot{\theta}$ par cette expression dans la projection du principe de la dynamique sur \vec{u}_r , ce qui donne une équation différentielle *non linéaire* vérifiée par r seul,

$$m \left[\ddot{r} - r \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r^4} \right] = -\alpha r.$$

d/ En utilisant l'expression $r = r_0(1 + \varepsilon)$, on construit une équation (toujours non linéaire) vérifiée par ε ,

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{\theta_0^2}{(1 + \varepsilon)^3} = -\frac{\alpha}{m}(1 + \varepsilon).$$

En utilisant la relation $\theta_0^2 = \frac{\alpha}{m}$ et en linéarisant $(1 + \varepsilon)^{-3} \simeq 1 - 3\varepsilon$, cette équation devient

$\ddot{\varepsilon} + 4\theta_0^2\varepsilon = 0$. C'est une équation d'oscillateur harmonique (tous les coefficients sont de même signe). Par conséquent, $\varepsilon(t)$ reste borné : la trajectoire est stable.

3. L'expérience menée par Rutherford en 1911 consiste à bombarder une très fine feuille d'or avec des particules chargées positivement (particules α qui sont des noyaux d'hélium). On constate qu'une proportion non négligeable des particules α traversent la feuille d'or en étant parfois très fortement déviées. Cela signifie qu'elles sont passées très près d'une charge quasi ponctuelle qui les a repoussées. Cela montre que, dans un atome, la charge positive est concentrée en une zone quasi ponctuelle (appelée depuis le noyau), alors que le modèle de Thomson voyait cette charge comme « diluée » dans une sphère faisant la taille de l'atome.

6 Particule dans un champ magnétique

1. La particule n'est soumise qu'à la force magnétique $\vec{F}_{\text{ma}} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, qui est orthogonale à la vitesse, et fournit donc une puissance nulle à la particule. La particule garde donc une énergie cinétique constante, ce qui implique que la norme de sa vitesse est constante.

2. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = 0. \end{cases} \quad (12.3)$$

L'équation sur \ddot{z} montre que \dot{z} est constante.

3. Les deux vecteurs \vec{v}_\perp et \vec{v}_\parallel sont orthogonaux et $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$. On élève cette relation au carré,

$$\underbrace{|\vec{v}|^2}_{=\text{cte}} = \underbrace{|\vec{v}_\parallel|^2}_{=\text{cte}} + \underbrace{|\vec{v}_\perp|^2}_{=0} + 2 \underbrace{\vec{v}_\parallel \cdot \vec{v}_\perp}_{=0}. \quad (12.4)$$

On a déjà montré que les normes de \vec{v} et de \vec{v}_\parallel sont constantes. La relation (12.4) permet d'en déduire que $|\vec{v}_\perp|$ est constante. Ce résultat n'est valable que si le champ magnétique est uniforme.

4. On effectue la combinaison linéaire suggérée par l'énoncé avec les équations (12.3),

$$\begin{array}{l} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \end{array} \quad \begin{array}{l} \times 1 \\ \times i \end{array}.$$

Cela donne

$$m \underbrace{(\ddot{x} + i\ddot{y})}_{\ddot{u}} = qB(-i\dot{x} + \dot{y}) = -qBi \underbrace{(\dot{x} + i\dot{y})}_{\dot{u}} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} + i \frac{qB}{m} \dot{u} = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre en u à coefficients (complexes) constants. Cependant l'absence de terme en u permet de la ramener à une équation du premier ordre. En effet, en posant $s \stackrel{\text{def}}{=} \dot{u}$, l'équation devient

$$\frac{ds}{dt} + i \frac{qB}{m} s = 0.$$

Les deux termes de l'équation devant être de même dimension, le rapport $\frac{qB}{m}$ est homogène à l'inverse d'un temps ou à une pulsation, d'où la notation $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{qB}{m}$. Attention, ω peut être positif ou négatif, car les grandeurs q et B peuvent être de signe quelconque. Avec cette nouvelle notation, l'équation différentielle sur s se réécrit simplement

$$\dot{s} + i\omega s = 0.$$

Le fait que les coefficients soient complexes ne change rien à la méthode habituelle de résolution. Il suffit de travailler dans le corps des complexes. La solution est de la forme exponentielle

$$s(t) = A \exp(-i\omega t) \quad \text{où } A \text{ est une constante scalaire complexe d'intégration.}$$

Cette constante A est complexe car on travaille dans le corps des complexes. On détermine A par les conditions initiales (12.14) données par l'énoncé. À $t = 0$, l'équation devient $s(0) = A$; or, $s(0) = \dot{u}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = \dot{x}_0$. Donc $A = \dot{x}_0$,

$$s(t) = \dot{x}_0 \exp(-i\omega t) \iff \dot{u}(t) = \dot{x}_0 \exp(-i\omega t).$$

Pour trouver u , on intègre encore une fois par rapport au temps sans oublier la constante (complexe) d'intégration, notée C ,

$$u(t) = \frac{\dot{x}_0}{-i\omega} \exp(-i\omega t) + C.$$

Les complexes ont achevé leur rôle simplificateur de la résolution. On peut maintenant revenir en notation réelle, en notant $C = a + ib$ (a et b étant réels),

$$x(t) + iy(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + i \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega t) + a + ib.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire dans cette équation, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + a \\ y(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega t) + b. \end{cases}$$

On utilise une dernière fois les conditions initiales (12.14) pour déterminer les constantes réelles a et b . À $t = 0$, x et y sont nuls, donc $a = 0$ et $b = -\frac{\dot{x}_0}{\omega}$. Finalement,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases}.$$

5. Si on ne reconnaît pas les équations obtenues à la question précédente, on peut visualiser le tracé de la courbe paramétrée correspondante avec un logiciel ou une calculatrice, en donnant à \dot{x}_0 et ω des valeurs arbitraires (sans signification), comme 1 par exemple. Le tracé est un cercle.

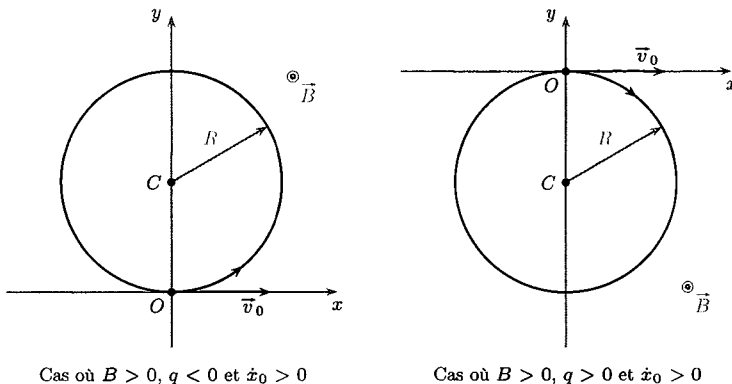


FIG. E.12.5. Visualisation de la trajectoire circulaire de la particule dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Le sens de parcours du cercle dépend du signe de B , du signe de la charge q et de la vitesse initiale de la particule.

Plus formellement, on reconnaît les équations paramétriques d'un cercle dont les caractéristiques sont (voir figure E.12.5)

$$\text{centre } \left(0, -\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \text{ et rayon } \left| \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right| \quad \text{où } \omega = \frac{qB}{m}.$$

La valeur absolue est importante dans le rayon, car \dot{x}_0 et ω peuvent être de signe quelconque. Le sens de parcours de ce cercle dépend du signe de ω , c'est-à-dire du signe de $q \times B$. Pour le déterminer, il suffit de faire un dessin dans le plan $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sur lequel on place le centre du cercle (dont la position dépend du signe de ω et de celui de \dot{x}_0). Le vecteur vitesse initial $(\dot{x}_0, 0)$ donne alors immédiatement le sens de parcours du cercle. On doit tester le dessin en trouvant le sens de la force magnétique de Lorentz $q \vec{v} \wedge \vec{B}$ avec la règle des trois doigts de la main droite. Cette force doit être orientée vers l'intérieur de la trajectoire.

La pulsation temporelle de parcours du cercle est $|\omega| = \left| \frac{qB}{m} \right|$. La valeur absolue est importante, car $\omega = \frac{qB}{m}$ peut être négative alors qu'une pulsation temporelle est toujours définie positivement. La période de révolution est

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi m}{|qB|}.$$

Plus la particule est massive (m grand), plus le temps de parcours est grand. En revanche, plus le produit $|qB|$ est grand, c'est-à-dire plus la force magnétique est grande, plus le temps de parcours du cercle est réduit. En effet, la norme $|\dot{x}_0|$ de la vitesse est fixée par les conditions initiales et le rayon du cercle est $R = \frac{|\dot{x}_0|m}{|qB|}$, d'autant plus petit que $|qB|$ est grand.

6. On résume les résultats précédents. Les vitesses \vec{v}_{\parallel} et \vec{v}_{\perp} , respectivement parallèle et orthogonale au champ magnétique uniforme :

- ▶ sont indépendantes l'une de l'autre ;
- ▶ ont des normes constantes.

La trajectoire de la particule est la composition :

- ▶ d'une translation rectiligne uniforme parallèlement au champ à la vitesse \vec{v}_{\parallel} ;
- ▶ d'une rotation circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_{\perp}}{|qB|}$ dans le plan orthogonal au champ.

La trajectoire est donc une **hélice** (voir figure E.12.6) de rayon

$$R = \frac{mv_{\perp}}{|qB|},$$

inscrite sur un cylindre dont l'axe est le champ magnétique. Le **pas de l'hélice**, défini comme la distance dont z augmente pendant un tour, est p tel que

$$p = |\dot{z}| \times T = v_{\parallel} \times 2\pi \frac{m}{|qB|}.$$

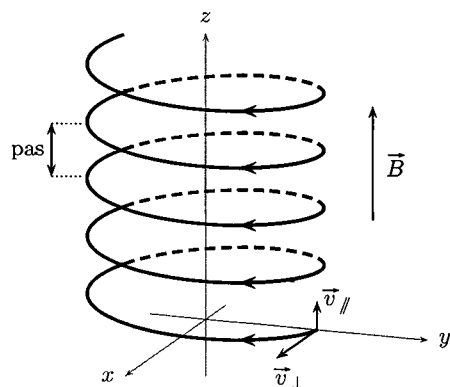


FIG. E.12.6. Visualisation de la trajectoire hélicoïdale de la particule. Le sens d'enroulement de l'hélice dépend du signe de B , du signe de la charge q et de la vitesse initiale de la particule.

De façon intuitive, plus la composante \vec{v}_{\parallel} de la vitesse parallèle au champ est grande, plus le pas de l'hélice est grand, c'est-à-dire plus l'hélice est distendue. Au contraire, plus \vec{v}_{\parallel} est petite, plus l'hélice est tassée. À l'extrême, si \vec{v}_{\parallel} est nulle, l'hélice se réduit à une trajectoire circulaire. C'est surtout ce cas qui est important dans les applications pratiques.

Chapitre 13

1 Ordre de grandeur

1. Il faut tout d'abord calculer le module de la vitesse de l'électron sur sa trajectoire. En supposant le mouvement uniforme et en notant T_e la période de révolution, on obtient $\|v_e\| = \frac{2\pi r_e}{T_e} = 2\pi r_e f_e$. Dans l'hypothèse de la trajectoire circulaire,

$$\|\vec{\sigma}_e\| = \|\vec{OM} \wedge m_e \vec{v}\| = m_e r_e |v_e| = 2\pi m_e r_e^2 \cdot f_e.$$

Numériquement, on trouve $\|\vec{\sigma}_e\| = 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

2. $\|\vec{\sigma}\| = \frac{2\pi m r^2}{T} = 2,8 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

2 Mouvement orbital de la Terre

La Terre est soumise à la force gravitationnelle du Soleil $\vec{F} = -G \frac{M_S M_T}{r^2} \vec{u}_r$, expression dans laquelle r est la distance Terre-Soleil et \vec{u}_r le vecteur unitaire dirigeant la droite allant du Soleil vers la Terre. Cette force est conservative et le mouvement suit la loi des aires, c'est-à-dire que lors du mouvement, $r^2 \dot{\theta} = C$ est une constante du mouvement. En particulier $(r^2 \dot{\theta})_{r=r_{\max}} = (r^2 \dot{\theta})_{r=r_{\min}}$. Il est clair d'autre part que r est extrême à l'aphélie et au périhélie, c'est-à-dire qu'en ces points $\dot{r} = 0$ et donc que la vitesse n'a de composante que sur \vec{u}_θ . Elle s'écrit $\vec{v}(r_{\max}) = v_{\min} \vec{u}_\theta = (r \dot{\theta})_{r=r_{\max}} \vec{u}_\theta = \frac{C}{r_{\max}} \vec{u}_\theta$; on en déduit que $C = v_{\min} r_{\max}$, de même $v(r_{\min}) = v_{\max} = \frac{C}{r_{\min}}$ et donc $C = v_{\max} r_{\min}$; en égalant les deux expressions de C il vient $v_{\max} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} v_{\min}$. Numériquement, on trouve $v_{\max} = 3,03 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la vitesse de la Terre sur son orbite ne varie donc que de l'ordre de 3% en module.

3 Modèle de Bohr

1. La force électrostatique du proton sur l'électron s'écrit $\vec{F}_{el} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, où r est la distance entre le proton et l'électron, et \vec{u}_r le vecteur unitaire allant du proton vers l'électron. C'est donc une force centrale. Appliquons le théorème du moment cinétique en O ,

$$\frac{d\vec{\sigma}_{M/(O)}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}_{el} = \vec{0}, \text{ car } \vec{F}_{el} \propto \vec{u}_r,$$

le vecteur $\vec{\sigma}_{M/(O)}$ est donc une constante du mouvement. Dans le mouvement circulaire de l'électron, $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ avec r constant, ainsi $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et donc $\vec{\sigma}_{M/(O)} = r m_e v \vec{u}_z$.

2. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{el}$ avec $\frac{d\vec{v}}{dt} = r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$; les projections sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ s'écrivent donc $-m_e r \dot{\theta}^2 = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ et $m_e r \ddot{\theta} = 0$. Cette dernière équation indique que la vitesse angulaire est constante lors du mouvement, $v = r \dot{\theta} = r \omega$ sera également constant, l'électron est donc en mouvement circulaire uniforme. Attendu que

$$\dot{\theta} = v/r, \text{ il vient } -m_e \frac{v^2}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ soit } v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

3. Avec le postulat de Bohr, le carré du moment cinétique s'écrit donc finalement

$$m_e^2 r^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} = n^2 \hbar^2.$$

On en déduit que $r = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 r_1$. L'application numérique fournit $r_1 = 53 \text{ pm}$.

4 Rotation pour une masse soumise à un ressort

1. Effectuons le bilan des forces :

► le poids du mobile $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ qui reste perpendiculaire au plan de la trajectoire et qui ne travaille donc pas;

► la réaction du support $\vec{R} = N \vec{u}_z + \vec{F}$, \vec{F} est la composante tangentielle due au contact avec le support et modélise les frottements. L'utilisation de la table à coussin d'air a pour conséquence de rendre cette force nulle, $\vec{F} = \vec{0}$;

► la force élastique \vec{T} exercée par le ressort sur le mobile, $\vec{T} = -k(r - \ell_0) \vec{u}$, où r est la longueur du ressort et \vec{u} est unitaire le long du ressort et dirigé de O vers M : c'est une force centrale.

Pour les moments, nous avons d'une part

$$\overline{\mathcal{M}}_{\vec{P}/M}^O + \overline{\mathcal{M}}_{\vec{N}/M}^O = \overline{OM} \wedge \vec{P} + \overline{OM} \wedge \vec{N} = \overline{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{N}) = \vec{0};$$

et d'autre part, $\overline{\mathcal{M}}_{\vec{T}/M}^O = \overline{OM} \wedge \vec{T} = r\vec{u} \wedge T\vec{u} = \vec{0}$, résultat connu pour une force centrale. La somme des moments des forces en M étant nulle à chaque instant, le moment cinétique

$\overline{\sigma}_M^O$ est bien une constante du mouvement.

2. a/ $\overline{\sigma}_M^O = \overline{\sigma}_O(M) = (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) \wedge m(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y) = m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{u}_z = mC\vec{u}_z$. Le moment cinétique étant constant durant tout le mouvement, sa valeur reste celle qu'il possède à l'instant initial, soit $m(x\dot{y} - y\dot{x})_{t=0} = \frac{6}{5}\ell_0 \cdot 0 - 0 = 0$. À chaque instant, le moment cinétique est

nul, $\overline{\sigma}_M^O = \vec{0}$. On peut également obtenir ce résultat en utilisant les coordonnées cylindro-polaires, on obtient alors $mr^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \text{cte}$. On peut calculer cette constante en se plaçant à $t = 0$, le ressort étant le long de l'axe Ox , $\theta(t = 0) = 0$ et donc pour tout t on aura $\theta(t) = 0$.

La trajectoire du mobile est une portion de la droite Ox .

Les vecteurs position \overline{OM} et vitesse \vec{v}_M restent constamment colinéaires, ce qui est une autre façon d'affirmer que le moment cinétique $\overline{OM} \wedge m\vec{v}_M$ reste nul durant tout le mouvement. D'un point de vue plus qualitatif, on peut dire qu'initialement le ressort est le long de l'axe Ox , la force est également le long de cet axe et le ressort se mettant en mouvement sous l'action de cette seule force avec une vitesse initiale nulle, M se déplace le long de Ox .

b/ Pour déterminer la trajectoire, nous allons utiliser le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen, $m\frac{d\overline{OM}}{dt^2} = -mg\vec{u}_z + N\vec{u}_z - k(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell_0)\frac{\overline{OM}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. On sait déjà que lors du mouvement, $y = 0$, l'équation s'écrit alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x = -mg\vec{u}_z + N\vec{u}_z - k(x - \ell_0)\vec{u}_x,$$

c'est-à-dire $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - \ell_0) \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2(x - \ell_0) \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = \omega_0^2\ell_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficient constant avec un second membre constant. La solution générale de l'équation sans second membre est

$x_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et une solution particulière de l'équation est $x_p = \ell_0$ d'où la solution générale de l'équation $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_0$. On peut calculer la vitesse du mobile $\dot{x} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ et, compte tenu des conditions initiales, $\dot{x}(t = 0) = 0 = B$, c'est-à-dire $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + \ell_0$, et comme $x(t = 0) = \frac{6}{5}\ell_0 = A + \ell_0$ on obtient $A = \frac{1}{5}\ell_0$, soit finalement $x(t) = \frac{1}{5}\ell_0\cos(\omega_0 t) + \ell_0$. La longueur ℓ du ressort est donc telle que $\ell \in [\frac{4}{5}\ell_0, \frac{6}{5}\ell_0]$.

3. a/ $\overline{\sigma}_M^O = m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{u}_z = mC\vec{u}_z$. Comme précédemment, le moment cinétique reste constant durant tout le mouvement et sa valeur est celle qu'il possède à l'instant initial, soit $m(x\dot{y} - y\dot{x})_{t=0} = m\ell_1^2\omega = mr^2\dot{\theta}$. En considérant que $\omega > 0$ on a donc $\sigma = \|\overline{\sigma}_M^O\| = m\ell_1^2\omega$.

b/ Le poids et la réaction du support sont deux forces qui restent perpendiculaires au mouvement durant le déplacement du mobile M , ainsi ces forces ne travaillent pas. La seule force qui travaille est la force élastique appliquée par le ressort et qui est conservative, l'énergie mécanique se conserve donc au cours du mouvement. $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(r - \ell_0)^2$.

c/ $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\ell_1^2\omega}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\ell_1^4\omega^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$. On pose alors

$$\mathcal{E}_{p,ef}(r) = \frac{1}{2}m\frac{\ell_1^4\omega^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 = \frac{\sigma^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2.$$

d/ On a représenté sur la figure E.13.1 la courbe donnant $\mathcal{E}_{p,ef}$ en fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et sachant que lors du mouvement nécessairement $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p,ef}(r) \geq 0$, on constate donc que la longueur du ressort varie entre r_m , sa longueur minimale et r_M , sa longueur maximale. Les valeurs de ces deux longueurs sont obtenues par les deux solutions de l'équation $\mathcal{E}_{p,ef}(r) = \mathcal{E}_m$.

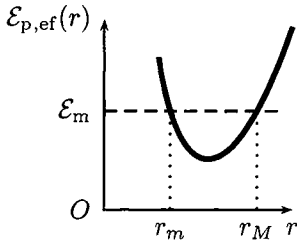


FIG. E.13.1. Énergie potentielle effective en fonction de r .

5 Pendule incliné

1. a/ La distance OA reste constante et égale à ℓ_0 . Le point A décrit donc un cercle de centre O et de rayon ℓ_0 sur le plan incliné.

Il est commode d'introduire le repère cartésien $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au plan incliné. Le vecteur \vec{u}_x donne la direction de la plus grande pente du plan incliné, \vec{u}_z la direction ascendante perpendiculaire au plan et \vec{u}_y est tel que $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base directe. On utilise également le repère cylindro-polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{u}_r = \frac{\vec{OA}}{\ell_0}$ et \vec{u}_θ donne une base directe. On note θ l'angle orienté entre \vec{u}_x et \vec{u}_r .

Dans ce repère $\vec{OA} = \ell_0 \vec{u}_r$ et $\vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} = \ell_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Ainsi,

$$\vec{\sigma}_A^O = \vec{OA} \wedge m \vec{v}_A = \ell_0 \vec{u}_r \wedge m \ell_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \text{ soit } \vec{\sigma}_A^O = m \ell_0^2 \dot{\theta} \vec{u}_z.$$

Tous ces repères sont représentés sur la figure E.13.2.

b/ Appliquons le théorème du moment cinétique en O .

► Inventaire des forces : le poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$. Ce vecteur est dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_z) avec $\vec{P} = -mg \cos(\alpha) \vec{u}_z + mg \sin(\alpha) \vec{u}_x$, d'autre part $\vec{u}_x = \cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta$ et donc $\vec{P} = -mg \cos(\alpha) \vec{u}_z + mg \sin(\alpha) \cos(\theta) \vec{u}_r - mg \sin(\alpha) \sin(\theta) \vec{u}_\theta$; la tension du fil $\vec{T} = -T \vec{u}_r$ et la réaction du support $\vec{N} = N \vec{u}_z$, il n'y a pas de composante tangentielle car le mouvement est supposé sans frottement.

► Calcul du moment des forces : $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/A}^O = \vec{OA} \wedge \vec{P} = mg \ell_0 \cos(\alpha) \vec{u}_\theta - mg \ell_0 \sin(\alpha) \sin(\theta) \vec{u}_z$, $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}/A}^O = \vec{OA} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{N}/A}^O = \vec{OA} \wedge N \vec{u}_z = -N \ell_0 \vec{u}_\theta$.

► Le théorème du moment cinétique s'écrit donc $\frac{d\vec{\sigma}_A^O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/A}^O + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}/A}^O + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{N}/A}^O$, en projection sur le repère cylindro-polaire on trouve $m \ell_0^2 \ddot{\theta} = -mg \ell_0 \sin(\alpha) \sin(\theta)$ ainsi que $0 = mg \ell_0 \cos(\alpha) - N \ell_0$. L'application du théorème du moment cinétique permet donc d'obtenir l'équation du mouvement $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell_0} \sin(\alpha) \sin(\theta)$ et également l'expression de la réaction du support $N = mg \cos(\alpha)$.

Dans le cas des petits mouvements, au premier ordre en θ , l'équation du mouvement devient $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell_0} \sin(\alpha) \theta$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique; on peut aussi l'écrire

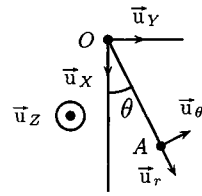
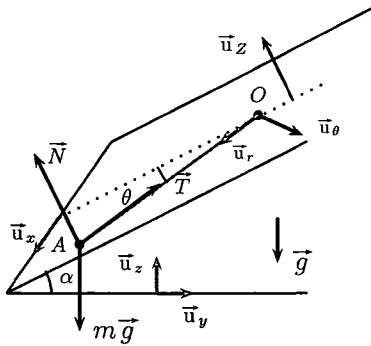
$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$, où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_0} \sin \alpha}$ représente la pulsation de l'oscillation. L'angle θ varie donc

sinusoïdalement avec une période $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_0}{g \sin \alpha}}$. Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, le plan devient horizontal et le pendule ne peut pas se mettre en mouvement sous l'effet de la pesanteur, la période τ tend alors vers $+\infty$ comme il se doit.

c/ $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, d'où $\dot{\theta} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$. À $t = 0$, $\theta(t=0) = 0$, c'est-à-dire $0 = A$; $v(t=0) = v_0 = \ell_0 \dot{\theta}(t=0) = B \ell_0 \omega_0$. Ainsi,

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\ell_0 \omega_0} \sin(\omega_0 t), \text{ donc l'angle maximal atteint est } \theta_M = \frac{v_0}{\ell_0 \omega_0}.$$

d/ L'accélération du mobile s'écrit $\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \ell_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \ell_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$. Le principe fondamental de la dynamique en projection sur \vec{u}_r donne alors $-m \ell_0 \dot{\theta}^2 = -T + mg \sin(\alpha) \cos(\theta)$. Pour déterminer $\dot{\theta}^2$, on peut utiliser l'équation du mouvement que l'on multiplie par $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{g}{\ell_0} \sin(\alpha) \dot{\theta} \sin(\theta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 = -\frac{g}{\ell_0} \sin(\alpha) (-\cos(\theta) + \cos(\theta_0))$. Compte tenu des



Repère cylindro-polaire

Plan incliné : repère et bilan des forces

FIG. E.13.2. Repères pour l'étude du pendule sur un plan incliné.

conditions initiales, la relation devient $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\ell_0}\right)^2 = -\frac{g}{\ell_0}\sin(\alpha)(1 - \cos(\theta))$ et l'on en déduit que $T = m\frac{v_0^2}{\ell_0} + mg\sin(\alpha)[3\cos(\theta) - 2]$. Dans le cadre des petits mouvements, au

second ordre en θ , $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, ainsi $T^{(2)} = m\frac{v_0^2}{\ell_0} + mg\sin(\alpha)\left(1 - \frac{3\theta^2}{2}\right)$; au premier

ordre en θ , la tension est constante durant le mouvement, $T^{(1)} = m\frac{v_0^2}{\ell_0} + mg\sin(\alpha)$.

2. On considère maintenant un frottement solide. Aux forces précédentes il faut ajouter la force \vec{F} colinéaire à la vitesse et qui s'oppose à celle-ci $\vec{F} = F\vec{u}_\theta$, $F > 0 \Leftrightarrow v < 0$ avec $\vec{v} = v\vec{u}_\theta$.

a/ Si le pendule se met en mouvement à partir de $\theta = \theta_1 < 0$, il se déplace dans le sens des θ croissants, c'est-à-dire que $\vec{v} = v\vec{u}_\theta$ avec $v > 0$. La force de frottement s'écrit alors $\vec{F} = -F\vec{u}_\theta$ avec $F > 0$. La relation fondamentale de la dynamique en projection sur \vec{u}_θ donne $m\ell_0\ddot{\theta} = -mg\sin(\alpha)\sin(\theta) - F$ et sur \vec{u}_z , on a toujours $N - mg\cos(\alpha) = 0$. En $\theta = \theta_1$, si le pendule reste immobile, alors $\dot{\theta} = 0$ et $F = -mg\sin(\alpha)\sin(\theta_1) = mg\sin(\alpha)|\sin(\theta_1)|$. L'utilisation de la loi de Coulomb donne alors $\frac{F}{N} \leq f$, c'est-à-dire $\frac{\sin(\alpha)|\sin(\theta_1)|}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)|\sin(\theta_1)| \leq f$. Au moment où le mouvement commence, $\frac{F}{N} = f$ avec $\dot{\theta}(t=0) = 0$ et $\ddot{\theta}(t=0) > 0$, ce qui indique une force qui permet au pendule d'aller dans le bon sens,

$$m\ell_0\ddot{\theta}(t=0) = -mg\sin(\alpha)\sin(\theta) - fmg\cos(\alpha) \geq 0.$$

D'où $mg\sin(\alpha)|\sin(\theta_1)| - fmg\cos(\alpha) \geq 0$ et donc la condition de démarrage du pendule est

$$\tan(\alpha) \geq \frac{f}{|\sin(\theta_1)|}.$$

b/ On part de l'équation du mouvement $m\ell_0\ddot{\theta} = -mg\sin(\alpha)\sin(\theta) - fmg\cos(\alpha)$ que l'on multiplie par $\dot{\theta}$, après intégration on obtient

$$\frac{1}{2}m\ell_0(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_1^2) = mg\sin(\alpha)(\cos(\theta) - \cos(\theta_1)) - fmg(\theta - \theta_1)\cos(\alpha);$$

or $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}(t=0) = 0$, ainsi

$$\ell_0\dot{\theta}^2 + 2fg(\theta - \theta_1)\cos(\alpha) - 2g\sin(\alpha)(\cos(\theta) - \cos(\theta_1)) = 0.$$

c/ Lorsque le mobile A atteint la position $\theta = \theta_2$, la vitesse s'annule, soit

$$2fg(\theta_2 - \theta_1)\cos(\alpha) - 2g\sin(\alpha)(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) = 0;$$

on en déduit $f = \tan(\alpha)\frac{\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}$.

6 Le spin de l'électron

1. Soit Δ l'axe de rotation de l'électron sur lui-même dirigé par le vecteur unitaire \vec{u}_Δ . Le moment cinétique de l'électron autour de son axe s'écrit $\sigma_\Delta = J_\Delta \Omega$. Pour la sphère, $J_\Delta = \frac{2}{5} m R^2$, ainsi $\sigma_\Delta = \frac{2}{5} m \Omega R^2$. L'expérience montre que $\sigma_\Delta \simeq h$, on a donc $R \Omega \simeq \frac{5}{2} \frac{h}{m R}$.

La vitesse d'un point du cercle équatorial est $v = R \Omega$, ainsi $v \simeq \frac{5}{2} \frac{h}{m R}$.

2. L'application numérique est impitoyable pour l'image classique de l'électron, on trouve en effet $v \simeq 2 \cdot 10^{12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit environ 10 000 fois la vitesse de la lumière $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette image classique de l'explication du spin par une rotation de la particule sur elle-même amène à une contradiction importante. En fait, il n'y a pas d'image classique du spin, c'est une caractéristique de la particule au même titre que sa masse ou encore sa charge.

7 Collision avec un astéroïde

1. La seule force à laquelle est soumis l'astéroïde est la force gravitationnelle qui résulte de l'action de la Terre. Cette force est centrale, ce qui signifie que le mouvement de A est plan et que son moment cinétique reste constant, $\vec{\sigma}_M^O = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \text{cte}$. La force est également conservative, ce qui implique que l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de A reste constante. Calculons ces constantes en fonction des conditions initiales :

► $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{r}$. Lorsque A est éloigné de la Terre, sa vitesse est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et reste constante car aucune force n'agit sur l'astéroïde, donc, conformément au principe d'inertie, le mouvement de A est rectiligne uniforme. Dans les conditions initiales, $r \rightarrow \infty$ d'où

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

► $\vec{\sigma}_M^O = (b \vec{u}_y + X \vec{u}_x) \wedge m(-v_0) \vec{u}_x$, X étant l'abscisse de A à l'instant initial. On a donc $\vec{\sigma}_M^O = m b v_0 \vec{u}_z$, soit $\sigma = \|\vec{\sigma}_M^O\| = m b v_0$.

2. Écrivons l'énergie mécanique en coordonnées cylindriques, $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{G M_T m}{r}$. Comme $\vec{\sigma}_M^O = r \vec{u}_r \wedge m r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \sigma \vec{u}_z$, on peut écrire $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{m} \frac{1}{r^2} - \frac{G M_T m}{r}$

et faire apparaître une énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,ef} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{m} \frac{1}{r^2} - \frac{G M_T m}{r}$. L'intégrale première du mouvement peut s'écrire $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,ef} = \frac{1}{2} m v_0^2$.

3. La distance du centre de la Terre à l'astéroïde est représentée par r , cette distance sera minimale si $\dot{r} = 0$. En ce point particulier, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit alors $\mathcal{E}_{p,ef}(r_{\min}) = \frac{1}{2} m v_0^2$. En explicitant on constate que r_{\min} est solution de l'équation du second degré $r_{\min}^2 + \frac{2 G M_T}{v_0^2} r_{\min} - \frac{\sigma^2}{m^2 v_0^2} = 0$. Le produit des racines est négatif, on ne conserve donc

que la solution positive $r_{\min} = -\frac{G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{G M_T}{v_0^2}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{m^2 v_0^2}}$, en remplaçant σ par sa valeur, on

trouve $r_{\min} = \frac{G M_T}{v_0^2} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2 v_0^4}{G^2 M_T^2}} - 1 \right)$. La condition de non-collision est bien évidemment

$R_T < r_{\min}$. Dans la réalité, l'épaisseur de l'atmosphère (une centaine de kilomètres) et des effets non newtoniens doivent être pris en compte, mais la relation obtenue permettrait d'obtenir un bon ordre de grandeur.

8 Une machine tournante

1. a/ La machine tourne autour d'un axe Δ et nous allons appliquer le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à Δ . Les forces motrices forment un couple moteur dont le moment est Γ_0 . Les pertes d'énergie résultent de frottements modélisés par un ensemble de forces de moment résultant $\mathcal{M}_\Delta = -k \omega$; ce moment est proportionnel à la vitesse du moteur, c'est un frottement de type fluide. Soit σ_Δ le moment cinétique de la machine tournante par rapport à l'axe de rotation, $\sigma_\Delta = J_\Delta \omega$, l'application du théorème du moment cinétique scalaire s'écrit

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - k \omega.$$

b/ L'équation différentielle étant linéaire, le régime permanent, c'est-à-dire après un temps de fonctionnement long (voir plus loin ce que l'on appelle long), sera une constante ω_0 ; dans cette phase on a donc $\frac{d\omega}{dt} = 0$, on en déduit que $\omega_0 = \frac{\Gamma_0}{k}$. L'équation différentielle s'écrit alors

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k}{J_\Delta}(\omega_0 - \omega). \text{ On pose } \tau = \frac{J_\Delta}{k}, \text{ temps de relaxation, et on obtient } \boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0 - \omega}{\tau}}.$$

La solution d'une telle équation est la superposition de la solution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, et d'une solution particulière qui est ici $\omega = \omega_0$. Par conséquent, $\omega(t) = \omega_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Compte tenu de la condition initiale $\omega(t=0) = 0$, on obtient

$$\boxed{\omega = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}. \text{ Considérons l'écart relatif entre la vitesse angulaire à l'instant } t \text{ et la}$$

vitesse limite atteinte en régime permanent, nous avons $\frac{\omega_0 - \omega(t)}{\omega_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$. Soit t_1 l'instant auquel cet écart est inférieur à 10^{-2} , $\ln(e^{-\frac{t}{\tau}}) < -2 \ln(10) \Leftrightarrow t > t_1 = 4,6\tau$. On pourra donc dire ici que t est grand si la durée depuis le démarrage est supérieure à $4,6\tau$; la vitesse angulaire du moteur sera alors la vitesse limite, mieux qu'au centième près.

2. a/ Dans ce deuxième cas l'équation différentielle du mouvement possède un second membre dépendant du temps $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0(1 + \eta \cos(\Omega t)) - k\omega$. On peut l'écrire sous la forme $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0 - \omega}{\tau} + \frac{\omega_0}{\tau} \eta \cos(\Omega t)$. En utilisant la relation qui définit $\epsilon(t)$, l'équation devient

$$\boxed{\frac{d\epsilon(t)}{dt} = -\frac{\epsilon(t)}{\tau} + \frac{\eta}{\tau} \cos(\Omega t)}.$$

b/ Cette équation différentielle linéaire fait apparaître un régime sinusoïdal forcé. La solution est donc la superposition de la solution générale sans second membre $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, qui caractérise un régime transitoire car son influence diminue exponentiellement, et d'un régime permanent représenté par une solution particulière de l'équation différentielle. On sait que dans le cas d'un système linéaire, c'est-à-dire régi par une équation différentielle linéaire, la réponse à une excitation sinusoïdale est sinusoïdale; on recherche donc cette solution sous la forme $\epsilon(t) = a \cos(\Omega t - \psi)$. Afin de déterminer les deux inconnues a et ψ , nous allons utiliser la notation complexe. Avec cette notation l'excitateur s'écrit $\frac{\eta}{\tau} e^{i\Omega t}$ et nous allons poser $\forall \epsilon = ae^{-i\psi} e^{i\Omega t}$; ainsi pour retrouver $\epsilon(t)$ il suffit de prendre la partie réelle de $\forall \epsilon$, c'est-à-dire que $\epsilon(t) = \Re(\forall \epsilon)$. L'équation différentielle devient donc $i\Omega ae^{-i\psi} e^{i\Omega t} = -\frac{ae^{-i\psi} e^{i\Omega t}}{\tau} + \frac{\eta}{\tau} e^{i\Omega t}$. On trouve ainsi $ae^{-i\psi} = \frac{\eta}{1 + i\Omega\tau}$.

Le régime permanent s'écrit donc $\epsilon(t) = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \cos(\Omega t - \psi)$, l'amplitude s'écrit donc

$$\boxed{a = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}}}, \text{ et la phase à l'origine } \boxed{\psi = -\arctan(\Omega\tau)} \text{ avec } \boxed{\cos(\psi) > 0}.$$

3. Placer un anneau massif et de grand rayon, c'est augmenter de façon significative le moment d'inertie de la machine tournante. En effet, le moment d'inertie est proportionnel à la masse et le rayon intervient par son carré. Or $a = \frac{\eta}{1 + \Omega^2 \frac{J_\Delta}{k}}$. Si J_Δ augmente, l'amplitude a de la vibration diminue, d'où l'intérêt de rajouter un volant d'inertie.

