JEAN-MARC BLANCHET

MATHS
en graphes

scérén
CRDP
ACADÉMIE DE GRENOBLE

Sommaire thématique

Sommaire pédagogique

(Les exercices sont proposés ici par ordre croissantes de difficulté)

INTRODUCTION

Dès le début de ma carrière, j'ai été attiré par l'aspect concret que pouvait revêtir la mathématique à travers certains « casse-tête », jeux logiques, curiosités mathématiques et autre enquête policière. J'ai alors animé un club de mathématique où je proposais de tels jeux mathématiques et ne fut pas étonné du vif intérêt que montraient les participants, y compris ceux qui prétendaient ne pas aimer les mathématiques ou ne rien y comprendre. Certains enfants me disant : « pourquoi ne fait-on pas cela en classe ? », découvrirent que la mathématique n'est pas une science abstraite (quelquefois rébarbative selon la façon dont on l'enseigne), qu'elle est en rapport avec les problèmes de la vie courante et que l'on peut faire des mathématiques « en liberté », en dehors du cadre quelquefois rigide des études poussées de mathématique.

Mathématique en liberté est le titre d'un ouvrage paru en 1976 aux éditions OCDL et épuisé à ce jour : j'y propose de multiples jeux mathématiques, touchant l'arithmétique, la logique, la géométrie, la topologie et également des jeux de cheminements (graphes Eulériens ou Hamiltoniens).

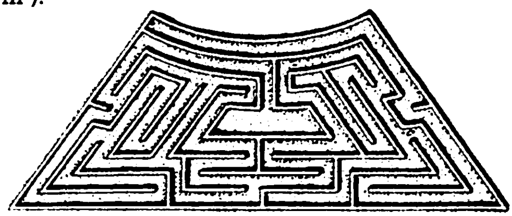
Ce livre m'a servi de support pendant de nombreuses années, afin (dès que je le pouvais) de faire aimer la mathématique ou de redonner le goût de celle-ci.

Quelques années plus tard, de multiples parutions confirmèrent ma démarche, ainsi la mathématique ludique transparaissait-elle à travers les ouvrages de Pierre Berloquin, la revue « Le petit Archimède ». Furent ensuite mis en place les championnats de France des jeux mathématique, (qui ne se limitent plus à la France de nos jours), les journées Kangourou, et parurent de nombreuses revues (dont la revue Tangente) : un véritable engouement à faire de la mathématique en liberté, mais pas une découverte !.

Pas une découverte : le jeu mathématique a de tout temps, en effet, fourni des études plus ou moins poussées, je ne citerai que Les Tours de Hanoï (jeu inventé par Edouard Lucas), les carrés magiques de Fletcher, le Solitaire déjà joué au temps de Louis XVI, les jeux de Dudeney, de Lewis Carroll, etc...

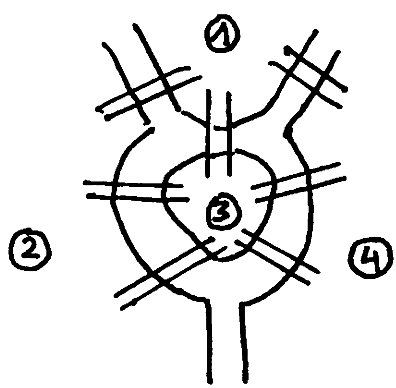
Histoire de cheminement

Dès l'Antiquité, on créa des labyrinthes souterrains ou dans des édifices, pour que les visiteurs (ou éventuels pilleurs ?) se perdent et meurent de faim, par exemple le légendaire labyrinthe situé en Crète et construit sur l'ordre du roi Minos par l'architecte Dédale. D'autres labyrinthes avaient pour but de préserver des voleurs les tombeaux des rois et reines. Plus récemment, nous trouvons le labyrinthe de Hampton Court, appelé le "Maze" et situé près de Londres. C'est un des plus vastes d'Europe (1000 m^2).

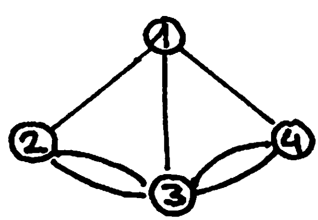


On verra dans la suite de ce livre quel cheminement prendre pour ne pas se perdre ou pour le parcourir en empruntant toutes les allées, chacune n'étant visitée qu'une seule fois.
Au XVIII^{e} siècle, le mathématicien Leonhard Euler s'intéressa de près aux cheminements, notamment au fameux problème des sept ponts de Königsberg (ville située aujourd'hui sur la frontière entre la Pologne et la Lituanie, appelée Kaliningrad), mais de quoi s'agit-il ?
Sur la rivière Pregelya, formant une île, la ville de Köningsberg comptait sept ponts, un promeneur désirant emprunter une fois et une seule fois chacun des ponts, quel cheminement doit-il faire ?
En 1735, Leonhard Euler, prouve qu'un tel cheminement ne peut exister.
A partir d'une configuration de points et de lignes joignant ces points, le problème peut être facilement résolu.

Plan des sept ponts et quatre quartiers de la ville



Il peut être modélisé par le graphe ci-dessous où chaque point représente un des quartiers de la ville et chaque pont est représenté par une arête



Le problème est alors : est-il possible en partant d'un sommet du graphe de parcourir toutes les arêtes, une fois et une fois seulement ? Essayez de trouver un tel cheminement et vérifiez que c'est impossible ! On vous le démontrera dans la suite du livre... grâce à la théorie d'Euler !

Théorie des graphes d'Euler

Née des recherches du génial mathématicien Leonhard Euler, la théorie des graphes est devenue une branche des mathématiques au début du XX^e siècle. Des recherches récentes en informatique et algorithmique lui donnent un nouvel essor ; les graphes permettent de résoudre une grande variété de problèmes pratiques en les ramenant à des configurations simples de points et de liaisons entre ces points.

Les problèmes de communications : réseaux urbains, aériens ou ferroviaires peuvent se modéliser sous forme de graphes.

Pour un réseau urbain : comment organiser la circulation dans une ville afin qu'elle soit la plus fluide et la moins dangereuse possible ?

Pour un réseau de transport : comment effectuer une distribution le plus rapidement possible ?

Quel doit être le cheminement d'un tramway, afin qu'il desserve au mieux, sans perte de temps, tout un secteur d'une ville ?

Mais aussi dans l'électronique, l'informatique, les circuits électriques, les circuits imprimés sont des modèles de graphes et donnent lieu à des problèmes concrets que ne renierait pas Leonhard Euler.

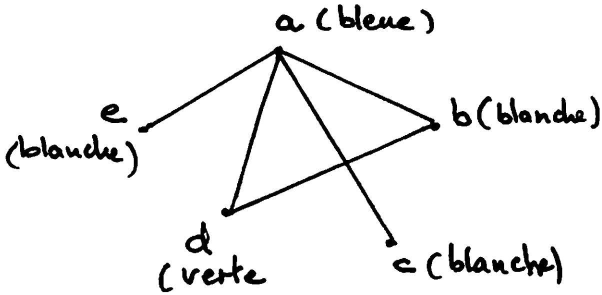
Les applications sont multiples. Pour un « fondu » de ski, comment dévaler les pistes d'une station afin qu'il puisse découvrir un maximum de pistes, (éventuellement toutes), sans emprunter deux fois le même itinéraire ?

Autre exemple : comment passer dans un réseau de rues d'une ville, en empruntant chaque rue une fois et une seule, ce qui permet le nettoyage, le ramassage des poubelles, la tournée du facteur, le passage du chasse-neige ? Mais ce n'est pas tout !

Comment organiser, classer, orienter, contingenter ? Il suffit de résoudre un problème de coloration de graphe.

Par exemple, une agence de voyages envisage d'attribuer des chambres simples, doubles ou triples à des touristes qui ne se connaissent pas nécessairement ou qui ont des incompatibilités. On modélisera la situation par un graphe dans lequel chaque point représentera une personne et chaque ligne représentera une incompatibilité. En attribuant une couleur à un point et une couleur différente à tout point relié à un point déjà colorié, on peut calculer le nombre de couleurs différentes nécessaires et donc savoir, le nombre de chambres nécessaires.

Pour preuve : l'exemple très simple (il y en a de plus complexes dans le livre !) du graphe représentant les incompatibilités entre les personnes.



On attribue la chambre simple bleue à la personne acariâtre, a ne s'entendant avec personne.
On attribue la chambre blanche à b qui peut la partager avec c ou e (b ne peut être ni avec d, ni avec a)
Donc, par exemple b, c et e seront dans la chambre blanche.
Enfin il faut une chambre simple pour la personne restant d, ce sera la verte.
On a ainsi réparti les personnes en ménageant leurs susceptibilités !
Ce n'est pas la seule répartition possible, comme on le verra dans d'autres exemples du livre.

Je me suis passionné pour travailler à l'élaboration de ce livre qui montre les multiples facettes de la théorie des graphes. Théorie dont on a pris la mesure dernièrement, à telle enseigne qu'elle est maintenant au programme de mathématiques spécialité de terminale Economique et Sociale, classe où j'ai enseigné plusieurs années.
Ludiques ou plus sérieux, exercices et problèmes concrets des plus simples aux plus complexes vous sont proposés avec leurs solutions détaillées. Ils s'adressent à tous les publics, des amateurs de jeux mathématiques « petits et grands », aux futurs bacheliers pour leurs révisions, et à leurs professeurs de mathématiques.
Tous pourront à l'aide de notions simples rappelées en début de chapitre (rubrique : A savoir), se tester grâce à des jeux (« faire le point »), avant de se confronter à des jeux de difficulté croissante (ainsi classés dans le sommaire pédagogique).

Jean-Marc Blanchet

UN PEU DE THÉORIE SUR LES GRAPHES...

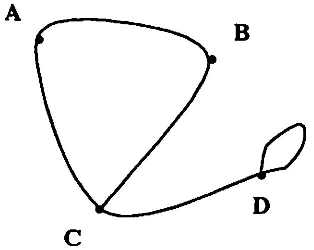
A SAVOIR !

Un graphe est un schéma constitué de sommets dont certains sont reliés par des arêtes.

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant pour extrémité ce sommet.

Exemple :



Ce graphe G a 4 sommets il est donc d'ordre 4, les degrés de A, B, C, D sont respectivement : 2, 2, 3, 3 (il y a une boucle en D).

A SAVOIR !

La somme des degrés d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

Exemple :

Dans le graphe G la somme des degrés est 10 c'est le double du nombre d'arêtes.

A SAVOIR !

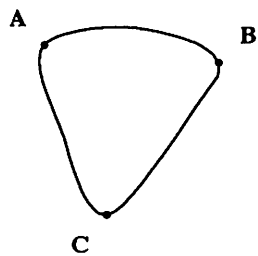
Un sous graphe d'un graphe G est un graphe constitué de certains sommets de G et de toutes les arêtes qui les relient.

Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par au moins une arête.

Un graphe est complet si tous ses sommets sont adjacents.

Exemple :

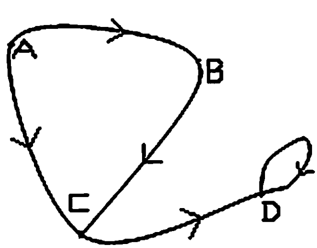
Dans le graphe G précédent les sommets A et B sont adjacents, les sommets B et D ne sont pas adjacents. Le sous graphe constitué de A, B et C est complet, par contre G n'est pas complet.



A SAVOIR !

Un graphe est orienté lorsque ses arêtes sont orientées. Une boucle est une arête dont l'origine et l'extrémité sont confondues

Exemple :



CHAÎNES D'UN GRAPHE

A SAVOIR !

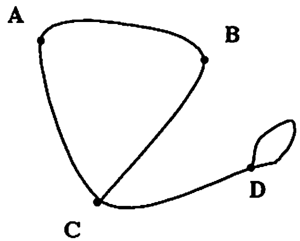
Une chaîne (ou chemin) est une liste ordonnée d'arêtes telle que l'extrémité de chacune (sauf la dernière) est l'origine de la suivante.

Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

Un cycle est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes. La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la constituent.

Exemple :

Dans le graphe G non orienté :



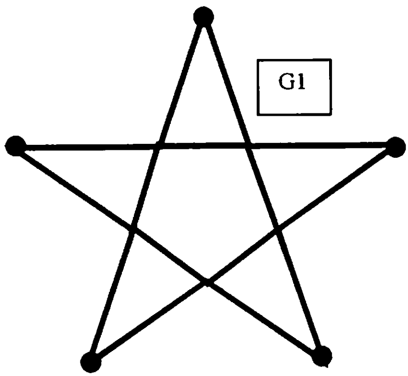
A B C D est une chaîne de longueur 3 reliant A à D, A B C A est un cycle.

A B C A B n'est pas un cycle, c'est une chaîne de longueur 4 reliant A à B.

EXERCICES

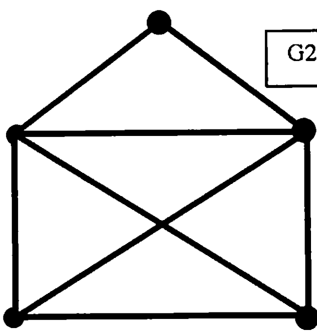
POINT 1

1- Les graphes ci-dessous sont-ils complets ? Cocher (vrai/faux)



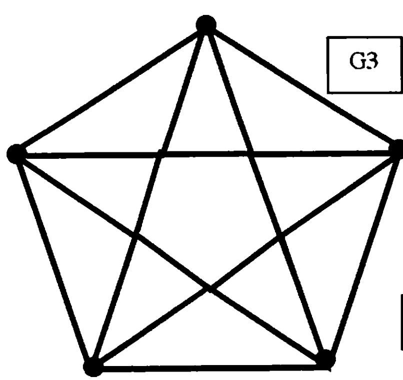
G1

V	F



G2

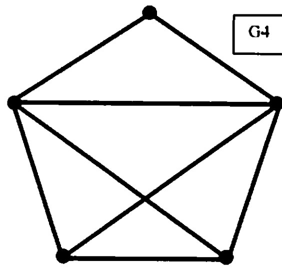
V	F



G3

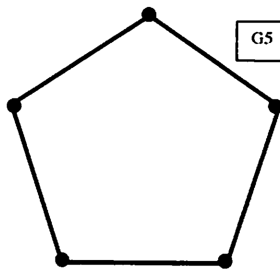
V	F

2- Les graphes ci-dessous sont-ils des sous graphes du graphe G 3 précédent.



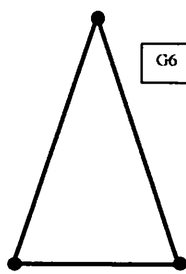
G4

V	F



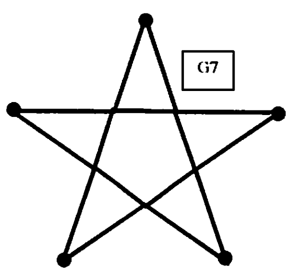
G5

V	F



G6

V	F

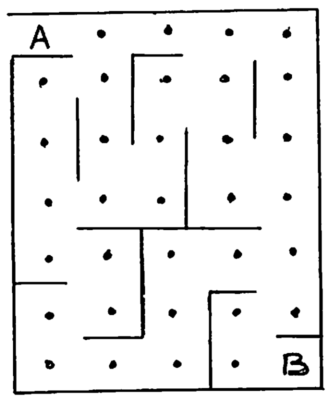


G7

V	F

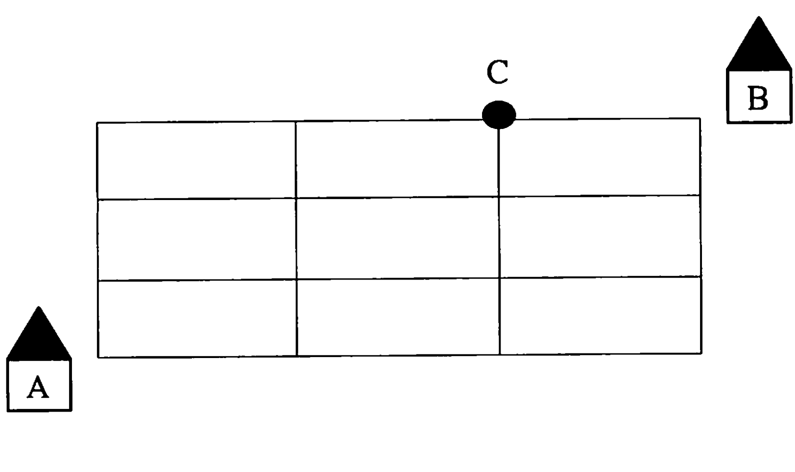
1 - LE PETIT POUCET

Le petit poucet a semé des miettes de pain le long de son trajet de A à B afin de ne pas se perdre dans ce labyrinthe et retrouver son chemin de retour. Pouvez vous l'aider à faire ce chemin de retour (de B à A) en empruntant le même trajet qu'à l'aller.



2 - COMBIEN DE CHEMINS ?

Jean part du refuge A pour se rendre au refuge B. Pour y accéder au plus vite il décide d'aller de bas en haut et toujours à droite ! Combien y a-t-il de chemins ? Combien y en a-t-il qui passent par C ?

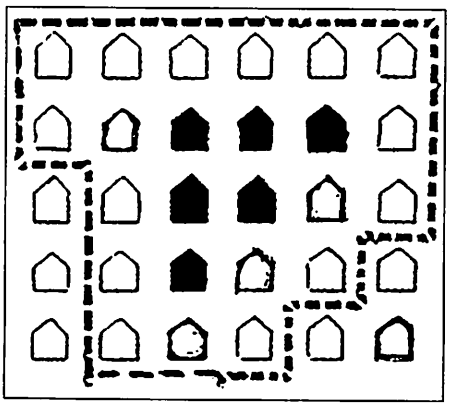


3 - LE PROBLÈME DE SURVEILLANCE DU GARDIEN DE POLICE

Voici le plan d'un quartier sensible d'une ville. Ce quartier comporte 30 habitations séparées par des rues perpendiculaires (à la New-Yorkaise). Un gardien de police ayant fait une ronde (en pointillé sur le plan) n'a pu tout surveiller : il reste 6 habitations « à éclaircir » ! A chaque carrefour (croisement de 2 rues perpendiculaires) le gardien de police « visionne » les 4 habitations de ce carrefour.

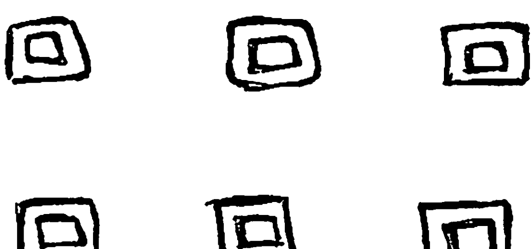
Pouvez-vous l'aider à trouver une ronde, la plus courte possible,

lui permettant de surveiller les 30 habitations sans repasser 2 fois dans la même rue (ni portion de rue). Cette ronde lui permet-elle de revenir à son point de départ ?



4 - RÉSEAU INFORMATIQUE

On dispose d'un réseau de 6 ordinateurs disposés comme ci-dessous sur 2 rangées :

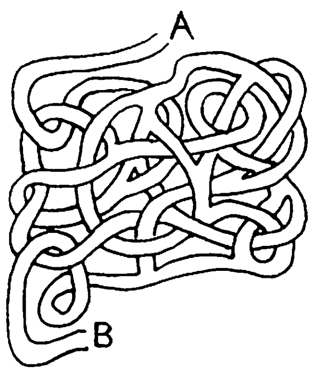


1- Peut-on connecter chaque ordinateur de la 1er rangée a exactement deux autres de la 2e rangée sans que les connexions ne se croisent ? (les connexions étant bien sûr dans le même plan) ?

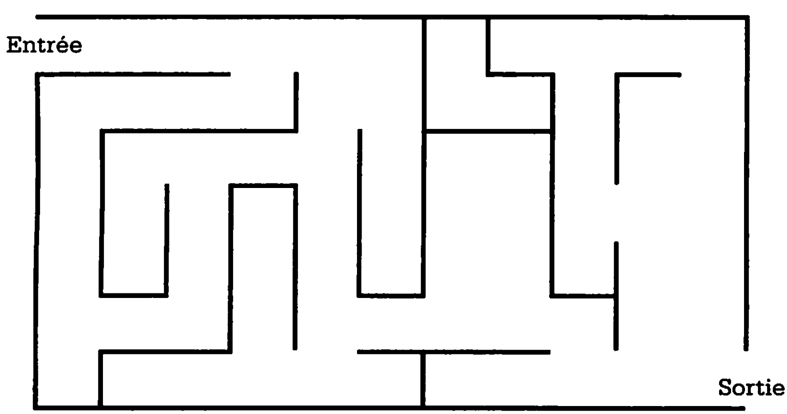
2- Peut-on connecter chaque ordinateur de la 1er rangée à tous ceux de la 2e rangée sans que les connexions ne se croisent ? (les connexions étant dans le même plan) ?