9 Un marcheur sur une poutre

1. Effectuons l'inventaire des forces qui agissent sur le système :

- ▶ le poids de la poutre appliqué en son centre d'inertie, $\vec{P}_p = m_p \vec{g}$;
- ▶ le poids de l'individu appliqué au point C , $\vec{P}_c = m_c \vec{g}$;
- ▶ la réaction du support en B notée \vec{R}_B ;
- ▶ la réaction du support en A notée \vec{R}_A .

Comme on le voit sur la figure E.13.3, on peut imaginer que lorsque x augmente, la réaction du support en A diminue, le pivotement prendra naissance lorsque \vec{R}_A deviendra nul. La poutre est en équilibre et immobile, par conséquent la résultante des forces est nulle, ainsi $m_p \vec{g} + m_c \vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$. En projection sur \vec{u}_y on trouve $R_A + R_B = (m_p + m_c)g$. La résultante des moments des forces en B est également nulle (on pourrait prendre n'importe quel autre point que B pour aboutir au même résultat), d'où $\overline{BA} \wedge \vec{R}_A + \overline{BC} \wedge m_p \vec{g} + \overline{BC} \wedge m_c \vec{g} = \vec{0}$.

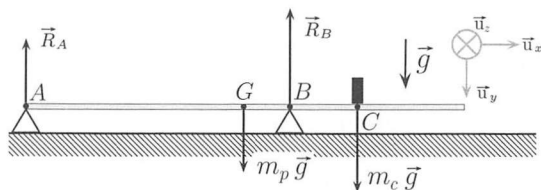


FIG. E.13.3. Bilan des forces.

Or $\overrightarrow{BA} = -\ell \vec{u}_x$, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = (-\ell + \frac{\ell}{2}) \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{BC} = (x - \ell) \vec{u}_x$, la somme des moments des forces en B s'écrit donc $-\ell \vec{u}_x \wedge (-R_A \vec{u}_y) + (\frac{\ell}{2} - \ell) \vec{u}_x \wedge (m_p g \vec{u}_y) + (x - \ell) \vec{u}_x \wedge (m_c g \vec{u}_y) = \vec{0}$, soit $\ell R_A + (\frac{\ell}{2} - \ell) m_p g + (x - \ell) m_c g = 0$. On isole la force inconnue

$$R_A = (1 - \frac{\ell}{2x}) m_p g + (1 - \frac{x}{\ell}) m_c g$$

soit, en prenant $\frac{\ell}{x} = \frac{5}{3}$, $R_A = (m_c + \frac{1}{6} m_p) g - m_c g \frac{x}{\ell}$. Remarquons que dans le cas où $x = \ell$, l'individu est en B et le moment de son poids par rapport à ce point est nul, c'est bien ce que montre la relation précédente : lorsque $x = \ell$, $R_A = \frac{1}{6} M g$ indépendant de m_c .

2. La poutre reste en position horizontale tant que $R_A > 0$; dès que R_A devient nulle, elle décolle de A pour démarrer un mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{u}_z) .

$$R_A > 0 \Leftrightarrow (m_c + \frac{1}{6} m_p) g - m_c g \frac{x}{\ell} > 0 \Leftrightarrow x < x_{\max} = \left(1 + \frac{1}{6} \frac{m_p}{m_c}\right) \ell.$$

La distance maximale que peut atteindre l'individu sans basculement de la poutre est donc

$$x_{\max} = \left(1 + \frac{1}{6} \frac{m_p}{m_c}\right) \ell. \text{ Numériquement avec } \frac{m_p}{m_c} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}, \quad x_{\max} = \frac{9}{8} \ell = 1,125 \text{ m}.$$

3. Lorsque l'individu se place en $x_M + \epsilon$, la poutre commence à basculer, ce qui se traduit par une rotation autour de l'axe fixe (B, \vec{u}_z) et cela tant qu'il n'y a pas de glissement. Remarquons la définition des axes sur la figure E.13.4 qui permettent de définir l'angle θ de rotation dans le sens direct pour éviter tous les problèmes de signe dans l'utilisation du produit vectoriel. Si l'on note T_B la composante tangentielle, colinéaire à la poutre, de la réaction du support et N_B la composante normale, perpendiculaire à la poutre, les lois de Coulomb du frottement indiquent que tant que $\frac{N_B}{|T_B|} < f$, il n'y a pas de glissement.

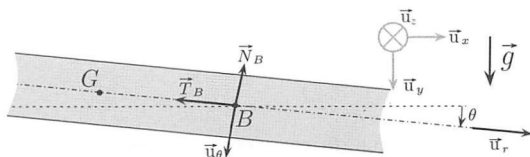


FIG. E.13.4. Bilan des forces.

Nous allons donc calculer ces deux composantes. Sachant que le point G se déplace sur un cercle de centre B et de rayon $R = \|\overrightarrow{BG}\| = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{10} = \frac{\ell}{6}$, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la poutre indique que $m_p \vec{a}_G = \vec{F}_{\text{ext}}$, où \vec{F}_{ext} est la résultante des forces extérieures appliquées à la poutre. Cette relation est parfois appelée « théorème de la résultante dynamique ». L'accélération du centre d'inertie se calcule aisément en coordonnées cylindriques dans le référentiel $(B, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et dans le plan $z = 0$ de rotation,

$$\overrightarrow{BG} = -R \vec{u}_r \implies \vec{v}_G = -R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \implies \vec{a}_G = -R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r.$$

Par ailleurs, un rapide bilan montre que $\vec{F}_{\text{ext}} = (m_c + m_p) \vec{g} - T_B \vec{u}_r - N_B \vec{u}_\theta$, avec $\vec{g} = g(\sin(\theta) \vec{u}_r + \cos(\theta) \vec{u}_\theta)$. Le théorème fournit donc :

► en projection sur \vec{u}_r , $m_p R \dot{\theta}^2 = (m_c + m_p) g \sin(\theta) - T_B$;

► en projection sur \vec{u}_θ , $-m_p R \ddot{\theta} = (m_c + m_p) g \cos(\theta) - N_B$.

Seuls les poids de la poutre et de l'individu possèdent un moment par rapport à B , le théorème du moment cinétique s'écrit donc en B et pour la poutre

$$\frac{d\vec{\sigma}_B}{dt} = J_B \ddot{\theta} \vec{u}_z = \overrightarrow{BG} \wedge m_p \vec{g} + \overrightarrow{BC} \wedge m_c \vec{g},$$

soit $J_{\Delta} \ddot{\theta} \vec{u}_z = -\left(\ell - \frac{L}{2}\right) \vec{u}_r \wedge m_p g \cos(\theta) \vec{u}_{\theta} + (x_{\max} - \ell + \epsilon) \vec{u}_r \wedge m_c g \cos(\theta) \vec{u}_{\theta}$; en projection sur l'axe (B, \vec{u}_z) de rotation, il vient $J_{\Delta} \ddot{\theta} = g \cos(\theta) \ell \left[-\left(1 - \frac{L}{2\ell}\right) m_p + \left(\frac{x_{\max}}{\ell} - 1 + \frac{\epsilon}{\ell}\right) m_c\right]$. L'étude de l'équilibre a montré que $-\left(1 - \frac{L}{2\ell}\right) m_p + \left(\frac{x_{\max}}{\ell} - 1\right) m_c = 0$. Pour la poutre et par rapport à l'axe de rotation, le théorème du moment cinétique s'écrit donc $J_{\Delta} \ddot{\theta} = m_c g \epsilon \cos(\theta)$. En multipliant cette équation par $\dot{\theta}$ et en intégrant, on obtient $\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 = m_c g \epsilon \sin(\theta) + \lambda$. La constante d'intégration λ s'obtient à partir des conditions initiales, qui sont ici $\theta(t=0) = 0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$, on trouve alors $\lambda = 0$. Il ne reste plus qu'à injecter ces expressions dans les relations obtenues en utilisant le théorème de la résultante dynamique. En utilisant l'expression de J_B et de R en fonction de L , on trouve d'une part $T_B = (m_p + m_c(1 - \frac{9\epsilon}{5L})) g \sin(\theta)$ et d'autre part $N_B = (m_p + m_c(1 + \frac{9\epsilon}{10L})) g \cos(\theta)$. Il n'y aura pas de glissement tant que la relation $T_B < f N_B$ sera vérifiée, soit $\tan(\theta) < \frac{1+u}{1-2u} f$ avec $u = \frac{18\epsilon}{35L}$ car on se souvient du fait que $\frac{m_c}{m_p} = \frac{4}{3}$.

Méthode

Cette méthode de résolution d'un problème dans lequel on cherche à déterminer l'expression des réactions en vue de l'étude des contacts est générique : on commence par le principe fondamental de la dynamique pour obtenir les expressions de ces réactions en fonction des paramètres du mouvement, puis on utilise le théorème du moment cinétique et/ou la conservation de l'énergie pour obtenir l'expression de ces paramètres et terminer le problème.

Chapitre 14

1 Cinétique des gaz

1. L'énergie cinétique moyenne de chaque molécule vérifie $\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$; la vitesse quadratique moyenne est donc telle que

$$u^2 = \frac{3k_B T}{m} = \frac{3k_B N_A T}{m N_A} = \frac{3RT}{M}$$

où M est la masse molaire du gaz. La masse volumique du gaz s'écrit $\mu = \frac{nM}{V}$ où nM est la masse de n moles occupant un volume V . D'après l'équation d'état du gaz parfait,

$$RT = \frac{pV}{n} = \frac{pM}{\mu}, \text{ d'où } u = \sqrt{\frac{3p}{\mu}}.$$

2. On calcule $u = \sqrt{\frac{3 \times 10^5}{1,2}}$ soit $u = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La vitesse quadratique des molécules de dioxygène est donnée par

$$u(\text{O}_2) = \sqrt{\frac{3RT}{M(\text{O}_2)}} = \sqrt{\frac{3 \times 8,31 \times 293}{32 \cdot 10^{-3}}} = 478 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

celle des molécules de diazote par

$$u(\text{N}_2) = \sqrt{\frac{3RT}{M(\text{N}_2)}} = \sqrt{\frac{3 \times 8,31 \times 293}{28 \cdot 10^{-3}}} = 511 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

Compte tenu des proportions relatives de O_2 et de N_2 dans l'air, on peut définir une vitesse quadratique moyenne $\bar{u} = 0,8u(\text{N}_2) + 0,2u(\text{O}_2) = 504 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette grandeur est bien comparable à la vitesse quadratique moyenne calculée à partir de la masse volumique de l'air.

3. L'énergie cinétique moyenne d'une molécule de gaz parfait ne dépend que de la température du gaz. Pour une température donnée, plus les molécules considérées ont une masse petite, plus leur vitesse quadratique moyenne est grande pour obtenir une même énergie cinétique. On s'attend donc à $u(\text{He}) > u_{\text{air}}$ car $M(\text{He}) < M(\text{O}_2)$ et $M(\text{He}) < M(\text{N}_2)$.

On calcule $u(\text{He}) = \sqrt{\frac{3RT}{M(\text{He})}} = \sqrt{\frac{3 \times 8,31 \times 293}{4 \cdot 10^{-3}}} = 1,35 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 Vers le zéro absolu

1. La température cinétique est donnée par $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$; la vitesse quadratique moyenne

vaut donc $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$.

La limite $T = 0$ correspond à $u = 0$: les atomes seraient au repos (dans la pratique, la plupart des gaz se liquéfient quand la température approche le zéro absolu). Leur position serait donc entièrement déterminée, ainsi que leur vitesse (nulle), ce qui est en contradiction avec le principe d'indétermination de Heisenberg (inégalité de Heisenberg spatiale).

2. La quantité de mouvement moyenne d'un atome est de l'ordre de $p = mu$. La longueur d'onde de de Broglie d'un atome vaut donc

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} = \frac{h}{m} \sqrt{\frac{m}{3k_B T}},$$

soit $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{3mk_B T}}$.

3. La longueur d'onde λ peut s'interpréter comme l'extension spatiale de l'atome (ou du train d'onde la représentant).

Si $\lambda \ll d$, distance moyenne entre deux atomes, on peut négliger les effets quantiques (les atomes sont bien individualisés), et le modèle classique convient.

Si $\lambda \geq d$, les effets quantiques deviennent importants : on observe un recouvrement des trains d'ondes entre les atomes voisins.

La limite entre ces deux domaines correspond à une température T_s telle que $\lambda = d$, soit

$$\sqrt{\frac{h^2}{3mk_B T_s}} = \frac{1}{n^{1/3}},$$

d'où

$$k_B T_s = \frac{h^2 n^{2/3}}{3m}.$$

La description classique est acceptable quand $T \gg T_s$, mais ne peut plus être utilisée quand $T \leq T_s$, les effets quantiques ne pouvant plus être négligés. Le raisonnement classique consistant à dire que $u \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow 0$ n'est donc pas correct.

4. La masse d'un atome vaut $m = \frac{M}{N_A}$, et la densité est donnée par $n = \frac{\mu}{m} = \frac{\mu N_A}{M}$. La température cherchée s'écrit donc

$$T_s = \frac{1}{k_B} \frac{h^2}{3} \frac{N_A}{M} \mu^{2/3} \left(\frac{N_A}{M}\right)^{2/3} = \frac{h^2 \mu^{2/3}}{3k_B} \left(\frac{N_A}{M}\right)^{5/3} \Rightarrow \boxed{T_s = 11,2 \text{ K}}.$$

Remarque Le modèle considéré est très simplifié (on a assimilé l'hélium liquide à un gaz parfait); cependant, il donne un ordre de grandeur réaliste : en-dessous d'une température $T = 2,17 \text{ K}$, l'hélium passe dans un état qualifié de superfluide, dominé par des effets quantiques (en particulier, l'hélium superfluide est caractérisé par une viscosité rigoureusement nulle).

3 Enrichissement de l'uranium

1. Le raisonnement est le même que celui suivi à la section II.2 (voir page 382) pour décompter les molécules heurtant une section de paroi.

Les particules qui vont traverser l'orifice de la gauche vers la droite pendant dt sont nécessairement dans un cylindre de section S et de longueur $u dt$.

D'après l'isotropie de la distribution des vitesses, seul $1/6^{\circ}$ de ces molécules se déplace selon $+\vec{u}_z$ et traverseront le trou.

Le nombre de molécules par unité de volume dans le compartiment (1) étant N_1/V , le nombre de molécules dans le cylindre de volume $Su dt$, en gris sur la figure E.14.1, vaut $Su dt \times N_1/V$,

d'où $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} Su dt \frac{N_1}{V}$.

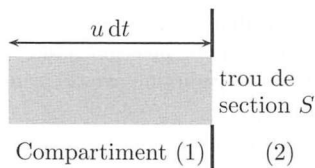


FIG. E.14.1. Bilan de particules.

Avec le même raisonnement appliqué aux particules du compartiment (2) susceptibles de passer à travers S vers le compartiment (1) entre t et $t + dt$, on obtient $dN_{2 \rightarrow 1}(t) = \frac{1}{6} Su dt \frac{N_2(t)}{V}$.

2. Pendant dt , $dN_{1 \rightarrow 2}$ molécules quittent le compartiment (1) tandis que $dN_{2 \rightarrow 1}$ entrent dans ce compartiment ; la variation du nombre de molécules du compartiment (1) vaut donc

$$dN_1 = dN_{2 \rightarrow 1} - dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} Su dt \frac{N_2(t)}{V} - \frac{1}{6} Su dt \frac{N_1(t)}{V}$$

ce qui conduit, en divisant par dt , à l'équation différentielle

$$\frac{dN_1}{dt}(t) = \frac{Su}{6V} (N_2(t) - N_1(t)). \quad (14.1)$$

Inversement, pendant dt , $dN_{2 \rightarrow 1}$ molécules quittent le compartiment (2) tandis que $dN_{1 \rightarrow 2}$ entrent dans ce compartiment ; la variation du nombre de molécules du compartiment (2) vaut donc $dN_2 = dN_{1 \rightarrow 2} - dN_{2 \rightarrow 1} = -dN_1$, d'où

$$\frac{dN_2}{dt}(t) = \frac{Su}{6V} (N_1(t) - N_2(t)). \quad (14.2)$$

La différence des équations 14.1 et 14.2 s'écrit

$$\frac{dN_1}{dt} - \frac{dN_2}{dt} = 2 \frac{Su}{6V} (N_2(t) - N_1(t))$$

d'où

$$\frac{dN_1(t) - N_2(t)}{dt} + \frac{Su}{3V} (N_1(t) - N_2(t)) = 0. \quad (14.3)$$

L'équation 14.3 est une équation différentielle homogène du premier ordre vérifiée par la fonction $\delta(t) = N_1(t) - N_2(t)$,

$$\frac{d\delta}{dt}(t) + \frac{\delta(t)}{\tau} = 0 \quad (14.4)$$

en posant $\tau = \frac{3V}{Su}$, constante de temps caractéristique du phénomène.

La solution de l'équation (14.4) est de la forme $\delta(t) = \delta(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec la condition initiale $\delta(0) = N_1(0) - N_2(0) = N - 0 = N$. On a donc

$$N_1(t) - N_2(t) = N e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La conservation du nombre de molécules dans les deux compartiments s'écrit

$$N_1(t) + N_2(t) = N_1(0) + N_2(0) = N.$$

On en déduit (voir figure E.14.2)

$$N_1(t) = \frac{N}{2} \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{et} \quad N_2(t) = \frac{N}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

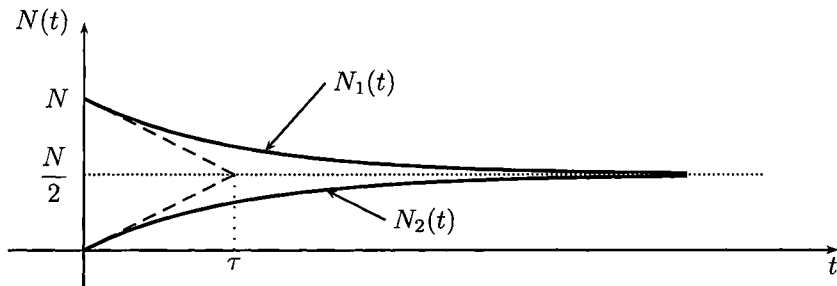


FIG. E.14.2. Évolution des nombres de particules en fonction du temps.

On remarque que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N_2(t) = \frac{N}{2}.$$

Le système tend vers un état où le nombre de particules est le même dans les deux compartiments.

Remarque On obtient ce résultat car les deux compartiments ont le même volume. On verra au chapitre 17 que l'état final correspond à une densité volumique (grandeur intensive) de particules uniforme.

On calcule $\tau = \frac{3 \times 32 \cdot 10^{-3}}{\pi(0,01 \cdot 10^{-6})^2} \sqrt{\frac{352 \cdot 10^{-3}}{3 \times 8,314 \times 403}}$, d'où $\tau = 1,8 \cdot 10^{12}$ s, soit 57 milliers d'années. L'effusion est très lente, le nombre de molécules dans le compartiment (1) peut être considéré comme à peu près constant, avec $N_1(t) \gg N_2(t)$.

3. Pendant dt , $dN_{1 \rightarrow 2}$ molécules traversent l'orifice dans le sens (1) \rightarrow (2), et $dN_{2 \rightarrow 1}$ molécules le traversent dans le sens (2) \rightarrow (1); le nombre de molécules qui traversent S , en le comptant algébriquement positivement dans le sens (1) \rightarrow (2) est donc $dN_{1 \rightarrow 2} - dN_{2 \rightarrow 1}$, soit par unité de temps

$$\Phi = \frac{dN_{1 \rightarrow 2} - dN_{2 \rightarrow 1}}{dt} = \frac{Su}{6V} (N_1(t) - N_2(t)) = \frac{Su}{6V} N e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Compte tenu de la valeur de τ , on a vu que $e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq 1$, d'où $\Phi = \frac{Su}{6V} N$. Avec $n^* = \frac{N}{V}$ et en

utilisant l'expression $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ donnée, on obtient $\Phi = \frac{Sn^*}{6} \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

4. a/ Les temps caractéristiques relatifs aux deux isotopes sont $\tau_5 = \frac{3V}{Su_5} = \frac{3V}{S} \sqrt{\frac{M_5}{3RT}}$ et

$\tau_8 = \frac{3V}{Su_8} = \frac{3V}{S} \sqrt{\frac{M_8}{3RT}}$. On en déduit $\frac{\tau_8}{\tau_5} = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}}$. Avec $M_5 = 235 + 6 \times 19 = 349 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

et $M_8 = 238 + 6 \times 19 = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, on calcule $\frac{\tau_8}{\tau_5} = 1,004$.

L'hexafluorure d'uranium $^{235}\text{UF}_6$ passe donc plus rapidement dans le compartiment (2) que $^{238}\text{UF}_6$ dont le temps caractéristique d'effusion est plus grand.

Au bout d'un temps court, le gaz dans le compartiment (2) contient donc proportionnellement plus d'isotope 235 que le gaz dans le compartiment (1) : le mélange est enrichi en isotope 235.

Remarquons qu'il ne faut pas attendre avant d'isoler le gaz du compartiment (2), car dans l'état final les proportions redeviennent les mêmes (mais compte tenu des valeurs des temps caractéristiques, on sera toujours très loin de cette situation).

b/ On a $\Phi_5 = \frac{S}{6} n_5^* \sqrt{\frac{3RT}{M_5}}$ et $\Phi_8 = \frac{S}{6} n_8^* \sqrt{\frac{3RT}{M_8}}$, d'où

$$R_d = \frac{\Phi_5}{\Phi_8} = \frac{n_5^*}{n_8^*} \sqrt{\frac{M_8}{M_5}} = R_o \sqrt{\frac{M_8}{M_5}}.$$

On en déduit $\eta_e = \frac{R_d}{R_o} = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}} = \frac{\tau_8}{\tau_5} = 1,004$.

Le taux d'enrichissement est supérieur à 1 : le mélange est bien enrichi en isotope 235.

c/ Le taux d'enrichissement après le passage à travers une paroi est η_e . Après la traversée de p parois, il vaut η_e^p . Partant d'une proportion initiale $R_o = 0,071$ %, la proportion après la traversée de p parois vaut $R_d = \eta_e^p R_o$. Pour obtenir $R_d = 4$ %, il faut $\eta_e^p = \frac{R_d}{R_o} = \frac{4}{0,71}$, d'où $p \ln \eta_e = \ln\left(\frac{4}{0,71}\right)$, avec $\eta_e = \sqrt{\frac{352}{349}}$. On en déduit, en arrondissant à l'entier immédiatement supérieur, $p = 404$.

4 Remplissage d'une bouteille de plongée

1. Le gaz admis a un volume V_{\max} à la pression p_{atm} (le volume dans la bouteille est V_b , la pression initiale est p_{atm}). Lorsque le piston change de sens, S se ferme et S' s'ouvre. La température restant constante et le gaz étant parfait, $p_{\text{atm}}(V_{\max} + V_b) = p_b(V_{\min} + V_b)$ soit

$$p_b = \frac{(V_{\max} + V_b)}{(V_{\min} + V_b)} p_{\text{atm}}.$$

Notons n_i le nombre de moles d'air initialement dans la bouteille et $n_f = n_i + \Delta n$ après un aller-retour. On a $n_i = \frac{p_{\text{atm}} V_b}{RT_a}$ et $n_f = \frac{p_b V_b}{RT_a}$, donc

$$\Delta n = \frac{V_b}{RT_a} \left(\frac{p_{\text{atm}}(V_{\max} + V_b)}{V_{\min} + V_b} - p_{\text{atm}} \right) = \frac{V_b}{RT_a} \frac{p_{\text{atm}}(V_{\max} - V_{\min})}{V_{\min} + V_b}$$

Avec l'hypothèse $V_{\min} \ll V_b$, on obtient $\Delta n = \frac{p_{\text{atm}}(V_{\max} - V_{\min})}{RT_a}$, soit $\Delta n = 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

2. Notons $p_b = p$ la pression dans la bouteille. La soupape S' s'ouvre quand la pression dans le compresseur est égale à la pression dans la bouteille. La compression étant isotherme et le gaz parfait, on obtient $V' = \frac{p_{\text{atm}} V_{\max}}{p}$. Après l'admission, la température reste constante lors de la compression, donc $p'(V_{\min} + V_b) = p(V' + V_b)$, d'où

$$p' = \frac{p_{\text{atm}} V_{\max} + V_b p}{V_b + V_{\min}}$$

donc $\Delta p = \frac{p_{\text{atm}} V_{\max} + V_b p}{V_b + V_{\min}} - p$ et ainsi

$$\Delta p = \frac{p_{\text{atm}} V_{\max} - p V_{\min}}{V_b + V_{\min}}.$$

Le remplissage de la bouteille s'arrête lorsque $\Delta p = 0$, c'est-à-dire quand $p_{\text{atm}} V_{\max} = p V_{\min}$, d'où : $p_{\text{max}} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} p_{\text{atm}}$ ce qui correspond au cas où la compression dans le piston ne suffit pas à ouvrir la soupape S' ($V' = V_{\min}$).

3. Numériquement, $\Delta p = 0,33 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $p_{\text{max}} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.

4. $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \alpha \frac{p_{\text{atm}} V_{\text{max}} - p V_{\text{min}}}{V_b + V_{\text{min}}}$. Donc, d'après l'approximation proposée par l'énoncé :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\alpha V_{\text{min}}}{V_b + V_{\text{min}}} p = \alpha \frac{p_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{V_b + V_{\text{min}}}$$

5. Puisque $V_{\text{min}} \ll V_b$, l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{dp}{dt} + \frac{p}{\tau} = \alpha \frac{p_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{V_b} = \frac{p_{\text{max}}}{\tau}$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$p(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + p_{\text{max}},$$

car $p(t) = p_{\text{max}}$ est une solution particulière de l'équation complète. La constante A est déterminée par la condition initiale $p(0) = p_{\text{atm}} = A + p_{\text{max}}$, d'où

$$p(t) = (p_{\text{atm}} - p_{\text{max}}) e^{-\frac{t}{\tau}} + p_{\text{max}}$$

Le temps T pour atteindre la pression $p = 50$ bar est $T = \tau \ln \frac{p_{\text{max}} - p_{\text{atm}}}{p_{\text{max}} - p}$ soit, après calcul numérique, $T = 42,7$ s.

5 Équilibre diphasé dans une chaudière

1. Dans l'état initial (à 100 °C), le volume de liquide étant Sh , la masse de liquide vaut ρSh et la quantité de liquide (en moles) $n_\ell = \frac{\rho Sh}{M}$. Le volume occupé par la vapeur est $S(L - h)$; en utilisant l'équation d'état du gaz parfait, on en déduit la quantité de vapeur : $n_v = \frac{p_{\text{sat}}(100 \text{ °C}) S(L - h)}{RT_0}$ en notant $T_0 = 100 \text{ °C}$ la température initiale. La quantité totale d'eau vaut donc

$$n_{\text{eau}} = n_\ell + n_v = \frac{\rho Sh}{M} + \frac{p_{\text{sat}}(100 \text{ °C}) S(L - h)}{RT_0}$$

Quand la température vaut $T_1 = 200 \text{ °C}$, la pression vaut $p_{\text{sat}}(200 \text{ °C})$ car on fait l'hypothèse d'une coexistence de liquide et de vapeur. Le volume de liquide étant $S(h - x)$, la quantité de liquide vaut maintenant $n'_\ell = \frac{\rho S(h - x)}{M}$. Le volume occupé par la vapeur valant $S(L - h + x)$, on en déduit comme précédemment la quantité de gaz : $n'_v = \frac{p_{\text{sat}}(200 \text{ °C}) S(L - h + x)}{RT_1}$.

La quantité totale d'eau, inchangée, s'écrit alors

$$n_{\text{eau}} = n'_\ell + n'_v = \frac{\rho S(h - x)}{M} + \frac{p_{\text{sat}}(200 \text{ °C}) S(L - h + x)}{RT_1}$$

En identifiant les deux expressions de n_{eau} , on obtient

$$\frac{\rho Sh}{M} + \frac{p_{\text{sat}}(100 \text{ °C}) S(L - h)}{RT_0} = \frac{\rho S(h - x)}{M} + \frac{p_{\text{sat}}(200 \text{ °C}) S(L - h + x)}{RT_1}$$

En notant $p_0 = p_{\text{sat}}(100 \text{ °C})$, on a $p_{\text{sat}}(200 \text{ °C}) = 2^4 p_0 = 16 p_0$. Après simplification, l'égalité précédente s'écrit alors

$$\frac{p_0}{RT_0} (L - h) = -\frac{\rho hox}{M} + \frac{16 p_0}{RT_1} (L - h + x)$$

d'où

$$x \left[\frac{16 p_0}{RT_1} - \frac{\rho}{M} \right] = \frac{p_0}{RT_0} (L - h) - \frac{16 p_0}{RT_1} (L - h)$$

On en déduit $x = (L - h) \frac{\frac{1}{T_0} - \frac{16}{T_1}}{\frac{16}{T_1} - \frac{\rho R}{M p_0}}$, soit $x = 6,1$ mm.

1. Ne pas oublier d'exprimer les températures en kelvins.

2. Dans le cas où $h = 5$ mm, la relation précédente conduit à $x = 6,8$ mm, soit $x > h$ ce qui est impossible. Il ne reste donc pas de liquide dans l'état final. Les n_{eau} moles d'eau sont entièrement sous forme vapeur, à la température T_1 , sous la pression p_f . Le volume valant SL , l'équation d'état conduit à

$$n_{\text{eau}} = \frac{\rho Sh}{M} + \frac{p_{\text{sat}}(100^\circ\text{C})S(L-h)}{RT_0} = \frac{p_f SL}{RT_1}$$

On en déduit

$$p_f = \frac{\rho h}{ML} RT_1 + p_0 \frac{T_1}{T_0} \left(1 - \frac{h}{L}\right) \Rightarrow p_f = 12,2 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 12,2 \text{ bar}.$$

6 Comportement d'un gaz réel

1. D'après l'équation d'état du gaz parfait, on remarque que Z est sans dimension. Pour un gaz parfait, $Z_{\text{GP}} = 1$.

Le volume molaire du gaz parfait s'écrit $V_{\text{m,GP}} = \frac{V}{n} = \frac{RT}{p}$. On a donc $Z = \frac{p}{RT} \frac{V}{n}$, soit comme $V_{\text{m}} = \frac{V}{n}$, $Z = \frac{V_{\text{m}}}{V_{\text{m,GP}}}$.

2. Le volume molaire du gaz parfait étant donné par $V_{\text{m,GP}} = \frac{RT}{p}$, on peut écrire pour la compression du gaz parfait

$$\frac{V_{\text{m,GP},2}}{V_{\text{m,GP},1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Pour le gaz réel, on peut écrire

$$V_{\text{m},1} = Z(p_1, T_0) \frac{RT_0}{p_1} \quad \text{et} \quad V_{\text{m},2} = Z(p_2, T_0) \frac{RT_0}{p_2}$$

d'où

$$\frac{V_{\text{m},2}}{V_{\text{m},1}} = \frac{Z(p_2, T_0) p_1}{Z(p_1, T_0) p_2} = \frac{Z(p_2, T_0) V_{\text{m,GP},2}}{Z(p_1, T_0) V_{\text{m,GP},1}}.$$

Si $Z(p, T_0)$ est fonction croissante de la pression, $Z(p_2, T_0) > Z(p_1, T_0)$, et $\frac{V_{\text{m},2}}{V_{\text{m},1}} > \frac{V_{\text{m,GP},2}}{V_{\text{m,GP},1}}$: la diminution du volume molaire du gaz réel est plus faible que celle du gaz parfait ; ce gaz est moins compressible que le gaz parfait. Un gaz réel est donc d'autant moins compressible que la pente de $Z(p, T_0)$, fonction de p , est élevée.

3. On constate que pour tous les gaz considérés, et à toute température

$$\lim_{p_r \rightarrow 0} Z = 1.$$

Les gaz se comportent comme un gaz parfait à très basse pression : les distances inter-moléculaires sont alors suffisamment grandes pour que l'on puisse négliger les interactions entre les molécules des gaz.

À température élevée (courbe $T_r = 2$), $Z \simeq 1$ sur la plage de pression $0 < p_r < 4,5$: les gaz se comportent sensiblement comme un gaz parfait. À haute température, l'énergie cinétique des molécules augmente ; on peut alors négliger (tant que la pression n'est pas trop élevée) l'énergie potentielle d'interaction devant l'énergie cinétique microscopique.

Pour tous les gaz étudiés, $Z < 1$: leur volume molaire est plus faible que celui du gaz parfait (pour les mêmes conditions de température et de pression). Cela s'explique par les forces attractives entre les molécules.

Remarque Cette dernière propriété n'est pas vérifiée pour tous les gaz. Par exemple pour H_2 , $Z > 1$.

L'ensemble des gaz étudiés suivent le même comportement :

► à « basse » pression ($p < p_s$), Z est fonction décroissante de la pression : les gaz sont plus compressibles que le gaz parfait ;

► à « haute » pression ($p > p_s$), Z est fonction croissante de la pression : les gaz sont moins compressibles que le gaz parfait.

La pression seuil p_s qui sépare ces deux types de comportement augmente avec la température.

Remarque Utiliser les coordonnées réduites permet de comparer différents gaz entre eux. Parler de « température élevée » ne veut rien dire en soi ; il faut comparer la température à la température critique.

Chapitre 15

1 Transformation polytropique

1. Quand $k = 1$, la relation s'écrit $pV = \text{cte}$. Comme $pV = nRT$, on en déduit $T = \text{cte}$: il s'agit d'une transformation isotherme.

Quand $k = 0$, la relation s'écrit $p = \text{cte}$: il s'agit d'une transformation isobare.

2. Pour une transformation polytropique,

$$pV^k = p_1 V_1^k = p_2 V_2^k.$$

Le travail est donné par

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -p_1 V_1^k \int_{V_1}^{V_2} V^{-k} dV.$$

Si $k \neq 1$, on a

$$W = -p_1 V_1^k \left[\frac{V^{1-k}}{1-k} \right]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1^k}{k-1} (V_2^{1-k} - V_1^{1-k}) = \frac{1}{k-1} (p_2 V_2^k V_2^{1-k} - p_1 V_1^k V_1^{1-k})$$

en utilisant le fait que $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$, d'où finalement

$$W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{k-1} = \frac{nR(T_2 - T_1)}{k-1}.$$

Si $k = 1$, on a

$$W = -p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

On retrouve l'expression du travail reçu lors d'une transformation isotherme,

$$W = -nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nRT_1 \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

2 Compression d'un gaz réel

Le travail reçu s'écrit

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

avec $p = \frac{nRT_0}{V-nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$, d'où

$$W = -nRT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V-nb} + n^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2}.$$

Le travail nécessaire à la compression est donné par

$$W = -nRT_0 \ln \left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \right) + n^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Application numérique : les volumes sont donnés en L, c'est-à-dire en dm^3 . Nous pouvons donc conserver les valeurs en litre des volumes, et les valeurs données (en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$) pour b car le terme logarithmique fait intervenir le rapport de deux volumes.

En revanche, il faut revenir au système international pour le dernier terme de l'expression du travail, $a = 140,8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-1}$, $V_1 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ et $V_2 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. On calcule

$$W = 8,314 \times 300 \times \ln \left(\frac{10 - 0,0391}{1 - 0,0391} \right) + 140,8 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}} \right) = 5\,706 \text{ J}.$$

En considérant l'azote comme un gaz parfait, on obtient

$$W = 8,314 \times 300 \times \ln 10 = 5\,743 \text{ J}.$$

L'écart est inférieur à 1 %.

Remarque Le terme $n^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$ est négatif pour une compression ($V_2 < V_1$), et positif pour une détente. Comme $W_{\text{comp}} > 0$ et $W_{\text{dét}} < 0$, il entraîne une diminution (en valeur absolue) du travail échangé par rapport au cas du gaz parfait : ce terme traduisant les interactions attractives entre les molécules du gaz, on s'attend, lors d'une détente, à récupérer une énergie inférieure avec un gaz réel qu'avec un gaz parfait.

3 Transformation cyclique

1. Il est inutilement compliqué de déterminer le travail par un calcul intégral à partir du travail élémentaire δW . Il suffit d'exprimer l'aire du cycle, qui est un triangle rectangle,

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{p_0}{2} \times \frac{V_0}{2} = \frac{p_0 V_0}{8}.$$

Le cycle étant parcouru dans le sens rétrograde, il est moteur, donc $W < 0$ et $W = -\frac{p_0 V_0}{8}$.

2. Pour un gaz parfait, une transformation isotherme est représentée par une branche d'hyperbole en coordonnées (p, V) . Ici, la relation $p(V)$ est affine : il ne peut s'agir d'une transformation isotherme.

4 Air comprimé

1. Le système défini est ouvert, indéformable.

2. Initialement, le récipient contient $n_0 = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$ moles d'air et la pompe $n_p = \frac{p_0 V_p}{RT_0}$ moles d'air. À la fin de la première phase, le récipient contient $n_0 + n_p$ moles d'air à la température T_0 . La pression est donnée par l'équation d'état $p_1 V_0 = (n_0 + n_p)RT_0 = p_0 V_0 + p_0 V_p$. On en déduit $p_1 = p_0 \left(1 + \frac{V_p}{V_0} \right)$, soit $p_1 = p_0 (1 + \alpha)$.

Après la i -ème phase de gonflage, le récipient contient $n_0 + i n_p$ moles d'air à la température T_0 , d'où

$$p_i V_0 = (n_0 + i n_p)RT_0 = p_0 V_0 + i p_0 V_p.$$

On a donc $p_i = p_0 (1 + i\alpha)$.

3. Dès que l'on pousse le piston, la pression dans la pompe est supérieure à p_0 , pression dans le récipient : la soupape S_2 est ouverte pendant toute la durée de la première phase de gonflage.

Considérons le système constitué du gaz présent dans le récipient et dans le piston. Sa température T_0 et sa pression p sont uniformes. Il subit une compression isotherme l'amenant du volume $V_0 + V_p$ au volume V_0 . Le travail reçu est

$$W_1 = (n_0 + N_p)RT_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_p}{V_0} \right) = p_0(V_0 + V_p) \ln \left(\frac{V_0 + V_p}{V_0} \right),$$

soit $W_1 = p_0 V_0 (1 + \alpha) \ln(1 + \alpha)$.

4. Au début de la i -ème phase de gonflage, la pression dans le récipient est p_{i-1} , et la pression dans la pompe $p_0 < p_{i-1}$: la soupape S_2 reste donc fermée. Il faut décomposer cette phase en deux étapes.

1^{re} étape : lorsque l'on pousse le piston, on commence par faire subir à l'air dans la pompe une compression isotherme jusqu'à la pression p_{i-1} où la soupape S_2 s'ouvre. Le travail reçu vaut alors

$$W'_i = n_p RT_0 \ln \frac{p_{i-1}}{p_0} = p_0 V_p \ln(1 + (i-1)\alpha) = \alpha p_0 V_0 \ln(1 + (i-1)\alpha).$$

2^e étape : la soupape S_2 s'ouvre ; le récipient contenant $n_0 + (i-1)n_p$ moles d'air et la pompe n_p moles à la pression p_{i-1} , on fait subir à ces $n_0 + in_p$ moles une compression isotherme, de la pression p_{i-1} à la pression p_i . Le travail reçu vaut alors

$$\begin{aligned} W''_i &= (n_0 + in_p)RT_0 \ln \left(\frac{p_i}{p_{i-1}} \right) = p_0(V_0 + iV_p) \ln \left(\frac{1 + i\alpha}{1 + (i-1)\alpha} \right) \\ &= p_0 V_0 (1 + i\alpha) \ln \left(\frac{1 + i\alpha}{1 + (i-1)\alpha} \right). \end{aligned}$$

Le travail total reçu lors de la i -ème phase de compression vaut donc

$$\begin{aligned} W_i &= \alpha p_0 V_0 \ln(1 + (i-1)\alpha) + p_0 V_0 (1 + i\alpha) \ln \left(\frac{1 + i\alpha}{1 + (i-1)\alpha} \right) \\ &= p_0 V_0 [\alpha \ln(1 + (i-1)\alpha) + (1 + i\alpha) \ln(1 + i\alpha) - (1 + i\alpha) \ln(1 + (i-1)\alpha)], \end{aligned}$$

soit après simplification

$$W_i = p_0 V_0 [(1 + i\alpha) \ln(1 + i\alpha) - [1 + (i-1)\alpha] \ln(1 + (i-1)\alpha)].$$

On vérifie que pour $\alpha = 1$ on retrouve le résultat établi à la question précédente.

Le travail peut s'écrire $W_i = p_0 V_0 f(i)$ avec

$$f(i) = (1 + i\alpha) \ln(1 + i\alpha) - (1 + (i-1)\alpha) \ln(1 + (i-1)\alpha).$$

La dérivée de la fonction $f(x) = (1 + x\alpha) \ln(1 + x\alpha) - (1 + (x-1)\alpha) \ln(1 + (x-1)\alpha)$ vaut

$$f'(x) = \alpha \ln(1 + x\alpha) + \alpha - \alpha \ln(1 + (x-1)\alpha) - \alpha = \alpha \ln \left(\frac{1 + x\alpha}{1 + (x-1)\alpha} \right).$$

Comme $1 + x\alpha > 1 + (x-1)\alpha$, on a $f'(x) > 0$: la fonction $f(x)$ est croissante et W_i augmente avec i . On a donc $W_{i+1} > W_i$. Pousser le piston demande d'autant plus d'énergie au fur et à mesure que la pression dans le récipient augmente ; ce n'est pas uniquement à cause de la fatigue que les derniers coups de pompe sont les plus difficiles !

5. Les termes intermédiaires se simplifiant mutuellement, on obtient le travail total

$$W_t = \sum_{i=1}^n W_i = p_0 V_0 (1 + n\alpha) \ln(1 + n\alpha).$$

6. On veut $p_n = (1 + n\alpha)p_0 = 10p_0$, d'où $n\alpha = 9$ et $n = 90$.

Le travail total vaut $W_t = p_0 V_0 (1 + 9) \ln(1 + 9) = 10^5 \times 10^{-3} \times 10 \ln 10$, soit $W_t = 2,3 \text{ kW}$.

Chapitre 16

1 Transfert thermique par effet Joule

1. Le piston étant immobile, le gaz subit une évolution isochore ; il ne reçoit donc pas de travail, $W = 0$. Le volume étant inchangé, $V_2 = V_1$. Le premier principe appliqué au système $\mathcal{S} = \{\text{les } n \text{ moles de gaz}\}$ s'écrit $\Delta U = Q$. La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est rI^2 ; pendant une durée τ , elle cède donc au système \mathcal{S} le transfert thermique $Q = rI^2\tau$. La variation d'énergie interne de n moles de gaz est donnée par

$$\Delta U = C_v(T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1).$$

On a donc $\frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = rI^2\tau$, d'où $T_2 = T_1 + \frac{(\gamma-1)rI^2\tau}{nR}$.

Le volume étant constant, l'équation d'état du gaz parfait conduit à $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$, d'où $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$,

soit $p_2 = p_1 \left[1 + \frac{(\gamma-1)rI^2\tau}{nRT_1} \right]$.

2. L'équilibre mécanique du piston dans l'état final conduit à $p_2 = p_a$.

Le gaz subit maintenant une évolution monobare. Le transfert thermique reçu par le gaz est donc donné par la variation de son enthalpie, $\Delta H = Q_p$, soit $\frac{2nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = rI^2\tau$, d'où

$$T_2 = T_1 + \frac{(\gamma-1)rI^2\tau}{\gamma nR}.$$

La pression étant constante, l'équation d'état du gaz parfait conduit à $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$, d'où

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}, \text{ soit } V_2 = V_1 \left[1 + \frac{(\gamma-1)rI^2\tau}{\gamma nRT_1} \right].$$

Remarque On aurait pu écrire le premier principe sous la forme du bilan $\Delta U = Q + W$, avec $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$ et $W = -p_a(V_2 - V_1)$ pour une évolution monobare. On retrouve les mêmes résultats avec un peu plus de calculs.

2 Transfert thermique à volume total constant

1. a/ Le volume du système \mathcal{S} étant constant, le travail qu'il reçoit est nul, $W = 0$. L'enceinte étant calorifugée, le seul transfert thermique reçu est fourni par la résistance par effet Joule, $Q = rI^2\tau$. Le premier principe s'écrit alors $\Delta U = W + Q = rI^2\tau$.

D'après l'extensivité de l'énergie interne, $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$, où pour le système \mathcal{S}_1 , $\Delta U_1 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_{1B} - T_A)$ et pour le système \mathcal{S}_2 , $\Delta U_2 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_{2B} - T_A)$. On a donc

$$\frac{nR}{\gamma-1}(T_{1B} - T_A) + \frac{nR}{\gamma-1}(T_{2B} - T_A) = rI^2\tau \Rightarrow T_{2B} - T_{1B} = 2T_A(1 + q). \quad (16.1)$$

b/ L'état final est un état d'équilibre mécanique du piston, d'où

$$p_{1B} = p_{2B} = p_B. \quad (16.2)$$

Le volume total est conservé,

$$V_{1B} + V_{2B} = V_A. \quad (16.3)$$

Le gaz dans le compartiment (2) vérifie

$$p_{2B} V_{2B}^\gamma = p_A V_A^\gamma. \quad (16.4)$$

Enfin, l'équation d'état pour le gaz de chaque compartiment conduit à

$$p_{1B}V_{1B} = nRT_{1B} \tag{16.5}$$

et

$$p_{2B}V_{2B} = nRT_{2B}. \tag{16.6}$$

On dispose de 6 équations qui permettent de déterminer les 6 inconnues du système.

Avec les égalités (16.5) et (16.6), l'équation (16.1) s'écrit, comme $p_A V_A = nRT_A$,

$$p_B(V_{2B} + V_{1B}) = 2p_A V_A(1 + q),$$

soit avec (16.3), $2p_V V_A = 2p_A V_A(1 + q)$. On a donc $p_B = p_A(1 + q)$.

L'équation (16.4) conduit à $V_{2B} = V_A \left(\frac{p_{2B}}{p_A}\right)^{-1/\gamma}$, d'où $V_{2B} = V_A(1 + q)^{-1/\gamma}$. Avec (16.3),

on en déduit $V_{1B} = V_A [2 - (1 + q)^{-1/\gamma}]$.

L'équation (16.6) donne $T_{2B} = \frac{p_A(1+q)V_A(1+q)^{-1/\gamma}}{nR}$, d'où $T_{2B} = T_A(1 + q)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. De (16.5),

on déduit $T_{1B} = \frac{p_B V_{1B}}{nR}$, d'où $T_{1B} = T_A(1 + q) [2 - (1 + q)^{-1/\gamma}]$.

2. Le gaz dans le compartiment (2) suit une évolution adiabatique, $Q_2 = 0$. Le travail reçu de la part des forces de pression lors d'une évolution telle que $pV^\gamma = \text{cte}$ a été établi à l'exercice 1 page 439, $W_2 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_{2B} - T_A)$. Le premier principe s'écrit alors $\Delta U_2 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_{2B} - T_A)$.

Le gaz dans le compartiment (1) reçoit le transfert thermique $Q_1 = rI^2\tau$. Le premier principe conduit à $\Delta U_1 = rI^2\tau + W_1$. Le piston reçoit le travail $-W_2$ de la part du gaz du compartiment (2) et le travail $-W_1$ de la part du gaz dans le compartiment (1). Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au piston entre l'état initial où il est au repos et l'état final où il est au repos s'écrit $0 = -W_1 - W_2$. Le travail reçu par le gaz du compartiment (1) s'écrit alors $W_1 = -W_2$, d'où $\Delta U_1 = rI^2\tau - \frac{nR}{\gamma-1}(T_{2B} - T_A)$.

On retrouve $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = rI^2\tau$.

Remarque Il est ici plus simple de considérer le système global dont le volume est constant.

3 Détente avec un piston retenu par un ressort

1. L'équation d'état du gaz parfait s'écrit $p_1 S \ell = nRT_1$, d'où $n = \frac{p_1 S \ell}{RT_1} = \frac{0,2 \cdot 10^5 \times 100 \cdot 10^{-4} \times 0,2}{8,31 \times 300}$, soit $n = 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

2. Le ressort exerce sur le piston la force $\vec{F}_{r/p} = -kx \vec{u}_x$, où x représente l'abscisse du piston. Le travail fourni par cette force au piston qui se déplace de l'origine à x vaut

$$W_{r/p} = \int_0^x -kx' dx' = -\frac{1}{2}kx^2.$$

Le piston reçoit de plus le travail $W_{g/p}$ de la part des forces de pression exercées par le gaz.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au piston entre l'état initial où il est au repos et l'état final où il est aussi au repos, $\Delta \mathcal{E}_c = 0 = W_{r/p} + W_{g/p}$. On en déduit $W_{g/p} = \frac{1}{2}kx^2$.

Le travail reçu par le gaz vaut $W = -W_{r/p}$, soit $W = -\frac{1}{2}kx^2$.

3. L'équilibre mécanique du piston dans l'état final s'écrit $\vec{0} = -kx \vec{u}_x + p_2 S \vec{u}_x$, soit, en projetant selon \vec{u}_x , $p_2 S = kx$.

1. Si le gaz exerce sur le piston la force $\vec{F}_{g/p}$, d'après le principe des actions réciproques, le piston exerce sur le gaz $\vec{F}_{p/g} = -\vec{F}_{g/p}$. Le gaz au contact avec le piston et le piston ayant la même vitesse selon \vec{u}_x , les travaux de ces deux forces sont donc opposés.

Le volume occupé par le gaz dans l'état final étant $V_2 = S(\ell + x)$, l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit alors $p_2 S(\ell + x) = nRT_2$.

Le premier principe appliqué au gaz s'écrit $\Delta U = W$ car $Q = 0$ (enceinte et piston calorifugés).

Avec $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$, on en déduit $\frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = -\frac{1}{2}kx^2$.

On a donc $nRT_2 - nRT_1 = -\frac{(\gamma-1)}{2}kx^2$, soit, en utilisant l'équation d'état, $p_2 S(\ell + x) - p_1 S\ell = -\frac{(\gamma-1)}{2}kx^2$. Avec $p_2 S = kx$, il vient $k\ell x + kx^2 + \frac{(\gamma-1)k}{2}x^2 - p_1 S\ell = 0$. Comme $\gamma = 1,4$, on obtient $\frac{9}{5}kx^2 + k\ell x - p_1 S\ell = 0$.

Numériquement, x vérifie $1,20 \cdot 10^4 x^2 + 2,00 \cdot 10^3 x - 40,0 = 0$ (où x est en mètres). La solution positive est $x = 1,80 \cdot 10^{-2}$ m, soit $x = 1,80$ cm.

La pression finale vaut $p_2 = \frac{kx}{S}$, soit $p_2 = 0,180$ bar.

La température finale vaut $T_2 = \frac{p_2 S(\ell + x)}{nR} = T_1 \left(1 + \frac{x_2}{\ell}\right) \frac{kx_2}{Sp_1}$, soit $T_2 = 295$ K.

Remarque On voit que $T_2 < T_1$: l'énergie interne du gaz, qui est une fonction croissante de la température, a diminué au cours de sa transformation. Ce résultat était prévisible, car le gaz a dû fournir du travail pour comprimer le ressort.

4 Mélange d'eau liquide et de glace

On note (S_1) le système constitué de l'eau initialement liquide, (S_2) celui constitué de l'eau initialement solide et $(S) = (S_1) \cup (S_2)$ le système total. L'enceinte étant calorifugée, la variation d'enthalpie de (S) lors de cette évolution monobare est $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$.

Pour les petites valeurs de x (faible masse m de glace), l'état final sera vraisemblablement constitué d'eau liquide, à une température $\theta_f < \theta_1$. Avec cette hypothèse de travail, l'eau du système (S_1) ne subit pas de changement d'état et $\Delta H_1 = Mc_\ell(\theta_f - \theta_1)$.

La glace fond ; l'enthalpie étant une fonction d'état, sa variation lors de la transformation peut se calculer en décomposant l'évolution en trois étapes : élévation de température de θ_2 à 0°C , fusion à 0°C , puis élévation de température de 0°C à θ_f . Le bilan d'enthalpie s'écrit alors

$$\Delta H_2 = mc_s(\theta_{\text{fus}} - \theta_1) + mL_{\text{fus}} + mc_\ell(\theta_f - \theta_{\text{fus}}).$$

Comme $\theta_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C}$, il reste $\Delta H_2 = -mc_s\theta_2 + mL_{\text{fus}} + mc_\ell\theta_f$, les températures étant exprimées en degrés Celsius.

Le bilan d'enthalpie du système (S) s'écrit alors

$$\Delta H = 0 = Mc_\ell(\theta_f - \theta_1) - mc_s\theta_2 + mL_{\text{fus}} + mc_\ell\theta_f.$$

On en déduit $\theta_f = \frac{M}{M+m}\theta_1 + \frac{mc_s\theta_2 - L_{\text{fus}}}{(M+m)c_\ell}$, d'où $\theta_f = \frac{\theta_1}{1+x} + \frac{x}{1+x} \frac{c_s\theta_2 - L_{\text{fus}}}{c_\ell}$. Numériquement, $\theta_f = \frac{20 - 83,9x}{1+x}$. L'état final étant de l'eau liquide, ce résultat est valable tant que $\theta_f > 0^\circ\text{C}$, soit $x < x_1 = \frac{\theta_1}{L_{\text{fus}} - c_s\theta_2} = 0,238$.

Quand $x > x_1$, l'état final sera dans un premier temps un mélange d'eau et de glace, à la température $\theta_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C}$. Il reste à déterminer la composition du système. Notons m' la « quantité algébrique » d'eau qui se solidifie : si la masse de glace dans l'état final est supérieure à m , de l'eau s'est congelée, ce qui correspond à $m' > 0$; si la masse de glace dans l'état final est inférieure à m , une partie de la glace a fondu, ce qui correspond à $m' < 0$. On s'attend à ce que quand la quantité de glace est légèrement supérieure à $m_1 = x_1 M$, elle fonde partiellement, tandis que si la quantité de glace introduite est plus importante, une partie de l'eau se solidifie. On a $\Delta H_1 = Mc_\ell(0 - \theta_1) - m'L_{\text{fus}}$ et $\Delta H_2 = mc_s(0 - \theta_2)$; le bilan d'enthalpie s'écrit alors $\Delta H = 0 = Mc_\ell(0 - \theta_1) - m'L_{\text{fus}} + mc_s(0 - \theta_2)$. On en déduit $m' = \frac{-Mc_\ell\theta_1 - mc_s\theta_2}{L_{\text{fus}}}$. Cet état final diphasé sera observé tant que $m' < M$. Toute l'eau sera solidifiée si $m' = M$, soit $M = \frac{-Mc_\ell\theta_1 - mc_s\theta_2}{L_{\text{fus}} - c_s\theta_2}$, ce qui correspond à $x_2 = \frac{m}{M} = \frac{L_{\text{fus}} + c_\ell\theta_1}{-c_s\theta_2} = 20,1$.

Pour $x > x_2$, l'état final est constitué uniquement de glace, à une température $\theta_f > \theta_2$. On a $\Delta H_1 = Mc_\ell(0 - \theta_1) - ML_{\text{fus}} + Mc_s(\theta_f - 0)$ et $\Delta H_2 = mc_s(\theta_f - \theta_2)$. Le bilan d'enthalpie s'écrit alors $\Delta H = 0 = Mc_\ell(0 - \theta_1) - ML_{\text{fus}} + Mc_s(\theta_f - 0) + mc_s(\theta_f - \theta_2)$, d'où

$$\theta_f = \frac{M}{m+M} \frac{c_\ell}{c_s} \theta_1 + \frac{m}{M+m} \theta_2 + \frac{M}{M+m} \frac{1}{c_s} L_{fus}$$

soit $\theta_f = \frac{\frac{1}{c_s} L_{fus} + \frac{c_\ell}{c_s} \theta_1}{1+x} + \frac{x}{1+x} \theta_2$. Numériquement, $\theta_f = \frac{201-10,0\theta_2}{1+x}$.

On remarque que pour $x \rightarrow \infty$, on a $\theta_f \rightarrow \theta_2$: si la quantité d'eau liquide est négligeable, elle se solidifie et la température de la glace n'augmente quasiment pas.

Finalement,

$$\theta_f = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \frac{c_s \theta_2 - L_{fus}}{c_\ell} = \frac{20-83,9x}{1+x} & \text{pour } 0 \leq x < 0,238 \\ 0 & \text{pour } 0,238 \leq x < 20,1 \\ \frac{x}{1+x} \theta_2 + \frac{1}{1+x} \frac{L_{fus} + c_\ell \theta_1}{c_s} = \frac{201-10\theta_2}{1+x} & \text{pour } x \geq 20,1 \end{cases}$$

Sur la figure E.16.1, on a représenté l'évolution de $\theta(x)$ avec deux échelles différentes pour l'axe des abscisses afin de faire apparaître les deux valeurs particulières $x_1 = 0,238$ et $x_2 = 20,1$.

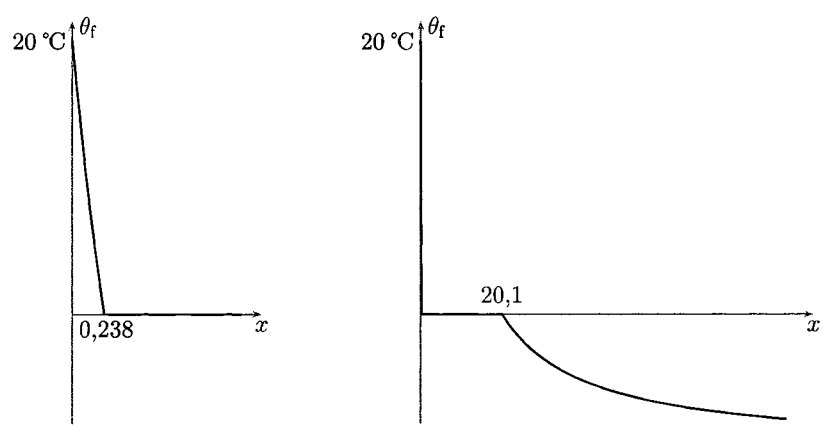


FIG. E.16.1. Évolution de la température finale en fonction de la fraction massique $x = \frac{m}{M}$.

5 Frottements : travail ou transfert thermique ?

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au cube dans le référentiel galiléen de la table s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}. \tag{16.7}$$

La projection selon la verticale donne $\|\vec{N}\| = mg$. Le cube étant en mouvement, la loi des frottements conduit à $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, d'où $\vec{T} = fmg\vec{u}$ où $\vec{u} = -\frac{\vec{v}}{v}$ est un vecteur unitaire opposé à la vitesse.

La projection de l'équation (16.7) selon l'horizontale donne $\vec{F} = -\vec{T} = -fmg\vec{u}$. Le travail de la force constante \vec{F} lors du déplacement \overline{AB} s'écrit $W_1 = \vec{F} \cdot \overline{AB} = -fmg\vec{u} \cdot (-L\vec{u})$, soit

$$W_1 = fmgL.$$

2. La vitesse du cube étant constante, son énergie cinétique reste constante lors du déplacement et sa variation vaut $\Delta\mathcal{E}_c = 0$. Le cube est soumis à son poids et à la réaction normale \vec{N} qui ne travaillent pas lors du déplacement (ces forces sont constamment perpendiculaires à la trajectoire), à la force \vec{F} dont le travail est W_1 et à la réaction tangentielle \vec{T} dont le travail est W_2 . Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au cube s'écrit alors $\Delta\mathcal{E}_c = W_1 + W_2 = 0$, d'où

$$W_2 = -fmgL.$$

3. Le cube exerce sur la table une force $\vec{F}_{\text{cube} \rightarrow \text{table}} = -(\vec{N} + \vec{T})$; dans le référentiel lié à la table, cette dernière est immobile. La table ne reçoit donc aucun travail de la part du cube (une force ne travaille que si son point d'application se déplace dans le référentiel considéré, ce déplacement se traduisant par une modification du mouvement macroscopique du système étudié; ici, le système demeure immobile). On en conclut $W_3 = 0$.

On remarque que $W_3 \neq -W_2$: le cube a cédé de l'énergie mécanique par l'intermédiaire de la force de frottement ($W_2 < 0$), mais la table n'a pas reçu d'énergie mécanique sous l'effet des frottements ($W_3 = 0$).

Remarque Il n'existe pas de « principe des travaux réciproques » au même titre que le principe des actions réciproques: la relation $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ n'implique pas nécessairement $W(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) = -W(\vec{F}_{2 \rightarrow 1})$.

4. Le premier principe appliqué au système {cube + table} lors du déplacement du cube sur la distance L s'écrit $\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = W + Q$.

On a vu que $\Delta \mathcal{E}_c = 0$. En négligeant les échanges thermiques avec l'air ambiant (hypothèse réaliste si le déplacement est effectué suffisamment rapidement), le système {cube + table} ne reçoit aucun transfert thermique, $Q = 0$. Le système reçoit le travail W_1 de la part de l'opérateur. Finalement, le bilan d'énergie s'écrit $\Delta U = W_1 = fmgL$. L'énergie fournie par l'opérateur a servi à augmenter l'énergie interne de l'ensemble {cube+table}, ce qui se manifeste par une élévation de température. Cet échauffement est bien sûr dû aux frottements entre la table et le cube. En notant T_i la température initiale du cube et de la table, on obtient

$$(C_1 + C_2) \cdot (T_f - T_i) = fmgL, \text{ d'où } T_f = T_i + \frac{fmgL}{C_1 + C_2}.$$

5. Le cube n'est plus soumis à l'action de l'opérateur au cours de son mouvement, $\vec{F} = \vec{0}$. Il ne reçoit donc pas de travail de sa part.

La variation d'énergie cinétique du cube vaut $\Delta \mathcal{E}_c = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$. Seule la réaction tangentielle $\vec{T} = fmg\vec{u}$ travaille. Le travail W_2 fourni au cube par cette force constante s'écrit $W_2 = -fmgL$.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au cube s'écrit $\Delta \mathcal{E}_c = W_2$, soit $-\frac{1}{2}mv^2 = -fmgL$. On peut en déduire la distance parcourue par le cube jusqu'à son arrêt, $L = \frac{v^2}{2fL}$.

Selon le même raisonnement qu'à la question 3, le travail reçu par la table de la part du cube est nul, $W_3 = 0$.

Le premier principe appliqué à l'ensemble {cube+table} s'écrit $\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = W_3 = 0$. L'énergie cinétique perdue par le cube a servi à augmenter l'énergie interne du cube et de la table, $\Delta U = -\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = fmgL$. L'augmentation de l'énergie interne est la même que dans la question précédente (et on obtient la même température finale). La différence est qu'aucun opérateur ne vient compenser la diminution d'énergie cinétique par le travail de la force qu'il exerce.

C'est à partir de ces considérations sur la conversion de l'énergie cinétique en énergie thermique (expérience de Joule) que le premier principe est historiquement né.

Chapitre 17

1 Expérience de Rüchardt

1. Quand la bille descend par rapport à sa position d'équilibre, la pression du gaz dans le ballon augmente: il en résulte un accroissement de la force \vec{F}_i qui repousse la bille vers le haut. Quand la bille monte au-dessus de sa position d'équilibre, la pression dans le ballon diminue, la force \vec{F}_i diminue d'intensité, et la bille est repoussée vers le bas (\vec{F}_e est inchangée). La résultante des forces de pression sur la bille a les caractéristiques d'une force de rappel; on s'attend à un mouvement d'oscillation de la bille autour de sa position d'équilibre.

2. Il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique à la bille pour déterminer son mouvement. Certaines hypothèses devront être introduites pour compléter l'énoncé (un énoncé d'oral est rarement complet, il faut savoir prendre des initiatives).

La bille est soumise à la force de pression \vec{F}_i due au gaz dans le ballon, à la force de pression \vec{F}_e due à l'air extérieur et à la force de contact \vec{R} de la paroi du tube.

On va supposer que le contact du tube sur la bille se fait sans frottement.

On choisit un axe ascendant Oz afin de projeter l'équation vectorielle du mouvement. La position d'équilibre de la bille n'est pas connue : on va la choisir comme origine de l'axe Oz . L'équilibre de la bille s'écrit

$$\vec{0} = m\vec{g} + p_e S \vec{u}_z - p_a S \vec{u}_z + \vec{R}. \tag{17.1}$$

Le contact avec le tube étant sans frottement, $\vec{R} \perp \vec{u}_z$, et la projection de l'équation (17.1) selon \vec{u}_z s'écrit

$$0 = -mg + p_e S - p_a S. \tag{17.2}$$

Lorsque la bille est en mouvement, on note $p(z)$ la pression dans le ballon (on peut la considérer uniforme en supposant la transformation quasi stationnaire : la vitesse de la bille est certainement très inférieure à la vitesse du son dans le gaz). L'équation du mouvement en projection selon \vec{u}_z s'écrit

$$m\ddot{z} = -mg + p(z)S - p_a S. \tag{17.3}$$

En soustrayant l'équation (17.3) de l'équation (17.2), on obtient

$$\boxed{m\ddot{z} = [p(z) - p_e]S}. \tag{17.4}$$

3. Il reste à déterminer la loi $p(z)$. Le gaz étant parfait (on peut considérer γ constant), évoluant de façon adiabatique et réversible (la transformation est quasi stationnaire et il n'y a aucune cause d'irréversibilité), on peut appliquer la loi de Laplace. Le volume du gaz étant V_0 à l'équilibre, il faut $V(z) = V_0 + Sz$ quand la bille est à la cote z (l'équilibre correspond à $z = 0$ par le choix de l'origine effectué). La loi de Laplace $p(z)V^\gamma(z) = p_e V_0^\gamma$ s'écrit alors

$$p(z)(V_0 + Sz)^\gamma = p_e V_0^\gamma,$$

d'où

$$\boxed{p(z) = p_e \left(\frac{V_0}{V_0 + Sz} \right)^\gamma}.$$

4. En remplaçant $p(z)$ par cette expression dans l'équation (17.4), on obtient une équation différentielle non linéaire. On va faire l'hypothèse que la section du tube est faible, c'est-à-dire que le volume Sz balayé par la bille dans son mouvement est petit devant V_0 . La pression $p(z)$ s'écrit en faisant apparaître la grandeur sans dimension $\frac{Sz}{V_0} \ll 1$, l'expression obtenue pouvant alors être linéarisée,

$$p(z) = p_e \left(1 + \frac{Sz}{V_0} \right)^{-\gamma} \simeq p_e \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V_0} \right).$$

L'équation (17.4) s'écrit alors

$$m\ddot{z} = -\frac{\gamma p_e S}{V_0} z S,$$

soit

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\gamma p_e S^2}{m V_0} z = 0}.$$

5. On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_e S^2}{m V_0}}$. En notant τ la période des oscillations, le coefficient adiabatique est donné par

$$\boxed{\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{p_e S^2 \tau^2}}.$$

La pression à l'équilibre est donnée d'après l'équation (17.2) par $p_e = p_a + \frac{mg}{S} = 1,01 \cdot 10^5$ Pa. On calcule $\gamma = 1,39$. Cette valeur est tout à fait en accord avec la valeur $\gamma = 1,40$ donnée dans la littérature (on rappelle que pour un gaz parfait diatomique, comme l'air, $\gamma = 7/5 = 1,40$).

2 Diagramme de Watt : isotherme et isentropique

1. Une transformation isotherme d'un gaz parfait est telle que $pV = nRT_0$, soit $p = \frac{nRT_0}{V}$. La pente de la courbe $p(V)$ est donnée par

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{nRT_0}{V^2} = -\frac{pV}{V^2} = -\frac{p}{V}.$$

Lors d'une transformation adiabatique réversible, un gaz parfait suit la loi de Laplace $pV^\gamma = C$ constante, soit $p = \frac{C}{V^\gamma}$. La pente de la courbe est donnée par

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_S = -\gamma \frac{C}{V^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{pV^\gamma}{V^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{p}{V},$$

l'indice S signifiant « isentropique » (pour adiabatique et réversible).

Les deux pentes sont négatives (voir figure E.17.1). Leur rapport en un même point (p_0, V_0) est donné par

$$\frac{\text{pente adiabatique réversible}}{\text{pente isotherme}} = \gamma > 1.$$

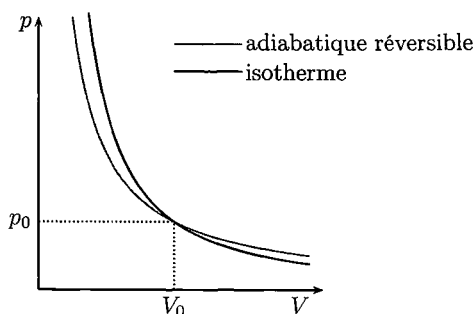


FIG. E.17.1. Courbes représentatives des évolutions isotherme et adiabatique réversible dans le diagramme de Watt. En un point donné, l'adiabatique est plus pentue que l'isotherme.

2. Soit (p_0, V_0, T_0) l'état du gaz au début du cycle. Lors de la compression, le volume diminue le long de l'adiabatique réversible; lors de la détente, le volume augmente le long de l'isotherme. D'après le graphe précédent, on peut représenter le cycle dans le diagramme de Watt (voir figure E.17.2).

Le cycle étant parcouru dans le sens direct, il est récepteur, $W > 0$ (le gaz reçoit effectivement de l'énergie sous forme de travail : le travail mécanique que le gaz reçoit lors de la compression est plus grand que le travail mécanique qu'il cède lors de la détente). Les cycles seront utilisés au chapitre 18 pour la conception des machines thermiques.

L'énergie reçue lors de la compression isentropique est supérieure à l'énergie cédée lors de la détente.

3 Décomposition du contact thermique

1. La température du i -ème thermostat est $T_i = T_0 + i \frac{T_F - T_0}{N}$. On a $T_i - T_{i-1} = \frac{T_F - T_0}{N}$.

2. Lorsque la température du solide passe de T_{i-1} à T_i , il reçoit le transfert thermique $Q_i = C(T_i - T_{i-1})$; lors de cette évolution monotherme avec un thermostat de température T_i , l'entropie reçue s'écrit $S_{\text{reçu},i} = \frac{Q_i}{T_i}$, soit $S_{\text{reçu},i} = C \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i}$.

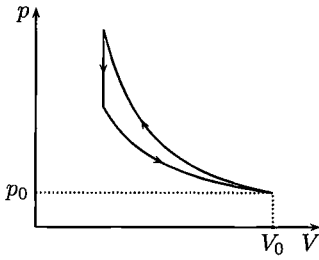


FIG. E.17.2. Cycle dans le diagramme de Watt.

La variation d'entropie du solide lors de la i -ième étape est donnée par $\Delta S_i = C \ln \left(\frac{T_i}{T_{i-1}} \right)$. D'après le bilan d'entropie $\Delta S_i = S_{\text{reçu},i} + S_{\text{créé},i}$, on en déduit

$$S_{\text{créé},i} = C \left[\ln \left(\frac{T_i}{T_{i-1}} \right) - \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i} \right].$$

3. L'entropie créée au cours des N étapes s'écrit $S_{\text{créé}} = \sum_{i=1}^N S_{\text{créé},i}$, soit

$$S_{\text{créé}} = C \left[\sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{T_i}{T_{i-1}} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i} \right] = C \left[\ln \left(\frac{T_F}{T_0} \right) - \frac{T_F - T_0}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_0 + i \frac{T_F - T_0}{N}} \right]$$

car $\ln \left(\prod_{k=1}^N \frac{T_k}{T_{k-1}} \right) = \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \times \frac{T_2}{T_1} \times \dots \times \frac{T_N}{T_{N-1}} \right) = \ln \left(\frac{T_N}{T_0} \right)$ avec $T_N = T_F$. On en déduit

$$S_{\text{créé}} = C \left[\ln \left(\frac{T_F}{T_0} \right) - (T_F - T_0) \sum_{i=1}^N \frac{1}{NT_0 + i(T_F - T_0)} \right].$$

Avec les valeurs numériques données, $S_{\text{créé}} = 400 \left[\ln \left(\frac{350}{300} \right) - 50 \sum_{i=1}^N \frac{1}{300N + 50i} \right]$.

Nombre N de thermostats	1	2	10	100
$S_{\text{créé}}$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)	4,54	2,34	0,473	0,0477

Plus on utilise de thermostats intermédiaires, plus l'entropie créée est faible : l'irréversibilité de la transformation est alors de moins en moins grande. Le « film à l'envers » de l'évolution est de moins en moins absurde car l'écart de température entre le système et le thermostat avec lequel il est en contact est de moins en moins grand.

4. a/ Avec $T_i = T_{i-1} + \theta$, l'expression établie à la question 2 s'écrit

$$S_{\text{créé},i} = C \left[\ln \left(\frac{T_{i-1} + \theta}{T_{i-1}} \right) - \frac{\theta}{T_{i-1} + \theta} \right].$$

b/ On réécrit l'expression de $S_{\text{créé},i}$ en faisant apparaître $\varepsilon = \frac{\theta}{T_{i-1}}$, grandeur sans dimension.

$$S_{\text{créé},i} = C \left[\ln \left(1 + \frac{\theta}{T_{i-1}} \right) - \frac{\frac{\theta}{T_{i-1}}}{1 + \frac{\theta}{T_{i-1}}} \right] = C \left[\ln(1 + \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right].$$

Si $N \gg 1$, alors $\varepsilon \ll 1$ et

$$S_{\text{créé},i} = C \left[\ln(1 + \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right] \simeq C \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon(1 - \varepsilon) \right] = C \frac{\varepsilon^2}{2} = C \frac{\theta^2}{2T_{i-1}^2}.$$

On a montré à la question 2 que $\theta = \frac{T_F - T_0}{N}$, d'où

$$S_{\text{créé},i} \simeq \frac{C}{2N^2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_{i-1}^2}.$$

c/ Comme $T_{i-1} \geq T_0$, $S_{\text{créé},i} \leq \frac{C}{2N^2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2}$. L'entropie créée lors de la transformation totale est donnée par

$$S_{\text{créé}} = \sum_{i=1}^N S_{\text{créé},i} \leq \sum_{i=1}^N \frac{C}{2N^2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2} = N \times \frac{C}{2N^2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2},$$

soit $S_{\text{créé}} \leq \frac{C}{2N} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2}$. D'après le second principe $S_{\text{créé}} \geq 0$, d'où $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\text{créé}} = 0$.

Cette analyse précise l'étude qualitative page 479 : la transformation tend vers une transformation réversible quand le nombre de thermostats intermédiaires tend vers l'infini. D'un point de vue plus technique, on remarquera que l'entropie créée lors d'une étape intermédiaire est un infiniment petit d'ordre 2 en θ , écart de température entre le solide et le thermostat.