5 - SAC DE NŒUDS

Quel est le plus court chemin entre A et B ?

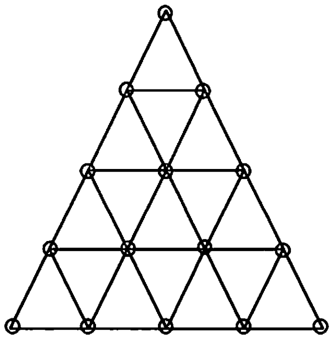


6 - COMMENT SORTIR AU PLUS VITE ?



7 - LE PROBLÈME DU GARDIEN DE PRISON

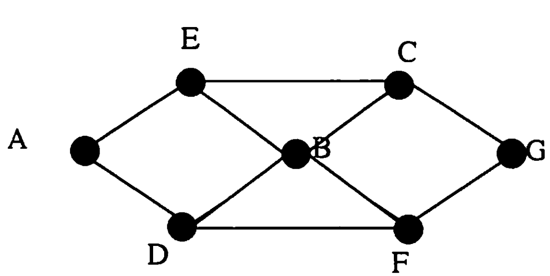
Le dessin ci-dessous représente le réseau des cellules du sous-sol d'une prison.



C'est l'heure de la « soupe ». Pouvez-vous indiquer un chemin qui permette au gardien de passer une seule fois dans chaque cellule, en n'empruntant que les allées marquées sur le dessin, et de revenir à son point de départ ?

8 - LE PROBLÈME DU FACTEUR

Le facteur d'un village doit passer dans les maisons B, C, D, E, F, G, disposées comme dans le dessin ci-dessous, A désignant la poste.

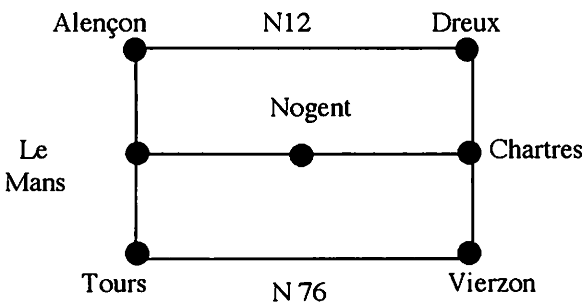


1- Pouvez-vous lui indiquer dans quel ordre il doit faire ses visites pour qu'il ait fait le trajet minimum une fois le courrier distribué ?

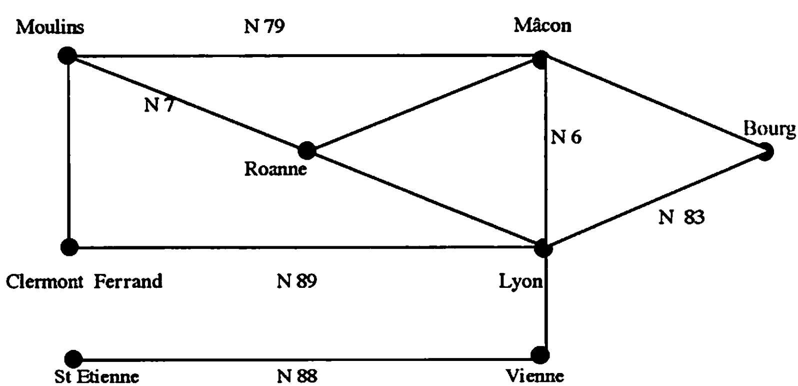
2- Pouvez-vous lui indiquer dans quel ordre il doit faire ses visites pour qu'à la fin de sa tournée (de retour à la poste), il ait fait le trajet minimum ?

9 – LE PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE*

Un voyageur de commerce doit visiter toutes les villes qui figurent sur le plan ci-dessous en n'employant que les routes indiquées (il désire ne pas repasser dans la même ville) Pouvez-vous trouver un itinéraire qui lui permette de passer dans toutes les villes sans passer deux fois dans la même ?

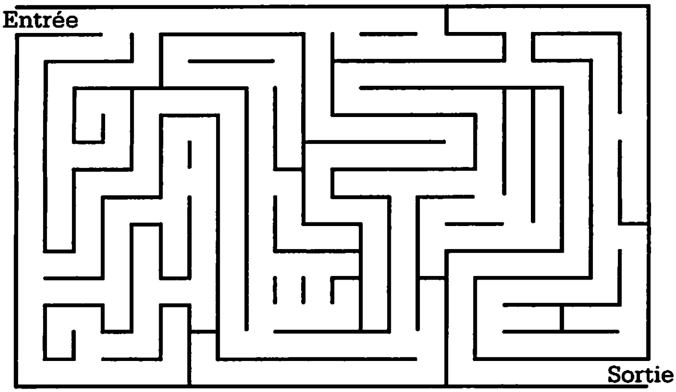


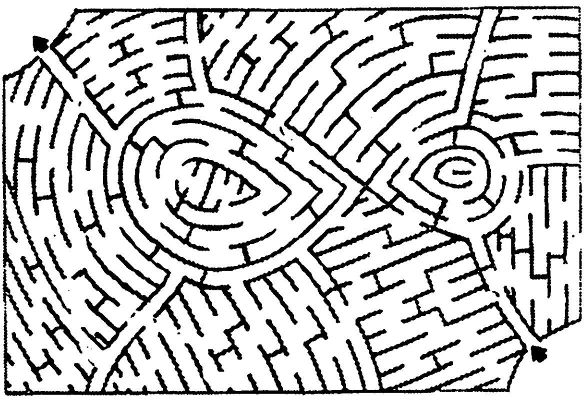
Même problème avec le plan suivant :



* Tiré de « Itinéraire mathématique », CM2, par M.A. Touyarot et Cl. Hameau (Fernand Nathan).

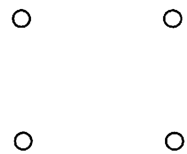
10 - LE LABYRINTHE





11 - LE PROBLÈME DE L'URBANISTE

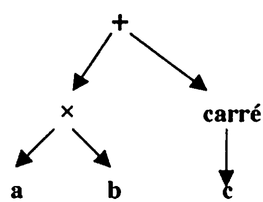
Est-il possible de faire des routes reliant directement chaque ville du dessin ci-dessous aux trois autres, de façon que ces routes, par mesure de sécurité, ne se croisent pas hors des villes ?



12 - ARBRES SYNTAXIQUES ET INFORMATIQUE

En informatique on représente les expressions algébriques par des arbres (appelés arbres syntaxiques) dans lesquels une opération est représentée par un sommet relié par des arêtes aux variables ou à d'autres expressions.

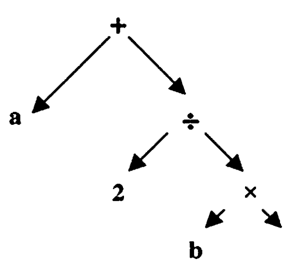
Par exemple le graphe suivant représente l'expression $ab+c^2$:



1- Représente de même les expressions suivantes par un arbre :

a^2+2b-c ; $ab+2c$; $(x+y)^2$

2- Quelle expression algébrique est représentée par :



13 - LE PROBLÈME DU PROFESSEUR

Jean Marc, professeur de mathématiques ne chome pas ! Il a 2 devoirs à corriger (D1 etD2), 2 textes de devoirs à rédiger (T1 et T2), du courrier à rédiger : 4 lettres (L1, L2, L3, L4), 2 coups de téléphone à donner (C1 et C2) et enfin en dernier lieu passer la tondeuse de son jardin !

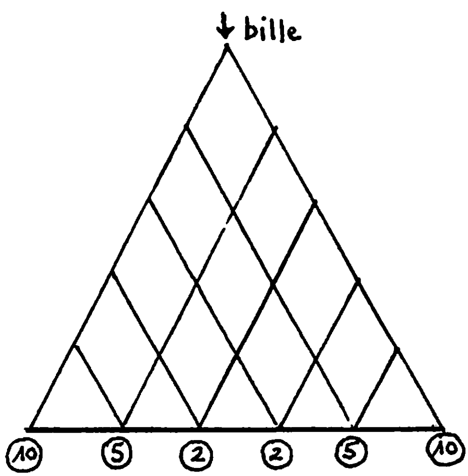
Certaines de ces tâches ne peuvent attendre ! Aussi jean Marc envisage de « s'atteler » à D1 avant D2 mais après C2. C1 est plus urgent que C2. L2 doit être réalisée avant L4 mais après D2. T1 et T2 devront être rédigées l'une après l'autre mais T1 devra être réalisée avant D1 et C1. Enfin L1 devra être réalisée avant L3 et L4 mais après D2.

Pour s'y retrouver, il décide de faire un planning de ce qui l'attend sous forme d'un graphe orienté indiquant l'ordre de ses tâches.

Quel est ce graphe ?

14 -LA PLANCHE À BILLES

Dans une fête foraine je décide de jouer à un vieux jeu : la planche à billes schématisée ci-dessous.



Le jeu consiste à lâcher une bille (on admet qu'elle a autant de chances d'aller d'un coté ou de l'autre). On peut gagner 10 ou 5 ou 2 euros selon où la bille tombe

Je joue ! Combien ai-je de chances de gagner 2 euros ? 5 euros ? 10 euros ?

15- CONCOURS DE DANSE

Lors d'une soirée 4 couples sont sélectionnés à un concours de Danse. L'animateur désirant juger maintenant chaque danseur (danseuse) leur demande de ne pas prendre leur conjointe (conjoint) pour cavalière (cavalier) !

Si l'on veut examiner toutes les possibilités combien de danses seront nécessaires ?

Un couple supplémentaire étant repêché, combien de danses seront nécessaires pour la sélection des 5 couples.

16 - QUI ARRIVE LE PREMIER À L'ALPE D'HUEZ ?

Six copains partent faire du ski à l'Alpe d'Huez.

Bernard, André et Fernand partent de Grenoble à la même heure. André s'y rend avec son véhicule en 45 minutes. Bernard passe chercher Camille en 10 minutes puis Danielle 10 minutes après, ils rejoignent ensemble la station en 15 minutes.

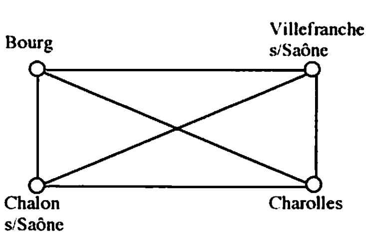
En 10 minutes Fernand rejoint Gaston et ensemble ils mettent 30 minutes pour se rendre à l'Alpe d'Huez.

Qui arrive le premier à l'Alpe d'Huez ?

Y a-t-il plusieurs solutions ?

17 - LE REPRÉSENTANT TROP CALCULATEUR

Un représentant de retour d'une tournée : Bourg, Villefranche, Chalon, Charolles, dit à son patron pour le remboursement de ses frais de déplacement : « M'étant égaré plusieurs fois, j'ai emprunté exactement une fois chacune des routes indiquées sur le plan ci-dessous » :

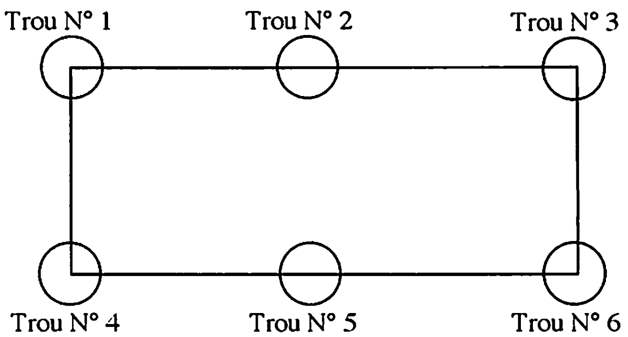


Son patron, regardant le plan, sourcille. Le représentant aurait-il menti ?

18 - LE JOUEUR DE BILLARD

Pedro et Régis se livrent à une partie de billard acharnée. C'est Pedro qui tient « le manche » et il a de grandes chances de gagner, une seule boule restant sur le billard. Par un coup de malchance inouïe, la boule jouée par Pedro revient après « une folle course » exactement d'où elle était partie.

Pouvez-vous imaginer un des « chemins » possibles suivi par la boule d'après le dessin ci-dessous ?



19 - LE PROBLÈME DU VIGNERON

Un vigneron dispose de 3 jerricans :

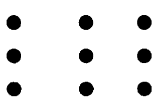
Un de huit litres plein et deux de respectivement cinq et trois litres.

Comment peut on sans autre récipient partager les huit litres en deux parts égales ?

20 - DES POINTS ET DES LIGNES

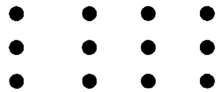
Essayez de joindre, sans lever le stylo de la feuille, les 9 points du réseau ci-dessous par une ligne brisée de 4 segments en passant une seule fois par tous les points : (les segments n'auront pas obligatoirement leurs extrémités coïncidant avec les points).

(1)



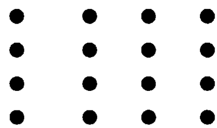
Cherchez à joindre de la même façon les 12 points ci-dessous par une ligne brisée ne comportant que 5 segments

(2)



Puis reliez les 16 points du réseau ci-dessous par une ligne brisée ne comportant que 6 segments !

(3)



21 - LE PROBLÈME DE LA MAÎTRESSE DE MAISON.

Madame X reçoit ce soir 5 couples : André et Annie, Bernard et Béatrice, Camille et Céline, David et Dany, Emile et Elodie.

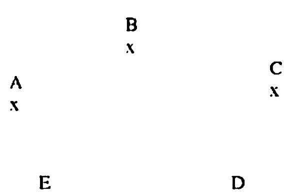
La bienséance voulant qu'autour de la table ronde : hommes et femmes alternent et qu'aucun homme ne soit placé à coté de sa femme ; comment Madame X va-t-elle disposer autour de sa table (ronde) ses invités ?

Combien y a-t-il de possibilités ?

22 - LE PROBLÈME DE L'ÉLECTRONICIEN*

Pour un circuit imprimé de radio, il s'agit de relier chacune des jonctions A, B, C, D, E à toutes les autres par des fils conducteurs.

Est-il possible de réaliser ce circuit imprimé de façon à ne créer aucun court-circuit (dû au croisement de deux ou plusieurs conducteurs) ?



* Tiré de " Graphes et leurs applications " d'Oystein (Dunod).

23 - LE PROBLÈME DU FERMIER

Monsieur Malin est fermier, c'est l'heure de la traite des vaches, sa voisine vient chercher son litre de lait.

1 - Monsieur Malin ayant terminé de remplir un seau de 10 litres et n'ayant pas sous la main d'autre mesure de capacité que deux seaux vides, l'un de 5 litres, l'autre de 2 litres, arrive néanmoins par des transvasements à donner à sa voisine 1 litre de lait. Comment a-t-il procédé ?

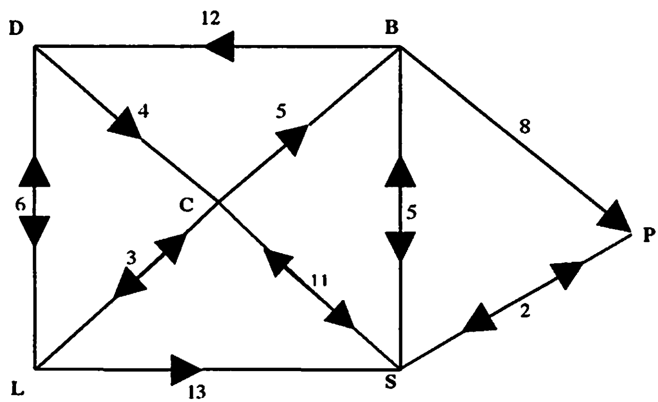
2 - Quelques instants après, Gaston et Firmin, deux amis, arrivent à la ferme au moment où Monsieur Malin dispose d'un seau de 10 litres de nouveau plein et des deux seaux de 5 litres et 2 litres vides.

A - Comment peut-il donner 1 litre de lait à chacun ?

B - Peut-il satisfaire en même temps Gaston et Firmin ?

24 - LE PROBLÈME DE CYRIL

Le plan ci- dessous représente un quartier de la ville de Cyril avec ses rues à sens unique ou à double sens de circulation reliant la bibliothèque (B), le cinéma (C),la piscine (P),le lycée (L),le supermarché (S)et le domicile (D)de Cyril.



1- Cyril peut il emprunter toutes les rues une fois chacune pour se rendre du lycée à son domicile ? .Existe t'il un tel trajet partant et arrivant au même endroit ?.

2- Cyril désire se rendre de son domicile à la piscine le plus rapidement possible : pouvez-vous l'aider à trouver le trajet le plus court ? (compte-tenu des distances en hectomètres indiquées sur chaque arête)

25 - PREMIER DE CORDÉE

On considère une cordée de 6 alpinistes : Pierre, Bernard, Amédée, Jean-Marc, Alain, Yves.

1- Combien y a-t-il de cordées possibles si chacun peut être premier de cordée ?

Combien y en a-t-il si Pierre est premier de cordée ?

2- Sachant que seuls Pierre et Bernard sont capables d'être premier de cordée, combien de cordées sont possibles ?

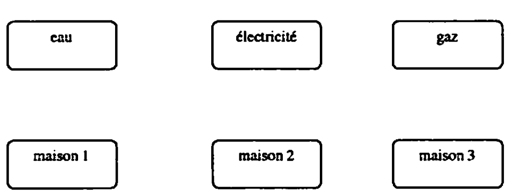
3- On décide que Pierre sera premier de cordée et que Bernard et Amédée fermeront la marche indiquer toutes les cordées possibles.

26 - DÉMÉNAGEMENT

Un appartement de 6 petites pièces est aménagé comme ci-contre. On veut changer de pièce le piano pour l'installer dans le salon (n°6). Le problème est qu'on ne veut pas mettre dans une même pièce 2 meubles, les pièces étant trop petites. Seule la pièce n°2 est vide de meuble. Quels déplacements au minimum faut-il faire ?

1 Table	**2**	**3** Piano
6 Canapé	**5** Armoire	**4** Bibliothèque

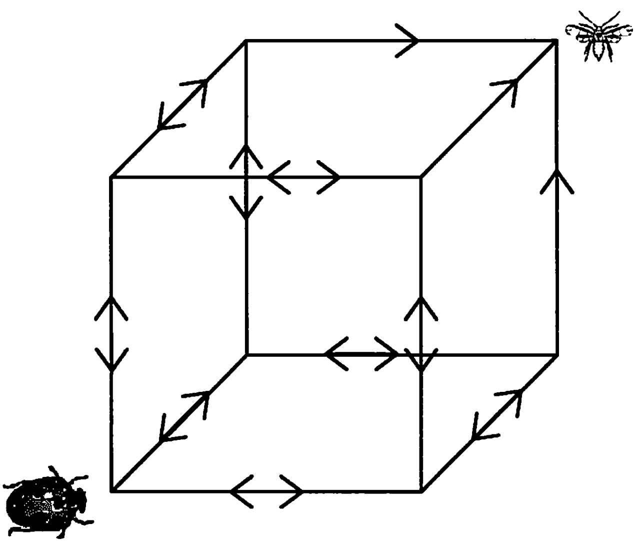
27 - LE PROBLÈME DU PROMOTEUR



Il s'agit de mettre eau, gaz et électricité à chaque maison sans que les tuyaux se croisent (étant bien entendu que tous les tuyaux doivent se trouver dans le même plan, c'est-à-dire qu'aucun tuyau ne peut passer sous un autre).

28 - LA COCCINELLE ET LES PUCERONS

Une coccinelle avide de pucerons doit parcourir les arêtes de la boite figurée ci-dessous afin d'aboutir à ses fins (plutôt « faims »).Pouvez- vous imaginer les divers trajets possibles. Combien d'arêtes la coccinelle aura – t'elle parcourues ? (La coccinelle partant d'un sommet choisit « au hasard » l'arête qu'elle va parcourir).



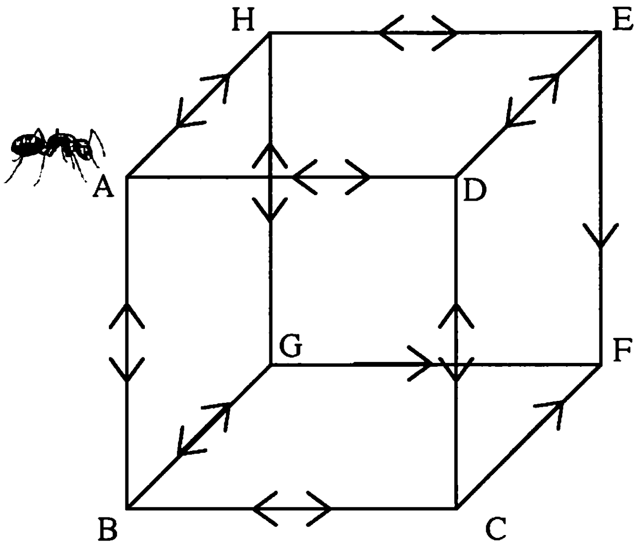
29 - « A PAS DE FOURMI »

Une fourmi se déplace le long des arêtes de la boite (figurée ci-dessous) contenant du sucre. Elle se dirige au hasard d'un sommet à un autre pour atteindre le petit trou situé en F afin de rentrer dans la boite. Chaque arête parcourue correspond à un « pas ».

1- Combien y a-t-il de chances que partant de A la fourmi atteigne D en 2 pas ?

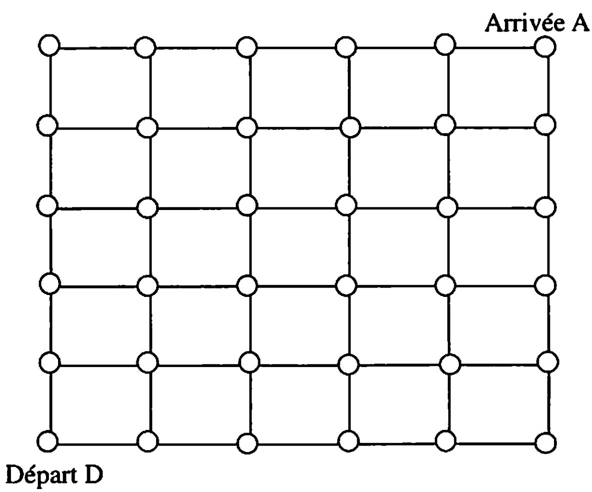
2- Combien y a-t-il de chances que partant de A la fourmi revienne en A après 2 pas ?

3- Quel est le nombre (moyen) de pas que la fourmi devra faire pour atteindre l'intérieur de la boite en partant de A ?



30 - LE LIÈVRE ET LA TORTUE

Un lièvre et une tortue se trouvent au départ en D, ils vont aller en A en marchant sur les lignes du quadrillage ci-dessous.



1- Le lièvre pense que pour faire le plus court chemin pour aller de D à A il faut aller toujours en haut et toujours à droite ! .La tortue pense que le plus court chemin passe obligatoirement par l'un des points de la diagonale AD ! Qui a raison ?

2- Indiquer à chaque nœud du quadrillage le nombre des plus courts chemins y arrivant. Comment trouver aisément ce nombre et quel est le nombre des plus courts chemins arrivant à A ?

3- Combien y a-t-il de plus courts chemins arrivant à A en passant par B ? Combien y a-t-il de chances que le lièvre fasse ce chemin ?

4- Combien y a-t-il de plus courts chemins arrivant à A en passant par B et C ? Combien y a-t-il de chances que la tortue fasse ce chemin ?

5- Qui arrivera le premier en A dans ces conditions : le lièvre ou la tortue ?

A SAVOIR !

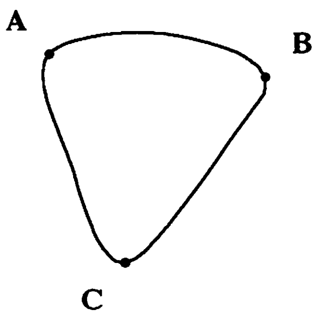
Une chaîne Eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si cette chaîne est un cycle on l'appelle cycle Eulérien.

Exemple :

Une chaîne Eulérienne du graphe G (page 16) non orienté est par exemple C A B C D D.

Il n'y a pas de cycle Eulérien dans G.

Dans le sous graphe



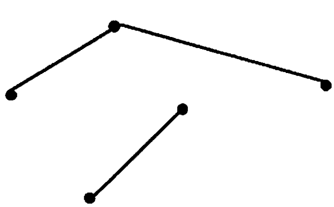
A B C A est un cycle Eulérien

A SAVOIR !

Un graphe est connexe s'il y a au moins une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Exemple :

le graphe

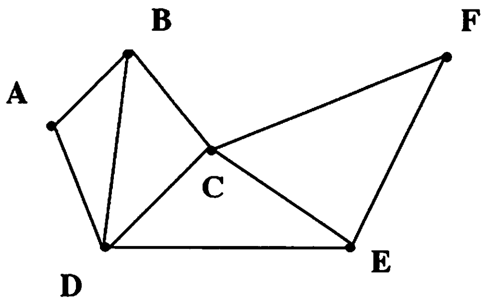


n'est pas connexe.

A SAVOIR !

Un graphe connexe admet une chaîne Eulérienne si et seulement si il a 2 sommets de degré impair ou aucun (tous les sommets sont de degré pair) dans ce dernier cas le graphe admet un cycle Eulérien .Dans un graphe connexe la distance entre 2 sommets est la longueur de la plus courte chaîne qui les relie ; le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre 2 sommets.

Exemple :



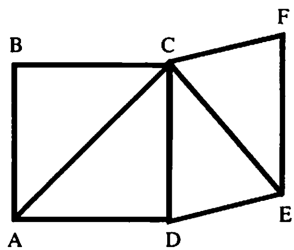
Dans le graphe ci- dessus la distance entre A et C

Est 2.

Le diamètre du graphe est la distance entre A et F c'est-à-dire 3.

POINT 2

Pour chaque affirmation concernant le graphe ci-dessous cocher vrai ou faux



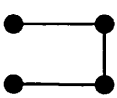
* ABDCBD est une chaîne de longueur 5 | V | F |

* La distance entre B et F est 3 | V | F |

* ABDEFCB est un cycle | V | F |

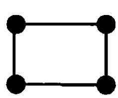
* ABDEFCBA est un cycle Eulérien | V | F |

Pour chaque graphe dessiné ci-dessous répondre par vrai ou faux s'il est complet ou connexe.



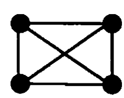
Complet | V | F |

Connexe | V | F |



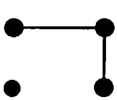
Complet | V | F |

Connexe | V | F |



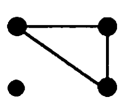
Complet | V | F |

Connexe | V | F |



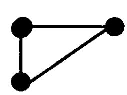
Complet | V | F |

Connexe | V | F |



Complet | V | F |

Connexe | V | F |

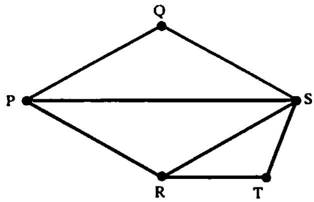


Complet | V | F |

Connexe | V | F |

On rappelle qu'une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe.

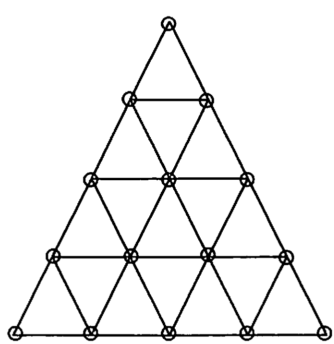
Dans le graphe ci-dessous, il est possible de définir une chaîne eulérienne :



Partant de Q et finissant en T	V	F
Partant de S et finissant en S	V	F
Partant de P et finissant en R	V	F
Partant de R et finissant en P	V	F
Partant de R et finissant en T	V	F

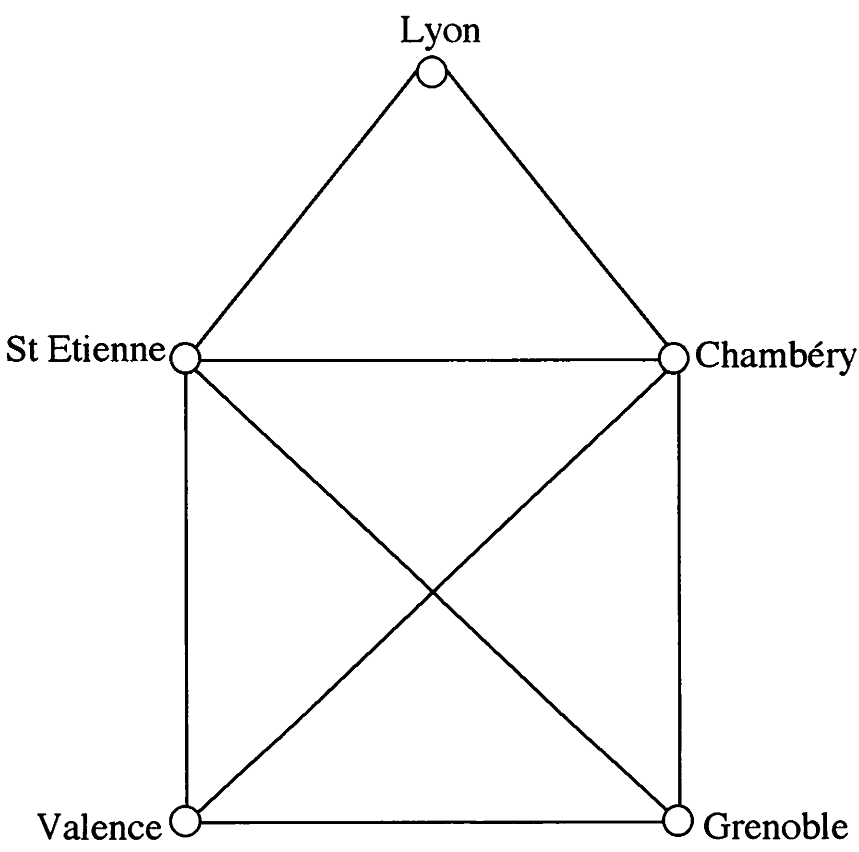
31- LA RONDE DU GARDIEN DE PRISON

Le dessin ci-dessous représente le réseau des cellules au sous-sol d'une prison. Le gardien de prison voudrait passer dans toutes les allées une seule fois. Pouvez-vous lui indiquer un trajet ? (Sa ronde faite, le gardien se retrouvera à son point de départ.)



32 - LE PROBLÈME DU RALLYMAN AMATEUR

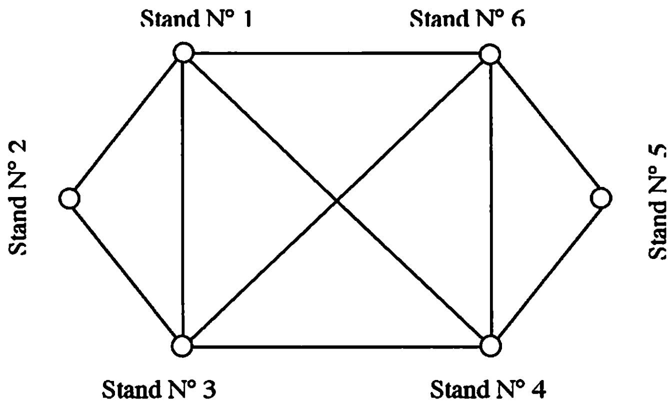
Au départ d'un rallye, on donne l'indication suivante à chaque participant : « Tu dois passer par les villes : Grenoble, Saint-Etienne, Valence, Chambéry, Lyon, en empruntant une seule fois toutes les routes indiquées sur le dessin ci-dessous. Sachant que l'arrivée n'est pas à Grenoble, où est-elle ? »



Pouvez-vous aider le rallyman à trouver le point d'arrivée ? Où a lieu le départ ?

33 - LE PROBLÈME DU COMMISSAIRE DE COURSE

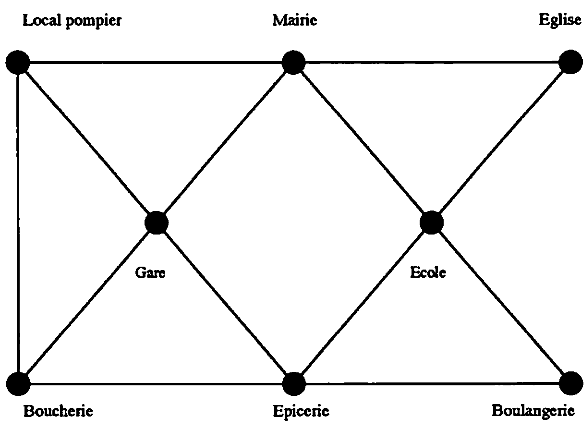
Regardez le plan du circuit automobile suivant :



Comment faut-il flécher ce circuit de façon que chaque coureur automobile passe devant tous les stands, en empruntant une seule fois chacune des routes indiquées (et revienne à son point de départ) ?

34 - LE PROBLÈME DE DÉNEIGEMENT

Dans un village, gare, école, épicerie, boulangerie, église, mairie, local pompiers, boucherie sont disposés selon le plan ci-dessous :

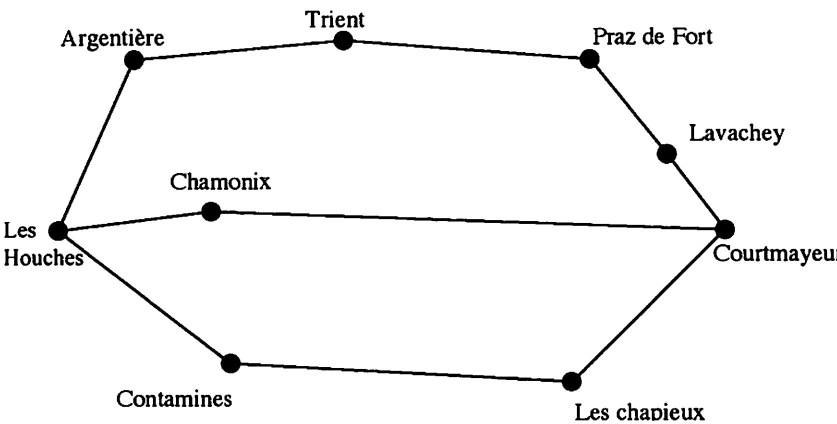


Un chasse neige part du local pompiers pour déneiger toutes les rues représentées sur le plan.

- Y a-t-il un parcours passant par toutes les rues une seule fois ?

- Le chasse-neige peut-il en déneigeant toutes les rues revenir au local pompiers sans repasser dans une rue déneigée ?

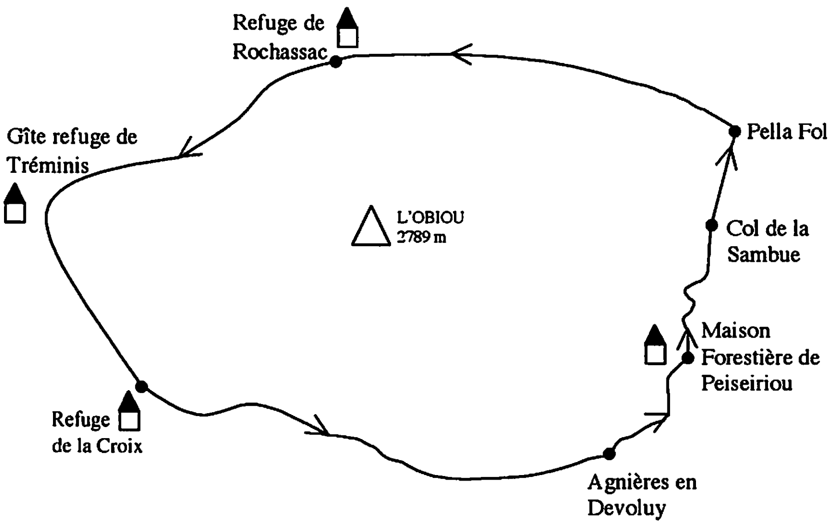
35 - LE TOUR DU MONT BLANC



En déterminant le degré de chaque sommet du graphe ci-dessus trouver un itinéraire (s'il existe) empruntant tous les chemins (ou routes) une fois et une seulement .Cet itinéraire doit nécessairement avoir quel point de départ ? Y a-t-il un itinéraire revenant au point de départ ?

Sinon, quelle étape faut-il supprimer ?

36 - LE TOUR DE L'OBIOU



Temps de marche :

- Col de la Sambue-refuge de Rochassac : 6h
- Refuge de Rochassac- refuge de la croix : 7h
- Refuge de la croix- Agnieres : 5h30
- Agnieres-maison forestière : 5h30
- Maison forestiére-col de la Sambue : 5h30

En examinant le degré de chaque sommet du graphe ci-dessus justifier le circuit fléché proposé pour réaliser le tour de l'Obiou. Si l'on prévoit au maximum 6h de marche par jour, combien faut il de jours pour réaliser ce tour ?

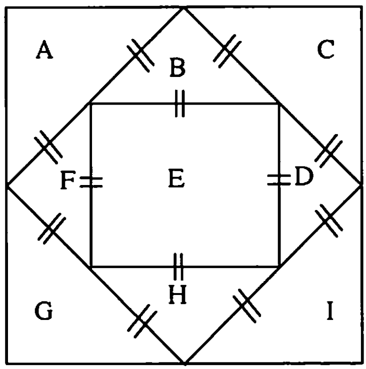
37 - PROBLÈME DE CIRCULATION DANS LE MUSÉE

Un projet de musée est représenté ci-dessous :

Il est constitué de 9 salles notées de A à I reliées entre-elles par des portes comme indiqué.

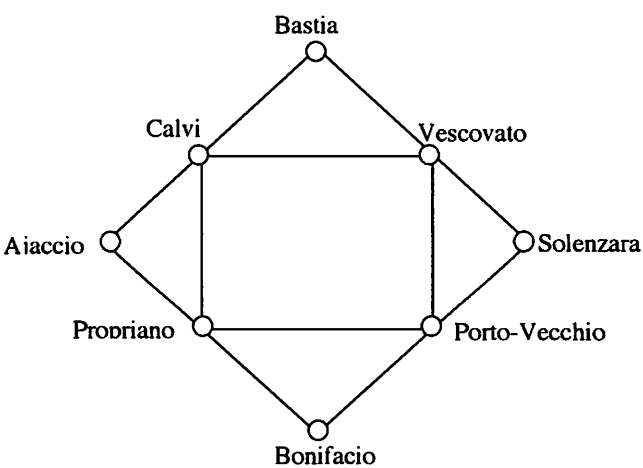
1 - Le problème est de savoir si chaque visiteur peut visiter toutes les salles en empruntant toutes les portes mais qu'une seule fois chacune : pour éviter les « bouchons », qu'en pensez-vous ? Est-il possible de visiter toutes les salles ? Sans y revenir ?

2 - Quelles portes faut-il supprimer pour faire la visite de toutes les salles en partant et en revenant au point de départ ?



38 - LE MOTOCYCLISTE FLÂNEUR

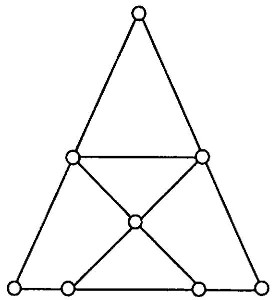
José se trouvant en vacances en Corse décide de connaître un peu le pays en flânant (comme tout bon Corse) de Bastia à Bonifacio, en passant par Vescovato, Solenzara, Porto-Vecchio, puis au retour de Bonifacio guère pressé, il désire emprunter toutes les routes indiquées sur le plan ci-dessous :



Pouvez-vous deviner le trajet qu'il a emprunté, sachant qu'il n'a pas suivi deux fois la même route ?

39 - LE PROBLÈME DES GARDIENS DE LA PAIX

Il est minuit, les gardiens de la paix font leur ronde dans le quartier des bars louches, quartier qui a la configuration du réseau ci-dessous :

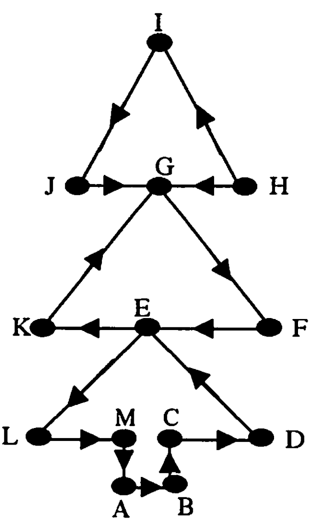


Pouvez-vous indiquer aux gardiens un trajet qui leur permette de passer une fois et une seule dans chacune des rues ?

De quel carrefour doivent-ils obligatoirement partir pour leur ronde soit la plus courte possible ?

40 - L'ARBRE DE NOËL

Un circuit de motoneige a une forme originale : un arbre de Noël. Il est fléché comme ci-contre.