4 Décomposition d'une détente dans le vide

1. a/ Il s'agit d'une détente de Joule et Gay-Lussac. L'énergie interne du gaz reste conservée lors d'une telle détente (voir page 456), $\Delta U = 0$. Dans le cas où le gaz est parfait, sa température ne varie pas, $T = \text{cte}$.

b/ On connaît le volume initial (V) et le volume final ($2V$), et la température reste constante : il est judicieux d'utiliser l'expression $S(T, V)$ de l'entropie en fonction des variables T et V . Sa variation est donnée par

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nR \ln 2$$

avec $T_2 = T_1$ et $V_2 = 2V_1$.

Le système {gaz} est calorifugé, donc le terme d'échange d'entropie est nul, $S_{\text{reçu}} = 0$. Le bilan d'entropie se ramène alors à $\Delta S = S_{\text{créé}} = nR \ln 2 > 0$: l'évolution est irréversible.

2. a/ Le volume de chaque petit compartiment est $\frac{V}{N}$. Le retrait de la k -ième cloison revient à faire subir au gaz une détente de Joule et Gay-Lussac au cours de laquelle son volume passe de $V_{k-1} = V + (k-1)\frac{V}{N}$ à $V_k = V + k\frac{V}{N}$. La température du gaz ne variant pas, la variation de son entropie est donnée par

$$\Delta S_k = nR \ln \left(\frac{V_k}{V_{k-1}} \right).$$

Comme précédemment, $S_{\text{reçu},k} = 0$ pour une évolution adiabatique, d'où $S_{\text{créé},k} = \Delta S_k$.

L'entropie créée vaut donc $S_{\text{créé},k} = nR \ln \left(\frac{V_k}{V_{k-1}} \right)$.

b/ La variation d'entropie pour la transformation totale vaut

$$\begin{aligned} \Delta S &= \sum_{k=1}^N \Delta S_k = nR \sum_{k=1}^N \ln \left(\frac{V_k}{V_{k-1}} \right) = nR \ln \left(\prod_{k=1}^N \frac{V_k}{V_{k-1}} \right) \\ &= nR \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \times \frac{V_2}{V_1} \times \dots \times \frac{V_N}{V_{N-1}} \right), \end{aligned}$$

soit après simplification $nR \ln \left(\frac{V_N}{V_0} \right)$. On obtient donc $\Delta S = nR \ln 2$. Ce résultat était prévisible : l'entropie étant une fonction d'état, sa variation au cours d'une transformation ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Elle est indépendante du chemin suivi ; on trouve donc le même résultat si l'on décompose la détente en N détentes intermédiaires.

c/ Avec $V_k = V_{k-1} + v$, l'entropie créée lors de la k -ième étape s'écrit $S_{\text{créé},k} = nR \ln \left(1 + \frac{v}{V_{k-1}} \right)$. Si $N \gg 1$, alors $\frac{v}{V_{k-1}} = \frac{V}{NV_{k-1}} \ll 1$ et $S_{\text{créé},k} \simeq nR \frac{v}{V_{k-1}}$. Comme $V_{k-1} < V$,

$$S_{\text{créé},k} > nR \frac{v}{V} = \frac{nR}{N}.$$

L'entropie totale créée est donnée par

$$S_{\text{créé}} = \sum_{k=1}^N S_{\text{créé},k} > \sum_{k=1}^N \frac{nR}{N} = N \times \frac{nR}{N} = nR.$$

Comme $S_{\text{créé}} > nR > 0$, quelle que soit la valeur de N , on ne peut obtenir $S_{\text{créé}} \rightarrow 0$ à la limite $N \rightarrow \infty$. Contrairement au contact thermique étudié à l'exercice 3, la détente dans le vide est fondamentalement irréversible : réduire le volume dans lequel le gaz se détend ne peut diminuer la discontinuité de pression entre le compartiment contenant le gaz et le compartiment vide (où la pression est nulle).

D'un point de vue plus technique, l'entropie créée lors d'une étape intermédiaire est un infiniment petit d'ordre 1 en v , accroissement du volume lors de cette détente (à comparer avec le contact thermique étudié dans l'exercice 3, où l'entropie créée lors d'une étape intermédiaire était un infiniment petit d'ordre 2 vis-à-vis de la variation de la grandeur en jeu).

5 Vaporisation sous vide

1. L'équation d'état du gaz parfait appliquée à la vapeur d'eau s'écrit $p_{\text{sat}}V = \frac{m}{M}RT_0$, d'où

$$V = \frac{m}{M} \frac{RT_0}{p_{\text{sat}}} = 17,2 \text{ L}.$$

2. La variation d'enthalpie de l'eau est donnée par $\Delta H = mL_{\text{vap}} = 22,6 \text{ J}$.

L'énergie interne est reliée à l'enthalpie par $U = H - pV$. Sa variation lors du changement d'état est donnée par $\Delta U = U_{\text{vapeur}} - U_{\text{eau}} = H_{\text{vapeur}} - H_{\text{eau}} - p_{\text{sat}}V + p_{\text{sat}}V_{\text{eau}}$ en considérant l'eau prise initialement liquide à la pression ambiante $p_{\text{sat}} = 1 \text{ bar}$. Le volume massique de l'eau liquide étant négligeable devant celui de la vapeur d'eau, on a $V_{\text{eau}} \ll V$, d'où $\Delta U = \Delta H - p_{\text{sat}}V$.

On calcule $\Delta U = -1,70 \text{ kJ}$.

3. La variation de l'entropie de l'eau correspond à la variation d'entropie de changement d'état

à la température T_0 sous la pression p_{sat} , soit $\Delta S = \frac{mL_{\text{vap}}}{T_0} = 6,06 \cdot 10^{-2} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ (l'entropie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend que des états initial et final ; on peut donc ici la calculer en considérant une vaporisation isotherme et isobare, même si ce chemin ne correspond pas à la réalité).

La transformation est monotherme (contact avec un thermostat de température T_0). L'entropie échangée vaut donc $S_{\text{reçu}} = \frac{Q}{T_0}$. L'enceinte étant indéformable, la transformation est de plus isochore ; on a donc $W = 0$ est le transfert thermique reçu est donné par la variation d'énergie interne, $Q = \Delta U$. On a donc $S_{\text{reçu}} = \frac{\Delta U}{T_0} = \frac{mL_{\text{vap}}}{T_0} - \frac{p_{\text{sat}}V}{T_0}$, soit $S_{\text{reçu}} = \frac{mL_{\text{vap}}}{T_0} - \frac{m}{M}R$.

On calcule $S_{\text{reçu}} = -4,56 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

L'entropie créée est donnée par $S_{\text{créé}} = \Delta S - S_{\text{reçu}}$, soit $S_{\text{créé}} = \frac{m}{M}R$. Comme $S_{\text{créé}} > 0$, la

vaporisation dans le vide est irréversible. On calcule $S_{\text{créé}} = 4,62 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

6 Évolution d'un gaz

1. Lorsqu'un énoncé précise qu'une évolution est « très rapide », il faut comprendre qu'elle n'est pas réversible car non quasi stationnaire : le système n'a pas le temps de relaxer vers un état d'équilibre interne à chaque instant de la transformation. En particulier, la pression est non uniforme dans le gaz.

Les conditions d'application de la loi de Laplace ne sont pas réunies : le gaz est parfait, il subit une évolution adiabatique, mais qui n'est pas réversible. On ne peut d'ailleurs parler de « la » pression du gaz, celle-ci n'étant *a priori* pas uniforme.

Précisons les transformations en jeu, et notons l'équation d'état du gaz pour chaque état d'équilibre (initial, intermédiaire et final). En considérant le piston de masse négligeable, la pression du gaz est égale à la pression extérieure pour chaque état d'équilibre (voir figure E.17.3).

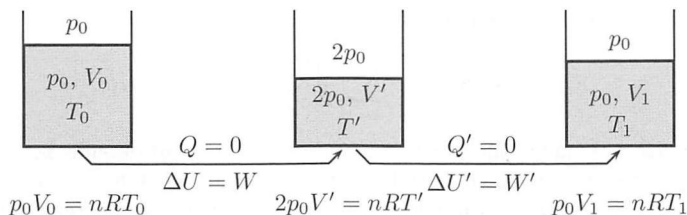


FIG. E.17.3. Évolution d'un gaz.

On peut écrire $pV = nRT$ pour les trois états intermédiaires, mais pas à chaque instant de la transformation car la pression n'est pas uniforme dans le système.

Étude de la première phase : compression

La première phase est une transformation monobare à la pression $p_{\text{ext}} = 2p_0$. Le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression s'écrit $W = -P_{\text{ext}} \Delta V = -2p_0(V' - V_0)$ en notant V_0 le volume initial et V' le volume final.

Le premier principe sous forme de bilan s'écrit $\Delta U = W + Q = W$ car $Q = 0$ pour cette transformation adiabatique. En notant T_0 la température initiale et T' la température finale, on en déduit

$$\frac{nR}{\gamma - 1}(T' - T_0) = -2p_0(V' - V_0),$$

soit $\frac{2p_0 V' - p_0 V_0}{\gamma - 1} = -2p_0 V' + 2p_0 V_0$, d'où $[2p_0 + 2(\gamma - 1)p_0] V' = (2\gamma - 2 + 1)p_0 V_0$. On obtient $V' = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} V_0$, soit

$$V' = \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) V_0.$$

On remarque que $V' < V_0$ comme attendu pour une compression.

La pression finale valant $2p_0$, on déduit la température dans l'état final de l'équation d'état du gaz parfait $nRT' = 2p_0 V' = 2p_0 \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) V_0$, d'où

$$T' = \left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) T_0.$$

Étude de la seconde phase : détente

Il s'agit d'une détente monobare sous la pression extérieure p_0 . Le travail reçu par le gaz s'écrit $W' = -p_0(V_1 - V')$ en notant V_1 le volume final. En notant T_1 la température finale, le premier principe sous forme de bilan s'écrit

$$\frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T') = -p_0(V_1 - V'),$$

soit, comme $p_0 V_1 = nRT_1$,

$$\frac{p_0 V_1 - 2p_0 V'}{\gamma - 1} = -p_0 V_1 + p_0 V'.$$

On en déduit $(1 + \gamma - 1)V_1 = (2 + \gamma - 1)V'$, soit $V_1 = \frac{1+\gamma}{\gamma} V' = \frac{1+\gamma}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) V_0$. Après simplification, on obtient

$$V_1 = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2}\right) V_0.$$

D'après l'équation d'état, il vient

$$T_1 = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2}\right) T_0.$$

On remarque que $V_1 > V_0$: le piston remonte plus haut que sa position initiale. De même $T_1 > T_0$: l'énergie interne du gaz a donc augmenté; l'énergie reçue sous forme de travail par la force de pression lors de la compression (sous la pression extérieure $2p_0$) est supérieure à l'énergie cédée sous forme de travail lors de la détente (sous la pression extérieure p_0).

On calcule la variation d'entropie entre l'état initial (p_0, V_0) et l'état final (p_0, V_1) en utilisant l'expression de l'entropie en variables (p, V), d'où $\Delta S = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2}\right)$. L'évolution étant adiabatique, $S_{\text{reçu}} = 0$ et le bilan d'entropie s'écrit $\Delta S = S_{\text{créé}}$, d'où

$$S_{\text{créé}} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2}\right).$$

Comme $\gamma > 1$, $S_{\text{créé}} > 0$: la transformation est réversible, l'origine de l'irréversibilité se trouvant dans la différence de pression non infinitésimale entre le gaz et le milieu extérieur. On ne peut inverser le sens de la transformation par une variation élémentaire de la pression extérieure.

2. Pour réaliser une compression ou un détente de façon réversible, il faut faire varier lentement la pression extérieure, de telle sorte que la pression du gaz soit égale à la pression extérieure à chaque instant. D'ailleurs le film de l'expérience passé à l'envers serait absurde : le mouvement du piston ne serait pas en accord avec la différence des pressions observées.

Les conditions d'application de la loi de Laplace sont alors réalisées. Entre l'état initial, l'état intermédiaire et l'état final, on peut écrire $p_0 V_0^\gamma = 2p_0 V'^\gamma = p_0 V_1^\gamma$. Comme on pouvait s'y attendre pour une transformation réversible où les conditions extérieures de l'état final sont identiques à celles de l'état initial, on a $V_1 = V_0$: l'état final est le même que l'état initial. Le volume de l'état intermédiaire d'équilibre vaut ici $V' = 2^{-\gamma} V_0$.

7 Entropie d'une chaîne élastique

1. Un état microscopique (ou micro-état) est défini par la donnée de l'état (court ou long) de tous les maillons. Les deux états possibles pour les maillons ayant la même énergie, l'énergie de la chaîne ne dépend pas de sa longueur.

2. Avec n maillons de longueur $\ell - a$ et $N - n$ maillons de longueur $\ell + a$, la longueur totale de la chaîne est $L = n(\ell - a) + (N - n)(\ell + a)$, soit $L = N\ell + (N - 2n)a$.

3. Une longueur L peut être réalisée par $\Omega = \binom{N}{n}$ micro-états correspondant à n maillons dans l'état court et $N - n$ maillons dans l'état long. L'entropie d'un tel état est donnée par la formule de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega = k_B \ln \binom{N}{n}$, soit $S = k_B \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}$.

4. Le système {chaîne} étant isolé, son entropie est maximale à l'équilibre, soit pour $n = \frac{N}{2}$. La longueur correspondante est alors $L_0 = N\ell$.

5. Lorsque la chaîne est soumise à une tension f , sa longueur est modifiée de ΔL ; la chaîne reçoit alors un travail $W = f \Delta L$. D'après le modèle adopté, l'énergie de la chaîne reste constante quelle que soit sa longueur; le premier principe sous forme de bilan s'écrit donc $\Delta E = 0 = W + Q$: la chaîne reçoit donc un transfert thermique $Q = -W$ pour maintenir constante son énergie. À ce transfert thermique est associé un terme d'échange d'énergie $S_{\text{reçu}}$. D'après le bilan d'entropie $\Delta S = S_{\text{reçu}} + S_{\text{créé}}$, on ne peut plus en déduire le signe de la variation d'entropie, contrairement au cas où $f = 0$ pour lequel $W = 0$ implique $Q = 0$, donc $S_{\text{reçu}} = 0$ et $\Delta S = S_{\text{créé}} \geq 0$. Contrairement à la question précédente, la chaîne n'est plus isolée : ni mécaniquement (elle reçoit un travail mécanique), ni thermiquement (elle reçoit un transfert thermique).

L'entropie n'est donc *a priori* pas maximale à l'équilibre.

6. Lorsque la chaîne s'allonge, le nombre n de maillons dans l'état court diminue, s'écartant de $\frac{N}{2}$. D'après la propriété de $\binom{N}{n}$, le nombre de micro-états correspondant à une même longueur L diminue, ce qui se traduit par une diminution de l'entropie de la chaîne.

Chapitre 18

1 Exemples de machines thermiques

1. Dans une pompe à eau, les pales de la pompe poussent l'eau ($\mathcal{P}_{W_i} > 0$) et l'eau ne reçoit pas d'énergie thermique (pas de dispositif chauffant, donc $\mathcal{P}_Q = 0$). Un compresseur (machine pour gonfler les pneumatiques, par exemple) fonctionne de même.

2. Une chaudière domestique pour chauffage à circulation d'eau est une machine qui pompe l'eau ($\mathcal{P}_{W_i} > 0$) et la chauffe ($\mathcal{P}_Q > 0$) par une flamme alimentée au gaz, par exemple.

3. Un radiateur installé dans un circuit de chauffage à circulation d'eau n'est autre qu'un tuyau indéformable ($\mathcal{P}_{W_i} = 0$) lors de la traversée duquel l'eau cède de l'énergie thermique à l'extérieur ($\mathcal{P}_Q < 0$) par transfert à travers les parois. Un alambic fonctionne de la même façon. Seul le but diffère. Dans l'alambic, on cherche à refroidir la vapeur qui circule, alors que dans le radiateur, on cherche à chauffer l'air ambiant.

4. Une éolienne est une machine dans laquelle circule du vent. Elle prélève de l'énergie mécanique au flux d'air ($\mathcal{P}_{W_i} < 0$) sans qu'il y ait de transfert thermique ($\mathcal{P}_Q = 0$). Toutes les turbines fonctionnent sur ce principe, comme celles qui prélèvent de l'énergie mécanique à l'eau qui descend d'un barrage pour entraîner un générateur électrique. Rappelons qu'en anglais, éolienne se dit *windturbine* (turbine à vent).

5. Un tuyau indéformable calorifugé est caractérisé par $\mathcal{P}_{W_i} = 0$ et $\mathcal{P}_Q = 0$. Le fluide qui le parcourt subit une détente de Joule-Thomson, qui est isenthalpique. Si le fluide est un gaz qui peut être considéré comme parfait, sa température ne varie pas lors de cette détente. Cependant, pour la plupart des fluides réels, la température peut baisser assez fortement lors de la détente. C'est un des éléments clés des réfrigérateurs.

6. Un tuyau d'échangeur thermique est indéformable ($\mathcal{P}_{W_i} = 0$) et non calorifugé. S'il est parcouru par un fluide plus froid que l'atmosphère entourant le tuyau, le fluide s'échauffe par transfert à travers la paroi ($\mathcal{P}_Q > 0$). Un exemple est le serpentín qui tapisse les parois d'un congélateur : il est parcouru par un fluide très froid (qui a subi précédemment une détente de Joule-Thomson). En s'échauffant, le fluide prélève de l'énergie thermique au contenu du congélateur.

2 Cycle monotherme

1. Le volume V_A s'obtient par la loi des gaz parfaits, $V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 25 \text{ L}$. L'évolution $A \rightarrow B$ est un échauffement isochore : le volume est constant et la température augmente, donc la pression aussi. La loi des gaz parfaits s'écrit $p_A V_A = nRT_A$ au départ et $p_B V_B = nRT_B$ à l'arrivée. Compte tenu de $V_A = V_B$ et de $T_B = 2T_A$, on obtient $p_B = 2p_A = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La compression $B \rightarrow C$ étant isotherme, la loi des gaz parfaits donne $p_B V_B = p_C V_C$. Il faut une deuxième équation pour déterminer p_C et V_C . On l'obtient en traduisant que la détente $C \rightarrow A$ est adiabatique réversible, donc vérifie la loi de Laplace $p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma$. En résolvant

ce système de deux équations à deux inconnues, on trouve $V_C = \left[\frac{p_A}{p_B} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A = 4,4 \text{ L}$ et

$p_C = 11,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Le fait que V_C soit inférieur à V_A est en accord avec le fait que $C \rightarrow A$ est une détente. Le diagramme est donné sur la figure E.18.1. On pouvait dessiner son allure sans faire de calculs, l'échauffement isochore est représenté par un segment vertical ascendant et l'adiabatique réversible est plus pentue (en valeur absolue) que l'isotherme.

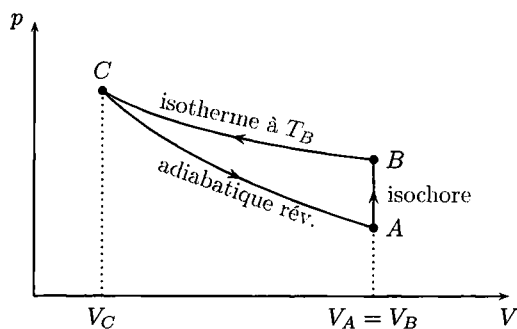


FIG. E.18.1. Cycle monotherme représenté dans le diagramme de Watt.

2. Pour l'évolution isochore $A \rightarrow B$, on applique le premier principe ($\Delta U = Q$ car $W = 0$) et la première loi de Joule ($\Delta U = nc_v \Delta T$) au gaz parfait pour obtenir

$$Q_{AB} = nc_v(T_B - T_A) = 6,2 \cdot 10^3 \text{ J} .$$

Les mêmes lois donnent, pour l'évolution $B \rightarrow C$, $W_{BC} + Q_{BC} = 0$, donc

$$Q_{BC} = \int_B^C p dV = nrT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = -8,6 \cdot 10^3 \text{ J} .$$

Par définition de l'évolution adiabatique $C \rightarrow A$, $Q_{CA} = 0$. L'évolution $A \rightarrow B$ étant isochore, les actions de pression ne travaillent pas et $W_{AB} = 0$. Pour la compression isotherme $B \rightarrow C$, on a déjà vu que $W_{BC} = -Q_{BC}$. Pour la détente $C \rightarrow A$, $W_{CA} = \int_C^A -p dV$ avec $PV^\gamma = p_C V_C^\gamma$ (loi de Laplace), donc $W_{CA} = -p_C V_C^\gamma \int_C^A \frac{dV}{V^\gamma} = -p_C V_C^\gamma \frac{V_A^{1-\gamma} - V_C^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, ce qui peut se simplifier en $W_{CA} = \frac{1}{\gamma-1} [p_A V_A - p_C V_C] = -6,2 \cdot 10^3 \text{ J}$ en utilisant la loi de Laplace. On teste la cohérence de l'ensemble en vérifiant que $W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$ car $\Delta U = 0$ pour le cycle.

3. Le cycle est récepteur car $W_{\text{tot}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ J}$ est positif : le gaz reçoit de l'énergie mécanique (il serait qualifié de moteur s'il en cédait). On pouvait trouver le signe de W_{tot} uniquement en raisonnant sur le sens de parcours du cycle (voir section II.6 page 432). Le cycle est irréversible car l'évolution $A \rightarrow B$ l'est : le gaz initialement froid est directement mis en contact avec la source chaude, il existe un gradient de température entre le gaz et le thermostat, cause d'irréversibilité. Le film à l'envers de l'évolution $A \rightarrow B$ montrerait le gaz en train de refroidir vers T_A alors qu'il est en contact avec le thermostat à $T_B > T_A$, ce qui est absurde et prouve ainsi l'irréversibilité. L'entropie créée se calcule en appliquant le deuxième principe au gaz sur un cycle, $\Delta S = \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{T_B} + S_{\text{créé}} = 0$, soit $S_{\text{créé}} = 4,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. L'irréversibilité est confirmée par $S_{\text{créé}} > 0$.

4. Inverser le sens de parcours du cycle changerait le signe de W_{tot} , ce qui donnerait bien un moteur. Cependant, le cycle étant irréversible, on ne peut pas inverser son sens avec le dispositif présenté (l'irréversibilité du fonctionnement ne permet pas de changer le parcours du cycle). On retrouve l'énoncé de Kelvin du deuxième principe (voir exercice corrigé 18.2 page 506) : il est impossible de fabriquer un moteur cyclique monotherme.

Remarque On pourrait rendre réversible le cycle de la figure E.18.1 à condition de rendre l'évolution $A \rightarrow B$ réversible. C'est théoriquement possible en mettant le gaz en contact successivement avec une infinité de thermostats dont les températures s'échelonnent graduellement de T_A à T_B . Mais il s'agit dans ce cas d'un cycle polytherme, et non plus monotherme.

3 Moteurs à combustion externe

1. Cycle de Stirling

a/ Il suffit d'appliquer le premier principe au gaz (système fermé). Lors des évolutions isochores, le travail qu'il reçoit est nul, donc

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_c - T_f) = Q_{BC} \quad \text{et} \quad \Delta U_{D \rightarrow A} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_c) = Q_{DA}.$$

Conformément au fonctionnement du régénérateur, $Q_{BD} + Q_{DA} = 0$. Lors des évolutions isothermes, la variation d'énergie interne du gaz parfait est nulle (première loi de Joule). Le premier principe s'écrit, pour chacune de ces évolutions, $\Delta U = 0 = W + Q$, donc le transfert thermique reçu est l'opposé du travail reçu. Cela donne

$$Q_{AB} = -W_{AB} = - \int_{V_{\max}}^{V_{\min}} -p dV = nRT_f \int_{V_{\max}}^{V_{\min}} \frac{dV}{V},$$

soit $Q_{AB} = -nRT_f \ln(V_{\max}/V_{\min})$ et de même $Q_{CD} = nRT_c \ln(V_{\max}/V_{\min})$.

b/ On définit le rendement comme le rapport de l'énergie utile (travail $-W$ délivré par le moteur) sur l'énergie coûteuse Q_{CD} , soit $\eta = -W/Q_{CD}$. D'après le premier principe appliqué au gaz le long d'un cycle, $0 = W + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = W + Q_{AB} + Q_{CD}$. Après calcul, $\eta = 1 - T_f/T_c$. Ce rendement est le rendement de Carnot (voir théorème 18.3 page 509), rendement maximal théorique pour un moteur ditherme. Ce n'est pas surprenant, car le cycle a été supposé réversible, ce qui est le seul cas où le rendement maximal peut être atteint.

2. Cycle d'Ericsson

a/ Pour ce qui concerne les isobares, il est pratique de travailler avec la fonction enthalpie, dont les variations prennent en compte le travail des actions de pression

$$(\Delta H = Q_p = C_p \Delta T).$$

Ainsi, $\Delta H_{B \rightarrow C} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_c - T_f) = Q_{BC}$ et $\Delta H_{D \rightarrow A} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_f - T_c) = Q_{DA}$. Conformément au fonctionnement du régénérateur, $Q_{BD} + Q_{DA} = 0$.

Lors des évolutions isothermes, le transfert thermique reçu par le gaz est l'opposé du travail reçu (car $\Delta U = 0 = W + Q$), donc

$$Q_{AB} = - \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} (-p dV) = -nRT_f \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{dp}{p},$$

soit $Q_{AB} = -nRT_f \ln(p_{\max}/p_{\min})$ et de même $Q_{CD} = nRT_c \ln(p_{\max}/p_{\min})$.

b/ Le rendement s'écrit $\eta = -W/Q_{CD}$ et le premier principe appliqué au gaz pour un cycle donne $-W = Q_{AB} + Q_{CD}$. On en déduit, après calcul, $\eta = 1 - T_f/T_c$. On retrouve encore le rendement de Carnot pour ce cycle réversible.

Remarque Le fonctionnement réversible de l'échangeur thermique est purement théorique. En effet, il s'agit d'un bloc de métal devant échanger de l'énergie avec un gaz, ce qui doit donc mettre en jeu des écarts de température entre le gaz et le métal (à moins de travailler infiniment lentement). Dans la pratique, le fonctionnement n'est pas infiniment lent et le gradient de température cause l'irréversibilité du fonctionnement. Il y a création d'entropie et donc une dégradation du rendement moteur d'après le théorème de Carnot (voir page 509). La conception de l'échangeur est considérée, par le physicien allemand Max Jakob (1879-1955), comme « l'un des problèmes les plus difficiles auxquels les ingénieurs sont confrontés ».

Dans chacun des deux cycles, les évolutions isothermes sont elles aussi difficilement réalisables de façon réversible. Par exemple, il faudrait que la compression $A \rightarrow B$ du cycle de Stirling soit

infiniment lente. En effet, si elle est trop rapide, les échanges thermiques avec le thermostat à T_f n'ont pas le temps de se faire et la compression est plutôt adiabatique qu'isotherme. Or, l'adiabatique est plus pentue que l'isotherme dans le diagramme (P,V) , donc la température du gaz s'élève. Puisque alors sa température T est plus élevée que T_f , il évacue bien de l'énergie thermique vers la source froide, mais il y a un gradient de température, cause d'irréversibilité, et donc de dégradation du rendement.

On peut aussi comprendre mécaniquement cette dégradation du rendement. Puisque $T > T_f$, la pression du gaz est plus grande que ce qu'elle serait lors d'une compression lente. L'étape de compression $A \rightarrow B$ est plus coûteuse en travail (et le rendement baisse). Le point B serait situé plus haut dans le cycle, réduisant ainsi son aire, qui représente le travail que le moteur peut fournir.

Malgré toutes ces considérations pessimistes sur le rendement, il ne faut pas croire que le cycle de Stirling n'est que théorique. Les moteurs de Stirling fonctionnent très bien, avec de grandes vitesses de rotation, et nécessitent peu d'entretien.

4 Rendement d'un moteur à quatre temps

1. Les termes d'énergie cinétique sont négligés dans l'écriture du premier principe. En effet, le fonctionnement d'un moteur à pistons repose principalement sur les variations d'énergie interne du gaz dans les pistons ($|\Delta \mathcal{E}_c| \ll |\Delta U|$).

Le premier principe appliqué au système s'écrit $\Delta U_{BC} = Q_{BC}$, car le volume est constant lors de l'évolution $B \rightarrow C$ (le travail des forces de pression est donc nul). En utilisant l'expression $\Delta U = C_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T$ pour un gaz parfait, on obtient

$$\Delta U_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_C - T_B) = Q_{BC} .$$

Le volume est constant et la pression est plus grande en C qu'en B . Par conséquent, $T_C > T_B$ d'après la loi des gaz parfaits $pV = nRT$. Ainsi, $Q_{BC} > 0$: le système reçoit de l'énergie thermique, ce qui est conforme à la nature de la phase BC qui est une phase de combustion.

2. De la même manière, l'évolution $D \rightarrow A$ est isochore, donc le travail des forces de pression est nul,

$$\Delta U_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_D) = Q_{DA} .$$

On a $T_A < T_D$ car $p_A < p_D$, donc le système se refroidit pendant cette phase, $Q_{DA} < 0$.

3. D'après l'énoncé, W , Q_{BC} et Q_{DA} sont définis comme les transferts reçus par le système. Il apparaissent donc affectés du signe « plus » dans l'écriture du premier principe appliqué au système pour un cycle, $\Delta U = 0 = W + Q_{BC} + Q_{DA}$, donc $W = -(Q_{BC} + Q_{DA})$.

4. Le rendement énergétique est le rapport du travail récupéré par l'utilisateur (travail utile, soit $-W$) sur l'énergie thermique reçue par le gaz lors de la combustion (Q_{BC} , l'énergie coûteuse).

$$\eta = \frac{-W}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} \quad (18.1)$$

5. D'après la loi de Laplace, la quantité $TV^{\gamma-1}$ reste constante lors des évolutions adiabatiques réversibles $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$, donc

$$T_A V_{\max}^{\gamma-1} = T_B V_{\min}^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_A = T_B \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\gamma-1} = T_B \left(\frac{1}{a} \right)^{\gamma-1} = T_B a^{1-\gamma} .$$

De même,

$$T_C V_{\min}^{\gamma-1} = T_D V_{\max}^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_D = T_C a^{1-\gamma} .$$

En remplaçant les expressions de T_A et T_D dans l'équation (18.1), et en factorisant par $a^{1-\gamma}$, on obtient

$$\eta = 1 - a^{1-\gamma}.$$

Comme $1 - \gamma < 0$, le rendement η est une fonction croissante de a ; il est d'autant meilleur que le rapport entre le volume maximal de la chambre et son volume minimal est grand. Cependant, si ce rapport augmente, la compression devient plus grande, donc la température T_C augmente et le mélange risque de s'enflammer spontanément avant que le piston n'arrive à sa position haute, ce qui diminue le rendement et risque surtout d'endommager le moteur.

Numériquement, $\eta = 0,60 = 60\%$. Le cas $a = 10$ étudié correspond à celui d'un moteur à essence (allumage commandé par une bougie). Dans un moteur Diesel (dont le cycle est un peu différent), $a \simeq 20$ et la température en fin de compression est plus grande, permettant à la combustion de démarrer spontanément (au bon moment, c'est-à-dire quand $V \simeq V_{\min}$). Avec $a = 20$, on trouve $\eta \simeq 0,70$. Le rendement (théorique) du moteur Diesel est un peu supérieur à celui du moteur à essence.

6. On utilise les lois de Laplace déjà écrites pour les évolutions adiabatiques réversibles $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$. On prend soin de travailler avec des températures exprimées en kelvins pour les applications numériques.

$$T_B = T_A a^{\gamma-1} \simeq 750 \text{ K} = 480^\circ \text{C} \quad \text{et} \quad T_D = T_C a^{1-\gamma} \simeq 427 \text{ K} = 154^\circ \text{C}$$

7. Pour déterminer l'entropie créée au cours du cycle, on applique le deuxième principe au système des n moles de gaz (système fermé) pour un cycle

$$\Delta S = \frac{Q_{BC}}{T_C} + \frac{Q_{DA}}{T_A} + S_{\text{créé}} \underset{\text{cycle}}{=} 0.$$

En remplaçant Q_{BC} et Q_{DA} par leurs expressions et en divisant par n (pour faire apparaître des grandeurs molaires),

$$\frac{R}{\gamma-1} \left[1 - \frac{T_B}{T_C} + 1 - \frac{T_D}{T_A} \right] + \frac{S_{\text{créé}}}{n} = 0,$$

donc

$$S_{\text{m créé}} = \frac{R}{1-\gamma} \left[2 - \frac{T_B}{T_C} - \frac{T_D}{T_A} \right] = 2,54 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

8. Puisque $S_{\text{m créé}} > 0$, le cycle décrit est irréversible. Les deux évolutions adiabatiques étant réversibles par hypothèse, l'irréversibilité ne peut venir que des deux évolutions isochores. Lors de celles-ci, le gaz est mis en contact thermique avec un thermostat qui n'est pas à la même température que lui initialement. Par exemple, en B , les gaz sont mis en contact avec un thermostat à $T_C > T_B$. Il y a donc un gradient de température entre le gaz et le thermostat, ce qui est une cause d'irréversibilité. C'est d'ailleurs cette différence de température qui permet le transfert thermique du thermostat vers le gaz. Dans un moteur réel, d'autres causes d'irréversibilité s'ajoutent.

► Les deux évolutions adiabatiques ne sont pas vraiment réversibles. Un moteur de voiture tourne à 2000 ou 3000 tours par minute, soit 50 tours par seconde. Le piston fait donc 50 allers-retours par seconde. Une compression, soit un aller simple du piston sur une dizaine de centimètres, dure donc un centième de seconde. Le piston a donc une vitesse de l'ordre de $v \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse est très faible devant la célérité des ondes sonores dans un gaz ($c \simeq 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour le son dans l'air dans les conditions ambiantes), mais $v/c \simeq 3\%$ n'est tout de même pas négligeable. Il y a donc un gradient de pression (p non homogène) dans le gaz. En toute rigueur, on ne peut donc pas écrire la loi de Laplace, car on ne sait pas quelle valeur donner à p . Pour la même raison, on ne peut pas non plus représenter l'évolution dans le diagramme (p, V) .

► L'apport thermique dans la phase $B \rightarrow C$ a été modélisé comme venant d'un thermostat. En réalité, il s'agit de la combustion (réaction chimique) du mélange air-essence. Celle-ci est intrinsèquement irréversible : le film de la combustion passé à l'envers est complètement absurde (on verrait des gaz d'échappement reformer de l'air et de l'essence).

► Dans le moteur, le cylindre exerce d'inévitables frottements sur le piston. Cela convertit de l'énergie mécanique en énergie thermique : la zone de frottement s'échauffe et chauffe le gaz. Ce processus est irréversible. En effet, si on en passait le film à l'envers, on verrait la zone de frottement se refroidir (absurde) et les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement du piston dans le film en sens normal, aideraient le piston à avancer (autre absurdité).

9. Le moteur de Carnot, détaillé dans l'exercice 5 (voir page 525), est un moteur ditherme théorique parfaitement réversible : aucune étape n'y crée d'entropie, donc l'égalité de Clausius est valable. Ce moteur a ainsi le rendement maximal théorique possible

$$\eta_C = 1 - \frac{T_C}{T_A} \simeq 0,72 = 72\%$$

(voir le théorème de Carnot page 509). Ainsi, $\eta < \eta_C$ à cause des phénomènes irréversibles dans le moteur à quatre temps étudié. Le rendement $\eta = 60\%$ calculé ne tenait compte que de l'irréversibilité intrinsèque au modèle. Les autres causes d'irréversibilité présentées à la question précédente contribuent à faire encore diminuer ce rendement. En pratique, dans une voiture, $\eta_{\text{réel}} \simeq 40\%$ seulement.

5 Cycle de Carnot

1. Durant l'étape $A \rightarrow B$, le gaz est comprimé lentement (étape quasi stationnaire, par hypothèse). Il est donc au voisinage de l'équilibre interne à tout instant de cette évolution. En particulier, sa température est uniforme et doit être égale à celle des parois du cylindre, c'est-à-dire celles du thermostat T_1 . La transformation $A \rightarrow B$ est donc isotherme à T_1 . De même, $C \rightarrow D$ est isotherme à T_2 . Si ces évolutions étaient effectuées de façon rapide, les échanges thermiques à travers les parois du cylindre n'auraient pas le temps de bien se faire et le champ de température du gaz ne serait pas uniforme : les évolutions ne seraient pas isothermes.

2. Le cycle de Carnot dans un diagramme de Watt est représenté sur la figure E.18.2. Pour obtenir ce tracé, on a utilisé les faits suivants :

- Par définition, le volume diminue lors d'une compression et augmente lors d'une détente.
- Pour un gaz parfait, une courbe isotherme a pour équation $pV = \text{cte}$ (hyperbole décroissante dans le diagramme de Watt). Par conséquent, la pression du gaz augmente lors d'une compression isotherme et diminue lors d'une détente isotherme.
- En un point donné du diagramme de Watt d'un gaz parfait, la pente d'une courbe adiabatique réversible ($pV^\gamma = \text{cte}$) est plus grande que la pente d'une isotherme ($pV = \text{cte}$) car $\gamma > 1$. Ainsi, lors de la compression $B \rightarrow C$, la pression augmente plus rapidement que lors de la compression $A \rightarrow B$.

3. Dans un diagramme de Watt (p, V), l'aire sous la courbe représentative d'une évolution a pour valeur la valeur absolue du travail reçu par le gaz. Lors de $A \rightarrow B \rightarrow C$, le gaz a été comprimé : il a reçu du travail de la part du piston. Lors de $C \rightarrow D \rightarrow A$, le gaz s'est détendu, il a fourni du travail au piston. En comparant les aires sous les courbes, nous voyons que le gaz a fourni plus de travail lors de sa détente qu'il n'en a reçu lors de sa compression. Le dispositif a donc fourni du travail à l'opérateur : c'est bien un moteur.