1 - Est il possible de partir d'un point et d'y revenir en empruntant toutes les pistes (arêtes fléchées), chaque piste étant parcourue une seule fois ?

2 - On s'est trompé en fléchant l'itinéraire sur une piste, sur quelle piste faut-il inverser le sens du parcours ? De quel point peut-on alors démarrer pour faire tout le parcours en empruntant une seule fois chaque piste ?

3 - La piste de A vers B étant impraticable, existe-t-il un parcours empruntant une seule fois chaque piste ?

41 - MAIS OÙ EST LE TRÉSOR ?

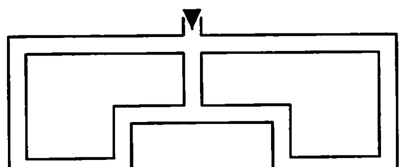
Trésor des templiers, trésor des tombeaux des rois d'Egypte ont fait rêver !

Certains de ces trésors se trouvaient (se trouvent encore ?) dans des labyrinthes inviolables.

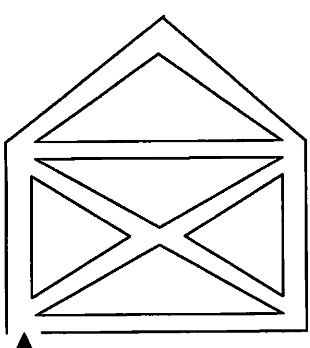
De nos jours on sait que l'on peut non seulement sortir de n'importe quel labyrinthe mais aussi visiter tous ses recoins sans en oublier un seul.

Entraîne toi avec les labyrinthes ci-dessous à retrouver le trésor (s'il existe !) en parcourant toutes les galeries.

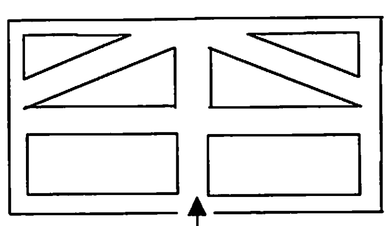
Entrée



Labyrinthe 1



Entrée Labyrinthe 2



Entrée
Labyrinthe 3

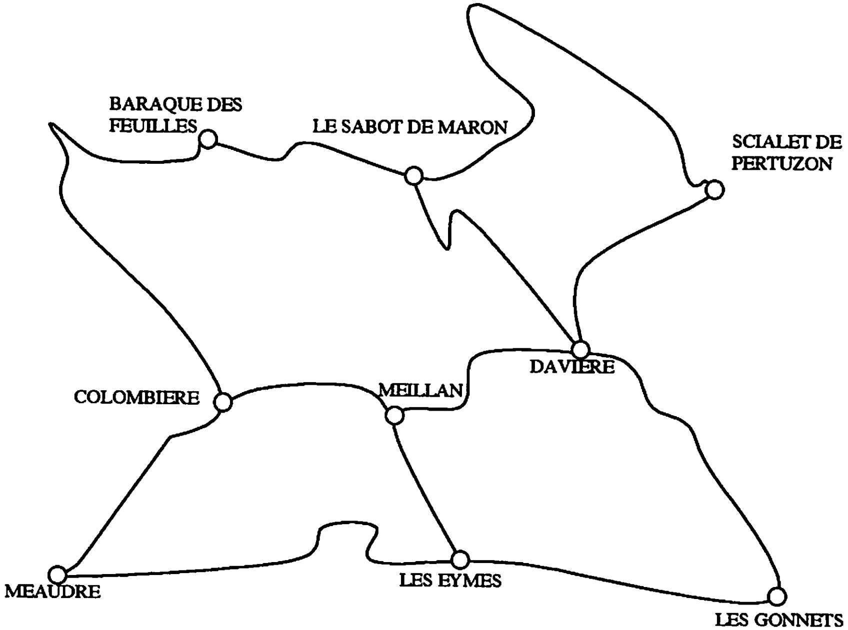
42 - "LA TRACE BLANCHE"

Un des organisateurs de la trace blanche (course à ski dans le Vercors), désire flécher un itinéraire empruntant toutes les pistes tracées sur le plan ci-dessous (chaque piste étant parcourue une seule fois).

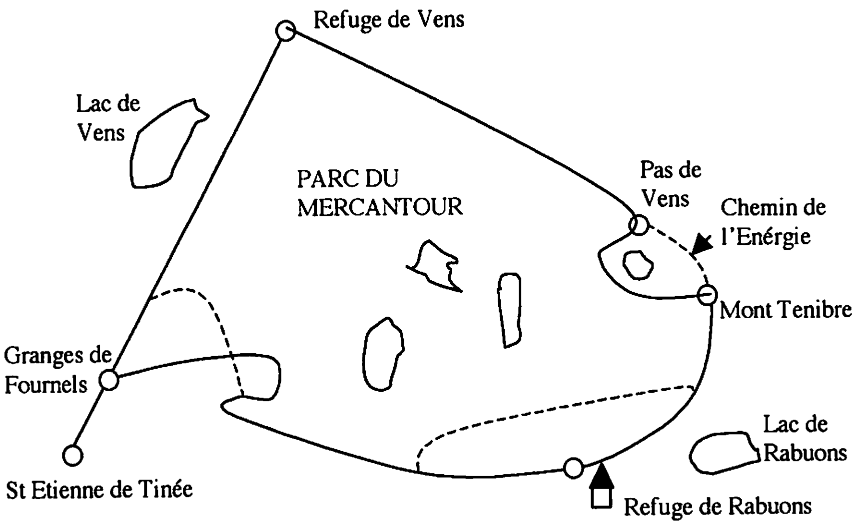
Est-ce possible ?

Faut il créer une liaison pour que l'itinéraire ait pour point de départ les Eymes et d'arrivée Le Sabot de Maron ?

Aider l'organisateur à flécher l'itinéraire de la course .



43 - LE TOUR DES LACS DU MERCANTOUR



Légende : ----------- chemin de l'énergie

1 - Y a-t-il un circuit partant de St Etienne de Tinée et faisant le tour des lacs du parc du Mercantour en empruntant tous les chemins mentionnés ci-dessus, chaque chemin étant parcouru une fois et une seule ?. Donner un circuit possible dont le départ a lieu à St Etienne de Tinée et l'arrivée aux Granges de Fournels.

2 - Les dénivelés étant :

St Etienne de Tinée-refuge de Vens : 1500 m en montée ; 300 m en descente.

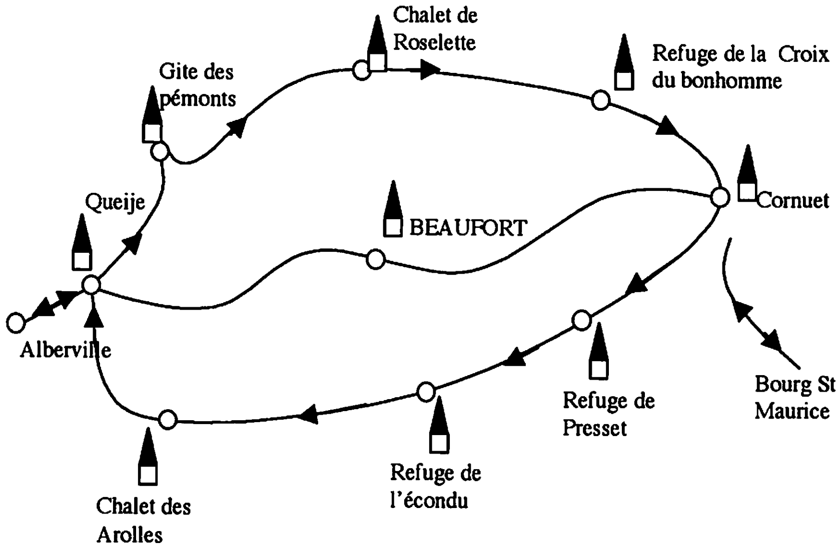
Refuge de Vens-refuge de Rabuons : 1100 m en montée ; 900 m en descente.

Refuge de Rabuons- refuge de Vens : 200 m en montée ; 1650 m en descente.

Sachant qu'on prévoit au maximum 7 h de marche par jour à raison de 300 m à l'heure de dénivelé ; En combien de jours peut-on faire ce tour du parc national du Mercantour ?

44 - LE TOUR DU BEAUFORTIN

Voici représenté le tour du Beaufortin avec les étapes possibles :



1 - Est-il possible de flécher les liaisons : Queije-Beaufort et Beaufort-Cornuet de façon à parcourir tout le circuit ci- dessus en empruntant une fois et une seule chaque étape ? Quelle(s) liaison (s) faut-il supprimer pour partir de Queije et y revenir sans faire 2 fois la même étape ?

2 - Le temps de chaque étape étant :

Queije- gite des pémonts : 6 h 30

Gite des Pémonts - chalet de Roselette : 6 h 30

Chalet de Roselette - refuge du bonhomme : 6 h

Refuge de Presset - Refuge de l'écondu : 5 h 30

Refuge de l'écondu - chalet des Arolles : 7 h

Chalet des Arolles - Queije : 8 h

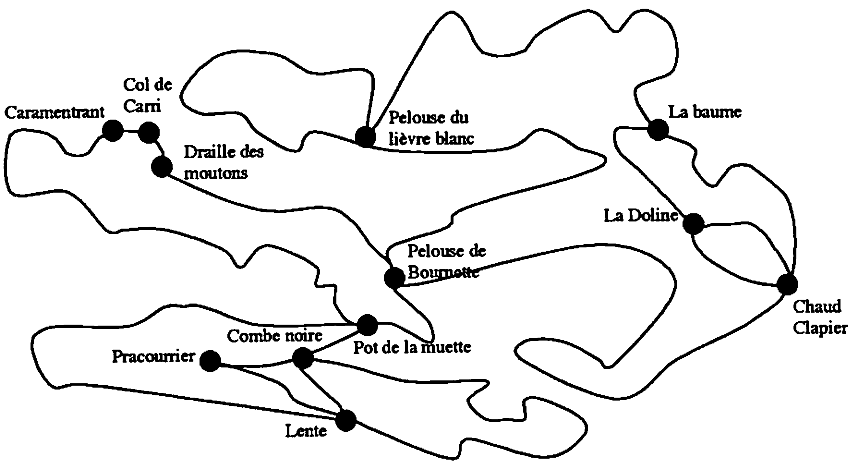
Sachant que pour des randonneurs confirmés : 8 h de marche par jour sont un maximum,combien de jours sont nécessaires pour faire ce tour du Beaufortin ?

45 - COURSE DE FOND DANS LE VERCORS SUD

Un champion de ski de fond voulant s'entraîner désire faire tous les parcours sans emprunter 2 fois une piste ou une partie de piste. Il envisage de partir de Chaud-clapier et y revenir. Peut il le faire ?

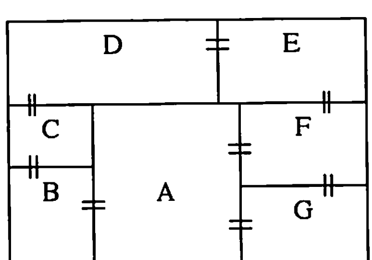
On décide de rajouter une liaison : La Doline - La Baume, le champion sera-t-il satisfait ?

Indiquer, en le fléchant, l'itinéraire que le champion empruntera en partant de Chaud-clapier et en y revenant.



46 - LE PROBLÈME DU DIRECTEUR DE SUPERMARCHÉ

Un directeur de supermarché veut réagencer son supermarché représenté ci-dessous : il y a 7 rayons A, B, C, D, E, F, G reliés comme indiqué.



Il désire pour optimiser les ventes que chaque client passe par tous les rayons et emprunte tous les passages : chacun étant emprunté une seule fois (pour éviter les encombrements !).

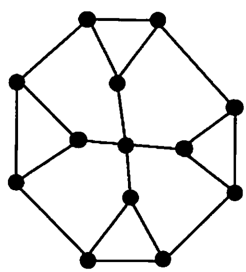
Le directeur n'exclut évidemment pas qu'un client repasse par un rayon ! Comment le directeur peut il flécher son supermarché ? Pouvez vous aider le directeur à trouver quel passage faut il éviter pour qu'il existe un parcours fermé (partant et arrivant au même endroit) et passant par tous les rayons.

47 - TOILE D'ARAIGNÉE

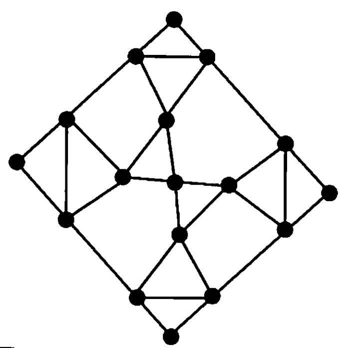
Voici plusieurs toiles d'araignée où chaque trait représente un fil.

La question est de savoir si l'araignée a tissé chaque toile d'un seul "trait" (sans couper le fil) ou s'y est-elle prise en plusieurs fois ?

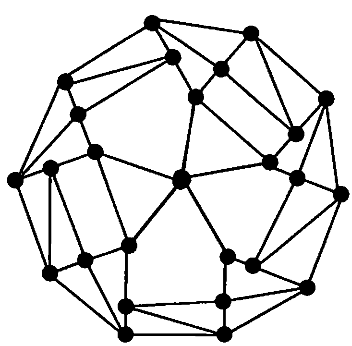
Toile n°1



Toile n°2

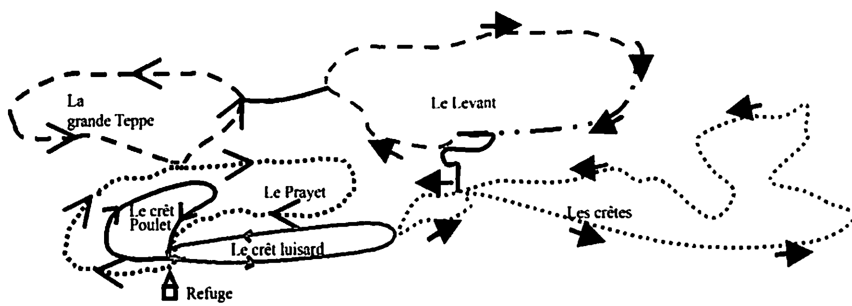


Toile n°3



Un des grands plaisirs d'un fondeur est de pouvoir faire le plus de pistes voire tout le parcours sans emprunter 2 fois un même itinéraire.

Voici un espace de ski Nordique fléché avec plusieurs pistes reliées entre elles.



Pistes		distance
— — —	Le levant	5 km
— — —	la grande Teppe	7 km
....	Le prayet	4 km
....	Les crêtes	7,5 km
———	Le crêt luisard	3,5 km
———	Le crêt du poulet	2,5 km

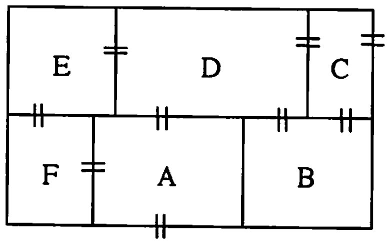
1 - Pouvez vous aider ce fondeur à trouver[1] un itinéraire passant par toutes les pistes (chaque piste étant parcourue une seule fois) et à revenir à son point de départ.

2 - Les liaisons La Grande Teppe – Le Levant ; et Le Levant – Les Crêtes ayant chacune une longueur de 0,8 kms, quelle est la longueur du parcours "grand plaisir" ?

1 Il sera peut être nécessaire de modifier le flêchage de piste ou de créer des liaisons.

49 - ENQUÊTE POLICIÈRE

Un cambrioleur s'est introduit dans une maison figurée ci-dessous avec ses 6 pièces reliées par des portes. Les pièces A et C ont une porte s'ouvrant sur l'extérieur



1 - Le cambrioleur a visité toutes les pièces en franchissant une seule fois toutes les portes. Est-il reparti comme il était arrivé par la porte d'entrée ? Quel itinéraire a-t-il emprunté ? Y a-t-il plusieurs possibilités ?.

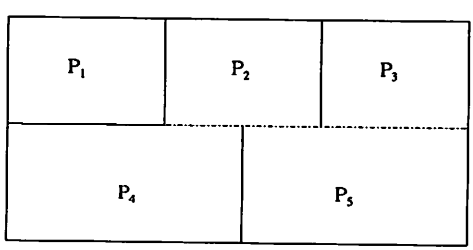
2 - En supposant que certaines portes étaient fermées et n'ont pas été forcées et que le cambrioleur a visité toutes les pièces (chacune l'étant une seule fois) sans franchir toutes les portes, à votre avis quelles portes étaient fermées et quel est alors l'itinéraire du cambrioleur ? y a-t-il plusieurs possibilités ?.

50 - TRAVERSÉE DE FRONTIÈRES

Cinq pays P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 sont représentés ci-dessous avec leurs frontières (en trait continu).

1 - Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en ne franchissant chaque frontière qu'une seule fois.

2 - Les relations diplomatiques entre P_3 et P_5 étant "gelées", on ferme la frontière entre P_3 et P_5 (on peut passer mais avec contrôle). Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière.



51 - LE PROBLÈME DE L'ARCHITECTE (N°1)

Un client demande à son architecte de dessiner une maison de 4 pièces qui communiquent toutes ensemble.

L'architecte dit à son client que ce n'est pas possible sauf si l'on rajoute une pièce supplémentaire ou un patio ou un couloir.

Qui a raison ?

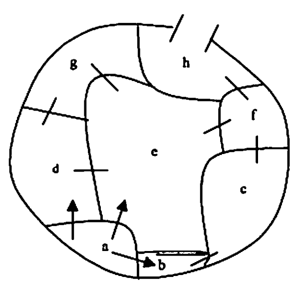
Même question avec 5 pièces.

Justifier les réponses.

52- PAUVRE PETIT LAPIN !

Dans un jeu électronique il s'agit de guider un jeune petit lapin à sortir du labyrinthe dessiné ci-dessous ; il se trouve dans la caverne a, la sortie (au grand jour) étant en h.

Vous l'avez compris ce labyrinthe est constitué de 8 cavernes a, b, c, d, e, f, g, h reliées entre-elles par des galeries dont certaines : ad, ae et ab ne sont praticables que dans le sens indiqué. Malheureusement dés qu'une galerie est franchie par le lapin (si petit soit-il !) elle s'écroule...



I - En s'aidant d'un graphe trouver :

1 - le chemin le plus court pour que le lapin se trouvant en a retrouve le jour (en h).

2 - s'il existe un chemin passant par toutes les galeries, chacune étant parcourue une seule fois.

II-

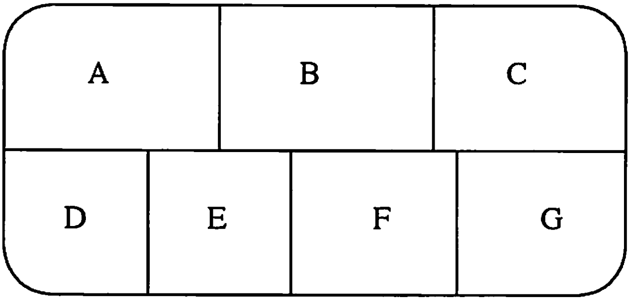
1 - Faire l'arbre pondéré des différents chemins possibles pour le lapin

2 - En déduire combien le lapin a de chances d'emprunter le chemin le plus court (demandé en I-1) pour revoir le jour.

3 - Combien le lapin a-t-il de chances de « s'en sortir ».

53 - JUMPING

Dans le parc représenté ci-dessous est organisé un concours de sauts d'obstacles à cheval. Les 11 obstacles ou palissades sont représentés par les segments de droite délimitant les aires A, B, C, D, E, F et G où le cheval (et son cavalier !) doit passer au moins une fois :



1 - Pouvez-vous deviner quel itinéraire empruntera chaque compétiteur sachant qu'il doit franchir le maximum d'obstacles (palissades), chaque obstacle étant franchi qu'une fois (pour faire le temps minimum !)

1-1 Combien d'obstacles sont alors franchis ?

1-2 Y-a-t'il un itinéraire dont le départ est D ?

2 - Mais certains obstacles ne peuvent se franchir l'un après l'autre ! Il s'agit de ceux reliant des aires qui se suivent dans l'ordre alphabétique (par exemple : on ne peut franchir l'obstacle reliant F à G dans le sens FG par contre il est possible de le franchir dans le sens GF)

2-1 Combien d'obstacles sont alors franchis ?

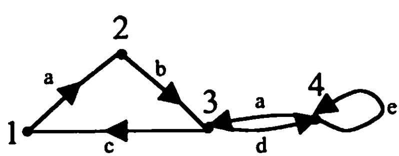
2-2 Y-a-t'il un itinéraire passant dans chaque aire (au moins une fois) ?

A SAVOIR !

Un graphe est étiqueté si chaque arête est munie d'une étiquette (lettre ou indication) ; si toutes les étiquettes sont des nombres positifs on parle de graphe pondéré. Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la constituent. Une plus courte chaîne entre 2 sommets est parmi les chaînes qui les relient celle qui a le poids minimum.

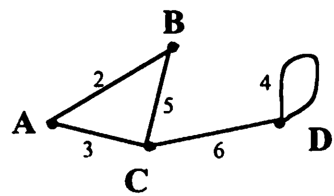
Exemple de feuille ci-jointe

Graphe orienté étiqueté :



La chaîne : 1 2 3 4 4 3
peut se lire a b d e a

Graphe pondéré :



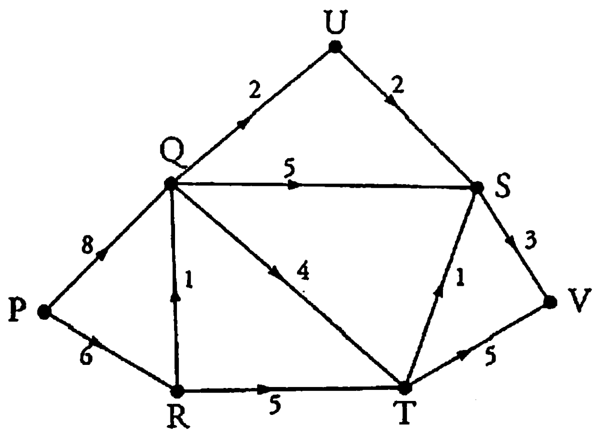
Le poids de la chaîne
A B C A est 5 + 3 + 2 = 10

**** Point méthode !**

Certains problèmes consistent à chercher entre 2 points le trajet qui a la distance (ou la durée ou le coût) minimum, cela revient à rechercher une plus courte chaîne (de poids minimum). Dans les cas complexes on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra (cet algorithme peut facilement être programmé sur ordinateur).

POINT 3

3.1 Dans le graphe pondéré ci-dessous, la plus courte chaîne pour aller de P à V :

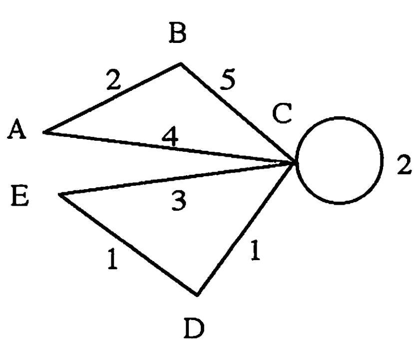


* a pour poids 16	V	F
* a pour poids 14	V	F
* contient la chaîne P-R-T	V	F

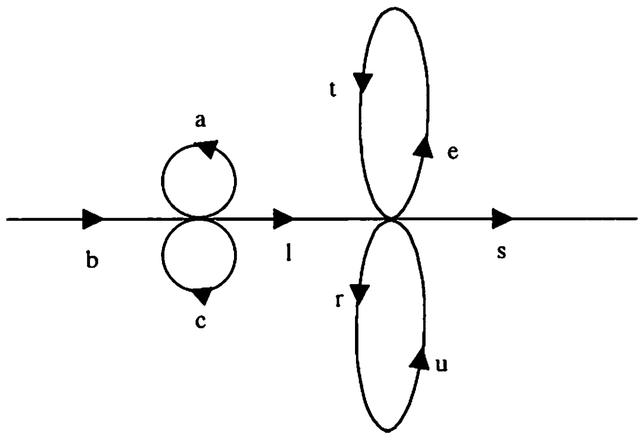
3.2

Soit le graphe G ci-contre :

1. Calculer la somme des degrés de chaque sommet et en déduire le nombre d'arêtes.
2. Ce graphe est-il connexe ? Existe-t-il une chaîne eulérienne ? Existe-t-il un cycle eulérien ?
3. Donner une plus courte chaîne (chaîne de poids minimum) entre A et E.



3.3 Le graphe étiqueté ci-dessous permet de reconnaître des mots (un mot est une suite finie de lettres, n'ayant pas forcément un sens).



* il reconnaît le mot "baccalets"	V	F
* il reconnaît tous les mots commençant par "bac"	V	F
* il reconnaît le mot "bleus"	V	F
* il reconnaît exactement six mots de cinq lettres	V	F

54 - LE PROBLÈME DU TRANSPORTEUR

On envoie des marchandises entre des grandes villes.

Le tableau suivant donne les coûts pratiqués par les transporteurs (en dizaines d'euros)

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		55	25	24				
B	55		25					
C	25	25		50				
D	24		50		16	10	10	40
E				16		27	5	10
F				10	27			25
G				10	5			
H				40	10			

Représenter ces différents coûts par un graphe.

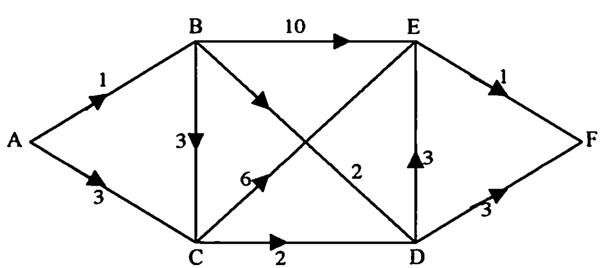
Déterminer la solution la plus économique pour aller de B à H.

55 - LE PROBLÈME DU COURSIER

Dans une ville un coursier travaillant pour une société de distribution doit se rendre de A à F.

Il ne peut emprunter que des rues à sens unique selon le plan ci-dessous.

Sur chaque trajet reliant 2 points est indiqué le kilométrage.



1 - Aidez le coursier à trouver l'itinéraire le plus court pour se rendre de A à F.

2 - Le coursier désirant faire une livraison à C, quel est alors le trajet le plus court pour se rendre de A à F ?

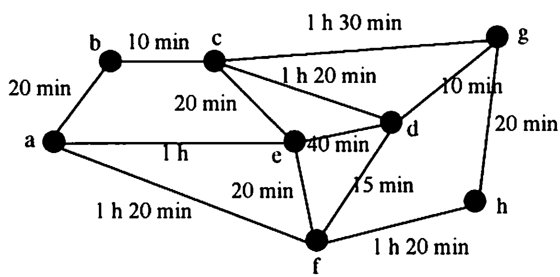
3 - Existe-t-il un trajet empruntant toutes les rues (une fois seulement) et dont le point de départ et d'arrivée est A ?

Quelles sont les rues dont le sens est à modifier pour que ce trajet existe ?

56 - LE PROBLÈME DU VRP

Un VRP effectuant sa tournée doit rendre visite à 8 clients : a b c d e f g h en commençant par a et en finissant par h.

La durée de chaque trajet est indiquée en heures et minutes sur le plan ci-dessous.



Pouvez vous aider ce VRP à trouver un itinéraire de a à h le plus rapide lui permettant de voir tous ses clients.

57 - LE PROBLÈME DU CHEF DE CHANTIER

La construction d'une maison passe par l'exécution d'un certain nombre de tâches numérotées et présentées dans le tableau ci-dessous :

N°	Tâche	Tâche antérieures	Durées en semaines
1	Acceptation des plans		2
2	Creusage des fondations	1	2
3	Commande des matériaux	1	1
4	Commande des portes et fenêtres	1	1

5	Livraison des matériaux	3	2
6	Coulage des fondations	2,5	2
7	Livraison des portes et fenêtres	4	5
8	Elaboration des murs	6	3
9	Pose charpente et toit[1]	8	2
10	Mise en place des portes et fenêtres[2]	7,8	2
11	Réception	9,10	

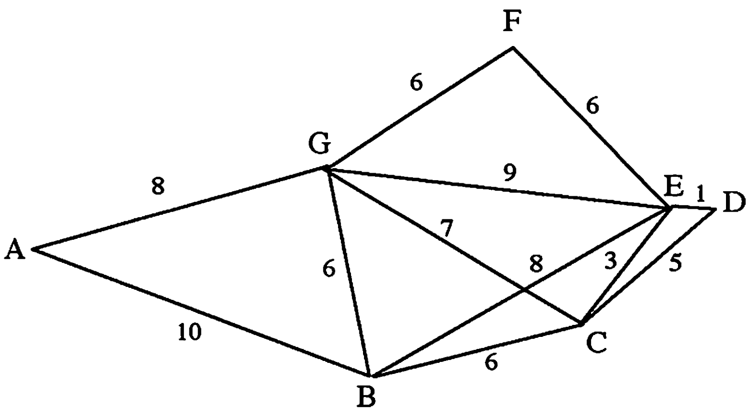
Le chef de chantier devant réaliser ce projet au plus vite, comment doit-il ordonner les tâches pour gagner du temps ?

Quelle est la durée minimum du projet ?

Certains travaux ne peuvent être réalisés en même temps (s'ils utilisent au moins un même appareil). Déterminer le temps minimum pour réaliser tous ces travaux.

1 "mise hors eau"
2 "mise hors air"

58 - L'AGENT DE SÉCURITÉ



Un agent de sécurité doit effectuer des surveillances dans une usine selon le plan ci-dessous où sont indiqués les temps de parcours (en minutes) entre les différents pôles.

1 - Est il possible de surveiller tous les pôles sauf F en empruntant une fois chacun des parcours reliant ces pôles ?

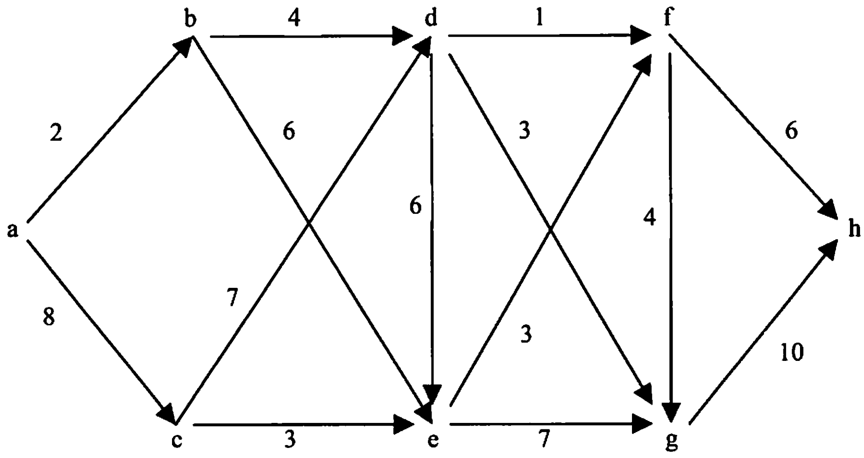
2 - L'agent de sécurité désirant commencer sa ronde par le pole A et terminer par D quel est pour lui le trajet le plus court ? Quels pôles peut il ainsi surveiller ?

3 - Reprendre les questions 1-et 2- en considérant en plus la surveillance du pôle F ?

59 - STRATÉGIE DE JEU

Dans un jeu un candidat note sur le graphe représentant les différentes phases a, b, c, d, e, f, g et h de ce jeu, ainsi que sur chaque arête reliant 2 phases le nombre de chances (de 1 à 10) de passer d'une phase à l'autre.

Voici ce graphe.



Quel "itinéraire" (suite de phases de jeu) permet au candidat de gagner (atteindre la phase terminale h) avec le plus de chances ?

Quel aurait été l'itinéraire où la probabilité de gagner est maximale ?

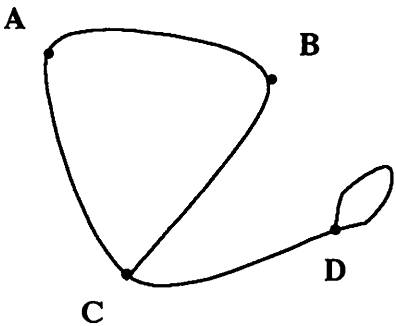
MATRICE D'UN GRAPHE

A SAVOIR !

Un graphe G ayant ses sommets numérotés de 1 à n ; la matrice de G est la matrice carrée d'ordre n où le terme de la ligne i et de la colonne j est le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

Exemple :

la matrice du graphe G non orienté :



$$\text{est} \quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Car par exemple pour la $1^{\text{ère}}$ ligne : 0 car il n'y a pas de boucle en A, 1 car il y a l'arête AB, 1 car il y a l'arête AC et enfin 0 car A et D ne sont pas adjacents.

A SAVOIR !

Le nombre de chaînes de longueur n reliant le sommet i au sommet j est le terme situé à la ligne i et à la colonne j dans la matrice M^n. (M étant la matrice associée au graphe).

Exemple :

M étant la matrice du graphe précédent

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a la matrice

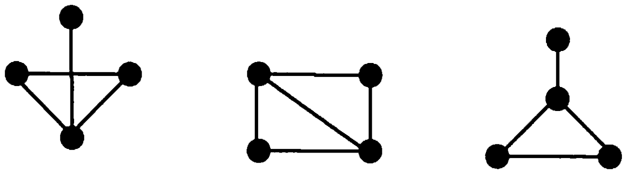
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A à D est 1 : il s'agit de la chaîne ACD.

Le nombre de chaînes de longueur 2 reliant C à lui-même est 3 : il s'agit de CAC ; CBC ; CDC.

POINT 4

I- On donne les graphes G1, G2 et G3 ci-dessous



G1 G2 G3

$$\text{et la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cocher la réponse V ou F pour les affirmations :

* A est associé à G1	V	F
* A est associé à G2	V	F
* A est associé à G3	V	F

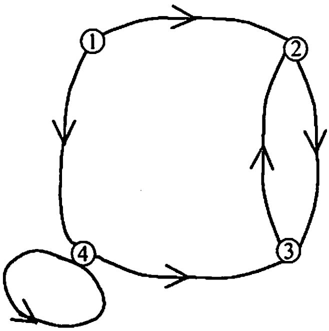
II -

1. Tracer le graphe associé à la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer la somme des degrés des sommets et en déduire le nombre d'arêtes.
3. Calculer le nombre chromatique du graphe.

III - Cocher vrai ou faux pour les graphes et les matrices associés.



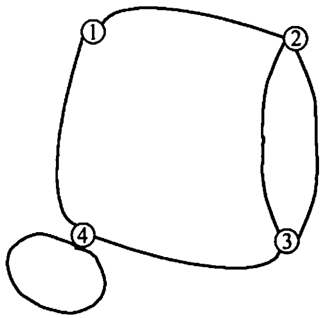
et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

V	F

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et



V	F

IV -

Soit la matrice M d'un graphe orienté G2 dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique.

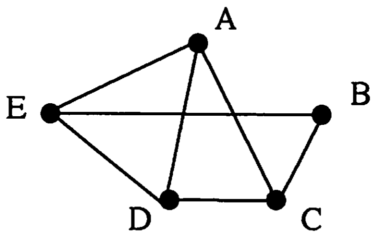
On donne $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Construire le graphe G_2.

2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à D et les citer.

V -

On donne le graphe G ci-contre :



1. Ecrire la matrice M associé à ce graphe.
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et C.
3. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A et C.
4. Retrouver ces résultats en calculant M^2 et M^3.

VI -

Le graphe associé au tableau :

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	0
d	0	0	0	1

a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V	F

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V	F

60 - QUE DOIT-ON RÉVISER EN PRIORITÉ ?

Lors d'un Baccalauréat le programme d'une matière comporte 7 chapitres dont certains doivent être pré acquis ce qui est indiqué ci dessous.

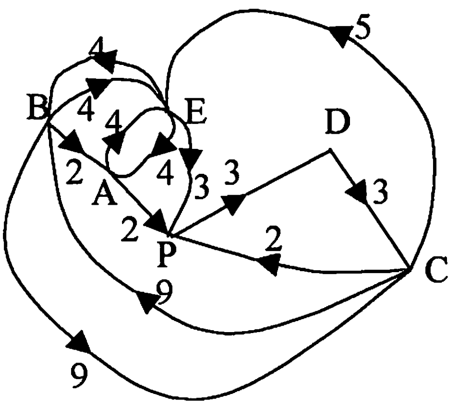
Chapitre	1	2	3	4	5	6	7
Chapitre(s) pré acquis		1	1,2	1	1,2		4,6

Représenter la situation à l'aide d'un graphe orienté.

Trouver la matrice associée à ce graphe et en déduire quel chapitre doit être révisé en priorité ?

61- LE PROBLÈME DU FACTEUR

Lors de sa tournée un facteur doit passer par 5 hameaux notés A, B, C, D, E. Le graphe ci-dessous indique la tournée entre la poste P et les hameaux avec les temps de parcours en minutes.



1- Trouver la matrice M associée au graphe (on choisira l'ordre P A B C D E).

2- Désirant trouver des parcours partant de la poste et y revenant après avoir fait la tournée complète des hameaux, on s'intéresse à la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & 5 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

En déduire combien existe-t-il de tels parcours ? les donner. D'après les temps de parcours lequel est le plus rapide ?

3- Ayant choisi le parcours le plus rapide ,le facteur a oublié avant de revenir à la poste de passer par B : il décide avant de revenir à la poste de passer par B,quel temps supplémentaire lui « coûte » son étourderie ?

62 - PISTES DE SKI DE FOND

Dans une station familiale un tracé de pistes de ski de fond relient des points relais A, B, C, D selon le tableau suivant :

Points relais	**Point suivants**
D	C
C	A
B	A, C
A	A, B, D

- Dessiner le graphe de ce tracé de pistes.

- Combien y a-t-il d'itinéraires de longueur 2 (composés de 2 pistes), combien d'itinéraires de longueur 2 partent de A ? Les citer.

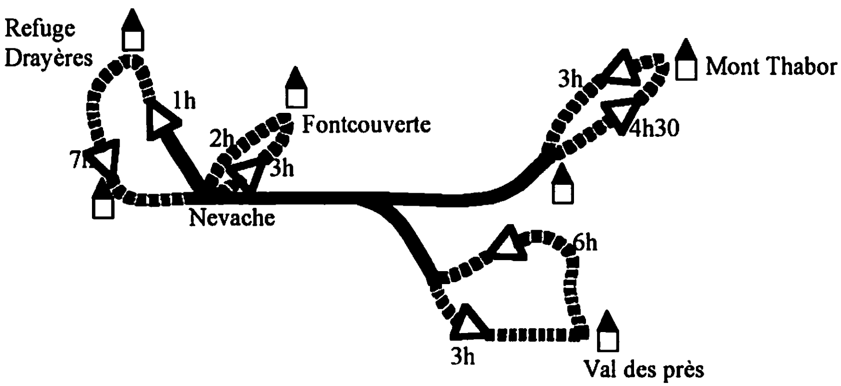
- Combien d'itinéraires parcourant 3 pistes successives partent de B ?

- Y a-t-il un itinéraire parcourant toutes les pistes une fois et une seule ?

- Y a-t-il un itinéraire parcourant toutes les pistes une fois seulement et dont le point de départ et point d'arrivée sont confondus ?

NB : les pistes AB et BA sont distinctes.

63 - RANDONNÉE EN BRIANÇONNAIS (1)



<u>**Légende**</u> : Route
Chemin piétonnier

Les temps indiqués correspondent aux itinéraires piétonniers : Nevache-Drayères (1 h) ; Drayères-Nevache (7 h) : Nevache-Fontcouverte (3 h) ; Fontcouverte-Nevache (2 h) ; Nevache-Mont Thabor (4 h 30) ; Mont Thabor-Nevache (3 h) ; Nevache-Val des près (3 h) et Val des près-Nevache (6 h).

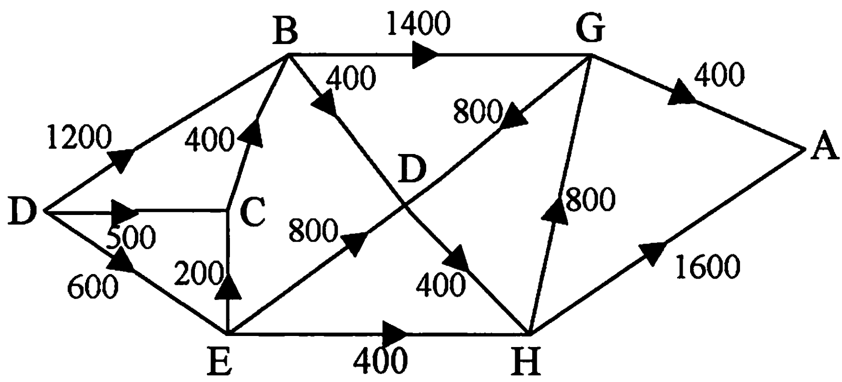
Un guide accompagnateur décide d'organiser des randonnées de plusieurs étapes (une étape étant la liaison de 2 points soit par chemin (Nevache-Fontcouverte) ou chemin et route (Nevache-val des prés).