4. Le cycle est effectué de façon quasi stationnaire : la pression au sein du gaz est donc toujours uniforme (quasi-équilibre mécanique interne), égale à la pression exercée par le piston sur le gaz. Ainsi, si on filmait l'expérience et si on passait le film à l'envers, on ne verrait aucune absurdité mécanique. (Un exemple d'absurdité serait, par exemple, le cas d'un piston en train de remonter alors que le gaz sous lui exerce une pression plus faible que l'opérateur au-dessus de lui.)

Par ailleurs, le gaz est à la température des parois durant toute l'expérience. Tout a été fait pour cela. Par exemple, à la fin de la compression $B \rightarrow C$, le gaz a atteint exactement la

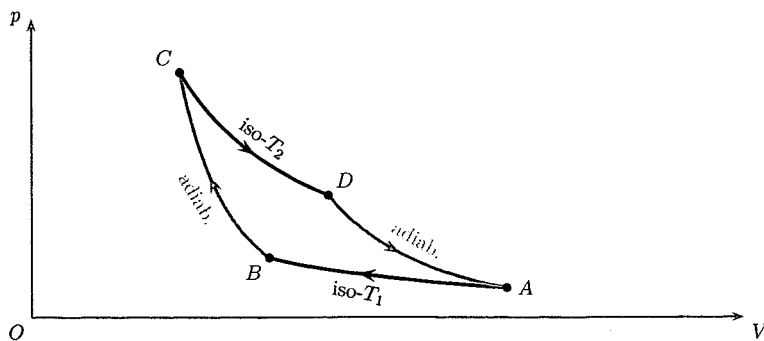


FIG. E.18.2. Représentation du cycle de Carnot dans un diagramme de Watt.

température T_2 du thermostat avec lequel il sera mis en contact pour l'étape suivante. Puisque le gaz est à la température des parois, les échanges thermiques entre le gaz et les parois peuvent avoir lieu dans un sens comme dans l'autre (ces échanges seront d'ailleurs infiniment lents du fait qu'il n'y a pas d'écart de température entre les parois et le gaz). Ainsi, le film de l'expérience passé à l'envers ne montre aucune absurdité thermique.

Puisqu'il n'y a aucune absurdité dans le film projeté à l'envers, le cycle décrit par le gaz est réversible.

5. On applique le premier principe au gaz durant l'évolution quasi stationnaire isotherme $A \rightarrow B$. Il n'y a pas de terme d'énergie cinétique car l'évolution est très lente, $\Delta U = W_1 + Q_1$, avec $W_1 = \int -P dV = -nRT_1 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_A}{V_B}$. La première loi de Joule stipule que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température, donc $\Delta U = 0$ pour l'évolution $A \rightarrow B$ qui est isotherme. Ainsi, $Q_1 = -W_1$, soit $Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$. De même,

$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$. En utilisant ces deux relations,

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = nR \ln \frac{V_B V_D}{V_A V_C} \quad (18.2)$$

6. Les deux autres évolutions du gaz au cours du cycle sont adiabatiques réversibles. On peut donc lier les rapports de volumes aux rapports de températures grâce à la loi de Laplace « $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$ ». (Attention, ce n'est pas la même constante pour les deux évolutions. Mieux vaut opter pour une écriture sans la constante.)

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_B}{V_C} &= \left(\frac{T_C}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \frac{V_D}{V_A} &= \left(\frac{T_A}{T_D} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_B V_D}{V_A V_C} = 1 \quad (18.3)$$

7. L'équation (18.3) combinée à (18.2) prouve donc l'égalité de Clausius

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Remarques

► Si on décide d'effectuer le cycle à l'envers, la seule chose qui est modifiée est le sens des échanges d'énergie. Le gaz reçoit du travail (il n'a plus un comportement de moteur) et les signes de Q_1 et Q_2 sont inversés. Cela ne change cependant rien à la démonstration de l'égalité de Clausius.

Le cycle de Carnot (quasi stationnaire) est réversible. L'égalité de Clausius est valable quel que soit le sens de parcours du cycle de Carnot.

► La loi de Laplace peut être démontrée indépendamment du deuxième principe (démonstration hors programme en première année). Ainsi, cet exercice montre que l'égalité de Clausius peut être obtenue sans le deuxième principe, dans le cas particulier d'un gaz parfait subissant un cycle ditherme réversible. C'est en généralisant l'égalité de Clausius à des systèmes autres que des gaz parfaits et à des cycles plus complexes que le deuxième principe a été construit. Dans le cadre du programme, on part toujours du deuxième principe pour obtenir l'égalité de Clausius en vue de l'appliquer à une machine thermique.

► Le cycle de Carnot étant réversible, il permet au moteur de Carnot d'atteindre le rendement maximal théorique d'un moteur cyclique ditherme (voir théorème de Carnot page 509). Cependant, cette machine est purement théorique, car les évolutions $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ doivent être infiniment lentes pour être isothermes (absence de gradient de température dans le dispositif). En pratique, pour que les échanges thermiques soient rapides, il faut qu'il y ait des gradients de température, qui sont source d'irréversibilité des échanges thermiques, mais aussi de dégradation du rendement énergétique. La rapidité d'une machine se fait au détriment du rendement. On rappelle par exemple qu'un moteur de voiture (qui n'obéit pas à un cycle de Carnot) a un rendement énergétique d'environ 40 %, alors que le rendement théorique d'un moteur de Carnot utilisant les mêmes thermostats est environ de 70 %.

6 Optimisation d'un moteur

1. Étude d'un cycle théorique de moteur

a/ Il faut pouvoir calculer Q_1 et Q_2 . Entre B et C , l'évolution est isochore, donc le travail est nul. D'après le premier principe et l'expression de ΔU pour un gaz parfait,

$$aQ_1 = \frac{R}{M(\gamma - 1)}(T_C - T_B).$$

Entre C et C' , l'évolution est isobare. Il est donc plus pratique de travailler avec la variation d'enthalpie, $bQ_1 = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}(T_{C'} - T_C)$. Enfin, pour l'évolution isochore $D \rightarrow A$, le premier

principe appliqué au gaz s'écrit $U_A - U_D = -Q_2$, donc $Q_2 = \frac{R}{M(\gamma - 1)}(T_D - T_A)$. Par ailleurs,

le rendement est $\eta = -W/Q_1$ et le premier principe appliqué au gaz sur un cycle s'écrit $\Delta U = 0 = W + Q_1 - Q_2$, en faisant attention au signe « moins » devant Q_2 , car c'est le transfert thermique *rejeté* par le gaz. Compte tenu de ces relations, le rendement s'exprime comme

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_D - T_A}{\gamma T_{C'} - T_B - (\gamma - 1)T_C}.$$

b/ En utilisant les lois de Laplace pour la transformation $A \rightarrow B$, $T_B = \tau^{\gamma-1}T_{\text{atm}}$. L'évo-

lution $B \rightarrow C$ est isochore, la loi des gaz parfaits conduit à $T_C = \lambda \tau^{\gamma-1}T_{\text{atm}}$. L'évolution $C \rightarrow C'$ est isobare, une nouvelle fois la loi des gaz parfaits permet de conclure que

$T_{C'} = \Delta \lambda \tau^{\gamma-1}T_{\text{atm}}$. Enfin, l'évolution $C' \rightarrow D$, adiabatique réversible, permet d'utiliser les

lois de Laplace, $T_D = \Delta^\gamma \lambda T_{\text{atm}}$.

c/ En injectant les expressions des températures dans η ,

$$\eta = 1 - \frac{1}{\tau^{\gamma-1}} \frac{\lambda \Delta^\gamma - 1}{\gamma \Delta \lambda - 1 - (\gamma - 1)\lambda}. \quad (18.4)$$

d/ Puisque $\Delta > 1$ et $\lambda > 1$, la température la plus élevée est $T_{C'}$. Par conséquent,

$$T_{C'}/T_A = T_{\max}/T_{\text{atm}} = \alpha,$$

ce qui conduit à la relation $\Delta\lambda\tau^{\gamma-1} = \alpha$. D'autre part, $a = b$, donc $aQ_1 = bQ_1$, soit $T_C - T_B = \gamma(T_{C'} - T_C)$ et après calcul $(1 + \gamma)\lambda = \gamma\Delta\lambda + 1$. À l'aide de ces deux relations, on trouve

$$\lambda = \frac{1 + \gamma\alpha\tau^{1-\gamma}}{1 + \gamma}.$$

Numériquement, $\lambda = 2,5$ et $\Delta = 1,4$. En ce qui concerne les pressions, l'utilisation des lois de Laplace entre A et B donne $p_B = \tau^\gamma p_{\text{atm}}$. Or, $p_C = \lambda p_B$ par hypothèse, soit $p_C = \lambda\tau^\gamma p_{\text{atm}}$ et la loi des gaz parfaits pour la transformation isochore $A \rightarrow D$ permet de montrer que $p_D = \Delta^\gamma \lambda p_{\text{atm}}$.

Toutes les valeurs numériques sont regroupées dans le tableau E.18.1.

	A	B	C	C'	D	
T (K)	300	754	1884	2700	1201	$\tau = 10; \alpha = 9$
p (bar)	1	25	63	63	4	$\lambda = 2,5$
						$\Delta = 1,4$

TABLEAU E.18.1. Températures et pressions dans le cas de la figure 18.9.

e/ En injectant ces valeurs dans l'équation (18.4), on obtient $\eta = 59\%$.

2. Optimisation d'un cycle théorique de moteur

a/ Le nouveau cycle est tracé à la figure E.18.3. Les transferts thermiques se font lors d'évolutions isochores.

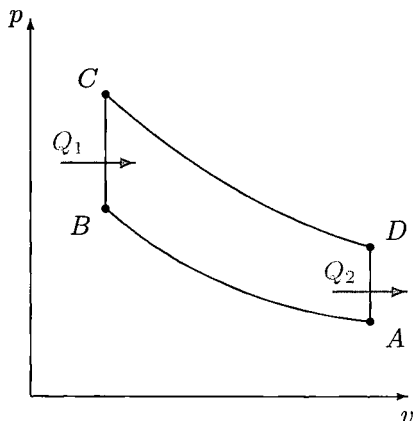


FIG. E.18.3. Nouveau cycle théorique du moteur, obtenu en supprimant l'évolution $C \rightarrow C'$. Les évolutions $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$ sont isochores; $A \rightarrow B$ et $C' \rightarrow D$ sont adiabatiques réversibles. On retrouve le cycle de Beau de Rochas.

b/ Il suffit, dans les expressions précédentes, de prendre $\Delta = 1$, $T_B = \tau^{\gamma-1} T_{\text{atm}}$, $T_C = \lambda\tau^{\gamma-1} T_{\text{atm}}$, $T_D = \lambda T_{\text{atm}}$, $p_B = \tau^\gamma p_{\text{atm}}$, $p_C = \lambda\tau^\gamma p_{\text{atm}}$, $p_D = \lambda p_{\text{atm}}$. On remarque alors que $T_A T_C = T_B T_D$.

c/ Avec $\beta = \tau^{\gamma-1}$ et en constatant que puisque $\Delta = 1$, $\lambda\tau^{\gamma-1} = \alpha = \lambda\beta$, on obtient $T_B = \beta T_{\text{atm}}$, $T_C = \alpha T_{\text{atm}}$, $T_D = \alpha/\beta \times T_{\text{atm}}$, $p_B = \tau^\gamma p_{\text{atm}}$.

d/ Sur un cycle, d'après le premier principe, $W + Q_1 - Q_2 = 0$, soit $|W| = Q_1 - Q_2$. Or, $Q_1 = c_v(T_C - T_B)$ et $-Q_2 = c_v(T_A - T_D)$ car les évolutions sont isochores, le travail est donc nul. On en déduit que $|W| = c_v T_{\text{atm}} (\alpha - \beta + 1 - \alpha/\beta)$.

e/ Il suffit d'étudier les variations de la fonction f en fonction de β . La dérivée s'annule lorsque $\beta = \sqrt{\alpha}$, soit $\tau = \alpha^{1/[2(\gamma-1)]}$, soit numériquement $\tau = 15,6$. Le travail pour cette valeur

est alors $|W|_{\text{max}} = c_v T_{\text{atm}} (\sqrt{\alpha} - 1)^2$.

f/ $\eta^* = |W|_{\text{max}}/Q_1$, soit après simplifications $\eta^* = (\sqrt{\alpha} - 1)/\sqrt{\alpha} = 1 - 1/\sqrt{\alpha}$. Numériquement, $\eta^* = 67\%$. Ce rendement est supérieur à celui que l'on obtiendrait pour $\tau = 10$,

$\eta' = 1 - 1/\beta = 60\%$.

g/ $p_C = \alpha \tau p_{\text{atm}} = 90 \text{ bars}$. Ce cycle est réaliste.

7 Étude d'une machine frigorifique

1. L'écoulement étant permanent, la masse de fréon contenue dans le dispositif est indépendante du temps. Par conséquent, la masse Δm_A qui entre en A pendant Δt est égale à la masse Δm_B qui sort en B pendant le même intervalle de temps Δt ,

$$\Delta m_A = \Delta m_B \Rightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t} \iff D_{mA} = D_{mB}.$$

2. Cette question, assez longue à traiter, a été abordée dans le cours avec des notations quasi identiques (voir section IV.1 page 516) et mène à la relation

$$D_m \left[\left(h_B + \frac{V_B^2}{2} \right) - \left(h_A + \frac{V_A^2}{2} \right) \right] = \mathcal{P}_W + \mathcal{P}_Q. \quad (18.5)$$

3. On note Δm la masse élémentaire de fréon qui circule pendant l'intervalle de temps Δt . On applique la relation (18.5) à un des éléments du réfrigérateur, en tenant compte de $D_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$.

$$\underbrace{\Delta m (h_B - h_A)}_{\text{négligé par hyp.}} + \underbrace{\Delta m \left(\frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} \right)}_W = \underbrace{\mathcal{P}_W \Delta t}_W + \underbrace{\mathcal{P}_Q \Delta t}_Q \Rightarrow h_B - h_A = \underbrace{\frac{W}{\Delta m} + \frac{Q}{\Delta m}}_{\text{transferts massiques}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{aval}} - h_{\text{amont}} = w + q \quad (18.6)$$

4. La vanne 3 \rightarrow 4 ne fournit ni travail ni transfert thermique au fréon. En appliquant la relation (18.6) avec $w = 0$ et $q = 0$,

$$h_4 = h_3 \quad (\text{détente isenthalpique}).$$

5. Quand le liquide et la vapeur coexistent, la température et la pression sont liées à l'équilibre, $p = p_{\text{sat}}(T)$. Donc une évolution isobare quasi stationnaire est aussi isotherme sous la courbe de saturation. Une isobare (et isotherme) quasi stationnaire est donc une droite horizontale dans le diagramme (t - s) sous la courbe de saturation (région liq \rightleftharpoons vap).

6. Pour construire le cycle, on résume les informations données dans un diagramme (voir figure E.18.4 et tableau E.18.2). Le cycle est tracé sur la figure E.18.7 page 768.

7. Si l'évolution du fréon dans le compresseur était adiabatique irréversible, l'entropie massique du fréon augmenterait en vertu du deuxième principe (appliqué à une unité de masse de fréon, système fermé),

$$\Delta S = \underbrace{\frac{Q}{T_{\text{ext}}}}_{=0} + \underbrace{S_{\text{créé}}}_{>0} > 0.$$

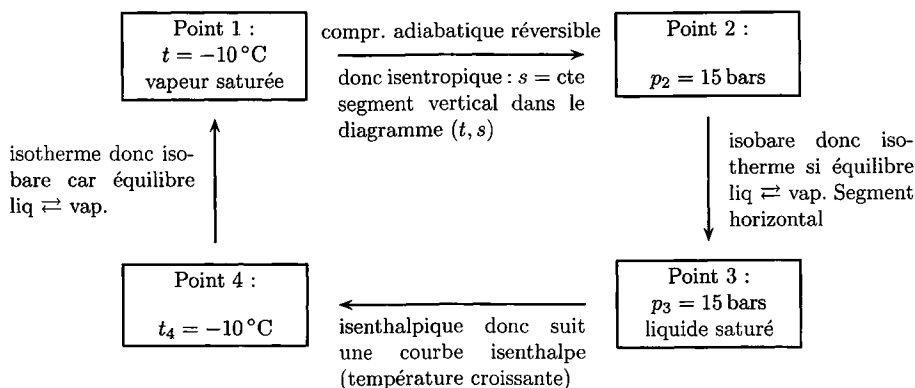


FIG. E.18.4. Résumé des évolutions du fluide dans la machine frigorifique.

Point	État	t ($^{\circ}\text{C}$)	p (bar)	h ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
1	vapeur saturante	-10	2,2	184	0,7
2	vapeur sèche	67	15	216	0,7
3	liquide saturant	60	15	96	0,34
4	liq \rightleftharpoons vap	-10	2,2	96	0,36

TABLEAU E.18.2. Propriétés du fréon aux différents points du diagramme (t - s).

Le segment $1 \rightarrow 2$ serait donc remplacé par une portion de courbe oblique (pente positive pour respecter la croissance de s) et le point 2 serait situé plus à droite sur la courbe isobare $p = 15$ bars. Graphiquement, on voit que la température en fin de compression serait donc supérieure à t_2 .

8. Par définition de l'enthalpie massique de vaporisation, $L(t_0) = h_{\text{vap}}(t_0) - h_{\text{liq}}(t_0)$, donc $L(t_0)$ se lit graphiquement comme l'écart entre deux courbes isenthalpes passant par les extrémités d'un palier horizontal de vaporisation.

Par ailleurs, le deuxième principe appliqué à une masse m donnée de fréon (système fermé) pour une évolution monotherme réversible s'écrit $\Delta S = \frac{Q}{T_0}$. Dans le cas où cette évolution est de plus isobare (cas d'un changement d'état quasi stationnaire isotherme), $Q = \Delta H$, donc $\Delta S = \frac{\Delta H}{T_0}$. En divisant membre à membre cette égalité par la masse m du système, on obtient

$$s_{\text{vap}} - s_{\text{liq}} = \frac{1}{T_0} \underbrace{[h_{\text{vap}}(T_0) - h_{\text{liq}}(T_0)]}_{L(T_0)} \Rightarrow L(T_0) = T_0 (s_{\text{vap}}(T_0) - s_{\text{liq}}(T_0)). \quad (18.7)$$

Attention, dans cette dernière relation, la température est exprimée en kelvins. C'est pour cela qu'elle est écrite avec un T majuscule. Graphiquement, la différence $s_{\text{vap}}(T_0) - s_{\text{liq}}(T_0)$ se lit comme la différence des abscisses des extrémités du palier de liquéfaction (les extrémités sont sur la courbe de saturation) à la température T_0 .

9. Pour $p = 3,0$ bars, le diagramme indique que la température du palier est $t = 0^{\circ}\text{C}$, soit $T = 273$ K. Graphiquement, on mesure la longueur du palier et la relation (18.7) donne, aux incertitudes de lecture graphique près, $L(273 \text{ K}) = 148 \pm 5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

10. Le point critique est le sommet de la courbe de saturation. On lit sur le diagramme

$$t_c \simeq 112^\circ\text{C} ; s_c \simeq 0,58 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ; L \xrightarrow{t \rightarrow t_c} 0 .$$

Le palier de vaporisation est de moins en moins large lorsque la température augmente vers t_c . Le liquide et la vapeur se « ressemblent » de plus en plus (entropies massiques presque égales). Il suffit donc de fournir peu d'énergie pour effectuer la transition liquide \rightarrow vapeur.

11. La pression étant fixée, la température l'est aussi, car ces deux grandeurs sont liées lors d'un équilibre liquide-vapeur de corps pur. Pour une température t donnée, l'entropie du système {liquide + vapeur = masse m de fréon} s'écrit comme la somme des entropies de chaque phase (extensivité de l'entropie).

$$S(x, t) = mxs_{\text{vap}}(t) + m(1 - x)s_{\text{liq}}(t)$$

En divisant tout par m , on construit l'entropie massique $s = \frac{S}{m}$ du fréon qui donne

$$x = \frac{s - s_{\text{liq}}(t)}{s_{\text{vap}}(t) - s_{\text{liq}}(t)} \quad (\text{règle des moments}) .$$

Le numérateur et le dénominateur s'interprètent bien comme des longueurs. Si L et V désignent les extrémités (liquide et vapeur saturants respectivement) du palier et si M désigne un point du palier, le titre en vapeur au point M s'écrit

$$x = \frac{LM}{LV} .$$

12. Sur le diagramme, pour le point 4, on lit $x_4 \simeq 0,43$. Cela est cohérent, car le point 4 est entre les courbes isotitre en vapeur $x = 0,4$ et $x = 0,5$.

13. Le condenseur ne fournit pas de travail au fréon (parois indéformables, pas de dispositif moteur ou de piston). L'expression (18.6) appliquée avec $w = 0$ donne q_c dont on détermine graphiquement la valeur numérique $h_3 - h_2 = q_c \simeq -120 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. La valeur de q_c est négative, ce qui signifie que le fréon cède de l'énergie thermique au milieu chaud. C'est pour cela que la grille située à l'arrière des réfrigérateurs domestiques est toujours un peu tiède. De plus, il est normal que le fréon libère de l'énergie lorsqu'il se condense (son enthalpie massique diminue).

14. En faisant le même raisonnement pour l'évolution $4 \rightarrow 1$, $q_f = h_1 - h_4 \simeq +88 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. La valeur de q_f est positive, ce qui est normal pour une vaporisation (consommation d'énergie thermique). Le fréon prélève donc de l'énergie au milieu froid, ce qui est bien le rôle d'une machine réfrigérante.

15. On peut calculer $w_{1 \rightarrow 2}$ de deux façons. La plus simple consiste à appliquer l'expression (18.6) avec $q = 0$ (évolution adiabatique), ce qui donne

$$w_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 \simeq +32 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

La seconde façon utilise le fait que l'enthalpie est une fonction d'état. Par conséquent, pour un cycle (états de départ et d'arrivée identiques), la variation d'enthalpie d'un système fermé est nulle. En écrivant cela pour les grandeurs massiques du fréon,

$$h_1 - h_1 = 0 = w_{1 \rightarrow 2} + q_f + q_c \Rightarrow w_{1 \rightarrow 2} = -(q_f + q_c) \simeq +32 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

Le travail massique $w_{1 \rightarrow 2}$ est positif, ce qui est normal car le compresseur doit fournir du travail au fréon pour faire augmenter sa pression. C'est pour pouvoir fournir ce travail au fréon qu'un réfrigérateur doit consommer de l'énergie électrique.

16. On définit l'efficacité du réfrigérateur par

$$\varepsilon = \frac{|\text{transfert d'énergie utile}|}{\text{coût énergétique}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{q_f}{w_{1 \rightarrow 2}} \simeq 2,75}$$

Cela signifie que, pour un joule de travail dépensé dans le compresseur, la machine prélève 2,75 joules sous forme thermique au milieu froid.

17. Adiabatique réversible signifie isentropique. Le fonctionnement d'une machine de Carnot, représenté par deux isothermes et deux isentropiques, est donc un rectangle dans le diagramme (t - s) (voir figure E.18.5). Le point C correspond au point 3 de l'étude précédente. Le point B

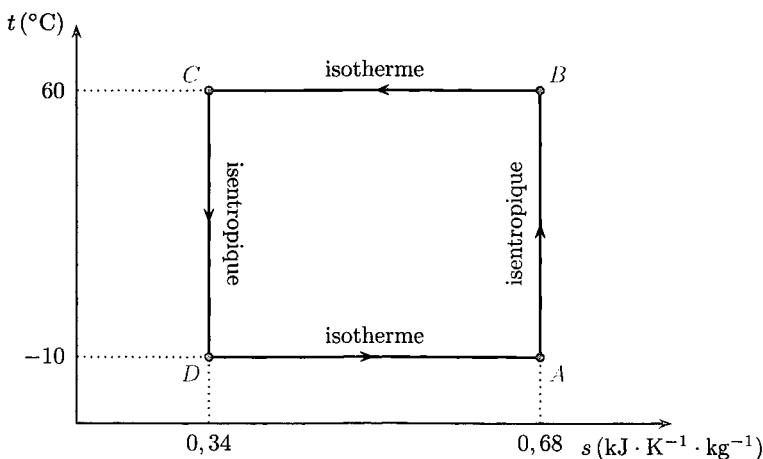


FIG. E.18.5. Cycle de la machine de Carnot dans le diagramme (t - s).

correspond à l'extrémité droite du palier de vaporisation à $t = +60$ °C. Le cycle de Carnot est construit de la façon suivante.

- ▶ $A \rightarrow B$: compression isentropique (échauffement).
- ▶ $B \rightarrow C$: liquéfaction qui donne de l'énergie thermique à la source chaude.
- ▶ $C \rightarrow D$: détente isentropique (contrairement à une détente de type Joule-Thomson qui crée de l'entropie).
- ▶ $D \rightarrow A$: vaporisation avec prélèvement d'énergie thermique à la source froide.

L'efficacité de la machine de Carnot est définie par $\varepsilon = \frac{q_{D \rightarrow A}}{w_{A \rightarrow B}}$, avec :

- ▶ $q_{D \rightarrow A} = T_A \times (s_A - s_D) \simeq (273 - 10) \times (0,7 - 0,34) \simeq 94 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- ▶ $w_{A \rightarrow B} = (h_B - h_A) \simeq 30 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (déterminé graphiquement sur le diagramme).

Numériquement, l'efficacité de la machine de Carnot est $\boxed{\varepsilon \simeq 3,13}$. L'efficacité de la machine de Carnot (cycle réversible) est donc supérieure à celle de la machine réelle (cycle irréversible). Comme pour toutes les machines thermiques, l'irréversibilité est une cause de dégradation de l'efficacité énergétique.

18. Le deuxième principe appliqué à une masse donnée de fréon (système fermé) s'écrit, pour une évolution réversible monotherme, $Q = T \Delta S$. Par ailleurs, lors de l'échauffement quasi stationnaire isobare d'un système homogène de capacité thermique massique isobare C_p , la variation de température du système est liée à la quantité d'énergie thermique reçue par $Q = C_p \Delta T$ (relation classique de calorimétrie). Pour une évolution où la température varie peu (presque monotherme), on peut combiner ces deux relations, ce qui donne $C_p \Delta T = T \Delta S$. En divisant par la masse du système, on fait apparaître les grandeurs massiques, notées c_p et s ,

$$c_p \Delta T = T \Delta s \Rightarrow \boxed{c_p = T \frac{\Delta S}{\Delta T}}$$

Cette relation est vraie pour une évolution isobare et sur un faible intervalle de température autour de T . Dans ce cas, $\frac{\Delta S}{\Delta T}$ est liée, dans le diagramme (T - s), à la pente d'une courbe isobare (cette pente est la différence des ordonnées sur la différence des abscisses). Donc c_p se détermine comme le produit de la température (en kelvins) par l'inverse de la pente locale d'une courbe isobare. Au voisinage du point 1 :

- la température est de 263 K ;
- la pente de la courbe isobare peut se déterminer approximativement (graphiquement), par exemple en approchant la courbe par une droite entre deux points éloignés de 10 °C. Cela donne une pente $\frac{\Delta T}{\Delta s} \simeq \frac{273-263}{0,04}$ USI.

Avec ces valeurs, $c_p \simeq 1,05 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

19. Par définition, la pression au point 3' est $p_{3'} = \sqrt{p_3 \times p_4} \simeq 5,7 \text{ bars}$. Par lecture graphique, cela donne $t_{3'} \simeq 20^\circ\text{C}$. Le point 4' est placé en tenant compte de deux choses :

- $p_{4'} = p_4$, donc $t_{4'} = t_4$ car il y a coexistence des deux phases liquide et vapeur ;
- à partir du point de la courbe de liquide saturant à la température $t_{3'} = 20^\circ\text{C}$, on trace une isenthalpe qui correspond à la deuxième vanne. Le point 4' est sur cette isenthalpe.

20. Graphiquement, on lit $s_{4'} = 0,23 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, donc

$$q'_f = T_{4'} \times (s_1 - s_{4'}) \simeq 263 \times (0,7 - 0,23) \simeq 123 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

21. Pour calculer l'efficacité de la machine à séparation de phases, il faut tenir compte du fait que seul le fréon liquide en 3' est mis en contact avec la source froide *via* l'échangeur. Notons $x_{3'}$ le titre en vapeur (fraction massique de la vapeur) au point 3' et m la masse de fréon concernée (m disparaîtra des calculs au moment de passer en grandeurs massiques).

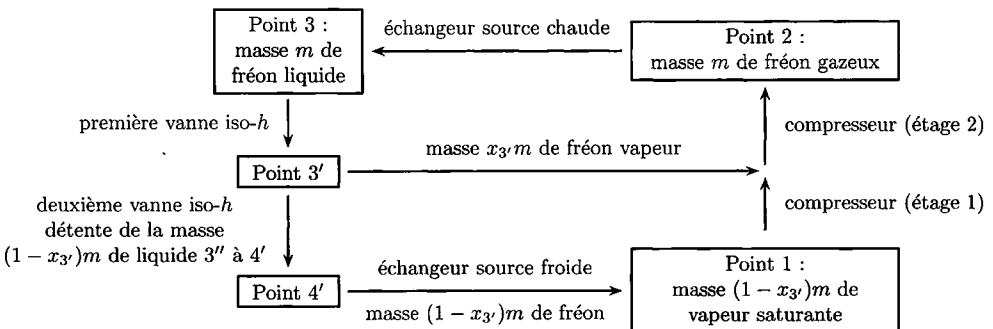


FIG. E.18.6. Diagramme récapitulatif des évolutions dans la machine à séparation de phases.

L'énoncé dit que le travail de compression représente 85% du travail $w_{1 \rightarrow 2}$ précédemment calculé. L'efficacité de la machine est donc

$$\varepsilon' = \frac{(1-x_{3'})q'_f}{0,85 \times w_{1 \rightarrow 2}}.$$

Graphiquement, on détermine $x_{3'}$ par la règle des moments, $x_{3'} \simeq 0,3$. Numériquement, l'efficacité est

$$\varepsilon' \simeq \frac{(1-0,3) \times 123}{0,85 \times 32} \Rightarrow \varepsilon' \simeq 3,2.$$

L'efficacité ε' est de 16% supérieure à $\varepsilon = 2,75$ calculé précédemment. Il y a eu une nette amélioration. Le diagramme E.18.6 montre pourquoi le compresseur a besoin de fournir moins de travail dans la machine à séparation de phases que dans la machine sans séparation : durant une partie de la compression (le premier étage), il y a moins de fréon à comprimer.

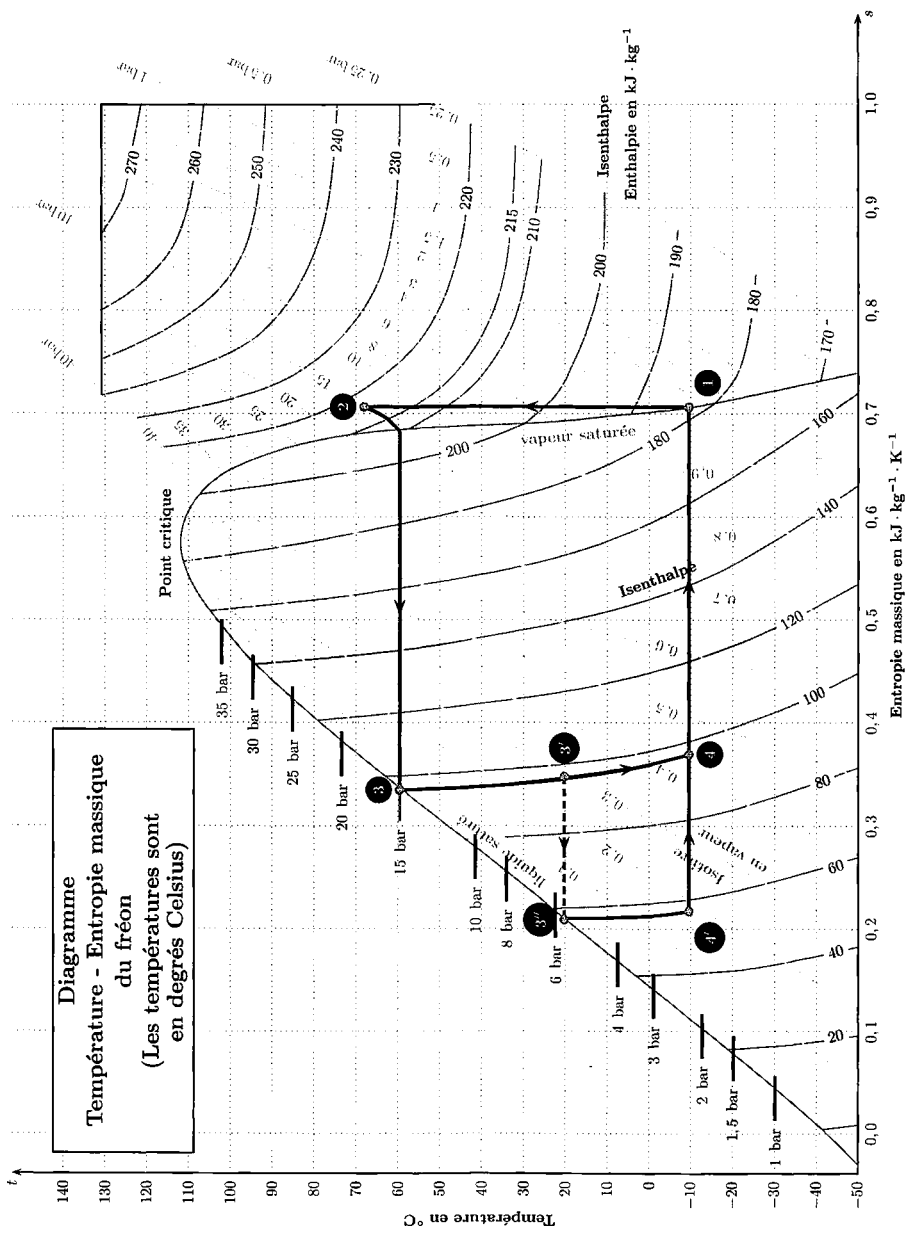


FIG. E.18.7. Cycle de la machine thermique dans le diagramme (t-s) du fréon.

Chapitre 19

1 Baromètre de Torricelli

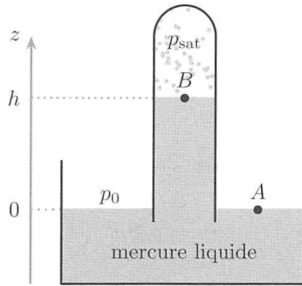


FIG. E.19.1. Baromètre de Torricelli.

1. Notons A et B deux points sur les surfaces libres du mercure dans le baromètre (voir figure E.19.1) et ρ la masse volumique du mercure liquide. En intégrant la relation de la statique des fluides entre A et B ,

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = - \int_{z_A}^{z_B} \rho g dz \Rightarrow p_B - p_A = -\rho g(z_B - z_A) \Rightarrow \underbrace{p_{\text{sat}}}_{\ll p_0} - p_0 = -\rho gh.$$

Comme la pression de vapeur saturante du mercure à la température ambiante est très faible devant la pression atmosphérique, on la néglige, ce qui donne $p_0 \simeq \rho gh$.

2. Numériquement, avec $\rho \simeq 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g \simeq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $h \simeq 0,760 \text{ m}$,

$$p_0 \simeq 13,6 \cdot 10^3 \times 9,81 \times 0,760 \Rightarrow p_0 \simeq 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Avec les données du problème, nous ne pouvons donner que trois chiffres significatifs. La valeur de la pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer est $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$.

Historiquement, les pressions ont longtemps été exprimées en « centimètres de mercure », en référence au baromètre de Torricelli, soit $p = \rho gh$, où ρ est la masse volumique du mercure. 76 centimètres de mercure correspondent à la pression d'une atmosphère.

3. La masse volumique de l'eau est 13,6 fois inférieure à celle du mercure. Si Torricelli avait utilisé de l'eau, la hauteur h de la colonne d'eau aurait été 13,6 fois supérieure, car

$$p_0 \simeq \rho_{\text{mercure}} g h_{\text{mercure}} = \rho_{\text{eau}} g h_{\text{eau}} \Rightarrow \frac{h_{\text{eau}}}{h_{\text{mercure}}} = \frac{\rho_{\text{mercure}}}{\rho_{\text{eau}}} = 13,6 \Rightarrow h_{\text{eau}} \simeq 10,3 \text{ m}.$$

4. En météorologie, la pression est souvent exprimée en hectopascals (hPa). Les variations temporelles de pression sont associées aux variations du temps météorologique. Selon les endroits, elles sont à interpréter un peu différemment. Dans les zones tempérées comme la France :

- une montée de la pression (« anticyclone ») est associée à l'approche du beau temps ;
- une baisse de la pression (« dépression ») est associée à l'approche du mauvais temps.

Cela s'explique car une baisse de pression engendre des vents qui essaient de « combler » la dépression (homogénéisation de la pression). Aux latitudes tempérées, les vents dominants viennent de l'ouest et apportent sur la France de l'air de l'Atlantique, chargé en humidité, ce qui provoque des pluies. La pression moyenne au niveau de la mer est de 1013 hPa. Les oscillations typiques sont de l'ordre de $\pm 15 \text{ hPa}$, et $\pm 50 \text{ hPa}$ dans les cas extrêmes. Les deux tempêtes qui ont ravagé la France à la fin de décembre 1999 correspondaient à des pressions de 960 hPa.