1- Combien y a-t-il de randonnées de Nevache à Nevache : en 2 étapes, 3 étapes,4 étapes ?

2- Sachant que chaque jour il est prévu de 3 à 5 h de marche ; combien y a-t-il de randonnées de 2 jours partant de Nevache et y revenant ?, combien y en a-t-il de 3 jours ?

64 - A CHACUN SON TREK

Une agence de voyages propose à ses clients divers trecks dont le départ est D et l'arrivée est A. Les sommets ou cols : B, C, E, F, G, H ne se franchissent que dans le sens indiqué sur le plan ci-dessous.

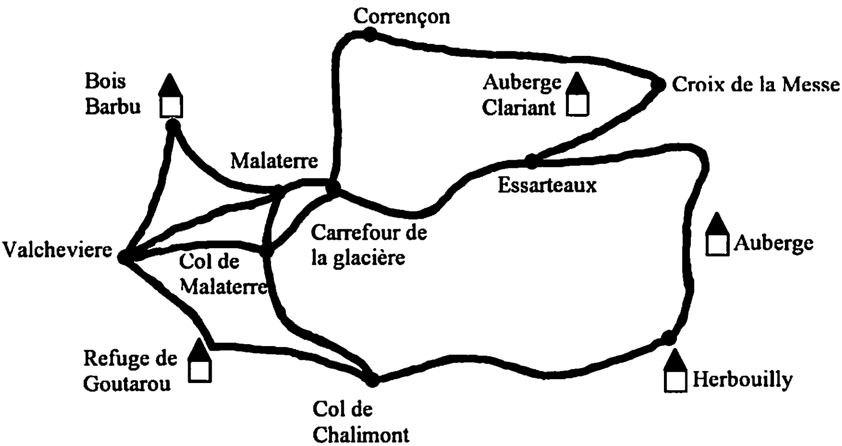


- Combien y a t'il de tecks reliant D à A en 4 étapes ? (une étape étant le chemin reliant un sommet, ou col, au suivant).

- On a indiqué sur le plan ci-dessus le dénivelé de chaque étape, indiquer le trek le plus court sachant qu'il faut (en moyenne) une heure pour parcourir 300 mètres de dénivelé.

65 - RANDONNÉE PÉDESTRE

Un groupe de "rando-nature" envisage plusieurs jours de randonnée pédestre dans le domaine de corrençon, dans le massif du Vercors :



- Est-il possible de faire tout le circuit ci-dessus ?

- Trouve un itinéraire partant de Corrençon et revenant à ce même point après être passé par tous les villages ou sites mentionnés, passe t'on ainsi par tous les trajets ?

- On envisage de faire chaque jour le trajet reliant 2 villages (ou sites) successifs (par exemple : 1er jour Corrençon - Croix de la Messe).

Combien y a-t-il d'itinéraires de 4 jours dont le point de départ est Corrençon ?

Combien y a-t-il d'itinéraires de 8 jours dont le point de départ est Corrençon ?

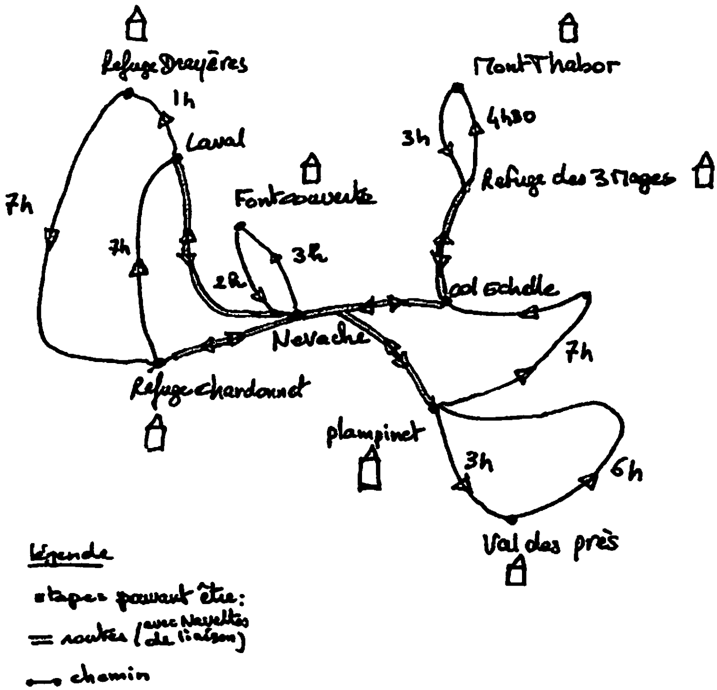
Combien y a-t-il d'itinéraires de 8 jours dont les points de départ et d'arrivée sont Corrençon ?

- Le responsable de la randonnée ayant retenu l'auberge Clariant puis le refuge d'Herbouilly pour le début de la randonnée, pouvez vous l'aider à faire un itinéraire de 8 jours reliant Corrençon à Corrençon ?

Combien y a t'il de tels itinéraires ?

Combien y a t'il d'itinéraires de 9 jours reliant Corrençon à Corrençon ?

66- RANDONNÉE EN BRIANÇONNAIS (2)



Les temps indiqués correspondent aux itinéraires pietonniers :

Laval-Refuge Drayères : 1 h ; Refuge Drayères-Chardonnet : 7 h ; Chardonnet-Laval : 7 h ; Nevache-Fontcouverte : 3 h ; Fontcouverte-Nevache : 2 h ; Plampinet-Val des près : 3 h ; Plampinet-Col Echelle : 7 h ; Val des près-Plampinet : 6 h ; Refuge des 3 Mages-Mont Thabor : 4 h 30 ; Mont Thabor-Refuge des 3 Mages : 3 h.

A Nevache un guide accompagnateur propose des randonnées pédestres de 2 à plusieurs jours avec 3 à 5 heures de marche par jour.

1- Combien y a-t-il d'itinéraires de 2 étapes (chemin ou route) partant de Nevache ? et parmi ceux-ci combien reviennent à Nevache ?, peuvent-ils se faire dans la journée ?

2- Combien y a-t-il d'itinéraires de 3 étapes partant de Nevache ?, calculer leur durée, combien y a-t-il alors de randonnées de 2 jours ?

3- Est-il possible d'organiser un circuit dont le départ et l'arrivée sont à Nevache et empruntant tous les chemins et routes (avec navettes de liaison) ?. Combien de jours sont nécessaires sachant que ce circuit est réservé aux chevronnés pouvant faire des étapes de 7 h de marche par jour ?

Coloriage d'un graphe, nombre chromatique

A savoir !

Colorier un graphe consiste à attribuer une couleur à chaque sommet de façon que 2 sommets adjacents soient de couleurs différentes.

Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorier

****Point méthode !**

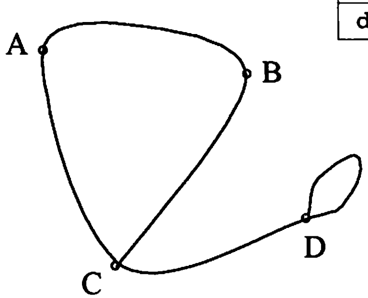
Des problèmes de classement, suite à des incompatibilités peuvent être résolus par coloriage d'un graphe. L'algorithme de coloriage consiste à :

Numéroter les sommets du graphe dans l'ordre des degrés décroissants (ou croissants).
Choisir une couleur et colorier le 1e sommet non colorié de la liste ordonnée ainsi que les sommets non coloriés non adjacents au dernier sommet colorié et non adjacents entre eux, continuer ainsi en utilisant une autre couleur tant qu'il reste des sommets non coloriés.

Exemple :

On peut colorier le graphe G

	A	B	C	D
degré	2	2	3	3



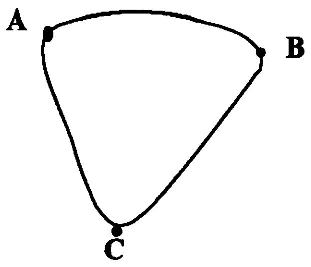
Dans l'ordre décroissant des degrés on a la liste : D C B A. Je colorie D en rouge ® et les sommets non adjacents à D et non adjacents entre eux : donc je colorie B ou A en rouge (mais pas les deux car ils sont adjacents) : je choisis B. C ne peut être colorié en rouge car il est adjacent à D je le colorie en vert. Tout en suivant l'ordre des degrés je colorie A en bleu car je ne peux le colorier en vert (il est adjacent à C).

A SAVOIR !

Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à d+1 (d étant le plus grand degré des sommets) et il est supérieur ou égal à l'ordre du plus grand sous graphe complet.

Exemple :

Le nombre chromatique est dans le coloriage de G inférieur ou égal à 3+1= 4 et il est supérieur ou égal à 3 car le plus grand sous graphe complet de G est



Il a fallu 3 couleurs, le nombre chromatique est donc 3.

POINT 5

I-

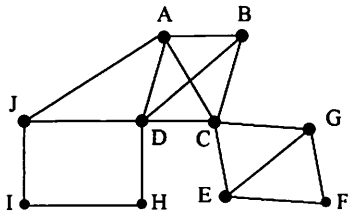
* Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à son ordre. | V | F |

* Tout graphe complet est connexe. | V | F |

* Tout graphe non complet est connexe. | V | F |

* Tout graphe non connexe est non complet. | V | F |

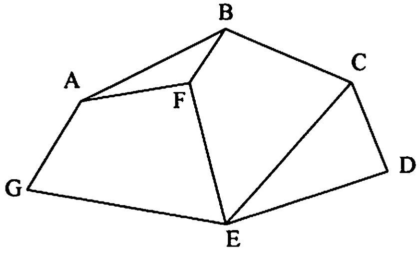
II-



1. Trouver un sous graphe complet d'ordre maximum.
2. Ce graphe G est-il connexe ?
3. Quel est le sommet qui a le degré le plus élevé ?
4. Donner un encadrement du nombre chromatique.
5. Trouver la valeur du nombre chromatique.

III-

Soit le graphe G ci-dessous constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G.



1. Quel est le degré de chacun de ses sommets ?

2. Reproduire et compléter le tableau des distances entre deux sommets de G :

Distance	A	B	C	D	E	F	G
A	X						
B	X	X					
C	X	X	X				
D	X	X	X	X			
E	X	X	X	X	X		
F	X	X	X	X	X	X	
G	X	X	X	X	X	X	X

En déduire le diamètre de ce graphe.

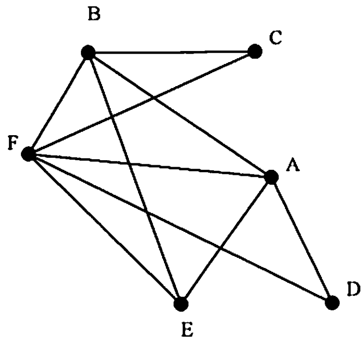
3.
a- Donner un sous graphe complet d'ordre 3 de G. Qu'en déduire pour le nombre chromatique de G ?
b- Proposer une coloration du graphe G et en déduire son nombre chromatique.

4. Donner la matrice M associée à G (vous numéroterez les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).

5. En utilisant la matrice M^2 donnée ci-dessous, déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

IV- On considère le graphe G ci-contre :



1. Justifier les affirmations suivantes :

a- Le graphe G admet au moins une chaîne eulérienne.

b- La chaîne DABCFBEFAE n'est pas une chaîne eulérienne de G.

2. Déterminer un sous graphe complet de G ayant le plus grand ordre possible. En déduire un minorant du nombre chromatique γ de ce graphe.

3. Déterminer un majorant de ce nombre chromatique (justifier).

4. En proposant une coloration du graphe G, déterminer son nombre chromatique γ.

67 - FÊTE DE LA MUSIQUE

A la fin de la fête de la musique, les musiciens A,B,C,D,E et F décident de faire un « bœuf » mais il y a quelques incompatibilités musicales ou de personnes.

Ces incomptabilités sont représentées sur le tableau ci-dessous

	A	B	C	D	E	F
A	X	X	X		X	X
B	X	X			X	X
C	X		X	X		
D			X	X		
E	X	X			X	X
F	X	X			X	X

Dans un « bœuf », un groupe est constitué d'au moins deux musiciens.

Combien peut-il y avoir de « bœufs » ?

Peut-il y avoir un trio ? (groupe constitué de trois musiciens)

68 - OUVERTURE LE DIMANCHE

Un directeur de supermarchés notés a, b, c, d, e décide d'en ouvrir certains le dimanche avec les conditions imposées dans le tableau ci-dessous,

	a	b	c	d	e
a		X	X	X	
b	X				
c	X			X	
d	X		X		X
e				X	

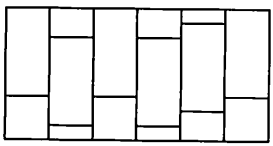
Une croix indique les supermarchés qui ne peuvent être ouverts en même temps ;

1 - Représenter cette situation par un graphe en représentant chaque supermarché par un point et en reliant par une arête 2 supermarchés ne pouvant être ouverts ensemble.

2 - Selon le vœu du directeur d'ouvrir le maximum de supermarchés le dimanche, combien sera-t-il possible d'en ouvrir ?

69 - LE CLIENT EXIGEANT

Monsieur X, heureux propriétaire d'une villa, désire que sa salle à manger prévue en carrelage Opus incertum comme l'indique la figure ci-dessous,

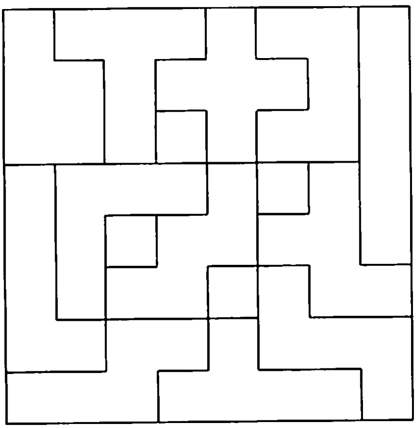


soit telle que deux carreaux de même teinte ne soient jamais voisins.

Sachant que monsieur X a choisi trois teintes différentes (dominante rouge, dominante marron, dominante chaudron), pouvez-vous aider le carreleur à trouver une solution.

70 - LE PEINTRE ÉCONOME

Voici la maquette réalisée par le peintre Gaston :

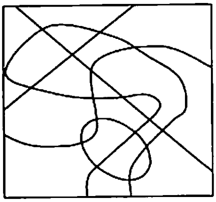


Gaston a un problème. Pour peindre sa maquette, il veut utiliser le moins de couleurs possible, mais pour donner du relief à son œuvre, il désire que deux régions ayant une frontière commune ne soient pas de même teinte.

Pouvez-vous l'aider ?

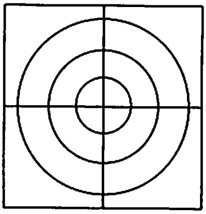
71 - LE ROUGE ET LE NOIR

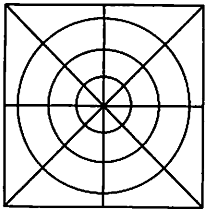
Est-il possible d'utiliser seulement le rouge et le noir de façon que deux régions ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur ?

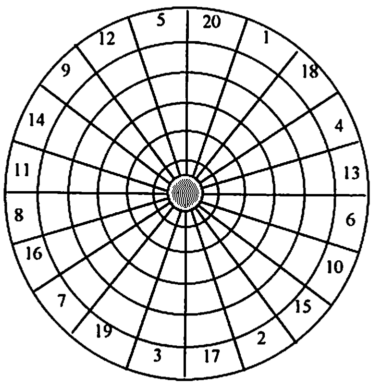


72 - LE THÉORÈME DES DEUX COULEURS

Peut-on colorier ces jeux de fléchettes en Blanc et Noir de telle façon que 2 régions voisines (ayant une frontière commune) n'aient pas la même couleur ?



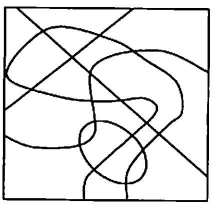




Si la zone centrale (grisée) était noire ou blanche, serait-ce encore possible ?

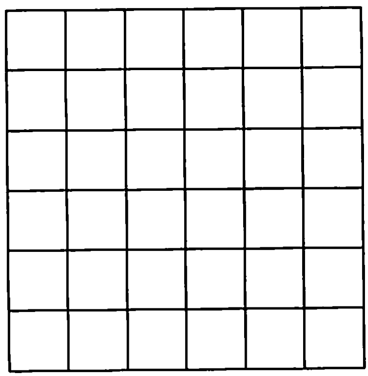
73 - AVEC TROIS COULEURS

Peut-on colorier chacune des régions du dessin ci-dessous à l'aide des couleurs vert, jaune et rouge, de façon que deux régions ayant une frontière commune ne soient ni de la même couleur, ni l'une verte et l'autre jaune.



74 - AVEC QUATRE COULEURS

Il s'agit de répartir 4 couleurs (par exemple vert, bleu, rouge et marron) dans certains des petits carrés, de façon que chaque ligne et chaque colonne du grand carré ne comporte qu'une fois et une seule chacune de ces quatre couleurs :



Vous avez trouvé ?

On peut alors compliquer le jeu : reprenez le problème précédent, avec la condition supplémentaire qu'en diagonale on ne doit pas trouver plusieurs fois la même couleur.

75 - LE PROBLÈME DE LA DOCUMENTALISTE

Dans une centre de documentation, la documentaliste a fait un classement thématique des livres en disposant sur ceux-ci des gommettes de couleurs : rouge, blanche, verte, jaune, noire.

Certains livres traitant de plusieurs thèmes ont 2 gommettes. Après classement il y a donc des livres ayant une gommette blanche ou une gommette verte ou deux gommettes : noire et rouge, noire et jaune, verte et jaune, rouge et verte, rouge et blanche.

La documentaliste veut maintenant ranger dans des casiers les livres de telle façon qu'il n'y ait dans un casier que des livres n'ayant aucune couleur en commun.

Combien de casiers seront nécessaires ? (les casiers sont très grands et peuvent contenir à eux tous l'ensemble des livres)

Indication : faire un graphe dont les sommets représentent les divers types de livres (selon leurs gommettes) et les arêtes indiquent les livres ayant une couleur commune.

Un tétraèdre régulier : pyramide constituée de triangles équilatéraux identiques, est tel que chaque face est divisée en 4 triangles équilatéraux identiques, comme le montre la figure ci-dessous.

Le développement de ce tétraèdre est le parallélogramme constitué de 16 petits triangles équilatéraux identiques.

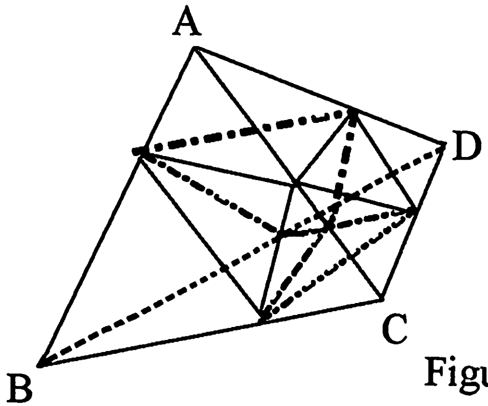


Figure 1

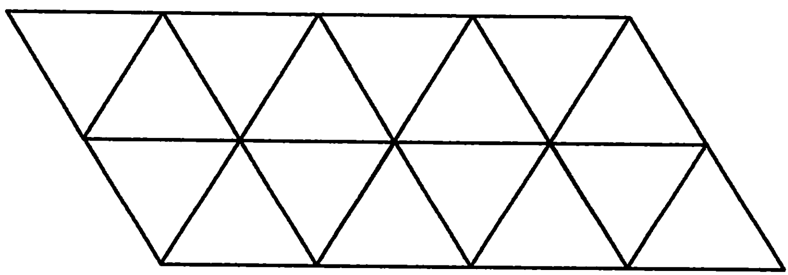


Figure 2

Monsieur Tricolore désire colorer toutes les faces de cette pyramide de telle façon que, chaque fois que deux petits triangles équilatéraux ont un côté commun, ils n'aient pas la même couleur.

Peut-il le faire avec 3 couleurs ? (on s'aidera de la figure 2, mais attention quand on reconstitue la pyramide.)

77 - COMBIEN DE COULEURS ?

Le polyèdre régulier ci-dessous est appelé, icosaèdre régulier, du nom « eikosi » qui signifie 20 en grec. Il est en effet constitué de 20 faces qui sont 20 triangles équilatéraux identiques (figure 1)

Le développement de cet icosaèdre est figuré ci-dessous (Figure 2).