2 Variation de la hauteur d'eau dans un verre

1. La masse totale d'eau (liquide et glaçon) est, dans l'état initial, $m = \rho_e V_e + \rho_g V_g$, où V_e est le volume d'eau liquide initial. Si on note V_{im} le volume immergé du glaçon, le théorème d'Archimède s'écrit $\rho_e V_{im} = \rho_g V_g$, d'où

$$m = \rho_e (V_e + V_{im}) = \rho_e S h. \quad (19.1)$$

Dans l'état final, la masse d'eau, inchangée, s'écrit

$$m = \rho_e S h'. \quad (19.2)$$

Des équations (19.1) et (19.2) on déduit immédiatement $h = h'$.

2. Notons h la hauteur d'eau initiale dans le verre, sans le morceau de bois ni la pièce (voir figure E.19.2).

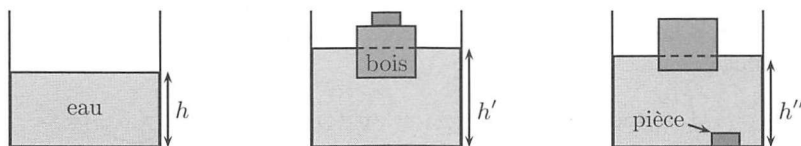


FIG. E.19.2. Variation de la hauteur d'eau dans un verre.

Quand on place le morceau de bois et la pièce qui flottent, la hauteur h' de l'eau délimite le volume $Sh' = Sh + V_{im}$, somme du volume d'eau initial et du volume immergé du bois. Le théorème d'Archimède donne l'égalité entre la masse d'eau déplacée et la masse de l'objet flottant (indice b pour le bois, et m pour le métal), $\rho_e V_{im} = m_b + m_m$, d'où

$$Sh' = Sh + \frac{m_b}{\rho_e} + \frac{m_m}{\rho_e}. \quad (19.3)$$

Quand la pièce est au fond, la hauteur h'' d'eau délimite le volume somme du volume d'eau initial, du nouveau volume V'_{im} de bois immergé et du volume de la pièce, soit

$$Sh'' = Sh + V'_{im} + V_m.$$

D'après le théorème d'Archimède, $\rho_e V'_{im} = m_b$, donc

$$Sh'' = Sh + \frac{m_b}{\rho_e} + V_m. \quad (19.4)$$

En soustrayant (19.3) de (19.4), on obtient

$$S(h'' - h') = V_m - \frac{m_m}{\rho_e} = V_m - \frac{V_m \rho_m}{\rho_e} = V_m \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_e}\right).$$

Le métal étant plus dense que l'eau, $\rho_m > \rho_e$, d'où $h'' < h'$.

3 Plongée libre

1. L'équation fondamentale de la statique des fluides s'écrit $\text{grad } p = \varrho \vec{g}$, soit, en projection sur \vec{u}_z , $\frac{dp}{dz} = -\varrho g$. La masse volumique de l'eau ϱ ainsi que le champ de pesanteur étant uniformes, cette relation s'intègre en $p(z) = p_{\text{atm}} - \varrho g z = 1,01 \cdot 10^5 - 9,81 \cdot 10^3 z$ (en Pa). Il s'agit d'une fonction affine (voir figure E.19.3), dont le tracé n'est pertinent que dans l'eau, c'est-à-dire pour $z < 0$.

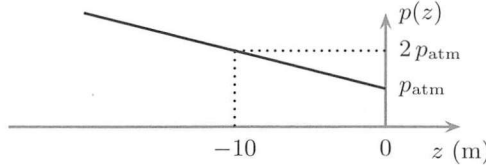


FIG. E.19.3. Évolution de la pression dans l'eau avec la profondeur.

2. L'évolution se faisant à température constante et le gaz étant parfait, $p(z)V(z) = p_{\text{atm}}V_M$, soit $V(z) = \frac{p_{\text{atm}}V_M}{p_{\text{atm}} - \varrho g z}$. Numériquement, $V(-10 \text{ m}) = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Le résultat est donné avec deux chiffres significatifs seulement, comme la profondeur $z = -10 \text{ m}$. Le plongeur retient sa respiration au cours de la plongée, donc son poids reste constant. La poussée d'Archimède, en revanche, proportionnelle au volume du plongeur, diminue car le volume des poumons diminue lors de la descente. Le poids apparent est donc $\vec{p}_a = \vec{\Pi}_{\text{arch}} + m \vec{g} = (\varrho V^*(z) - m)g \vec{u}_z$. Le poids apparent est une fonction croissante de z , il diminue donc avec la profondeur.

3. La flottabilité est nulle lorsque p_a est nul, donc lorsque $\varrho V^*(z) - (m + m_1) = 0$, soit $\varrho(V_0 + V(z)) = m + m_1$, d'où

$$m_1 = \varrho \left(V_0 + \frac{p_{\text{atm}} V_M}{p_{\text{atm}} - \varrho g z} \right) - m \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1,7 \text{ kg} .$$

4 Actions de pression sur une demi-sphère

1. Un tracé de quelques forces élémentaires montre que les composantes en dehors de l'axe de symétrie de la demi-sphère se compensent deux à deux (voir figure E.19.4).

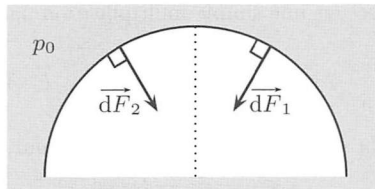


FIG. E.19.4. Les forces de pression élémentaires se compensent deux à deux.

Ainsi, seul le calcul de la composante sur cet axe compte. Choisissons le système de coordonnées sphériques de centre O pour le calcul (voir figure E.19.5).

Un élément de surface de la demi-sphère est assimilable à un « carré » de côtés $R d\theta$ et $R \sin \theta d\varphi$. Son aire est donc $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

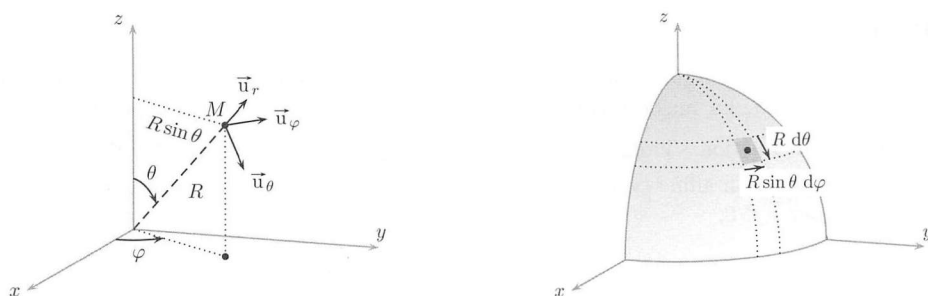


FIG. E.19.5. Élément de surface en coordonnées sphériques.

Attention Une aire est positive – Sens d'intégration

Pour que dS ait la signification d'une aire (positive), il faut que $d\theta$ et $d\varphi$ soient positifs. Cela conduit à calculer l'intégrale dans le sens des θ et des φ croissants.

Le vecteur surface élémentaire associé est dirigé du fluide vers l'interface. Il pointe donc selon $-\vec{u}_r$,

$$\vec{dS} = -dS \vec{u}_r = -R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r.$$

La force élémentaire associée est

$$\vec{dF} = -p_0 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r.$$

En tenant compte de la remarque sur le sens d'intégration, sa résultante \vec{F} s'écrit

$$\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{dF} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -p_0 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r.$$

Comme indiqué au début du corrigé, seule la composante selon \vec{u}_z est non nulle. Nous projetons donc sur cette direction en effectuant le produit scalaire avec \vec{u}_z ,

$$\vec{F} \cdot \vec{u}_z = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -p_0 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z}_{\cos \theta}.$$

L'intégrale sur φ revient à effectuer une simple multiplication par 2π , ce qui laisse

$$\vec{F} \cdot \vec{u}_z = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} -2\pi p_0 R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{u}_z = -\pi R^2.$$

Pour conclure, nous donnons la résultante sous forme de vecteur,

$$\vec{F} = -p_0 \pi R^2 \vec{u}_z. \quad (19.5)$$

Enfin, nous vérifions que le sens de la résultante est bien selon $-\vec{u}_z$, ce qui est conforme à l'intuition physique. Notons que le résultat n'est autre que la force de pression qu'exercerait le fluide à pression ambiante sur un disque de même rayon que la demi-sphère. Ce disque n'est autre que la projection de la sphère sur un plan orthogonal à l'axe \vec{u}_z . Ce résultat n'est pas dû au hasard.

► Des formules dites d'analyse vectorielle, vues en deuxième année, permettront de justifier cela.

► L'union $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ de la demi-sphère (notée \mathcal{S}_1) et du disque (noté \mathcal{S}_2) forme une surface fermée délimitant une demi-boule plongée dans l'atmosphère ambiante à p_0 (voir figure E.19.6). D'après l'encadré « Attention » de la page 551, la résultante \vec{A} des actions de pression exercées par l'air ambiant (poussée d'Archimède) est nulle du fait que la pression est uniforme, donc

$$\vec{A} = \iint_{M \in \mathcal{S}} p_0 \vec{dS} = \vec{0} \iff \iint_{M \in \mathcal{S}_1} p_0 \vec{dS} + \underbrace{\iint_{M \in \mathcal{S}_2} p_0 \vec{dS}}_{p_0 \pi R^2 \vec{u}_z} = \vec{0}.$$

Cette remarque permettait de retrouver l'expression (19.5) quasiment sans calcul.

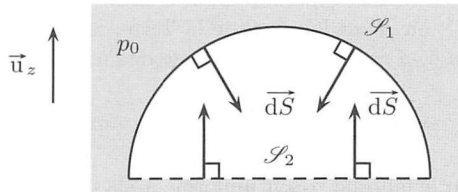


FIG. E.19.6. Construction d'une surface fermée $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

2. Avec $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa et $R = 0,20$ m, $|\vec{F}| = 1,2 \cdot 10^4$ N, soit le poids d'une masse de 1,2 tonne. Les actions de la pression ambiante sont toujours énormes.

3. Par symétrie, les actions élémentaires de pression se compensent toutes deux à deux. La résultante est donc nulle sur la sphère entière. C'est pour cela qu'un ballon ne se met pas spontanément en mouvement sous l'action de l'air ambiant (en l'absence de vent bien sûr).

5 Masse de l'atmosphère terrestre

1. Raisonnons sur toute la colonne d'air qui est à la verticale d'une portion de sol d'aire S . Le haut de cette colonne correspond à la limite atmosphère-vide, là où la pression s'annule (en réalité, elle tend vers zéro et n'a pas de limite précise). En assimilant ce système, représenté sur la figure E.19.7, à une colonne parfaitement cylindrique (sans évasement conique), les actions qu'il subit de la part du reste de l'atmosphère sont horizontales. Donc les seules actions verticales qu'il subit sont exercées par la Terre dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. La portion d'aire S du sol exerce sur l'air qui est au-dessus d'elle une force qui l'empêche de tomber. D'après le principe des actions réciproques, la réaction \vec{R} du sol est l'opposé de la force de

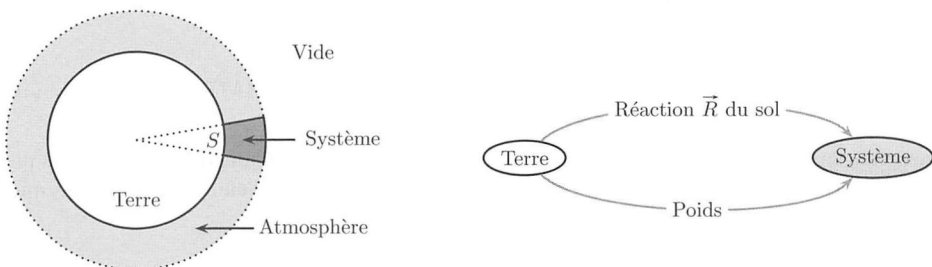


FIG. E.19.7. Actions subies par une portion d'atmosphère à l'équilibre.

pression exercée par l'air sur le sol. En notant p_0 la pression de l'air au niveau du sol et \vec{u}_z l'axe vertical ascendant,

$$\vec{R} = p_0 S \vec{u}_z.$$

En supposant le champ de pesanteur uniforme sur toute la hauteur de la colonne, le poids de la colonne s'écrit

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z.$$

La traduction de l'équilibre de la colonne s'écrit

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow p_0 S - mg = 0 \iff m = \frac{p_0 S}{g}.$$

2. Ce résultat est valable pour une portion d'aire S et donne la masse de la colonne d'air qui la surmonte. Pour avoir la masse de l'atmosphère entière, il suffit de sommer toutes les masses de toutes les colonnes, ce qui revient à prendre pour S la surface de la Terre dans l'expression précédente, soit $S = 4\pi R^2$, où R est le rayon de la Terre. Sachant que la pression au niveau du sol est $p_0 \simeq 1,0 \cdot 10^5$ Pa et $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, la masse de l'atmosphère est

$$m = \frac{p_0 \times 4\pi R^2}{g} \simeq \frac{10^5 \times 4\pi(6,4 \cdot 10^6)^2}{10} \Rightarrow m_{\text{atmosphère}} \simeq 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Cette estimation repose sur le fait que \vec{g} soit uniforme. Cela n'est pas vrai sur toute l'épaisseur de l'atmosphère. Cependant 90% de la masse de l'atmosphère se trouve dans les 15 premiers kilomètres d'épaisseur. Dans ce domaine, \vec{g} peut être considéré comme uniforme.

6 Actions de pression sur le fond d'un récipient

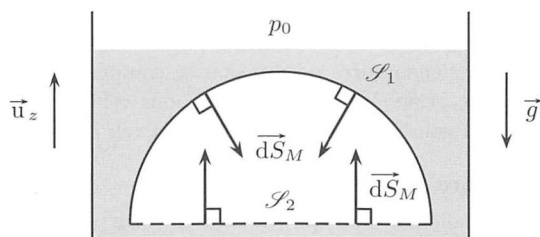


FIG. E.19.8. Surface fermée.

Appelons \mathcal{S}_1 la surface de la demi-sphère. Refermons cette surface en lui ajoutant \mathcal{S}_2 , le disque ayant pour bord l'équateur de la demi-sphère (voir figure E.19.8). En imaginant que l'ensemble est immergé dans l'eau, la résultante des actions de pression exercées par l'eau à l'équilibre est la poussée d'Archimède, notée \vec{A} , le volume d'eau déplacé étant celui d'une demi-sphère. En orientant les deux surfaces vers l'intérieur de la demi-sphère, on obtient

$$\vec{A} = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g \vec{u}_z = \iint_{M \in \mathcal{S}_1} p(M) \vec{dS}_M + \iint_{M \in \mathcal{S}_2} p(M) \vec{dS}_M. \quad (19.6)$$

L'intégrale sur \mathcal{S}_2 est facile à calculer car le disque est une surface plane d'aire πR^2 sur laquelle la pression de l'eau est uniforme. C'est simplement la pression de l'eau au fond du récipient, $p(M \in \mathcal{S}_2) = p_0 + \rho gh$. Ainsi,

$$\iint_{M \in \mathcal{S}_2} p(M) \vec{dS}_M = (p_0 + \rho gh) \pi R^2 \vec{u}_z. \quad (19.7)$$

L'intégrale sur \mathcal{S}_1 est la grandeur demandée. D'après les relations (19.6) et (19.7), elle a pour expression

$$\iint_{M \in \mathcal{S}_1} p(M) \vec{dS}_M = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g \vec{u}_z - \pi R^2 (p_0 + \rho gh) \vec{u}_z.$$

7 Modèle simple de la matière aimantée

1. D'après la loi de Boltzmann, le nombre d'atomes d'un système dans un état d'énergie E est proportionnel à $\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$, où T est la température uniforme du système. Pour l'échantillon aimanté,

$$n_1 = A \exp\left(+\frac{mB}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_2 = A \exp\left(-\frac{mB}{k_B T}\right),$$

où A est une constante de proportionnalité appelée constante de normalisation. Pour déterminer A , on utilise $n_{\text{tot}} = n_1 + n_2$,

$$n_{\text{tot}} = n_1 + n_2 = A \left[\exp\left(+\frac{mB}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{mB}{k_B T}\right) \right] \Rightarrow A = \frac{n_{\text{tot}}}{\exp\left(+\frac{mB}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{mB}{k_B T}\right)}.$$

Finalement,

$$n_1 = n_{\text{tot}} \frac{\exp\left(+\frac{mB}{k_B T}\right)}{\exp\left(+\frac{mB}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{mB}{k_B T}\right)} \quad \text{et} \quad n_2 = n_{\text{tot}} \frac{\exp\left(-\frac{mB}{k_B T}\right)}{\exp\left(+\frac{mB}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{mB}{k_B T}\right)}.$$

2. La représentation de $\frac{n_1}{n_{\text{tot}}}$ et $\frac{n_2}{n_{\text{tot}}}$ en fonction de $x = \frac{mB}{k_B T}$ (voir figure E.19.9) montre les aspects suivants.

► À faible température, $n_1 \gg n_2$: la plupart des dipôles sont de même sens que \vec{B} . C'est donc l'interaction avec le champ magnétique qui dicte principalement leur direction.

► À forte température, $n_1 \simeq n_2$: il y a autant de dipôles dans le sens du champ que dans le sens contraire au champ magnétique. Ce n'est donc pas le champ magnétique qui impose leur direction. C'est l'agitation thermique qui prédomine. Les dipôles s'orientent donc aléatoirement : statistiquement, il y en a autant dans chacune des deux directions.

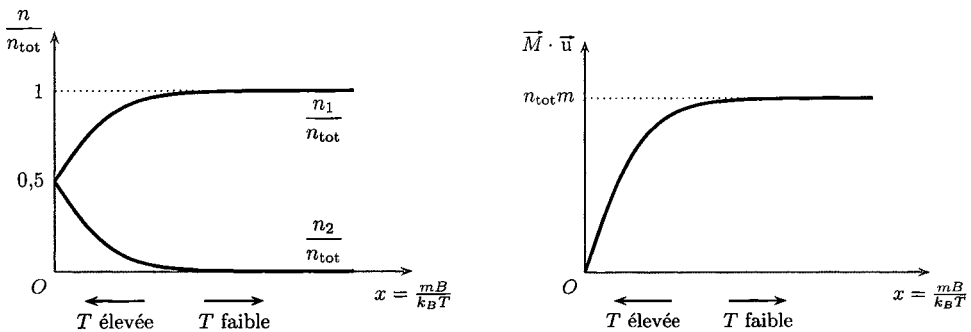


FIG. E.19.9. Évolution de la population de dipôle en fonction de la température. Moment dipolaire résultant, en projection sur l'axe du champ magnétique extérieur.

3. Il y a n_1 dipôles $m\vec{u}$ et n_2 dipôles $-m\vec{u}$. Le moment magnétique résultant est

$$\vec{M} = (n_1 - n_2)m\vec{u} = n_{\text{tot}} m \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \vec{u} = n_{\text{tot}} m \operatorname{th}(x) \vec{u}.$$

La projection de \vec{M} sur \vec{u} est donnée sur la figure E.19.9. À forte température, le moment total est très faible : l'échantillon n'a pas un comportement d'aimant. À faible température, tous les dipôles s'alignent avec le champ et le moment magnétique total est la somme de tous les moments magnétiques qui sont dans le même sens que \vec{B} .

Cela reflète le comportement expérimental de la matière aimantée : à suffisamment haute température, la matière perd ses propriétés magnétiques. Ce modèle est toutefois très simplifié.

Chapitre 20

1 Champ créé par un moment magnétique

1. Manipuler les dimensions (ou les unités SI) en électromagnétisme n'est pas très facile. Le plus pratique est en général de se ramener à des expressions connues. Par exemple, on peut utiliser le fait que le champ magnétique \vec{B}_1 créé par \vec{m} a la même unité SI que le champ $\vec{B}_2 = \mu_0 n i \vec{u}$ qui règne dans un solénoïde. L'équation aux dimensions qui en résulte est

$$[\vec{B}_1] = [\vec{B}_2] \Rightarrow [\mu_0 n i] = [\mu_0 m r^p] \Rightarrow [r^p] = \frac{[n i]}{[m]} \Rightarrow r^p \text{ s'exprime en } \frac{\text{A} \cdot \text{m}^{-1}}{\text{A} \cdot \text{m}^{+2}} = \text{m}^{-3}.$$

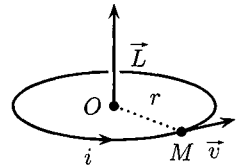
Dans l'équation précédente, on a utilisé le fait que n est le nombre de spires par unité de longueur de solénoïde, donc s'exprime en m^{-1} dans le système SI; un moment magnétique est en $\text{A} \cdot \text{m}^{+2}$ dans le système SI (voir définition 20.12 page 576). Finalement, $p = -3$.

2. Puisque p est négatif, le champ magnétique décroît avec la distance r . C'est en accord avec la décroissance observée de l'intensité du champ magnétique lorsqu'on s'éloigne d'un aimant, ce qui est lié au fait que les lignes de champ magnétique s'écartent les unes des autres quand la distance r augmente.

2 Rapport gyromagnétique d'un atome

1. Par définition, le moment cinétique au point O est $\vec{L} = \overline{OM} \wedge m \vec{v}$. En coordonnées cylindriques d'axe (O, \vec{u}_z) , cela s'écrit

$$\vec{L} = r \vec{u}_r \wedge m v \vec{u}_\theta = m v r \vec{u}_z.$$



Or, la vitesse angulaire est liée à v et r par $v = \omega r$, donc

$$\vec{L} = m \omega r^2 \vec{u}_z.$$

2. L'électron fait un tour de sa trajectoire pendant la durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En assimilant la trajectoire circulaire à une spire, l'intensité moyenne qui circule est $i = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi}$ (par analogie avec « $i = \frac{dq}{dt}$ »). Cela représente la quantité de charge qui passe à travers une section du fil de la spire par unité de temps. Le moment magnétique de la spire est défini par $\vec{M} = i \vec{S}$, où $\vec{S} = \pi r^2 \vec{u}_z$ est le vecteur surface de la spire orienté par i et la règle de la main droite. Par conséquent, $\vec{M} = \frac{1}{2} q \omega r^2 \vec{u}_z$.

3. En identifiant les deux expressions obtenues précédemment, le rapport gyromagnétique orbital est $\alpha = \frac{q}{2m} = -\frac{e}{2m}$. Numériquement, $\alpha = -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Chapitre 21

1 Multimètre analogique

1. Un fil de longueur ℓ plongé dans un champ \vec{B} uniforme subit $\vec{F}_{1a} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}$, où $\vec{\ell}$ est orienté dans le sens de i . Cette expression est applicable ici, car le champ est uniforme au niveau de chaque côté vertical du cadre. Pour le côté où i est montant,

$$\vec{F}_{1a} = i b \vec{u}_z \wedge B_0 \vec{u}_r = i b B_0 (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r),$$

soit $\vec{F}_{1a} = ibB_0 \vec{u}_\theta$. Pour le côté où i est descendant,

$$\vec{F}_{1a} = ib(-\vec{u}_z) \wedge (-B_0) \vec{u}_r = ibB_0 \vec{u}_\theta.$$

On obtient donc la même expression $\vec{F}_{1a} = ibB_0 \vec{u}_\theta$ pour les deux côtés. Attention : le vecteur \vec{u}_θ est local. Les deux forces sont en fait opposées car les \vec{u}_θ relatifs aux deux côtés le sont.

2. Les côtés horizontaux du cadre ainsi que le champ magnétique sont contenus dans un plan orthogonal à \vec{u}_z . Les forces élémentaires de Laplace $d\vec{F}_{1a} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ subies par ces côtés sont donc dirigées selon \vec{u}_z , c'est-à-dire parallèles à l'axe de la liaison pivot. Elles sont sans influence sur la rotation du cadre.

3. Pour chaque force de Laplace calculée à la première question, le bras de levier est a . Par conséquent, le moment de chacune de ces forces est $\Gamma = ibB_0a$. Ces deux moments s'ajoutent, donc $\Gamma_{1a} = 2ibB_0a$. On remarque que cela fait apparaître la grandeur $S = 2ab$, qui est l'aire du cadre rectangulaire. On retient donc $\Gamma_{1a} = iSB_0$.

4. Le cadre est soumis à trois couples : celui des actions de Laplace, celui des frottements fluides et celui du fil de torsion. La loi du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) s'écrit $J\ddot{\theta} = \Gamma_{1a} - \lambda\dot{\theta} - \alpha\theta$, ce qui se met sous la forme canonique $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{iSB_0}{J}$, avec $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{J}$ et $\omega_0^2 = \frac{\alpha}{J}$. C'est une équation d'oscillateur amorti linéaire d'ordre deux.

5. À l'équilibre, les dérivées temporelles de θ sont nulles et il reste $\frac{\alpha}{J}\theta_{eq} = \frac{iSB_0}{J}$. Par conséquent, $\theta_{eq} = \frac{iSB_0}{\alpha}$. L'angle de déviation de l'aiguille est donc proportionnel à i , ce qui est le but de l'ampèremètre.

6. Pour éviter les oscillations de l'aiguille, il faut que le facteur de qualité soit inférieur à $\frac{1}{2}$ (régime sous-critique). Avec les notations ω_0 et Q introduites, cela impose $Q = \frac{\sqrt{J\alpha}}{\lambda} < \frac{1}{2}$. Si le coefficient de frottement λ est grand, le facteur de qualité diminue et les possibilités d'oscillations également.

7. Pour utiliser les résultats précédents, il faut convertir la tension à mesurer en un courant i . En sélectionnant la fonction voltmètre de l'appareil, la résistance R se trouve branchée en série avec le cadre (de résistance supposée nulle). Tout se passe comme si le cadre avait la résistance R . En imposant la tension U_{AC} entre les points A et C , le cadre est parcouru par le courant $i = \frac{U_{AC}}{R}$. Dans ce cas, $\theta_{eq} = \frac{U_{AC}SB_0}{\alpha R}$: la déviation angulaire de l'aiguille est proportionnelle à la tension U_{AC} à mesurer, ce qui réalise un voltmètre. La résistance R doit être grande pour que le voltmètre prélève le moins de courant possible sur le circuit étudié : la mesure de tension ne doit pas perturber le circuit où la mesure est effectuée. La tension à mesurer doit être constante car les résultats précédents reposent sur le fait que i l'est. En pratique, le cadre est constitué d'un enroulement de N tours de fil électrique, afin de multiplier par N les effets des actions de Laplace. Cela le rend plus sensible (θ_{eq} est multiplié par N).

8. En régime sinusoïdal, la tension et le courant peuvent être déphasés : $U(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, par exemple. Dans ce cas, $\mathcal{P} = \langle Ui \rangle = \frac{1}{2}U_m I_m \cos \varphi$. Il faut donc connaître le déphasage entre U et i , ce qui impose une mesure simultanée de ces deux grandeurs.

9. Le couple instantané des actions de Laplace devient $\Gamma_{1a}(t) = i(t)SB(t) = KS i(t)U(t)$. La condition $\omega \gg \omega_0$ signifie que les variations temporelles de Γ_{1a} se font avec une période beaucoup plus courte que le temps de réponse mécanique de l'aiguille. Les variations temporelles de Γ_{1a} sont donc gommées par l'inertie de l'ensemble {cadre + aiguille} et le cadre est sensible à la moyenne temporelle $\langle \Gamma_{1a} \rangle = \langle KS i(t)U(t) \rangle = KSP$. En adaptant le résultat de la question 5,

$\theta_{eq} = \frac{\langle \Gamma_{1a} \rangle}{\alpha} = \frac{KSP}{\alpha}$. L'aiguille a bien une déviation proportionnelle à \mathcal{P} , ce qui est le but du wattmètre.

2 Balance de Cotton (PCSI)

1. Le poids de la masse m s'applique à la balance par le point A . Le moment du poids en O est donc, par définition, $\vec{OA} \wedge m\vec{g} = \ell \vec{u}_x \wedge m(-g \vec{u}_y) = -mg\ell \vec{u}_z$. En projetant ce vecteur sur l'axe \vec{u}_z , on obtient le moment scalaire par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) , $\mathcal{M}_{\text{poids}} = -mg\ell$.

2. Le moment des forces de Laplace sur les côtés ab et cd est nul car les forces élémentaires $i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$, orthogonales aux arcs de cercles, passent par l'axe (O, \vec{u}_z) : elles n'ont donc aucun effet sur la rotation de la balance autour de cet axe. En revanche, les forces sur le côté bc ont un moment non nul. Sur le côté bc , un élément de courant s'écrit $i d\vec{\ell} = -i dx \vec{u}_x$. La force élémentaire de Laplace subie par cet élément de courant est donc

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i dx \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z = -i dx B \vec{u}_y.$$

Le moment élémentaire en O de cette force élémentaire qui s'applique en un point M défini par $\vec{OM} = x \vec{u}_x$ s'écrit $d\mathcal{M} = \vec{OM} \wedge d\vec{F} = x \vec{u}_x \wedge (-i dx B \vec{u}_y) = -i B x dx \vec{u}_z$. En projetant sur \vec{u}_z et en intégrant (dans le sens conventionnel du courant) sur le côté $[bc]$, on obtient le moment scalaire

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_b^c d\mathcal{M} = \int_{x_b}^{x_c} -i B x dx = -i B \left[\frac{x_c^2}{2} - \frac{x_b^2}{2} \right] = -i B \underbrace{\frac{1}{2} (x_b + x_c)}_{=-OP} \underbrace{(x_c - x_b)}_{=\ell'} \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_{\text{la}} = -i \times B \times OP \times \ell'. \end{aligned}$$

3. Dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen, la balance est soumise à quatre actions :

- ▶ son poids, qui s'applique en O et a donc un moment nul par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) ;
- ▶ la liaison pivot en O , qui exerce un moment nul sur la balance ;
- ▶ les forces de Laplace et le moment du poids de la masse m , dont les moments ont été calculés.

À l'équilibre de la balance, la somme de tous ces moments est nulle

$$\mathcal{M}_{\text{poids}} + \mathcal{M}_{\text{la}} = 0 \iff -mg\ell - i \times B \times OP \times \ell' = 0 \iff B = -\frac{mg\ell}{i \times OP \times \ell'}.$$

Pour que la balance soit en équilibre, il faut $i < 0$ si $B > 0$, c'est-à-dire si le champ magnétique pointe vers le lecteur.

4. Avec une masse de $1,0 \times 10^{-4}$ kg et les dimensions indiquées, le champ magnétique mesurable est

$$B = -\frac{1,0 \times 10^{-4} \times 10 \times 0,10}{1,0 \times 0,1 \times 1,0} \Rightarrow B = 0,1 \text{ T}.$$

Cela correspond à l'ordre de grandeur du champ magnétique au pôle d'un barreau aimanté. Pour mesurer des champs magnétiques moins intenses, il faut abaisser la valeur de i . Les inconvénients de la balance de Cotton par rapport au teslamètre à effet Hall sont :

- ▶ la nécessité que le champ magnétique à mesurer soit horizontal ;
- ▶ la taille de la zone où le champ est uniforme pour que les expressions calculées soient valables.

3 Champ magnétique terrestre

1. La boussole est soumise au couple magnétique $\Gamma = \vec{m} \wedge \vec{B}_h$, qui tend à rendre \vec{m} parallèle à \vec{B}_h et de même sens que lui. C'est la position d'équilibre stable de la boussole (voir théorème 21.6 page 584). Le théorème du moment cinétique appliqué à la boussole dans le référentiel terrestre s'écrit, en projection sur l'axe vertical de rotation de la boussole,

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = (\vec{m} \wedge \vec{B}_h) \cdot \vec{u}_z = m B_h \sin(\vec{m}, \vec{B}_h) = -m B_h \sin \alpha \Rightarrow \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{m B_h}{J} \sin \alpha = 0.$$

2. Au voisinage de la position d'équilibre stable ($\alpha = 0$), on peut linéariser le sinus et l'équation du mouvement devient $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mB_h}{J}\alpha = 0$. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation temporelle $\omega = \sqrt{mB_h/J}$, donc de période temporelle $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, d'où $\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mB_h}}$.

3. Lorsqu'on ajoute le champ créé par la bobine, on remplace B_h par $B_h + B_e$ (champs de même sens) ou bien $|B_h - B_e|$ (champs de sens opposés) dans l'expression de la période. La valeur absolue est nécessaire car $B_e > B_h$ et il faut une norme de champ (positive) dans l'expression de la période (positive). Les périodes correspondantes sont

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m(B_h + B_e)}} \quad \text{et} \quad \tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m|B_h - B_e|}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{B_e - B_h}{B_h + B_e}}.$$

De la dernière équation, on déduit $B_h = \frac{1 - (\tau_1/\tau_2)^2}{1 + (\tau_1/\tau_2)^2} B_e$.

4. Avec les valeurs numériques données, on trouve $B_h = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

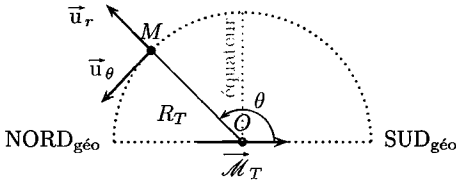


FIG. E.21.1. Le moment magnétique terrestre pointe du nord géographique vers le sud géographique.

5. Le nord géographique correspond à un sud magnétique et inversement, d'où le placement du moment magnétique terrestre \mathcal{M}_T sur la figure E.21.1. Le vecteur unitaire \vec{u}_θ est donc tangent au sol et pointe localement du sud vers le nord géographique (il suit un méridien en pointant vers les latitudes croissantes). La composante horizontale (parallèle au sol) du champ magnétique correspond à la composante sur \vec{u}_θ en $r = R_T$ (à la surface de la Terre) dans le système de coordonnées polaires donné par l'énoncé. La latitude géographique est repérée par rapport à l'équateur alors que θ l'est à partir du pôle sud géographique (nord magnétique). Il faut donc ajouter 90° à la latitude pour avoir $\theta : \theta_{\text{exp}} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

$$B_h = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_T \sin \theta_{\text{exp}}}{4\pi R_T^3} \Rightarrow \mathcal{M}_T = \frac{4\pi R_T^3}{\mu_0 \sin \theta_{\text{exp}} B_h} = 8,2 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

6. La composante horizontale (selon \vec{u}_θ) est la plus grande quand $\theta = \pi/2$, c'est-à-dire à l'équateur. Avec cette valeur de θ et la valeur de \mathcal{M}_T obtenue précédemment, on trouve

$$B_{h \text{ max}} = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

4 Champ non uniforme (PCSI)

1. L'expression de la force de Laplace élémentaire s'appliquant en un point M de la barre est $d\vec{F}_{1a} = i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)$, soit $d\vec{F}_{1a} = i dr \vec{u}_r \wedge \frac{r}{\ell} B_0 \vec{u}_z$. En calculant le produit vectoriel,

$d\vec{F}_{1a} = -i r dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta$. Dans cette expression, dr correspond à un accroissement élémentaire algébrique de r . En l'occurrence, $dr < 0$ car i est orienté de sorte à parcourir la barre en direction du point O , c'est-à-dire vers les r décroissants. Pour avoir la résultante, il faut sommer les forces élémentaires. Cela revient à calculer l'intégrale (dans le sens des r décroissants) des forces élémentaires,

$$\vec{F}_{1a} = \int_A^O d\vec{F}_{1a} = -i \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta \int_{r=\ell}^0 r dr = i \frac{B_0}{\ell} \frac{\ell^2}{2} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{F}_{1a} = i B_0 \frac{\ell}{2} \vec{u}_\theta$$

Les grandeurs i , B_0 , ℓ et \vec{u}_θ sont sorties de l'intégrale car elles sont constantes vis-à-vis de la variable r d'intégration. Si le champ magnétique avait été uniforme d'intensité B_0 , la résultante aurait été $\vec{F}_{\text{unif}} = i\ell B_0 \vec{u}_\theta$. Le champ étudié étant globalement moins intense que B_0 (voir figure E.21.2), il ne faut pas s'étonner que la résultante des forces de Laplace ait une norme inférieure à celle de \vec{F}_{unif} .

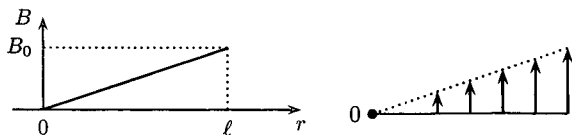


FIG. E.21.2. Champ magnétique en fonction de r . Schématisation de quelques forces de Laplace élémentaires s'appliquant sur la barre.