Figure 1

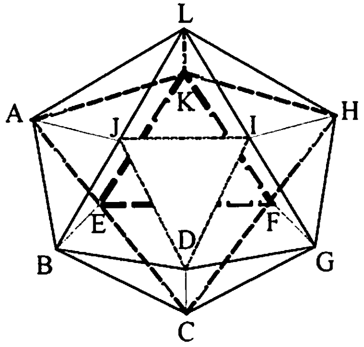
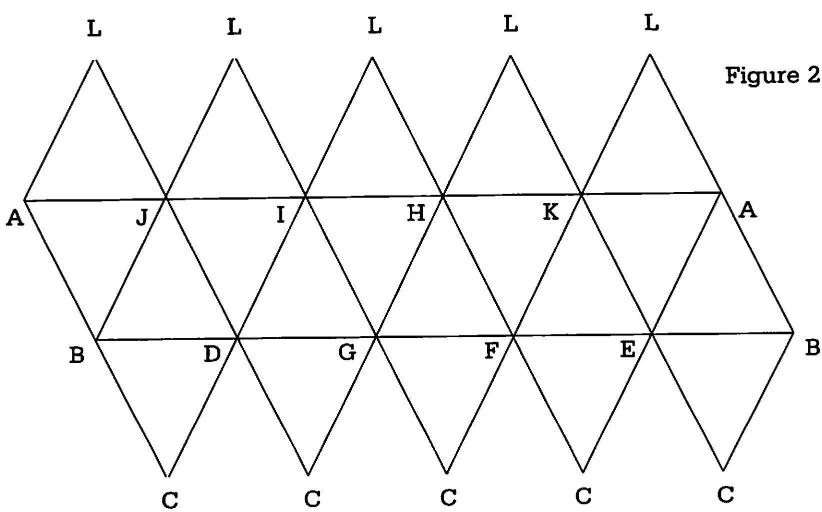


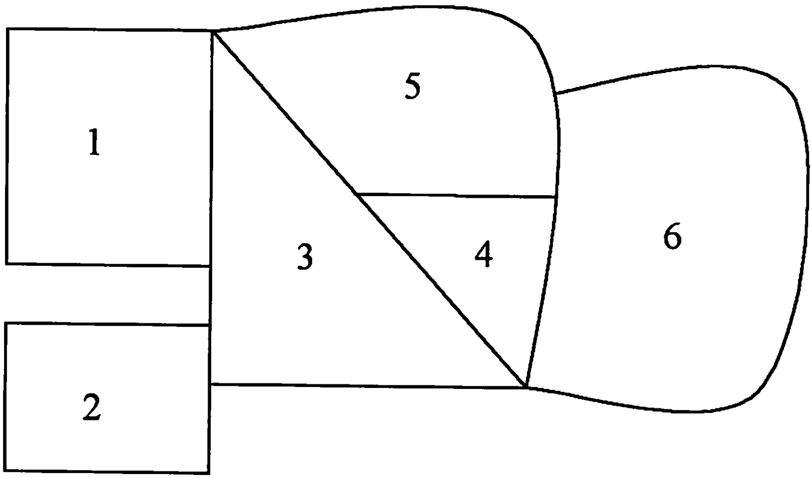
Figure 2



Comment colorier cet icosaèdre pour que tous les triangles ayant un côté commun ne soient pas de la même couleur ? (on s'aidera du développement ci-dessus, mais attention si l'on reconstitue l'icosaèdre, en mettant les 2 côtés AB en contact et en pliant toujours dans le même sens)

78 - LE PROBLÈME DU CARTOGRAPHE

Voici une carte géographique représentant 6 régions numérotées 1 à 6.



Le cartographe désire colorier cette carte de façon que 2 régions voisines* ne soient pas de la même couleur, combien lui faudra t'il de couleurs au minimum ?

---

* Deux régions n'ayant qu'un seul point commun ne sont pas considérées comme voisines.

79 - LE PROBLÈME DE LA SOCIÉTÉ DE TRANSPORT

6 produits chimiques doivent être transportés dans des camions mais certains de ces produits ne doivent sous aucun prétexte être mis en contact car ils sont réactifs ou détonants.

Le tableau ci-dessous indique les impossibilités :

Problème : Combien de camions minimum sont nécessaires au transport de ces produits ?

Montrez que ce problème peut être ramené au problème de coloration d'un graphe.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1		r		r		
P2	r		r		r	
P3		r		r		
P4	r		r			
P5		r				r
P6					r	

80 - JEUX SANS FRONTIÈRES

Deux villes « s'affrontent » par une série de 3 épreuves. Pour chaque épreuve chaque ville doit choisir parmi les personnes volontaires celles qui sont les plus performantes et qui s'entendent le mieux !

Le tableau ci-dessous donne les « incompatibilités» parmi les7 participants les plus performants. Chaque participant ne pouvant concourir qu'à une seule épreuve, sera-t-il possible de former 3 équipes de 2 ?

	A	B	C	D	E	F	G
A		X					X
B	X						X
C				X	X	X	X
D			X		X	X	X
E			X	X			X
F			X	X			X
G	X	X	X	X	X	X	

Par exemple : G « Gaston » ne s'entend bien avec personne : il est très individualiste !

A « Aline » ne s'entend pas bien avec B « Bernard » ni avec G « Gaston »

81 - LE PROBLÈME DES JARDINIERS

Dans une société d'entretien d'espaces verts des jardiniers ont à réaliser 6 travaux d'entretien chez divers clients.

Les outils nécessitants d'être utilisés pour ces travaux sont aux nombres de 5 :

Une débroussailleuse (D), une élagueuse (E), une tondeuse (T), uns scie égoïne (S) et un aspirateur (A).

Chaque travail utilise certaines machines, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

TRAVAIL	Machines utilisées
1	D, A
2	D, T, S
3	T, S
4	A, S
5	E, T
6	E, S

Certains travaux ne peuvent être réalisés en même temps (s'ils utilisent au moins une même machine).

① Représenter ces contraintes par un graphe.

② On admet que le temps nécessaire pour chaque travail est de 2 heures. Déterminer le temps minimal nécessaire pour réaliser ces 6 travaux.

82 - LE MONÔME

A la fin d'un bizutage d'une grande école le kolo (responsable) doit organiser le monôme : défilé des anciens et des nouveaux (« bizuts »).

Les « bizuts » constituent un groupe et les anciens 3 groupes : les « 3 /2 » ; les « 5/2 »et les « 7/2 ».

Mais il y a des règles absolues ! il faut dans le défilé alterner les groupes par sexe sans faire défiler « males et femelles » d'un même groupe les uns derrière les autres !

1- Représenter par un graphe cette situation en reliant les groupes (parmi les 8 groupes « males et femelles ») qui ne peuvent défiler les uns derrière les autres.

2- Proposer une solution pour aider le kolo à organiser le monôme.

3- Il se trouve qu'au dernier moment la seule fille « 7/2 » est malade, comment réorganiser le défilé.

4- Y a-t-il un défilé avec en tête une femme bizut.

83 - LE PROBLÈME DE L'ORGANISATION DE VOYAGES

6 personnes notées de ① à ⑥ doivent loger dans le même hôtel lors d'un voyage. Certains ne désirent pas partager la même chambre, aussi l'organisatrice a t'elle établi le tableau d'incomptabilité ci-dessous : les croix indiquent des personnes ne souhaitant pas partager la même chambre.

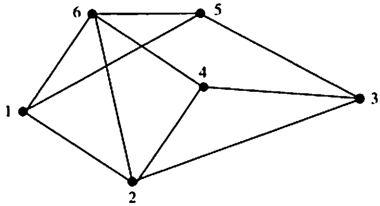
Combien de chambres l'organisatrice doit-elle réserver au minimum ?

Donner une solution de répartition possible.

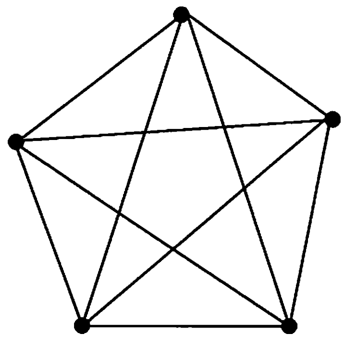
	①	②	③	④	⑤	⑥
①		x	x		x	
②	x		x	x	x	x
③	x	x			x	x
④		x				x
⑤	x	x	x			x
⑥		x	x	x	x	

84 - MATHÉMATIQUE ET GÉOGRAPHIE

Dessiner une carte géographique correspondant au graphe où les points représentent des régions et les arêtes indiquent les régions voisines.



Existe-t-il une carte correspondant au graphe ci-dessous ?



85 - LA COUPE MICKEY

Pour la coupe Mickey, 7 épreuves de ski sont organisées : géant, super géant, descente, slalom spécial, slalom parallèle, half-pipe, hot dog (ou bosses).

Ces épreuves ne peuvent se dérouler en même temps car certains coureurs participent à plusieurs épreuves.

Le tableau suivant illustre les incompatibilités de participations aux différentes épreuves (notées de 1 à 7).

Si un coureur passe au maximum deux épreuves par jour, quelle est la durée minimale de la coupe ? proposer une organisation.

	1	2	3	4	5	6	7
1				x	x	x	x
2			x	x			x
3		x		x		x	
4	x	x	x		x		
5	x			x			x
6	x		x				
7	x	x			x		

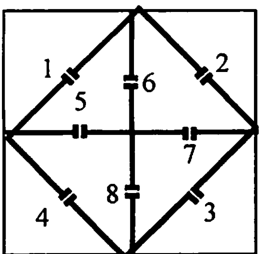
86 - PROBLÈME DE SURVEILLANCE AU MUSÉE

Un musée a 2 niveaux représentés ci-dessous :

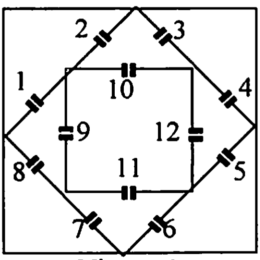
Le niveau 0 comporte 8 salles reliées par les couloirs 1 à 8.

Le niveau 1 comporte 9 salles reliées par les couloirs 1 à 12.

On désire à moindre coût poster des gardiens dans certains couloirs de façon à surveiller l'ensemble des salles de chaque niveau, étant bien entendu qu'un gardien ne peut surveiller que les 2 salles reliées par le couloir où il est posté. Comment faire ?



Niveau 0



Niveau 1

87 - LE PROBLÈME DU GARAGISTE

Dans un garage atelier peinture, 7 travaux sont à réaliser par des employés.

On utilise une machine démonte pneu (DP), un gonfleur (G), un karcher (K), un chargeur batterie (C) une perceuse (P), une lustreuse (L), un pistolet à peindre (PP).

On donne le programme des travaux.

Travail	Machines utilisées	Temps
1	(DP) (G)	30 minutes
2	(K) (P) (PP) (L)	2 heures
3	(K) (G)	15 minutes
4	(PP) (L)	1 heure 30
5	(G) (L)	30 minutes

Certains travaux ne peuvent être réalisés en même temps (s'ils utilisent au moins un même appareil). Déterminer le temps minimum pour réaliser tous ces travaux.

88 - LA MESURE DU TEMPS

Un collectionneur possède onze calendriers, certains très anciens, d'autres plus récents : calendriers Aztèque, Chinois, Egyptien, Gaulois, Grégorien, Juif, Julien, Maya, Musulman, Perpétuel, Républicain.

Certains de ces calendriers ne sont pas fondés sur le même principe et ne peuvent pas être classés ensemble.

Le tableau suivant illustre les incompatibilités (on a désigné les calendriers par leur initiale ou les premières lettres).

Pouvez vous aider le collectionneur à classer ses calendriers ?

	A	**C**	**E**	**G**	**Gr**	**J**	**Jul**	**Ma**	**M**	**P**	**R**
A		x	x	x	x	x	x		x	x	x
C	x		x		x		x	x	x	x	x
E	x	x		x		x		x	x		
G	x		x		x		x	x	x	x	x
Gr	x	x		x		x		x	x		
J	x		x		x		x	x	x	x	x
Jul	x	x		x		x		x	x		
Ma		x	x	x	x	x	x		x	x	x
M	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x
P	x	x		x		x		x	x		
R	x	x		x		x		x	x		

89 - LE PROBLÈME DU CHEF D'ÉTABLISSEMENT

Un chef d'établissement organise un examen dans lequel en plus des épreuves obligatoires il y a des options : Musique, sport, TPE (travaux personnels encadrés), langue 3, internet.

Les choix des candidats sont langue 3 (noté L3), TPE, sport

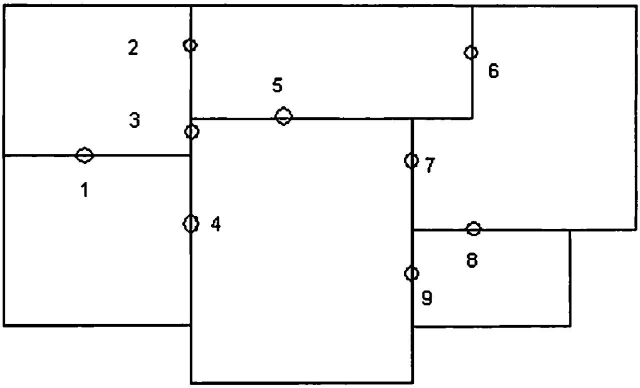
ou Internet, sport ou TPE, sport ou musique, L3.

Chaque épreuve durant 3 heures, quel est le temps nécessaire pour l'examen des matières optionnelles ?

90 - LE PROBLÈME DE L'ARCHITECTE (N° 2)

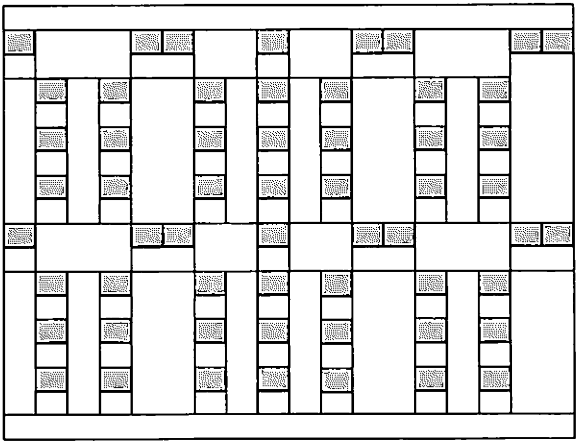
Lors de la construction d'un appartement de 6 pièces, on aborde la pose de ventilations. Pour cela 9 bouches (numérotées de 1 à 9) sont possibles.

Chaque bouche ventilant 2 salles contiguës, combien de bouches sont nécessaires pour ventiler tout l'appartement ?



91 - LE PROBLÈME DU PEINTRE EN BÂTIMENT

Voici le plan de la façade d'un immeuble qu'un ouvrier doit rénover, avec la consigne de ne pas peindre de la même couleur deux parties se trouvant côte à côte (les carrés gris représentent les fenêtres).



Il peut couvrir :

- une surface d'environ 70 m² en marron ;
- une surface d'environ 60 m² en blanc ;
- une surface de 200 m² en jaune.

Sachant que les fenêtres ont une surface de 1 m², et en vous aidant du plan ci-dessus, pouvez-vous aider l'ouvrier à faire sa répartition de couleurs sans faire de mélange et en suivant la consigne de son patron ?

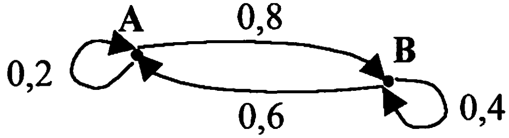
GRAPHES PROBABILISTES

A SAVOIR !

Un graphe probabiliste est un graphe orienté, pondéré tel que la somme des poids des arêtes partant de chaque sommet est égale à 1. Les sommets sont les différents états d'un système évolutif.

Le poids d'une arête est la probabilité d'évolution d'un état à un autre.

Exemple :



$0,2 + 0,8 = 1$ et $0,4 + 0,6 = 1$

On a bien un graphe probabiliste d'ordre 2.

A SAVOIR !

La matrice (dite de transition) d'un graphe probabiliste d'ordre n (dont les sommets sont numérotés de 1 à n) est la matrice carrée d'ordre n où le terme de la ligne i et de la colonne j est le poids de l'arête reliant le sommet i au sommet j si cette arête existe ; 0 sinon.

Exemple :

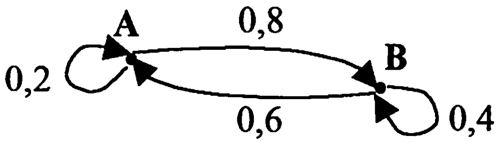
La matrice de transition du graphe ci-dessus est

$$T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

T étant la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n ; P_n étant la matrice ligne représentant l'état à l'étape n ; P_{n+1} la matrice ligne représentant l'état à l'étape n+1 ; alors $P_{n+1} = P_n \times T$ et si P_0 représente l'état initial alors $P_n = P_0 \times T^n$.

Exemple :

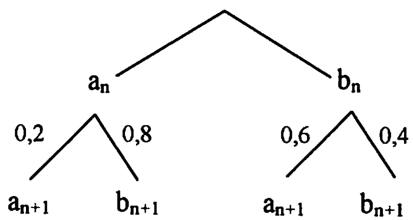
Le graphe probabiliste d'ordre 2 :



Peut être interprété ainsi : A et B sont 2 sociétés ayant des parts de marché ; d'une année sur l'autre : A garde 20 % de ses parts et prend 60 % des parts de B alors que B garde 40 % de ses parts et prend 80 % des parts de A. Il est intéressant de savoir ce qu'il va advenir à long terme des sociétés A et B ? On va le savoir (grâce aux graphes !)

On note $P_n = (a_n\ b_n)$ l'état probabiliste (les parts de marché de A et B l'année n. on a évidemment $a_n + b_n = 1$). On a l'année (n +1) l'état $P_{n+1} = (a_{n+1}\ b_{n+1})$.

En faisant l'arbre de probabilités suivant :



On a $a_{n+1} = 0{,}2\ a_n + 0{,}6\ b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}8\ a_n + 0{,}4\ b_n$ et donc en écriture matricielle

$(a_{n+1}\ b_{n+1}) = (a_n\ b_n) \times T$ soit $P_{n+1} = P_n \times T$

On démontre (par récurrence) que $P_n = P_o \times T^n$.

On peut ainsi trouver (connaissant au départ les parts a_o et b_o de A et B) les parts de marché des sociétés A et B chaque année et étudier l'évolution. On calculera T^n avec la calculatrice.

**** Point méthode !**

Un graphe probabiliste peut être utilisé pour suivre l'évolution d'un système pouvant changer d'état (2 ou 3 le plus souvent) de façon aléatoire. L'état du système à l'étape n est défini par une matrice ligne : $P_n = (a_n\ b_n)$ ou $(a_n\ b_n\ c_n)$ le plus souvent ;

A SAVOIR !

Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0 ; lorsque n est très grand l'état P_n tend vers l'état P (indépendant de P_o) , P étant défini par P x T = P et est appelé état stable.

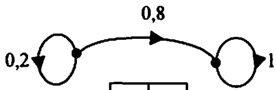
Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, on va chercher l'état stable P tel que P x T = P. on a (a b) x T = (a b) soit (0,2 a +0,6b 0,8 a+0,4b) = (a b) d'où a = 0,2a + 0,6b et b = 0,8 a + 0,4 b, on a deux équations équivalentes à 0,8 a = 0,6b mais b = 1-a d'où 0,8 a = 0,6 (1-a) soit 1,4a = 0,6 et a = 3/7 ; b = 1-3/7 = 4/7.

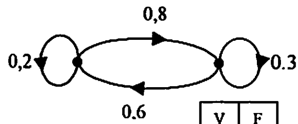
A long terme : 3/7 des parts vont chez A et donc 4/7 des parts vont chez B

POINT 6

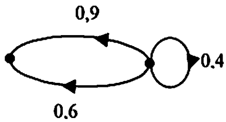
1- Les graphes suivants sont des graphes probabilistes.



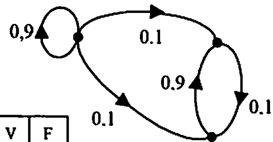
V F



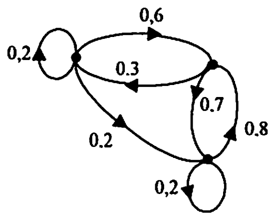
V F



V F



V F



V F

2- Les matrices suivantes sont des matrices de transition

$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 \\ 0,8 & 0,3 \end{pmatrix}$ V F

$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$ V F

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ V F

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ V F

$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ V F

$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ V F

92 - SOLEIL DU MIDI

Si un jour il fait mauvais (vent ou pluie), il y a 2 chances sur 3 qu'il fasse beau le lendemain.