2. Le moment élémentaire au point O d'une force de Laplace élémentaire s'appliquant en un point M de la barre est défini par $d\mathcal{M}_{1a} = \overline{OM} \wedge d\vec{F}_{1a} = r \vec{u}_r \wedge [-ir dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta]$, soit $d\mathcal{M}_{1a} = -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_z$. Le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) s'obtient en projetant ce vecteur sur \vec{u}_z , c'est-à-dire en effectuant le produit scalaire avec \vec{u}_z , ce qui donne

$$d\mathcal{M}_{1a} = -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell}$$

Le moment total des actions de Laplace s'obtient en sommant ces moments élémentaires, c'est-à-dire en intégrant le long de la barre dans le sens conventionnel du courant, qui est le sens des r décroissants,

$$\mathcal{M}_{1a} = \int_{r=\ell}^0 d\mathcal{M}_{1a} = \int_{r=\ell}^0 -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell} = -i \frac{B_0}{\ell} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=\ell}^0 \Rightarrow \mathcal{M}_{1a} = \frac{1}{3} i B_0 \ell^2$$

Ce moment est positif si i et B_0 sont positifs : les actions de Laplace ont tendance à faire tourner la barre dans le sens trigonométrique dans ce cas, ce qui est prévisible par la règle des trois doigts de la main droite. Ce test permet de détecter une erreur sur le sens dans lequel l'intégrale est calculée. Si le champ magnétique était uniforme, les actions de Laplace seraient réparties uniformément sur la barre et le point d'application serait au milieu de la barre. Le bras de levier de \vec{F}_{unif} serait donc $\frac{\ell}{2}$ et le moment en O des actions de Laplace serait $\vec{\mathcal{M}}_{\text{unif}} = \frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{F}_{\text{unif}} = \frac{1}{2} i B_0 \ell^2 \vec{u}_z$. En projection sur \vec{u}_z , le moment scalaire correspondant est $\mathcal{M}_{\text{unif}} = \frac{1}{2} i B_0 \ell^2$. Ce moment est plus intense que \mathcal{M}_{1a} car le champ uniforme $B_0 \vec{u}_z$ est globalement plus intense que le champ de la forme $\vec{B} = B_0 \frac{r}{\ell} \vec{u}_z$.

3. Les seules actions exerçant un moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) sur la barre sont le poids de la barre et les actions de Laplace. Le poids s'applique au milieu de la barre car celle-ci est homogène : le bras de levier du poids est donc $\frac{\ell}{2} \sin \theta$. L'équilibre de la barre, s'il est physiquement possible, se traduit en exprimant que la somme des moments est nulle,

$$\mathcal{M}_{1a} - mg \frac{\ell}{2} \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \Rightarrow \sin \theta_{\text{eq}} = \frac{2B_0 \ell i}{3mg} \text{ si } \frac{2B_0 \ell i}{3mg} \in [-1, 1]$$

Le sinus n'existe que si sa valeur est dans l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui n'est pas toujours le cas. Par exemple, si le produit $B_0 i$ est trop grand (cas de forces de Laplace intenses), l'équilibre n'existe pas et la barre ne fait que tourner autour de son axe. En pratique, elle ne le fait pas, car le point A quitte la zone de contact électrique et le courant dans le circuit s'annule. Avec les valeurs numériques données, l'angle θ_{eq} existe et $\theta_{\text{eq}} = 6,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3,8^\circ$. L'écart par rapport à la verticale est tout à fait observable avec ces valeurs usuelles. En pratique, pour une expérience réalisée en classe, le champ magnétique est créé par un aimant en fer à cheval et est quasiment uniforme sur une partie de la barre. Les expressions sont donc un peu différentes (en particulier le préfacteur $2/3$), mais cela ne change pas les ordres de grandeur.

4. Par définition, le point d'application est N tel que $\mathcal{M}_{\text{la}} = ON \times F_{\text{la}}$ car ON est le bras de levier. On en déduit $ON = \frac{2}{3} \ell$. Tout se passe donc comme si la résultante des actions de Laplace s'appliquait aux deux tiers de la barre. C'est normal car les forces élémentaires de Laplace sont plus intenses loin de l'axe (O, \vec{u}_z) . Le point d'application N est donc plus éloigné de l'axe que ne l'est le milieu de la barre.

Chapitre 22

1 Aimant dans un tuyau de cuivre

1. Quand l'aimant tombe vers la spire, le champ magnétique qu'il crée au niveau de la spire varie, ce qui va induire un courant dans la spire. Ce courant, par son sens, est tel que ses effets ont tendance à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance (loi de modération de Lenz). Pour déterminer ce sens, il suffit d'identifier une des causes et de lui trouver une conséquence la contrariant. Par exemple, la composante verticale du champ créé par l'aimant devient de plus en plus négative. La spire doit donc créer un champ magnétique induit dirigé vers le haut pour contrer cette variation. D'après la règle de la main droite, on en déduit le sens de i (voir figure E.22.1). Le pôle nord de la spire fait face au pôle nord de l'aimant : l'aimant est donc repoussé vers le haut, ce qui ralentit sa chute. C'est une autre façon pour le courant induit de contrer ses causes.

2. Dix secondes est un temps très long pour une chute d'un mètre. Ce n'est donc pas une chute libre, mais ralentie par les phénomènes d'induction (l'aimant subit des actions de Laplace induites). Si on cherchait à déterminer le courant induit, la loi de Faraday serait difficilement exploitable *a priori* car le tuyau n'est pas un circuit filiforme : les courants induits sont volumiques dans le cuivre (on les appelle courant de Foucault dans ce cas). D'un point de vue qualitatif, on peut découper par la pensée le tuyau de cuivre en spires accolées et se ramener au cas précédent pour expliquer le freinage lors de la descente.

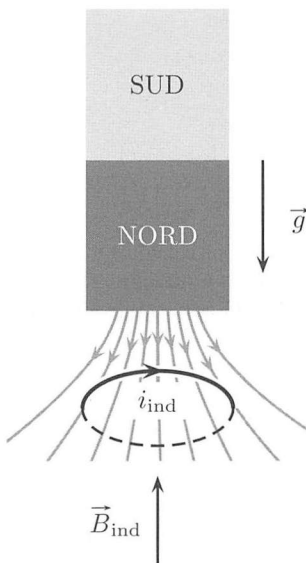


FIG. E.22.1. Le sens du courant induit dans la spire est tel que le champ magnétique induit s'oppose à la croissance du champ magnétique créé par l'aimant.

2 Spire qui tombe près d'un aimant

1. La spire est un circuit électrique fermé mobile dans un champ magnétique. Elle est donc le siège d'un courant induit. La loi de modulation de Lenz permet de prévoir le sens de ce courant : par ses effets, il doit s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance. Deux causes simultanées sont identifiables :

- ▶ le fait que la spire est en mouvement (chute) ;
- ▶ la présence de l'aimant.

Les effets du courant doivent donc tendre à s'opposer au mouvement de la spire. Les forces de Laplace permettent cela. On doit donner au courant induit un sens tel que les actions de Laplace subies par la spire aient une composante vers le haut pour tendre à contrer la chute. Après avoir postulé un sens pour le courant induit, il faut dessiner l'allure des lignes de champ de l'aimant et utiliser la règle des trois doigts pour obtenir la direction et le sens de la force élémentaire de Laplace $d\vec{F}_{\text{la}}(M) = i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)$ s'exerçant sur l'élément $d\vec{\ell}_M$ situé au voisinage du point M de la spire (voir figure E.22.2). Le champ magnétique est horizontal en bas de la spire et incliné en haut de la spire, d'où les orientations des deux forces élémentaires de Laplace dessinées. Pour la situation considérée, le champ magnétique de l'aimant est plus intense en bas de la spire qu'en haut, donc la force de Laplace du bas l'emporte en termes de composante ascendante. Ce raisonnement qualitatif montre que la chute de la spire est ralentie. Le sens du courant induit dessiné est donc bien en accord avec la loi de modulation de Lenz.

2. Les forces de Laplace subies par la spire ne sont pas purement verticales, comme le montre la figure E.22.2. La spire est visiblement repoussée vers la droite. Sans le guidage par la glissière, la chute de la spire ne serait pas verticale. Une façon équivalente de formuler cela consiste à décrire la spire comme un moment magnétique. En effet, la spire, siège d'un courant induit, possède un moment magnétique $\vec{m} = i \vec{S}$ dirigé vers la gauche. Le pôle nord de la spire est donc en face du pôle nord de l'aimant. Or, deux pôles de même nature se repoussent. L'aimant tend donc à repousser la spire vers la droite.

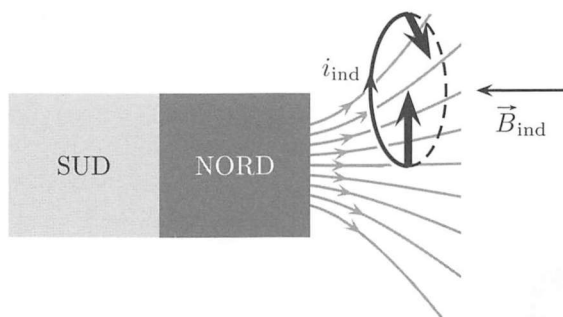


FIG. E.22.2. En gris, lignes du champ magnétique de l'aimant. Le sens du courant induit i_{ind} a été pris comme point de départ au dessin : les orientations des autres grandeurs en résultent. En trait gras, actions élémentaires de Laplace $d\vec{F}_M = i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)$ subies par les éléments de spire situés au sommet et à la base de celle-ci.

Remarques

- ▶ Il ne faut pas compter deux fois les choses. Le fait que les pôles de même nom se repoussent n'est pas un phénomène en plus des actions de Laplace. Il s'agit juste d'un raccourci de langage pour déterminer le sens qualitatif des actions de Laplace ressenties par la spire.
- ▶ L'aimant repousse la spire vers la droite. D'après le principe des actions réciproques, la spire repousse donc l'aimant vers la gauche. C'est pour le courant induit une seconde manière d'essayer de s'opposer aux causes de sa naissance (ici, la présence de l'aimant). Si l'aimant n'était pas maintenu fixe, il s'éloignerait.

Chapitre 23

1 Quand peut-on négliger l'auto-induction ?

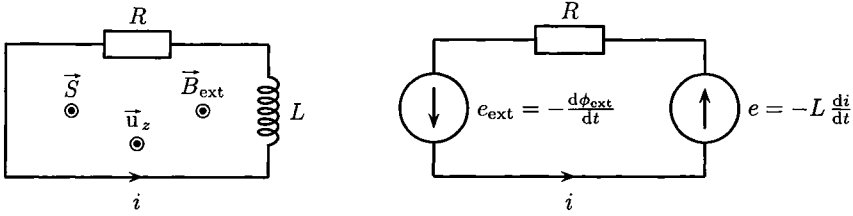


FIG. E.23.1. Circuit et schéma électrique équivalent.

1. Avec l'orientation choisie pour i , le vecteur surface du circuit est, d'après la règle de la main droite, $\vec{S} = S \vec{u}_z$. Le flux magnétique extérieur est $\phi_{\text{ext}} = \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{S} = +B_0 S \cos(\omega t)$. Le flux propre s'écrit $\phi_L = Li$. Le circuit électrique équivalent (voir figure E.23.1) est constitué de la résistance R placée en série avec deux fem orientées en convention générateur et données par la loi de Faraday : la fem extérieure $e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = +B_0 S \omega \sin(\omega t)$ et la fem auto-induite $e_L = -\frac{d\phi_L}{dt} = -L \frac{di}{dt}$. L'équation électrique du circuit vient de la loi des mailles $e_L + e_{\text{ext}} = Ri$, soit

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{B_0 S \omega}{L} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \tau \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{R}{L}.$$

2. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et avec second membre. La solution complète est la somme de la solution $i_h(t)$ de l'équation dite homogène (sans second membre) et d'une solution particulière $i_p(t)$ de l'équation avec second membre. La solution i_h est de la forme $i_h(t) = A \exp(-t/\tau)$. Elle tend vers zéro en un temps caractéristique τ appelé durée du régime transitoire. Après ce régime transitoire ne subsiste que la solution particulière $i_p(t)$, appelée régime harmonique, qui est de la forme $i_p(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$, où $i_0 > 0$ est l'amplitude à déterminer et φ la phase à l'origine des temps. On peut par exemple travailler en complexes pour la déterminer. On associe au second membre de l'équation différentielle la grandeur complexe $\frac{B_0 S \omega}{L} \exp(j\omega t)$. Il convient d'en prendre la partie *imaginaire* pour retrouver $\frac{B_0 S \omega}{L} \sin(\omega t)$ (on prend la partie imaginaire car c'est un sinus au lieu d'un cosinus). En complexe, on pose $\underline{i}_p(t) = i_0 \exp[j(\omega t + \varphi)]$ avec la même convention de retour en notation réelle : $i_p = \text{Im}(\underline{i}_p)$. Avec ces conventions, l'équation différentielle s'écrit, en complexes d'abord puis en simplifiant par $\exp(j\omega t)$ qui est non nul,

$$j\omega \underline{i}_p + \frac{1}{\tau} \underline{i}_p = \frac{B_0 S \omega}{L} \exp(j\omega t) \quad \Rightarrow \quad i_0 \exp(j\varphi) = \frac{B_0 S \omega}{L} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{\tau}}.$$

L'amplitude i_0 a été choisie positive lors du choix de la convention complexe. Cela permet de l'interpréter comme le module de $i_0 \exp(j\varphi)$. En prenant le module de l'expression obtenue,

$$i_0 = \frac{B_0 S \omega}{L} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}}.$$

3. La fem auto-induite est $e_L = -L \frac{di}{dt}$, soit, en complexes avec la convention posée précédemment, $\underline{e}_L = -(j\omega)L\underline{i}$. La fem extérieure est $e_{\text{ext}} = B_0 S \omega \sin(\omega t)$, soit, en complexes, $\underline{e}_{\text{ext}} = B_0 S \omega \exp(j\omega t)$. Le rapport des amplitudes de ces fem est le rapport de leurs modules,

$$\left| \frac{\underline{e}_L}{\underline{e}_{\text{ext}}} \right| = \left| \frac{-(j\omega)L\underline{i}}{B_0 S \omega \exp(j\omega t)} \right| = \frac{\omega L i_0}{B_0 S \omega} = \frac{L i_0}{B_0 S} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\underline{e}_L}{\underline{e}_{\text{ext}}} \right| = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2 + 1}}.$$

La toute dernière forme, obtenue en divisant le numérateur et le dénominateur par ω , est préférable car elle fait intervenir des grandeurs sans dimension (simples nombres). Il est alors facile de comparer un nombre à un autre pour parler de la prépondérance d'un terme. On constate que $\left| \frac{eL}{e_{\text{ext}}} \right|$ est toujours inférieur à 1 : la fem auto-induite a donc toujours une amplitude moins grande que la fem extérieure.

- Le rapport $\left| \frac{eL}{e_{\text{ext}}} \right|$ tend vers zéro lorsque $\frac{1}{\omega\tau} \rightarrow \infty$, donc lorsque $\omega \rightarrow 0$ (basses fréquences).
- Le rapport $\left| \frac{eL}{e_{\text{ext}}} \right|$ est maximal (tend vers 1) lorsque $\frac{1}{\omega\tau} \rightarrow 0$, donc lorsque $\omega \rightarrow +\infty$ (hautes fréquences).

En résumé, la fem auto-induite est négligeable devant la fem externe si le champ extérieur a une fréquence « suffisamment basse », c'est-à-dire si $\frac{1}{\omega\tau} \gg 1$ ou encore $\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$. Ce n'est donc pas la valeur numérique de L seul qui détermine si on peut « négliger l'auto-induction ». En effet, dire que « le coefficient L est petit » n'a pas de sens tant qu'il n'est pas comparé à une autre grandeur (il faudrait dire devant quoi il est petit).

4. La pulsation critique est $\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à une fréquence $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 1,6 \text{ kHz}$. On veut que $\left| \frac{eL}{e_{\text{ext}}} \right| = 1,0\%$, soit

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{100} \Rightarrow \left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2 + 1 = 10^4 \Rightarrow \left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2 \simeq 10^4 \Rightarrow \omega_1 \simeq \frac{\omega_c}{100}.$$

Cela donne $\omega_1 \simeq 1,0 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit, en divisant par 2π , $f_1 \simeq 16 \text{ Hz}$. À moins de travailler à fréquence très faible, on ne peut pas négliger l'auto-induction.

2 Circuits électriques couplés

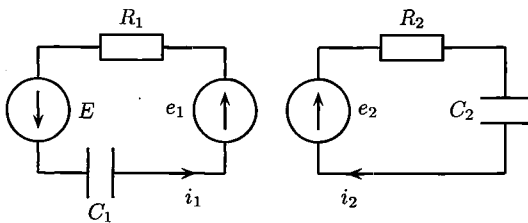


FIG. E.23.2. Schéma équivalent aux deux circuits couplés.

1. Les composants électriques utilisés sont linéaires et les lois de l'induction le sont également. Les équations différentielles régissant le comportement du circuit seront donc linéaires. À cause des résistances (éléments dissipatifs d'énergie), les solutions homogènes des équations différentielles tendent vers zéro (système stable). Il ne subsiste donc que les solutions particulières sinusoïdales en régime sinusoïdal forcé. La stabilité et la linéarité (les deux sont nécessaires) permettent de travailler en complexes en posant $\underline{E} = E_m \exp(j\omega t)$, $\underline{i}_1 = I_{1,m} \exp(j\omega t)$ et $\underline{i}_2 = I_{2,m} \exp(j\omega t)$. Les fem induites, orientées en convention générateur (voir schéma électrique équivalent de la figure E.23.2), sont données par la loi de Faraday,

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

En complexes, avec les conventions posées, elles s'écrivent $\underline{e}_1 = -L_1 j\omega \underline{i}_1 - M j\omega \underline{i}_2$ et $\underline{e}_2 = -L_2 j\omega \underline{i}_2 - M j\omega \underline{i}_1$. En notant \underline{Z}_C l'impédance complexe d'un condensateur, la loi des mailles appliquée à chaque circuit du schéma électrique équivalent s'écrit, en complexes,

$$\underline{E} + \underline{e}_1 = R_1 \underline{i}_1 + \underline{Z}_{C_1} \underline{i}_1 \quad \text{et} \quad \underline{e}_2 = R_2 \underline{i}_2 + \underline{Z}_{C_2} \underline{i}_2.$$

En remplaçant \underline{e}_1 et \underline{e}_2 par leurs expressions, le système d'équations vérifié par \underline{i}_1 et \underline{i}_2 est

$$(R_1 + \underline{Z}_{C_1} + L_1 j\omega)\underline{i}_1 + Mj\omega\underline{i}_2 = \underline{E} \quad \text{et} \quad Mj\omega\underline{i}_1 + (R_2 + \underline{Z}_{C_2} + L_2 j\omega)\underline{i}_2 = 0.$$

Chacune des grandeurs complexes \underline{i}_1 , \underline{i}_2 et \underline{E} est proportionnelle à $\exp(j\omega t)$. On peut donc simplifier le système d'équations obtenu par $\exp(j\omega t)$, qui est non nul, ce qui donne

$$\boxed{(R_1 + \underline{Z}_{C_1} + L_1 j\omega)\underline{I}_{1,m} + Mj\omega\underline{I}_{2,m} = E_m} \quad \text{et} \quad \boxed{Mj\omega\underline{I}_{1,m} + (R_2 + \underline{Z}_{C_2} + L_2 j\omega)\underline{I}_{2,m} = 0}.$$

2. Avec les notations, posées par l'énoncé, ce système devient

$$(R + \underline{Z}_C + Lj\omega)\underline{I}_{1,m} + Mj\omega\underline{I}_{2,m} = E_m \quad \text{et} \quad Mj\omega\underline{I}_{1,m} + (R + \underline{Z}_C + Lj\omega)\underline{I}_{2,m} = 0.$$

Pour le résoudre, on a intérêt à procéder par combinaison linéaire pour faire des éliminations. Par exemple, on multiplie la première équation par $-[(R + \underline{Z}_C + Lj\omega)]$, la seconde par $Mj\omega$ et on fait la somme membre à membre des deux équations ainsi obtenues, ce qui élimine $\underline{I}_{2,m}$. On procède de la même manière pour éliminer $\underline{I}_{1,m}$ et on obtient

$$\boxed{\underline{I}_{1,m} = \frac{-(R + \underline{Z}_C + Lj\omega)}{-(R + \underline{Z}_C + Lj\omega)^2 + (Mj\omega)^2} E_m} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{I}_{2,m} = \frac{-Mj\omega}{(R + \underline{Z}_C + Lj\omega)^2 - (Mj\omega)^2} E_m}.$$

À ce stade, il n'est pas utile de remplacer \underline{Z}_C par $\frac{1}{j\omega C}$.

3. L'adimensionnement proposé par l'énoncé peut se faire de manière naturelle dans chacune des deux équations. On remplace E_m par RI_m pour faire apparaître l'intensité I_m au membre de droite. Par ailleurs, on factorise le numérateur par R et le dénominateur par R^2 pour que les grandeurs dans les parenthèses soient sans dimension. On obtient

$$\frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m} = \frac{-(1 + \frac{\underline{Z}_C}{R} + j\omega \frac{L}{R})}{-(1 + \frac{\underline{Z}_C}{R} + j\omega \frac{L}{R})^2 + (j\omega \frac{M}{R})^2} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m} = \frac{-j\omega \frac{M}{R}}{(1 + \frac{\underline{Z}_C}{R} + j\omega \frac{L}{R})^2 - (j\omega \frac{M}{R})^2}.$$

En remplaçant \underline{Z}_C par son expression, on fait apparaître la quantité RC et on peut introduire les trois pulsations ω_a , ω_b et ω_c :

$$\boxed{\frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m} = \frac{-(1 + \frac{\omega_a}{j\omega} + \frac{j\omega}{\omega_b})}{-(1 + \frac{\omega_a}{j\omega} + \frac{j\omega}{\omega_b})^2 + (\frac{j\omega}{\omega_c})^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m} = \frac{-\frac{j\omega}{\omega_c}}{(1 + \frac{\omega_a}{j\omega} + \frac{j\omega}{\omega_b})^2 - (\frac{j\omega}{\omega_c})^2}}.$$

4. Avec les valeurs données, on obtient $\omega_a = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_b = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_c = 2,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On trace donc $|\frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m}|$ et $|\frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m}|$ sur un intervalle de ω contenant ces valeurs, par exemple $\omega \in [10^5, 10^8] \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (les figures E.23.3 ont été obtenues avec le logiciel Scilab).

On note la présence de deux pulsations de résonance. C'est un phénomène général : il peut y avoir jusqu'à N pulsations de résonance distinctes pour un ensemble de N oscillateurs couplés linéairement.

5. Le tracé en échelle logarithmique (diagramme de Bode pour le gain) montre des asymptotes.

- ▶ Pour $\omega \rightarrow 0$, $\frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m} \sim +\frac{j\omega}{\omega_a}$: pente à +20 dB/dec.
- ▶ Pour $\omega \rightarrow 0$, $\frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m} \sim +\frac{(j\omega)^3}{\omega_a^2 \omega_c}$: pente à +60 dB/dec (le second circuit répond très mal à basse fréquence).
- ▶ Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $\frac{\underline{I}_{1,m}}{I_m} \propto \frac{1}{j\omega}$: pente à -20 dB/dec.
- ▶ $\frac{\underline{I}_{2,m}}{I_m} \propto \frac{1}{j\omega}$: pente à -20 dB/dec.

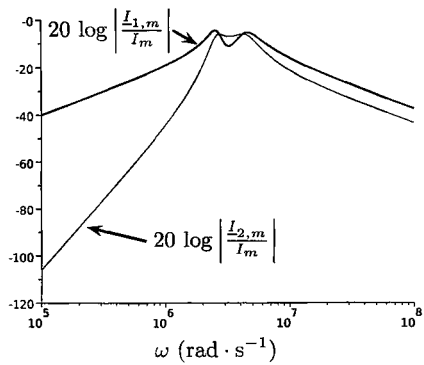
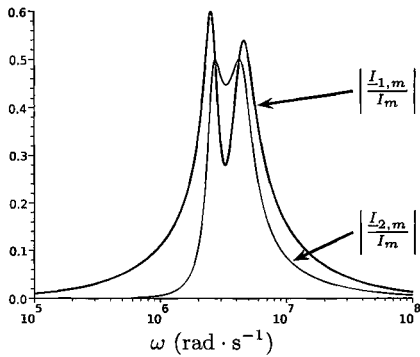


FIG. E.23.3. Amplitudes des intensités en fonction de la pulsation temporelle.

3 Un générateur électrique simple

1. La difficulté de l'exercice consiste à adapter correctement l'expression du champ créé par un moment magnétique. Le vecteur \vec{u}_x unitaire de l'axe de la spire correspond au vecteur \vec{u}_θ de l'expression du champ de l'aimant avec l'angle θ indiqué sur la figure E.23.4, donc

$$\alpha + \theta = 2\pi.$$

Par conséquent, $\cos \theta = \cos \alpha$ et la composante sur \vec{u}_x du champ magnétique créé par l'aimant au point A s'écrit $B_a(A) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_a \cos \alpha}{a^3}$. L'autre composante de ce champ est sans importance pour le calcul du flux à travers la spire. En tenant compte de l'orientation de i imposée par l'énoncé, le vecteur surface de la spire est, d'après la règle de la main droite, $\vec{S} = S \vec{u}_x$. Le champ \vec{B}_a étant supposé uniforme au niveau de la spire, le flux magnétique est $\phi = \vec{B}_a(A) \cdot \vec{S} = B_a(A) \cdot S = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_a \cos \alpha}{a^3} S$. On simplifie les notations en rappelant que

$$\phi_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_a}{a^3} S.$$

$\alpha = \omega t$ et en introduisant la grandeur ϕ_0 , homogène à un flux magnétique, cela donne $\phi = \phi_0 \cos(\omega t)$. En convention générateur, la fem induite est donnée par la loi de Faraday

$$e = \frac{d\phi}{dt} = -\omega \phi_0 \sin(\omega t).$$

L'auto-induction étant négligée, le schéma électrique équivalent à la spire est simplement la fem induite en série avec la résistance R , d'où $e = Ri$ et

$$i = \frac{-\omega \phi_0 \sin(\omega t)}{R}.$$

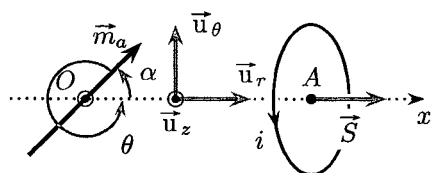


FIG. E.23.4. Aimant tournant devant une spire.

2. Par définition, le moment magnétique de la spire est $\vec{m}_s = i \vec{S} = -\frac{\omega \phi_0 S}{R} \sin(\omega t) \vec{u}_x$. En notant $m_s = -\frac{\omega \phi_0 S}{R} \sin(\omega t)$ sa projection sur \vec{u}_x , l'expression du champ créé par la spire au point O est $\vec{B}_s(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_s}{a^3} \vec{u}_x$. En supposant que ce champ magnétique est uniforme à l'échelle de l'aimant, l'aimant subit le couple de Laplace

$$\vec{\mathcal{M}}_{la} = \vec{m}_a \wedge \vec{B}_s(O) = m_a \vec{u}_\alpha \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_s}{a^3} \vec{u}_x.$$

En tenant compte de $\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_x = \sin \alpha \vec{u}_z = \sin(\omega t) \vec{u}_z$, on obtient

$$\vec{\mathcal{M}}_{1a} = -m_a \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{a^3} \frac{\omega \phi_0 S}{R} \sin^2(\omega t) \vec{u}_z.$$

On remarque que cela fait à nouveau apparaître la quantité ϕ_0 . En projection sur \vec{u}_z , cela donne $\mathcal{M}_{1a} = -\frac{\phi_0^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t)$. On remarque que ce moment est toujours de signe opposé à ω . En accord avec la loi de modération de Lenz, le courant induit, par son sens, tend à s'opposer, *via* les actions magnétiques, à la rotation de l'aimant qui lui a donné naissance.

3. La spire, qui est une pure résistance électrique, reçoit la puissance

$$\mathcal{P}_s = Ri^2 = \frac{\omega^2 \phi_0^2 \sin^2(\omega t)}{R}.$$

L'aimant étant en rotation à vitesse angulaire constante, la somme des moments qui s'exercent sur lui est nulle (d'après le théorème du moment cinétique) : $\mathcal{M}_{1a} + \mathcal{M}_{op} = 0$. Donc le moment fourni par l'opérateur à l'aimant est $\mathcal{M}_{op} = -\mathcal{M}_{1a}$ et la puissance mécanique fournie par l'opérateur à l'aimant est $\mathcal{P}_{op} = \mathcal{M}_{op} \cdot \omega = -\mathcal{M}_{1a} \cdot \omega$, donc $\mathcal{P}_{op} = \frac{\omega^2 \phi_0^2 \sin^2(\omega t)}{R}$. On remarque que $\mathcal{P}_{op} = \mathcal{P}_s$: en l'absence de frottements mécaniques, toute la puissance mécanique fournie par l'opérateur au dispositif est convertie en puissance électrique alimentant le circuit. C'est le but d'un générateur.

Chapitre 24

1 Rails de Laplace

1. On note $x(t)$ la position de la barre, en prenant l'origine au niveau de la résistance R . En orientant le courant dans le circuit dans le sens indiqué sur le schéma, $\vec{S} = \ell x(t) \vec{u}_z$. Le flux magnétique à travers le circuit est $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\ell x(t)$. La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell v$, où $v = \frac{dx}{dt}$ est la projection sur \vec{u}_x du vecteur vitesse de la barre. Le schéma électrique équivalent donne l'équation

$$e = Ri \Rightarrow -B\ell v = Ri \Rightarrow i = \frac{e}{R} = -\frac{B\ell v}{R}. \quad (24.1)$$

Avec l'orientation de i choisie, la force de Laplace subie par la barre s'écrit

$$\vec{F}_{1a} = i\ell \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i\ell B \vec{u}_x.$$

La barre est soumise à la force de Laplace, son poids, la réaction normale $\vec{N} = N \vec{u}_z$ des rails, ainsi qu'à la réaction tangentielle (frottements) exercée par les rails $\vec{f} = -\lambda v \vec{u}_x$. Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à la barre s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\lambda v \vec{u}_x + N \vec{u}_z + m\vec{g} + i\ell B \vec{u}_x \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\lambda v + mg \sin \alpha + i\ell B. \quad (24.2)$$

Les équations (24.1) et (24.2) sont couplées. En éliminant i , on obtient l'équation du mouvement de la barre (écrite sous forme canonique),

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\ell}{\tau} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\lambda}{m} + \frac{(B\ell)^2}{mR} \quad \text{et} \quad \frac{v_\ell}{\tau} \stackrel{\text{déf.}}{=} g \sin \alpha. \quad (24.3)$$

2. Avec les conditions initiales, l'équation (24.3) se résout en $v(t) = v_\ell [1 - \exp(-t/\tau)]$, ce qui permet d'interpréter v_ℓ comme la vitesse limite atteinte par la barre quand $t \rightarrow +\infty$.

Son expression est $v_\ell = \frac{mg \sin \alpha}{\lambda + \frac{(B\ell)^2}{R}}$. Elle croît avec l'angle α d'inclinaison des rails et avec

la masse m de la barre, ce qui est normal. Elle décroît avec λ (l'intensité des frottements mécaniques) et avec l'intensité du champ magnétique (freinage magnétique par induction). Plus la résistance R est grande, plus l'effet du champ magnétique est atténué. En effet, dans ce cas, les courants induits sont affaiblis et les forces de Laplace aussi.

3. Pour réaliser le bilan énergétique, on multiplie l'équation électrique (24.1) par i et l'équation mécanique (24.2) par v ,

$$m v \frac{dv}{dt} = -\lambda v^2 + mg \sin \alpha v + i \ell B v \quad \text{et} \quad -B \ell v i = R i^2. \quad (24.4)$$

Dans ce problème de circuit mobile dans un champ magnétique indépendant du temps, on retrouve le fait que la puissance électrique de la fem induite est l'opposé de la puissance mécanique des actions de Laplace. On peut combiner les deux relations pour faire disparaître ce terme commun,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + \lambda v^2 + R i^2 = mg \sin \alpha v.$$

La puissance fournie à la barre par le poids (au membre de droite) se scinde en trois contributions. Elle permet d'augmenter l'énergie cinétique de la barre (premier terme), de compenser la puissance résistante des frottements (deuxième terme) et de fournir de la puissance électrique à la résistance R (troisième terme).

2 Pendule conducteur dans un champ magnétique

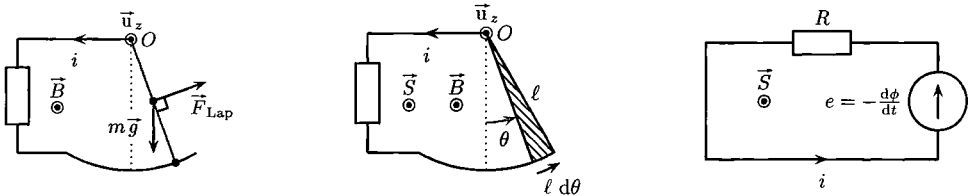


FIG. E.24.1. Pendule conducteur dans un champ magnétique.

1. Étant donné que la barre a un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{u}_z) , c'est l'application du théorème du moment cinétique par rapport à cet axe qui donnera l'équation du mouvement. Il faut donc déterminer les moments par rapport à cet axe des actions subies par la barre. L'orientation de l'axe (O, \vec{u}_z) donne l'orientation du plan par la règle de la main droite : le sens positif de rotation est le sens trigonométrique. La barre est soumise à son poids $m \vec{g}$ qui s'applique en son centre d'inertie, situé à la distance $\frac{\ell}{2}$ du point O car la barre est homogène (voir schéma). Le bras de levier du poids par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) est donc $\frac{\ell}{2} \sin \theta$ et le moment scalaire du poids $\mathcal{M}_{\text{poids}} = -m g \frac{\ell}{2} \sin \theta$. Le signe « moins » vient du fait que, si $\theta > 0$ (cas du schéma), le poids a tendance à faire tourner la barre dans le sens négatif. La force de Laplace s'écrit, en coordonnées cylindriques d'axe (O, \vec{u}_z) , $\vec{F}_{\text{Lap}} = i \ell B \vec{u}_\theta$ et s'applique au milieu de la barre. Son bras de levier est la distance $\frac{\ell}{2}$ (voir schéma), donc le moment scalaire de cette force est $\mathcal{M}_{\text{La}} = +\frac{1}{2} i \ell^2 B$. Le signe « plus » traduit que cette force fait tourner la barre dans le sens positif quand i et B sont positifs. Enfin, la liaison pivot entre la barre et l'axe (O, \vec{u}_z) est parfaite, donc exerce un moment nul sur la barre. Le théorème du moment

cinétique appliqué à la barre s'écrit, en projection sur l'axe (O, \vec{u}_z) ,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{M}_{\text{poids}} + \mathcal{M}_{\text{la}} \Rightarrow J\ddot{\theta} = -mg \frac{\ell}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} i \ell^2 B.$$

2. Le vecteur surface \vec{S} du circuit est orienté par i et la règle de la main droite, donc $\vec{S} = S \vec{u}_z$, où S est l'aire du circuit (inconnue par manque de données géométriques). Le flux magnétique à travers le circuit est $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS$ et la fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B \frac{dS}{dt}$. Ce n'est donc pas l'aire S qui importe, mais sa dérivée temporelle. Entre deux instants voisins t et $t + dt$, la barre se déplace d'un angle élémentaire $d\theta$ et balaie la surface élémentaire dS hachurée sur le schéma. Il s'agit approximativement d'un triangle de base élémentaire $\ell d\theta$ et de hauteur ℓ . Son aire est donc $dS = \frac{1}{2} \ell \times \ell d\theta$ et correspond à l'accroissement (algébrique) de l'aire S . En divisant par dt , $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}$ et la fem est $e = -\frac{1}{2} B \ell^2 \dot{\theta}$. Le schéma électrique équivalent donne l'équation

$$e = Ri, \text{ donc } i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{2} \frac{B \ell^2}{R} \dot{\theta}.$$

3. On remplace i par cette expression dans l'équation mécanique et on utilise l'approximation $\sin \theta \simeq \theta$, valable pour l'étude des petits mouvements au voisinage de $\theta = 0$. On obtient l'équation du mouvement,

$$\ddot{\theta} + \frac{B^2 \ell^4}{4JR} \dot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J} \theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec } \omega_0^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{mg\ell}{2J} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{B^2 \ell^4}{4JR}.$$

4. Si la barre est abandonnée sans vitesse initiale depuis une position $\theta_0 \neq 0$, l'équation du mouvement donne deux régimes différents en fonction de la valeur du facteur de qualité Q . Si $Q < \frac{1}{2}$, le mouvement est amorti et apériodique (absence d'oscillations car les solutions sont exponentielles décroissantes). Si $Q > \frac{1}{2}$, le mouvement est pseudo-périodique amorti car la solution mathématique est le produit d'une sinusoïde par une exponentielle décroissante. On mémorise facilement les deux cas par la phrase suivante : « le facteur de qualité mesure la qualité des oscillations ». Ainsi, un facteur de qualité grand correspond au cas où il y a de « bonnes » oscillations. Dans ce cas, la valeur numérique de Q donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations ayant lieu avant amortissement complet. En utilisant la définition de

ω_0^2 et $\frac{\omega_0}{Q}$, on obtient $Q = \frac{R}{B^2} \sqrt{\frac{8mgJ}{\ell^7}}$. On constate que Q croît avec R , donc une grande

résistance permet de bonnes oscillations et une résistance trop faible empêche les oscillations. C'est normal car une résistance faible permet la circulation d'un fort courant induit, donc une force de Laplace intense. Or, d'après la loi de modération de Lenz, cette force tend toujours à s'opposer au mouvement de la barre (freinage magnétique). Une faible résistance donne donc lieu à un fort freinage et atténue immédiatement tout mouvement de la barre. La valeur qui sépare les deux types de régimes correspond au régime critique, défini par $Q = \frac{1}{2}$, ce qui donne

la résistance critique $R_c = \frac{B^2}{2} \sqrt{\frac{\ell^7}{8mgJ}}$.

3 Freinage magnétique

1. Tant que le cadre n'est pas arrivé dans le champ magnétique, aucun phénomène d'induction ne se passe (flux magnétique nul à travers le cadre) et il n'y a pas de courant induit dans le cadre, donc pas de forces de Laplace. Le cadre est donc un simple solide qui se translate horizontalement sans frottements : sa vitesse est constante. De même, si le cadre baigne complètement dans le champ magnétique uniforme, il est traversé par un flux magnétique constant.

Il n'y a pas de phénomène d'induction et la vitesse est constante. C'est donc seulement quand le cadre entre dans le champ magnétique ($x \in [0, \ell]$) que le flux magnétique varie et donne lieu à un courant induit. On oriente le courant (arbitrairement) dans le sens trigonométrique. La zone du cadre traversée par le champ magnétique est un rectangle de hauteur ℓ et de largeur

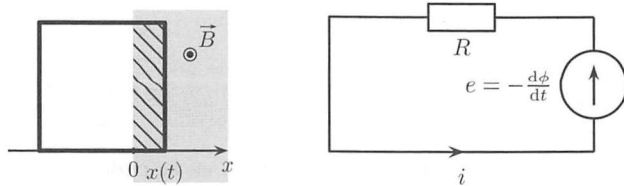


FIG. E.24.2. Cadre métallique et son schéma électrique équivalent.

$x(t)$, hachuré sur la figure E.24.2. Avec l'orientation choisie, son vecteur surface est $\vec{S} = \ell x \vec{u}_z$. Le flux magnétique correspondant est $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\ell x$ et la fem induite dans le cadre est, en convention générateur, $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v(t)$. D'après le schéma électrique équivalent, $e = Ri$, donc $i = -\frac{B\ell v}{R}$ (équation électrique du problème). D'après la règle des trois doigts, les forces de Laplace s'exerçant sur les côtés haut et bas du cadre sont verticales. Elles sont donc sans influence sur le mouvement horizontal du cadre. Seule la force de Laplace s'exerçant sur le côté droit du cadre est pertinente : $\vec{F}_{1a} = i\ell \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i\ell B \vec{u}_x$. La loi de la quantité de mouvement appliquée au cadre dans le référentiel galiléen d'étude s'écrit $\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, soit, en projection sur \vec{u}_x , $F_{1a} = m \frac{dv}{dt}$,

$$i\ell B = -\frac{B^2 \ell^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0 \quad \text{avec} \quad \tau \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{mR}{B^2 \ell^2}.$$

2. En prenant pour origine des temps $t = 0$ l'instant où le cadre pénètre dans le champ ($x = 0$ et $v = v_0$), cette équation se résout en $v(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$. La position du cadre est l'intégrale de la vitesse,

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 \exp(-t/\tau) dt \Rightarrow x(t) = v_0 \tau [1 - \exp(-t/\tau)].$$

Rappelons que ces équations ne sont valables que pour $x \in [0, \ell]$. En dehors de cet intervalle, la vitesse du cadre est constante.

3. En reprenant l'expression trouvée pour la vitesse, la question posée se traduit par $\alpha v_0 = v_0 \exp(-T/\tau)$, donc $\alpha = \exp(-T/\tau)$ et $T = -\tau \ln \alpha$. L'expression de α montre que $\alpha \in [0, 1]$, ce qui signifie que le cadre ne peut que ralentir. C'est normal d'après la loi de modération de Lenz : en entrant dans le champ magnétique, les phénomènes d'induction se déclenchent et tendent à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance (le mouvement du cadre). On traduit que le cadre finit d'entrer dans le champ à $t = T$ par $\ell = v_0 \tau [1 - \exp(-T/\tau)]$, soit, d'après l'expression de T , $\ell = v_0 \tau (1 - \alpha)$. En remplaçant τ par son expression, on obtient

$$|B| = \sqrt{\frac{(1-\alpha)v_0 m R}{\ell \times \ell^2}}. \quad \text{Il ne faut pas oublier la valeur absolue, car } B \text{ intervient au carré dans les}$$

calculs. Comme d'habitude, on trouve que le sens du champ magnétique est sans influence sur le phénomène de freinage magnétique. L'intensité du champ nécessaire au freinage croît avec m et v_0 : plus le cadre est lourd et rapide, plus il faut un champ intense pour le freiner. Plus la résistance R est grande, plus $|B|$ doit l'être. C'est normal car R grand diminue l'intensité possible des courants induits, donc des forces de Laplace ralentisseuses. La longueur ℓ intervient au dénominateur. Plus le cadre est grand, moins le champ a besoin d'être intense. Il y a deux raisons à cela.

- ▶ La durée d'entrée dans le champ est alors plus grande et le ralentissement peut s'effectuer sur plus de temps (c'est l'influence du terme ℓ seul).
- ▶ Le terme ℓ^2 vient de l'expression de la force de Laplace, qui est d'autant plus intense que la longueur du côté vertical droit du cadre est grande.

Enfin, $\alpha \in [0,1]$. Plus α est faible, plus la vitesse finale est faible, donc plus le freinage doit être intense, ce qui s'obtient avec un champ fort. Il est donc normal que $|B|$ décroisse avec α .

4. On peut remarquer que l'arrêt complet du cadre (cas où $\alpha = 0$) nécessite un temps infini ($T \rightarrow +\infty$ si $\alpha \rightarrow 0$), car la vitesse ne fait que tendre vers zéro sans jamais l'atteindre (décroissance exponentielle). En prenant $\alpha = 0$ (arrêt complet) et les valeurs numériques proposées, on trouve $B \simeq 10 \text{ T}$ pour le cas $\ell = 10 \text{ cm}$ et $B \simeq 3,1 \cdot 10^{-1} \text{ T}$ pour le cas $\ell = 1,0 \text{ m}$. Le champ de 0,31 tesla est éventuellement réalisable à l'aide d'un gros électroaimant, mais le champ de 10 teslas ne l'est pas (voir page 574). Pour s'affranchir de ces problèmes, on peut bobiner le cadre pour multiplier les forces de Laplace par le nombre de tours de fil. Cela fait cependant croître la masse du cadre ainsi que la résistance totale du fil.

4 Impédance motionnelle d'un haut-parleur

Les deux premières questions ont déjà été traitées dans l'exercice corrigé 24.4 (voir page 623). Les notations étant les mêmes, nous donnons directement les réponses.

1. L'équation électrique s'écrit $\mathcal{E}(t) - Blv - L \frac{di}{dt} = Ri$. En tenant compte de $v = \frac{dx}{dt}$, on obtient

$$\mathcal{E}(t) - Bl \frac{dx}{dt} - L \frac{di}{dt} = Ri \quad (24.5)$$

2. L'équation mécanique est $i\ell B - (\lambda + \alpha)v - kx = m \frac{dv}{dt}$. En tenant compte de $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, on obtient

$$i\ell B - (\lambda + \alpha) \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (24.6)$$

3. Pour éliminer i des équations, il faut remplacer i et $\frac{di}{dt}$ par leurs expressions dans l'équation (24.5). On peut extraire i de l'équation (24.6), ce qui l'exprime en fonction, entre autres, de $\frac{d^2x}{dt^2}$. On doit également dériver cette expression pour obtenir $\frac{di}{dt}$, mais cela fait alors apparaître $\frac{d^3x}{dt^3}$. Substituer cela dans l'équation (24.5) donne une équation linéaire du troisième ordre en x . En pratique, il n'y a pas de méthode simple pour résoudre analytiquement une telle équation.

4. Le haut-parleur est régi par des équations linéaires. De plus, c'est un système stable car, d'après la loi de modération de Lenz, son régime libre tend vers zéro. Ainsi, s'il est soumis à une excitation sinusoïdale, seule la solution particulière sinusoïdale subsiste. La stabilité et la linéarité permettent de travailler en complexes avec les notations proposées par l'énoncé. Les équations (24.5) et (24.6) deviennent, en simplifiant par $\exp(j\omega t)$ qui est non nul,

$$E_m - Bl(j\omega)X_m - L(j\omega)I_m = RI_m \quad \text{et} \quad I_m \ell B - (\lambda + \alpha)(j\omega)X_m - kX_m = m(j\omega)^2 X_m$$

De la seconde équation, on tire $X_m = I_m \frac{1}{\frac{m}{B\ell}(j\omega)^2 + \frac{\lambda + \alpha}{B\ell}(j\omega) + \frac{k}{B\ell}}$. On le substitue dans la première équation pour obtenir

$$E_m = \left[R + (j\omega)L + \frac{B^2 \ell^2 (j\omega)}{m(j\omega)^2 + (\lambda + \alpha)(j\omega) + k} \right] I_m$$

5. Les deux premiers termes $R + (j\omega)L$ correspondent à l'association en série de la résistance et de la bobine du haut-parleur. Le dernier terme de Z (la grande fraction qui sera notée Z_m dans la suite) correspond à un composant linéaire placé en série avec R et L . Il doit s'identifier avec l'association RLC parallèle du schéma électrique proposé (voir figure 24.11 page 627), donc

$$\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{j\omega L_m} + j\omega C_m \quad \text{avec} \quad \frac{1}{Z_m} = \frac{m}{B^2 \ell^2} (j\omega) + \frac{\lambda + \alpha}{B^2 \ell^2} + \frac{k}{B^2 \ell^2 (j\omega)}$$

En identifiant les termes selon les puissances de $(j\omega)$, on trouve

$$\boxed{R_m = \frac{B^2 \ell^2}{\lambda + \alpha}} ; \quad \boxed{L_m = \frac{B^2 \ell^2}{k}} ; \quad \boxed{C_m = \frac{m}{B^2 \ell^2}}$$

L'impédance Z_m s'appelle impédance motionnelle du haut-parleur car elle est due au mouvement de la barre $[CD]$, via les phénomènes d'induction que cela engendre. L'intérêt de la modélisation électrique par Z_m est de prévoir le comportement électrique du haut-parleur en fonction de la fréquence de la tension d'alimentation (voir exercice 14 page 192).

5 Moteur à entrefer plan

1. Le schéma électrique équivalent est constitué du générateur de fem \mathcal{E} , placé en série avec une résistance R et une fem induite e . Cette fem se détermine de la même façon que dans l'exercice 2 (voir figure E.24.1 page 788 pour les schémas explicatifs). Avec l'orientation de l'intensité fixée par l'énoncé, le vecteur surface du circuit est $\vec{S} = S \vec{u}_z$, où S est l'aire du circuit. Le flux magnétique à travers le circuit est donc $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS$. Entre deux instants voisins t et $t + dt$, la position angulaire de la roue croît de $d\theta$ et l'aire du circuit croît de $dS = \frac{1}{2} a^2 d\theta$, donc le flux croît de $d\phi = \frac{1}{2} B a^2 d\theta$. La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2} B a^2 \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} B a^2 \omega$. L'équation électrique s'écrit

$$\boxed{\mathcal{E} - \frac{1}{2} B a^2 \omega = Ri} \quad (24.7)$$

2. Le rayon parcouru par le courant est soumis à une force de Laplace $\vec{F}_{1a} = iaB \vec{u}_\theta$ qui s'exerce en son milieu car le champ magnétique est uniforme. Le bras de levier est donc $\frac{a}{2}$ et le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) est $\mathcal{M}_{1a} = \frac{1}{2} ia^2 B$.

3. Le rotor fournit un couple Γ à un élément extérieur. D'après le principe des actions réciproques, il subit donc le couple opposé $-\Gamma$ de la part de cet élément extérieur. Compte tenu de ce couple $-\Gamma$ et du moment des actions de Laplace, le théorème du moment cinétique appliqué au rotor s'écrit

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{1a} - \Gamma \Rightarrow \boxed{J \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} ia^2 B - \Gamma} \quad (24.8)$$

4. En éliminant i des équations (24.7) et (24.8), on obtient

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \omega = \frac{\omega_\ell}{\tau} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{B^2 a^4}{4JR} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_\ell}{\tau} = \frac{Ba^2 \mathcal{E}}{2JR} - \frac{\Gamma}{J}} \quad (24.9)$$

Avec la condition initiale $\omega = 0$, l'équation différentielle se résout en $\omega(t) = \omega_\ell [1 - \exp(-t/\tau)]$. Le temps τ est le temps typique de montée en régime du moteur. La vitesse angulaire ω_ℓ est la vitesse angulaire limite atteinte par le moteur (régime permanent),

$$\boxed{\omega_\ell = \frac{2\mathcal{E}}{Ba^2} - \frac{4R}{B^2 a^4} \Gamma}$$

Le tracé est fait en supposant $\mathcal{E} > 0$ et $\omega_\ell > 0$.

5. La vitesse angulaire limite ω_ℓ est une fonction affine décroissante de Γ (voir figure E.24.3) : plus le couple à délivrer est grand, plus le moteur tourne lentement, ce qui est intuitif. Le tracé fait apparaître un couple critique $\Gamma_c = \frac{\mathcal{E} B a^2}{2R}$. Si $\Gamma > \Gamma_c$, la vitesse angulaire limite ω_ℓ devient négative, car le couple $-\Gamma$ a un effet plus grand que le couple des actions de Laplace (comme une voiture entraînée en descente par son poids si son moteur n'est pas assez puissant pour lui faire monter la pente). Le couple Γ_c est donc la plus grande valeur possible de couple que le moteur peut délivrer. La puissance mécanique fournie par le moteur à l'élément à entraîner est, en régime permanent, $\mathcal{P} = \Gamma \omega_\ell$. Elle n'est positive (effet moteur) que sur l'intervalle de couple $[0, \Gamma_c]$.

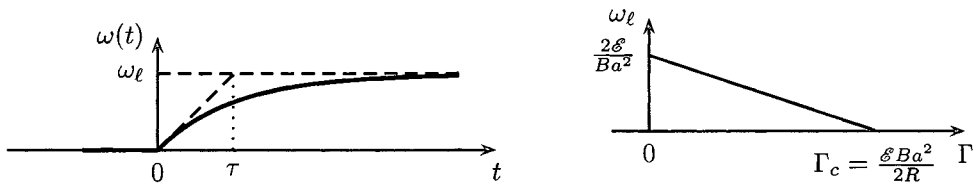


FIG. E.24.3. Évolution de la vitesse angulaire en fonction du temps. Vitesse angulaire limite en fonction du couple Γ .

6. En remplaçant ω par l'expression ω_ℓ dans l'équation électrique (24.7), on obtient l'intensité en régime permanent $i_{pe} = \frac{2}{Ba^2} \Gamma$. On aurait aussi pu l'obtenir en imposant $\frac{d\omega}{dt} = 0$ dans l'équation mécanique (24.8). On peut la récrire sous la forme $\Gamma = \frac{1}{2}iBa^2$, ce qui signifie que, en régime permanent, le couple délivré par le moteur est égal au couple des actions de Laplace.

7. Pour effectuer le bilan énergétique sur le moteur, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par ω , ce qui donne deux équations sur les puissances,

$$\mathcal{E}i - \frac{1}{2}iBa^2\omega = Ri^2 \quad \text{et} \quad J \frac{d\omega}{dt} \omega = \frac{1}{2}Ba^2\omega - \Gamma\omega.$$

On retrouve le fait que la puissance des actions de Laplace est l'opposé de la puissance reçue par la fem induite. En sommant ces deux équations membre à membre, on fait disparaître ce terme $\frac{1}{2}iBa^2\omega$ et on obtient

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}J\omega^2 \right) + \Gamma\omega.$$

La puissance fournie au circuit par le générateur sert à :

- ▶ alimenter la résistance R (perte par effet Joule) ;
- ▶ emplir le rotor d'énergie cinétique ;
- ▶ fournir de la puissance mécanique à l'extérieur (terme souhaité).

8. D'après l'énoncé, chaque rayon est équivalent à un générateur de Thévenin de fem $e = -\frac{1}{2}Ba^2\omega$ orientée de l'extérieur vers le centre de la roue. Ces N fem sont en parallèle et donc équivalentes à une unique fem e seule, comme dans le cas où un seul rayon conduisait. L'équation électrique est donc inchangée.

Lorsque les N rayons conduisent, l'intensité i se répartit de manière égale entre les N rayons d'après la loi des nœuds appliquée au centre de la roue. Chaque rayon est parcouru par $\frac{i}{N}$ et subit donc une force de Laplace N fois plus petite que précédemment. Mais les moments de ces N forces se somment, donnant finalement la même expression \mathcal{M}_a du moment total. L'équation mécanique est donc aussi inchangée.

L'intérêt de faire participer les N rayons est de répartir les efforts de Laplace de manière symétrique par rapport à l'axe de rotation (la résultante des forces de Laplace est nulle). Cela évite les vibrations du moteur.

Index

- A**
- aberration
 chromatique 76
 limitation 60
 optique 58
accélération 258
actif, dipôle 172
action
 de pression 547
 magnétique sur un moment .. 583
acuité 183
adaptation d'impédance 135
adiabatique (transformation) 436
admittance 172
aimant 567
aires
 constante des 344
 loi des 345
alpha, particules 349
amortissement 151
 taux 152
amplitude 4
 complexe 170
 de probabilité 97
analogie mécanique-électrique 154
angle
 d'incidence 50
 de Brewster 72
 de réfraction limite 53
antirésonance 191
aplanétisme 57
apocentre 355
appareil photographique 71
Archimède 550
 poussée de 550
ARQS 115
athermane 436
atmosphère (modèle isotherme) .. 541
auto-inductance 598
auto-induction 597, 599
autocollimation 80
- B**
- Badal (méthode de) 82
bande passante 205
barreau aimanté 567
battement 25
Beau de Rochas
 Alphonse 513
 cycle de 515
Bell, Alexander Graham 207
Bessel (méthode de) 81
bilan
 énergétique (induction) 607
 d'énergie 444
 d'enthalpie 456
 d'une grandeur extensive 388
 de puissance 616, 621
bobine 123, 570
 de Helmholtz 571
 impédance 174
 plate 569
Bode, diagramme 208
Bohr
 Niels 368
 modèle de 368
Boltzmann
 constante 545
 facteur de 545
 formule de 482
bornes homologues 609
boson de Higgs 638
boussole 567, 584
Bragg, William 90
Brahé, Tycho 345, 356
bras de levier 338
Brewster (angle de) 72
brouillard 414
- C**
- calorifugé 436
calorimétrie 468
canonique, forme 152, 648
capacité 121
 thermique 453
 thermique à volume constant 394
caractéristique
 courant-tension 132
Carnot (théorème de) 512

- carte
 de champ magnétique 567
 magnétique 606
 RFID 606
 cartésien (repère) 247
 cathodique 326
 caustique 59
 Cavendish, Henry 277
 cavitation 410
 célérité
 d'une onde progressive 15
 cem 129
 centre d'une lentille 60
 centripète 264
 chambre
 à brouillard 468
 à bulles 468
 champ magnétique 567
 extérieur 597
 induit 591
 ordres de grandeur 571
 propre 597
 terrestre 569
 tournant 585
 chauffeurette chimique 468
 chemin 423
 cinématique 243
 Clapeyron (diagramme de) 431
 Clausius (inégalité de) 506
 coefficient
 adiabatique 454
 d'auto-inductance 598
 d'inductance mutuelle 604
 complexe, représentation 170
 compression 427
 condensateur 121, 314
 en haute fréquence 188
 impédance 173
 conductance 120
 conduction métallique 111
 conjuguée (quantité) 103
 conservative (grandeur) 444
 constante
 de gravitation universelle 276
 de Planck 88
 de Planck réduite 90
 des aires 344
 constante (grandeur) 253
 convention
 générateur 119, 592
 récepteur 118
 conversion
 de puissance 621
 électromécanique 617
 coordonnées
 cartésiennes 247
 cylindro-polaires 248
 sphériques 251
 corps noir 47
 couplage
 d'équations 615
 par inductance mutuelle 605
 couple 361
 de Laplace 583, 584
 courant
 électrique 111
 intensité 112
 ordres de grandeur 113
 de Foucault 618, 781
 induit 591
 sinusoïdal (génération) 620
 crête à crête (amplitude) 3
 cycle
 d'Ericsson 524, 756
 de Carnot 525, 760
 de Stirling 524, 756
 thermodynamique 445
 cyclique (transformation) 432
 cycloïde 704
 cyclotron 328

D
 décade 207
 déphasage 166
 mesure de 167
 déphaseur, montage 187
 détente 427
 Davisson, Clinton 90
 de Broglie
 longueur d'onde de 90
 Louis 90
 débit 519
 découplage d'équations 615
 déformation élastique 279
 degré de liberté 259

Descartes	
formules de	62
lois de	50
René	49
détente	
d'un gaz	456
de Joule Gay Lussac	456
de Joule-Thomson	458
déviatoin	
faisceau d'électrons	322
diagramme	
de Clapeyron	404
diagramme de Bode	
étude asymptotique	211
diathermane	436
diffraction	32
diffusion	
de Rutherford	349
état de	349
dioptre	
définition	50
dipôle	
actif ou passif	172
diphasique	399
dipôle	
électrocinétique	114
caractéristique	132
en série, parallèle	114
linéaire	119
polarisé	133
symétrique	133
discrète (valeur)	29
discriminant réduit	646
dispersion	44
distribution	636
gaussienne	636
divariant	402
diviseur	
de courant	127
de tension	126
dualité onde-corpuscule	91
dynamique (du point)	271

E

ébullition	406, 410, 412
écart type	102
échelle logarithmique	206
échelles (description d'un fluide) .	535
échelon de tension	139
effective (énergie potentielle)	347

effet	
Joule	120
photoélectrique	86
thermoélectronique	323
efficacité thermique	510
Einstein, Albert	85, 357
élastique	
déformation	279
ressort	6
électroaimant	574
électromagnétisme	84
élémentaire (force de Laplace) ...	581
ellipse	354
emmétrope (œil)	70
énergie	
cinétique	294
microscopique	391
conservation	443
interne	391, 392
d'une phase condensée	395
du gaz parfait	393
mécanique	298
potentielle	297
élastique	11, 301
électrostatique	302
de gravitation	301
de pesanteur	300
effective	347
interne	392
magnétique	603, 608
newtonienne	346
totale	444
enroulement (transformateur) ...	608
enthalpie	452, 518
de transition de phase	463
entrefer plan (moteur à)	622
enveloppe (d'une courbe)	26
Eötvös, Lorand	277
équation d'état	390
d'une phase condensée	391
du gaz parfait	390
équations	
couplées	615
différentielles	645
équilibre	
liquide-vapeur	403
position d'	304
stable	304
thermodynamique	386

- Ericsson (cycle de) 524
 erreur 631
 aléatoire 632
 systématique 632
 espace (objet, image) 56
 état
 de diffusion 349
 de la matière 399
 fondamental 108
 lié 349
 étincelle de rupture 186, 603
 évaporation 413
 exosphère 542
 expérience
 de Davisson et Germer 90
 des trous de Young quantique 100
 extensive (grandeur) 444
- F**
- facteur
 de Boltzmann 545
 de qualité 153, 184
 faisceau homocinétique 718
 Faraday
 loi de 592
 Michael 591
 fem 622
 fem 128
 auto-induite 599
 induite 592
 fer doux 574
 Fermat
 Pierre 49
 principe de 49
 fibre optique 74
 fidélité 633
 filtrage 204, 220
 filtre
 actif 205
 classification 205
 déphaseur 187
 diagramme de Bode 208
 gabarit 208
 ordre 1
 passe-bas 210
 passe-haut 212
 ordre 2
 passe-bande 216
 passe-bas 214
 passe-haut 216
 passif 205
 pulsation de coupure ... 205, 208
 fluide
 déplacé 550
 réel 396
 flux
 commun 609
 magnétique 592
 propre 597
 fonction
 d'état 444
 de transfert 200
 fondamental (mode) 30
 force 271
 électromotrice (fem) 592
 électromotrice auto-induite .. 599
 centrale 342
 conservative 297, 346
 contre-électromotrice 622
 de gravitation 275
 de Laplace 579
 élémentaire 581
 de Lorentz 315
 de rappel 6
 élastique 279
 électromagnétique 285
 extérieure 358
 intérieure 358
 lois de 274
 motrice 292
 newtonienne 343, 350
 résistante 292
 forme canonique 152, 648
 formule
 de conjugaison 62
 de Taylor 553
 Foucault (courants de) 618, 781
 Fourier
 décomposition 195
 Joseph 195
 foyer
 image 61
 objet 61
 freinage 284
 électromagnétique 618
 fréquence 4
 cyclotron 331
 de coupure 205, 208

Fresnel
 Augustin 34
 représentation de 168
 front d'onde 21
 frottement
 coefficient de 284
 fluide 285
 sec 284
 fullerène 96

G

gabarit 208
 gain en décibels 207
 Galilée 272
 lunette de 77
 galiléen, référentiel 272
 Gauss
 approximation de 57
 conditions de 57
 loi de 636
 gaussienne 636
 gaz 379
 générateur 128
 électrique 613
 alternatif 620
 Germer, Lester 90
 glissière 5
 Gosset, William 637
 grandeur
 conservative 389, 444
 d'influence 631
 extensive 386, 444
 intensive 386, 537
 locale 537
 utile 508
 grandissement
 angulaire 62
 linéaire 62
 transversal 62
 gravitation
 terrestre 277
 universelle 275
 constante de la 276
 loi de la 276
 grossissement 62
 Gullstrand (formule de) 82

H

harmonique 31, 196
 haut-parleur 192, 623

Heisenberg

principe d'indétermination de 103
 Werner 84
 hélice 724
 Helmholtz (bobines de) 571
 henry (unité) 598
 Hertz, Heinrich Rudolf 86
 Higgs, boson de 638
 homocinétiq ue 314, 718
 homogène
 équation différentielle 645
 homogène
 fluide 390
 Hooke (loi de) 6
 humidité relative 414
 Huygens, Christiaan 34, 291
 hydrostatique 539
 hypercritique (fluide) 402
 hypermétrope 70

I

image
 définition 55
 espace 56
 virtuelle 56
 impédance 172
 bobine 174
 condensateur 173
 entrée, sortie 202
 résistance 173
 incertitude 631
 élargie 637
 type 633
 type composée 640
 indice de réfraction 43
 inductance 123
 mutuelle 604
 propre 598
 induction 591
 induction (loi de l') 591
 inertie 272
 généralisée 303
 influence
 grandeur d' 631
 intensive 537
 interférence 25
 ordre d' 37
 interfrange 38
 intervalle de confiance 637
 invariante (grandeur) 253

- irréversible 475
 transformation 478
- isobare
 surface 541
 transformation 424, 428
- isochore
 transformation 424
- isochore (transformation) 427
- isolé (système) 444
- isomorphe 649
- isotherme
 d'Andrews 406
 transformation 424, 438
- isotitre 521
- J**
- Joule
 effet 120
 première loi de 394
 seconde loi de 452
- joule (unité) 293
- justesse 633
- K**
- kelvin (unité) 384
- Kepler
 Johannes 345
 lois de 356
 lunette de 77
- Kirchhoff, Gustav 114
- L**
- Lagrange, Joseph Louis 291
- lampe
 spectrale 46
 témoin 148
- Laplace
 force de 579
 loi de 494
 rails de 580
- laser 48
- Le Verrier, Urbain 357
- lentille
 centre 60
 foyer 61
- libre parcours moyen 379
- lié, état 349
- lignes de champ magnétique 567
- liquide 379
 saturant 405
- Lissajous (méthode de) 167
- locale (grandeur) 537
- loi
 d'Ohm 120
 de Faraday 592
 de Gauss 636
 de Hooke 6
 de Joule (première) 394
 de Joule (seconde) 452
 de Kepler 356
 de Kirchhoff 114, 174
 de l'induction 591
 de la gravitation universelle .. 276
 de la quantité de mouvement .. 8
 de Lenz 593, 601, 615
 de modération 593
 des aires 345
 des mailles 117
 des nœuds 116
 horaire 246
 normale 636
 uniforme 636
- longueur
 à vide (ressort) 7
 d'onde 20, 43
- Lorentz
 force de 315
 Hendrik Antoon 315
- loupe 76
- lunette astronomique 77
- M**
- Mach-Zehnder, interféromètre de .. 94
- machine cyclique ditherme 507
- macroscopique (échelle) 380
- magnétique
 force 315
- maille 115
- masse 272
 électrique 113
 d'inertie 277
 pesante 277
- Maxwell
 pont de 188
 règle de 336
- Mayer
 Julius 377
 relation de 453

Melde, corde de	29
mésoscopique	535
échelle	380
mésosphère	542
mesurage	631
mesurande	631
mesure	631
de déphasage	167
métastable	467
microscope	80
milieu transparent	44
mirage	54
modération	593
mode (fondamental, propre)	30
moment	
cinétique	335
cinétique d'un solide	363
d'inertie d'un solide	363
d'une force	338
magnétique	576
par rapport à un axe fixe	360
moments (règle des)	409
monobare	456
transformation	424
monochromatique (onde)	43
monotherme (transformation)	438
moteur	
électrique (principe)	621
à courant continu	621
à entrefer plan	622
cyclique ditherme	507
linéaire	621
mouvement	
à accélération constante	260
perpétuel	506
rectiligne	260
uniforme	260
moyenne	165, 171
mutuelle inductance	604
myope	70

N

Nernst (pont de)	188
Newton	
formules	63
Isaac	271
première loi de	271
seconde loi de	273
troisième loi de	274
noeud	25, 115

normale, loi	636
--------------------	-----

O

objet	
définition	55
espace	56
virtuel	56
octave	207
œil	70
Ohm	
Georg	120
loi d'	120
onde	
longitudinale	14
plane	21
progressive	14
stationnaire	28
transversale	13
opposition de phase	166
ordre	
d'interférence	37
d'un filtre	649
d'une équation différentielle .	645
oscillateur	
amorti	151
harmonique	3
oscilloscope	226, 324
Otto, Nikolaus	513

P

paraxiaux (rayons)	57
parfait (gaz)	381
Parseval (formule de)	199
particule	
libre	106
mésoscopique	535
particulière, solution	648
pas d'une hélice	724
pascal (unité)	536
Pascal, Blaise	537
passif, dipôle	172
pendule	
pesant	365
simple	341
péricentre	355
période	4
période	
d'oscillation	307
des petites oscillations	308

- permanence
 d'un écoulement 516
 principe de 649
 permanent
 écoulement 516
 champ 537
 perméabilité
 magnétique du vide 573
 relative 574
 phase 4, 164, 399
 à l'origine 4
 condensée 391
 diagramme de 400
 différence de 166
 thermodynamique 399
 photon 88
 physique quantique 83
 plan
 d'incidence 49
 focal 61
 frontal 57
 méridien 58
 Planck, constante de 88
 Planck-Einstein, relation de 88
 plaque à induction 607
 plastique 6
 pluies verglaçantes 468
 poids apparent 550
 point
 antiprincipal 75
 critique 402
 d'ébullition 405
 de rosée 405
 triple 402
 pôle magnétique 567
 pont
 de Maxwell 188
 de Nernst 188
 de Sauty 188
 de Wheatstone 136
 porteuse 26
 portrait de phase 156
 potentiel 113
 poussée d'Archimède 549, 550
 premier principe
 de la thermodynamique . 444
 pression
 action de 547
 cinétique 384
 continuité 540
 définition 382, 536
 de vapeur saturante 402
 primaire (enroulement) 608
 principe
 des actions réciproques 274
 d'indétermination de Heisenberg .
 103
 d'indiscernabilité 95
 d'inertie 271
 de Huygens 33
 de Huygens-Fresnel 34
 de superposition 18, 575
 des états 100
 des vases communicants 541
 fondamental de la dynamique . 8,
 273
 thermodynamique (deuxième) ...
 475
 thermodynamique (premier) . 444
 probabilité, amplitude de 97
 produit
 scalaire 245
 vectoriel 337
 profondeur de champ 72
 pseudo-dérivateur, montage 214
 pseudo-intégrateur, montage 211
 pseudo-période 159
 puissance
 électrique 118
 définition 292
 indiquée 517
 induction 616
 puits de potentiel 107
 pulsation 4
 de coupure 205, 208
 propre 10
 réduite 178
 spatiale 19
- Q**
- quadrature de phase 166
 quadripôle 200
 en cascade 203
 qualité (facteur de) 153
 quantique (mécanique) 83
 quantités conjuguées 103

quanton	91
quartz	192
quasi stationnaire transformation	428
R	
raideur	7
rails de Laplace ...	580, 613, 621, 623
ralentisseurs électromagnétiques .	618
rappel cyclique	221
rappel de convergence	62
rayon paraxial	57
vert	74
virtuel	55
réactance	175
réduit, discriminant	646
référentiel	243
galiléen	272
réflexion lois de la	50
totale	53
réfraction	50
indice de	43
lois de la	50
réfringence	50
régime critique	161
libre	145
permanent	144
quasi stationnaire	115
transitoire	144
relation de Mayer	453
relativité	321
générale	85
rendement moteur	508
résistance	120, 175
association	124
impédance	173
résonance définition	179
intensité	181, 182
largeur	183, 184
tension	177, 180
ressort	6
retard (transition de phase)	467
retour inverse	49
réversible (transformation)	479

S	
satellite géostationnaire	352
saturation (courbe de)	406
Sauty (pont de)	188
secondaire (enroulement)	608
semi-conducteur	112
semi-transparente, lame	98
séparation de variables	29, 543
séparatrice	98
Shimizu, expérience de,	110
shunt	128
signal alternatif	164
moyenne	165, 171
spectre	198
valeur efficace	165
Silbermann (méthode)	81
Snell lois de	50
Willebrord	49
solénoïde	570
souplesse	7
source froide ou chaude	507
idéale	128
modèle de Thévenin	130
réelle	129
spectre magnétique	567
signal	198
visible	44
spectrographe de masse	327
spire	569
stabilité d'un équilibre	305
d'un système linéaire	648
stationnaire	537
statique des fluides (relation) ...	539
stigmatisme approché	57
rigoureux	55
Stirling (cycle de)	524
stratosphère	542
Student	637
supercritique (fluide)	402
superposition	100, 649
champ magnétique	575
surchauffe	468

surface	
d'onde	51
libre	540
surfusion	468
surpression	549
sursaturation	468
système	
centré	57
isolé	385, 444
ouvert	385
thermodynamique	385

T

taux d'amortissement	152
Taylor (formule de)	553
température cinétique	384
temps de montée, de réponse	143
tension	113, 320
accélératrice	320
terre (prise de)	113
tesla (unité)	570
teslamètre	571
théorème	
de l'énergie cinétique	295
de l'énergie mécanique	299
de l'énergie potentielle	297
de la puissance cinétique	294
du moment cinétique	
en un point fixe	340
scalaire	360
solide	363
système de points	359
thermoélectronique	323
thermosphère	542
thermostat	436
Thévenin, représentation de .	130, 175
tonneau de Pascal	541
tore ferromagnétique	608
tournant (champ magnétique)	585
trajectoire	246
transducteur électromécanique ...	623
transfert thermique	434
transformateur électrique	608
transformation	423
monobare	456
transition de phase	463, 497

travail	
d'extraction	89
définition	293
des forces de pression ...	425, 427
indiqué	517
troposphère	542
tube cathodique	323

U

uniforme	537
champ	537, 573
grandeur	253

V

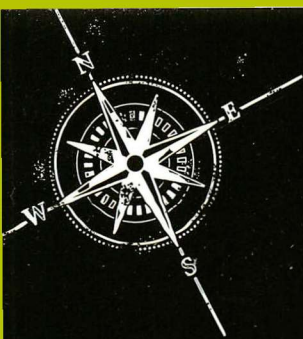
valeur	
efficace	165
moyenne	165
vraie	632
vapeur	
sèche	401
saturante	401
vases communicants	541
vecteur	
de Fresnel	168
surface	576
ventre	25
vergence	61
virtuel, objet ou image	55
viseur	79
vitesse	
angulaire	264
approche constructive	247
aréolaire	344
cosmique	353
définition	256
de glissement	284
quadratique moyenne	381

W

Watt	
diagramme de	432
James	425
watt (unité)	292
weber (unité)	592
Wheatstone, pont	136

Y

Young, Thomas	34
---------------------	----



Les auteurs

Ouvrage dirigé par **Jérôme Perez**, enseignant-chercheur à l'unité de Mathématiques appliquées de l'École nationale supérieure de techniques avancées (ENSTA, Paris) et **Vincent Rivoizé**, professeur en PSI au lycée militaire de la Flèche.

Les auteurs sont professeurs en classe préparatoire : **Éric Bellanger** (lycée Stanislas, Paris), **Xavier Ducros** (lycée Jacques Decour, Paris), **Michel Roy** (ENSTA-ENIB, Tunisie), **Eddie Saudrais** (lycée Condorcet, Paris).

Véritable **ouvrage de référence** pour la préparation aux concours, ce manuel de physique est **conforme au contenu et à l'esprit du nouveau programme 2013**. Cette 2^e édition est **parfaitement adaptée au niveau des élèves et à leurs besoins** : le livre, qui met l'accent sur les concepts essentiels, est progressif et comporte de nombreux rappels et des figures de qualité. Le cours s'attache dès le départ à faire ressortir les raisons d'être et le sens des notions introduites. Il est enrichi de quelques notions d'histoire de la physique.

- **Des encadrés « Rappel », « Attention », « Méthode » et « Synthèse »** reprennent les points essentiels, soulignent les pièges à éviter, récapitulent la marche à suivre et synthétisent les concepts complexes.
- **Des exercices corrigés** placés au fil du texte présentent les techniques de résolution de problèmes.
- **L'essentiel du cours** est résumé sous forme d'un formulaire à la fin de chaque partie.
- **Les nombreux exercices de fin de chapitre avec 150 pages de solutions détaillées** à la fin de l'ouvrage permettent d'appliquer les méthodes présentées.

Public : étudiants en classe préparatoire scientifique, filières MPSI, PCSI, PTSI ; étudiants en physique ; candidats au Capes et à l'agrégation

Cours : physique

Niveau : MPSI, PCSI, PTSI, L1

ISBN : 978-2-7440-7653-4

7653 0813 48€



9 782744 076534

Pearson.fr