Si il fait beau il y a une chance sur 5 qu'il fasse mauvais le lendemain !

En définitive quel est le temps le plus fréquent ?

Commencer par illustrer l'énoncé à partir d'un graphe.

Justifier ensuite la réponse en calculant les probabilités exactes.

93- LE PROBLÈME DU BUTEUR

Dans un match de rugby la réussite du buteur pour un drop,une pénalité ou une transformation d'essai est souvent liée à la réussite ou non des coups de pied précédents.

On admet que :

S'il a raté un coup de pied le buteur a 4 chances sur 10 de réussir le coup de pied suivant.

S'il a transformé un coup de pied ,le buteur a 7 chances sur 10 de transformer le coup de pied suivant.

1 - Représente la situation avec un graphe probabiliste et donner la matrice de transition de ce graphe.

2 - Le buteur a raté la première transformation,quelle est la probabilité qu'il réussisse le troisième coup de pied ?

94 - QUE CHOISIR ?

Deux entreprises X et Y sont concurrentielles : l'une X par son cadre de vie et ses horaires, l'autre Y par le niveau élevé de ses salaires.

1 - On constate que chaque année 5 % des employés de Y démissionnent pour aller travailler chez X et 20 % des employés de X s'en vont pour aller travailler chez Y. Sachant qu'il y avait 250 employés dans l'entreprise X et 600 dans l'entreprise Y, calculer le nombre d'employés chez X et Y au bout de 1, 5 et 8 ans ?

2 - Reprendre la question 1 avec non plus 5 % et 20 % mais 25 % et 75 %.

95 - RIEN N'EST GAGNÉ D'AVANCE

Dans une classe de Terminale, on a constaté que si un élève a eu la moyenne à un devoir, il a tendance à se "relâcher" et par conséquent il a 30 % de chances de ne pas avoir la moyenne au devoir suivant. Par contre si l'élève n'a pas eu la moyenne à ce devoir il va "réagir" et aura 60 % de chances d'avoir la moyenne au devoir suivant.

Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

Au devoir n° 1 : 10 élèves sur 35 ont eu la moyenne, calculer combien d'élèves auront la moyenne au devoir n° 2 ? Quels résultats peut on envisager au devoir n° 6 ? Quelle évolution constate t'on ?

Reprendre la question n° 2 en supposant qu'au devoir n° 1 : 60 % des élèves auraient eu la moyenne. L'évolution des résultats quand le nombre n de devoirs augmente se trouve t'elle modifiée ? Dépend-elle des résultats du devoir n° 1 pour n de plus en plus grand ?

96 - DANS UNE ENTREPRISE

Une Entreprise propose pour l'achat d'un appareil électroménager une extension de garantie. Une enquête a révélé que parmi les appareils qui tombent en panne 70 % tombent en panne la première année. De plus si un appareil ne tombe pas en panne une année il a 50 % de « chances » de tomber en panne l'année suivante et parmi les appareils qui tombent en panne une année il y en a 40 % qui tombent en panne l'année suivante.

1 - On a acheté un appareil, est-il vrai qu'il y a moins d'une chance sur deux qu'il tombe en panne la deuxième année ? est ce confirmé la troisième année ?

2 - On a acheté un frigo qui a peu de chances de tomber en panne la première année (10 % de chances), en effet l'enquête a prouvé qu'un lave linge a plus de chances de tomber en panne qu'un frigo ou une cuisinière.

A-t-on intérêt a prendre l'extension de garantie de 1 à 3 ans qui coûte 80 euros sachant qu'une réparation coûte en moyenne 150 euros.

Qu'en serait-il si l'appareil n'était pas garanti la première année ?

3 - Un client achète un lave-linge et prend l'extension de garantie qu'on lui recommande vivement d'après les conclusions de l'enquête (la probabilité qu'il tombe en panne la première année étant 0,7)

Calculer les probabilités que le lave-linge tombe en panne la deuxième année? ,la troisième année ?

Compte tenu des probabilités trouvées avait t'on intérêt à prendre l'extension de garantie de 80 euros ?

97 - LE PROBLÈME D'OENOLOGIE

Un guide des vins note chaque année la qualité des vins d'une région de France de une étoile ("petite année") à 5 étoiles ("année exceptionnelle").

Les vins notés au dessus de 3 étoiles (qualifiés de bons) ont cinq pour cent de chances d'être notés en dessous de 3 étoiles (vins qualifiés de médiocres) l'année suivante. Par contre les vins notés en dessous de 3 étoiles ont vingt pour cent de chances d'être notés au dessus de 3 étoiles l'année suivante.

L'année 1991 ayant été une année médiocre : il y avait eu sur 30 vins, 3 vins seulement notés au dessus de 3 étoiles.

Quelle a été l'évolution pour les années suivantes ?

98 - LE PROBLÈME DU PDG

Le PDG d'une entreprise envisage d'investir dans sa toute nouvelle filiale en réinjectant chaque année 20 % des bénéfices de l'entreprise dans la filiale.

Sachant que cette filiale dès qu'elle aura fait des bénéfices transférera 5 % de ces bénéfices à l'entreprise mère. Que donne cet investissement à court terme (1, 2 ans) et à long terme (10 ans et plus) ?

Dépend-il de l'état initial p_0 des bénéfices ? (on prendra $P_0 = (1\ 0)$ puis $P_0 = (0{,}8\ \ 0{,}2)$)

99 - LE PROBLÈME DU MAÎTRE DE CHAI

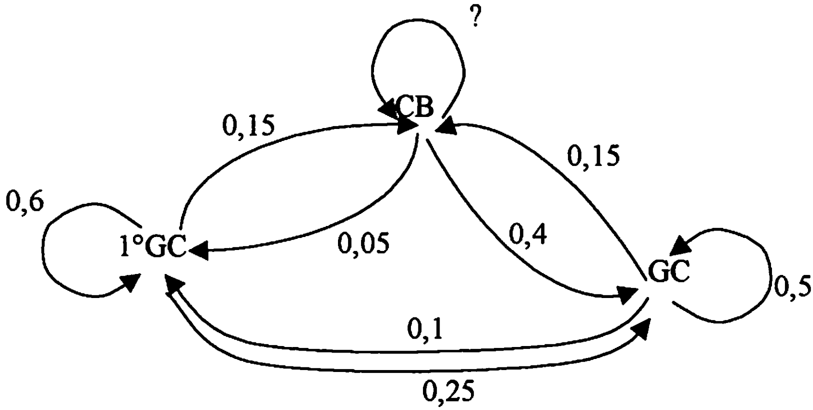
Dans une région viticole bien connue l'appellation (non moins connue) :

garde d'une année sur l'autre son appellation de : 1^er^ grand cru 3 fois sur 5.

Perd son appellation de 1^er^ grand cru pour devenir grand cru 1 fois sur 4.

Perd son appellation de 1^er^ grand cru pour devenir cru bourgeois dans 15 % des cas.

On peut représenter la situation d'une année sur l'autre par le dessin ou graphe ci-dessous.



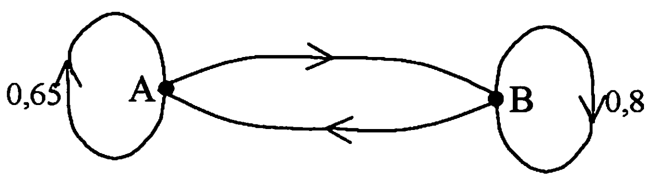
Que signifient concrètement les nombres rajoutés sur ce graphe concernant l'évolution (d'une année sur l'autre) des appellations Grand Cru (GC) et Cru Bourgeois (CB).

Quelle est l'évolution des appellations au bout de 5 ans ? au bout de 15 ans ? à long terme ?, sachant que l'état initial est (0,05 0,15 0,8), soit 5 % de 1^{er} grand cru, 15 % de grand cru, 80 % de cru bourgeois.

100 - LE PROBLÈME DE L'ENTRAÎNEUR

A un entraînement de ski, un compétiteur a 65 % de chances de faire le temps de base (temps de qualification), s'il a déjà réalisé ce temps de base a l'entraînement précédent. Par contre, s'il n'a pas réalisé le temps à un entraînement, il aura 20 % de chances de le réaliser à l'entraînement suivant.

1 - Compléter le graphe suivant où A est l'événement : « le compétiteur a réalisé le temps de base », B est l'événement : « le compétiteur n'a pas réalisé le temps de base ».



Ecrire la matrice T de ce graphe.

2 - On désigne par $P_n = (p_n\ q_n)$ la situation probabiliste au $n^{ième}$ entraînement du compétiteur où p_n désigne la probabilité qu'il réalise le temps de base et $q_n = 1-p_n$. Sachant que $p_o = 0,1$ déterminer p_3 et p_5 : probabilités que le compétiteur fasse le temps de base au $3^{ème}$ entraînement et au $5^{ème}$.

3 - Exprimer P_n en fonction de T et de $P_o = (p_o\ q_o)$; en déduire P_{15} puis p_{15}. L'entraîneur peut il raisonnablement présenter son compétiteur à la course ?, sa décision dépend elle de p_o ?

101 - LE PROBLÈME DU BANQUIER

Un chef de banque est confronté au problème suivant : un de ses clients est successivement dans le "rouge" (débiteur) et dans le "vert" (créditeur).

Pour l'aider à mieux gérer son compte, ce chef de banque envisage de faire une étude de la situation du compte de son client et de son évolution.

Il constate que lorsque son client est dans le rouge, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est de 0,75 ; la probabilité qu'il soit dans le vert est 0,25.

Par contre lorsque son client est dans le vert, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois est 0,45 ; la probabilité qu'il soit dans le rouge est 0,55.

Sachant que le client est créditeur au départ, sa situation bancaire étant $P_0 = (1\ 0)$. Retrouver les situations bancaires P_1, P_2, P_3 les 1^{e}, $2^{ème}$ et $3^{ème}$ mois. Quelle est la probabilité que le client soit créditeur à la fin du $3^{ème}$ mois ?

Le chef de banque continue son étude en faisant une simulation pour connaître la situation du compte de son client à plus long terme : au bout de 5 mois, 1 an, 18 mois ainsi qu'au bout de 2 ans. Détermine la situation en calculant les probabilités que le client soit créditeur au bout d'un an, 18 mois, 2 ans. Est-ce que la situation tend à se stabiliser ?

102 - LES GÉNÉRIQUES

Un médicament M et son générique GM (même formule chimique donc même composition) sont en concurrence sur le marché. On sait que le ministre de la santé souhaite que l'on consomme davantage de génériques (qui coûtent notamment moins cher à la sécurité sociale), mais le comportement du consommateur est : d'une année sur l'autre 80 % de la clientèle d'une pharmacie achète de préférence le médicament M tandis que 20 % achète le générique GM.

Traduire ces données par un graphe probabiliste et écrire sa matrice de transition T.

On note p_0 et q_0 les parts de marché de M et GM en 2000 et p_n et q_n les parts de marché de M et GM après n années. Soit $P_0 = (p_0\ q_0)$ et $P_n = (p_n\ q_n)$.

Exprimer P_1 puis P_2 en fonction de P_0, en déduire P_n en fonction de P_0 et T.

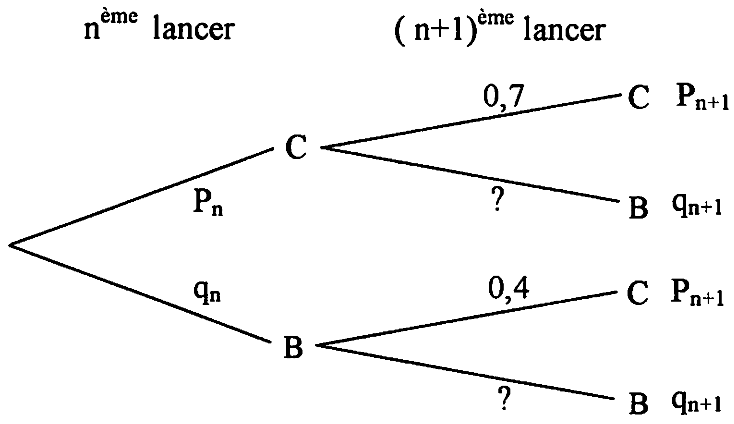
Calculer T2, T3, en déduire Tn

Sachant que $P_0 = (1\ 0)$, en déduire Pn.

Quelle tendance sur les parts de marché de M et GM peut on envisager à long terme ?

103 - JEU DE FLÉCHETTES

Dans l'arbre ci-dessous : C est l'évènement « la fléchette atteint la cible » et B l'évènement contraire: « la fléchette n'atteint pas la cible ».



P_n désignant la probabilité d'atteindre la cible au $n^{ième}$ lancer

1 - Compléter l'arbre pondéré ci-dessus par les probabilités manquantes (aux points d'interrogation). Quelle relation existe-t-il entre p_n et q_n ?

2 - Représenter d'une autre façon : à l'aide d'un graphe probabiliste la situation de jeu puis écrire la matrice de transition de ce graphe. Que représentent concrètement les probabilités qui pondèrent le graphe ?

3 - Les chances d'atteindre la cible au 1^{er} lancer ou de la rater étant égales, est il exact qu'on a plus d'une chance sur deux d'atteindre la cible au $3^{ème}$ lancer ?

104 - LA PARTIE DE POKER

Trois amis Riquet, Jojo et Popol se retrouvent une nouvelle fois dans l'arrière salle du bistrot « Prosper » pour une nouvelle partie de poker.

A chaque partie Jojo gagne 70 % de la mise de Riquet, 20 % de la mise de Popol et il perd au profit de Riquet 60 % de sa mise.

Riquet empoche 60 % de la mise de Popol et perd 30 % de sa mise au profit de Popol.

Avant la première partie les amis ont confié à Prosper leur « magot » (afin de ne pas se mettre sur la « paille ») : pour Riquet c'est 400 euros, pour Jojo 500 euros et pour Popol 700 euros.

Chacun décide dès la première partie de miser « le paquet » (leur magot).

Quel est le gain de chacun des amis à l'issue de la première partie, deuxième partie et à l'issue de la vingtième partie ?

Quel est le grand gagnant ?

Quel est le plus malchanceux ?

105 - IL EST CINQ HEURES, ...CLARA S'ÉVEILLE

Il est cinq heures, Clara s'éveille ! C'est l'heure du biberon.

Les parents de Clara ont remarqué depuis sa naissance que

* si le premier biberon de la journée est pris à 5 heures du matin, Clara s'éveille pour le premier biberon de la journée suivante à 5 heures également 1 jour sur 5

* par contre 2 jours sur 5 si le premier biberon est pris à 6 heures, il est pris le jour suivant à 5 heures.

1 - Combien y a-t-il de « chances » que :

Si le 1er biberon est à 5 heures, il le soit à 6 heures le jour suivant ?

Si ce biberon est pris à 6 heures,il le soit encore à 6 heures le jour suivant ?

(on s'aidera d'un graphe pondéré ou d'un arbre pondéré)

2 - Combien y a-t-il de chances que la gentille Clara prenne 2 jours de suite son 1er biberon à 6 heures ? (on suppose que le premier de ces 2 jours il y a 1 chance sur 2 que Clara prenne son 1er biberon à 6 heures).

3 - Sachant qu'il y avait 1 chance sur 2 que Clara prenne le 1er biberon à 5 heures le 1er jour,déterminer l'heure du 1er biberon la plus problable les premiers jours après la naissance.

4 - Vérifier qu'à long terme il y a 2 fois plus de chances que Clara prenne le 1er biberon à 6 heures qu'à 5 heures.

106 - L'ÉVOLUTION DES ESPÈCES

Dans un laboratoire scientifique des pucerons sont mélangés avec des coccinelles ! (on sait que les coccinelles se nourrissent de pucerons).On désire analyser au fil des jours l'évolution du nombre de chaque espèce. On admet que chaque jour le nombre de pucerons est les 4/5 du nombre de pucerons du jour précédent augmenté des 3/5 du nombre de coccinelles de ce même jour (précédent).

De même le nombre de coccinelles est les 2/5 du nombre de coccinelles du jour précédent augmenté du 1/5 du nombre de pucerons de ce même jour (précédent).

1 - Faire un graphe probabiliste représentant l'évolution des espèces : pucerons, coccinelles.

2 - Si le 1er jour il y a 100 coccinelles et 500 pucerons, déterminer l'évolution de chaque espèce à l'issue de 2 jours, 3 jours, 5 jours et au bout d'une semaine.

Est il vrai qu'à court terme il y aura 3 fois plus de coccinelles que de pucerons ?

Et à long terme ?

3 - L'évolution constatée précédemment (dans le 2) est elle la même si l'on a au départ :

*500 coccinelles et 500 pucerons ?

*500 coccinelles et 100 pucerons ?

107 - LE PROBLÈME DU GARDIEN DE BUT

Dans un club de football on constate à l'entraînement :

- Si le gardien a arrêté un tir, il arrête le suivant 1 fois sur 2 ;

- Si le gardien a encaissé un but, il arrête le tir suivant1fois sur 5.

1 - Faire un graphe représentant la situation et donner sa matrice de transition.

2 - Le premier tir n'a pas été arrêté par le gardien, quelle est la probabilité qu'il arrête le troisième tir ?

108 - LE PROBLÈME DU RESTAURATEUR

Le restaurateur a comptabilisé le nombre de clients ayant opté pour 3 menus proposés : le menu découverte a été choisi par 200 clients ; le menu frisson a tenté 500 clients et 300 ont choisi le menu passion.

1 - Quelles sont les probabilités d, f et p qu'un client ait choisi respectivement le menu découverte ?, le menu frisson ?, le menu passion ?.

2 - On suppose que les probabilités trouvées précédemment servent de base à l'étude de l'évolution de la demande. A ce propos on a constaté :

Si un client a choisi le menu découverte (D), les probabilités qu'il prenne la fois suivante le menu frisson (F) est 0,5 et qu'il prenne le menu passion (P) est 0,3.

Si un client a choisi le menu frisson (F), les probabilités qu'il choisisse la fois suivante le même menu est 0,6 et qu'il change au profit du menu passion (P) est 0,2.

20 % des clients ayant choisi le menu passion choisissent la fois suivante le menu découverte.

Et 50 % de ces clients optent la fois suivante pour le menu frisson.

Faire un graphe pondéré traduisant l'évolution de la demande.

On sait que $(d_1\ f_1\ p_1) = (d\ f\ p)$ d'après la supposition faite en 2, sachant que la $n^{ième}$ fois $(d_n\ f_n\ p_n) = (d\ f\ p) \times T^{n-1}$ où T est la matrice de transition du graphe

En déduire l'évolution de la demande à court terme en calculant $(d_2\ f_2\ p_2)$ et $(d_3\ f_3\ p_3)$.

Quel est à long terme le menu dont la demande reste stable ?

109 - L'AGENCE DE VOYAGES

En 2002 une agence a enregistré 3000 voyages dont 90 % en France.

Un sondage indique que 80 % de la clientèle pour un séjour en France opte l'année suivante pour un séjour en France et 10 % des clients d'un séjour à l'Etranger changent l'année suivante pour un séjour en France.

1 - Quelle est la probabilité qu'un client d'un séjour en France choisisse l'année suivante un séjour à l'Etranger ?

Quelle est la probabilité qu'un client d'un séjour à l'Etranger choisisse l'année suivante un séjour à l'Etranger ?

2 - Quelle est la probabilité qu'un client ait choisi un séjour en France en 2002 et 2003 ?

Quelle est la probabilité qu'un client ait fait un séjour en France en 2003 ?

3 - Combien y a-t-il de clients de l'agence qui ont effectué un séjour à l'Etranger à la fois en 2002 et 2003 ?

4 - En tenant compte du sondage, quelle répartition probable des séjours peut-on envisager en 2006 ?

5 - Quelle évolution des séjours peut envisager à long terme l'agence de voyages.

110 - LE PROBLÈME DE L'AUTOMOBILISTE PRESSÉ

Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent 3 feux tricolores de circulation. Ces feux fonctionnent de façon indépendante. Le temps d'un feu rouge est de 20 secondes, de 35 secondes pour le vert et de 5 secondes pour le feu orange.

Quelle est la probabilité que sur son trajet l'automobiliste rencontre exactement 2 feux verts ?

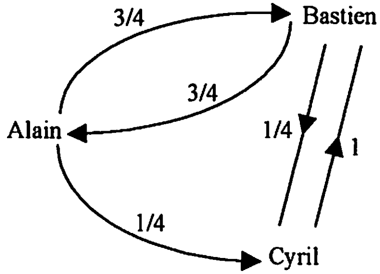
L'automobiliste emprunte chaque jour ce trajet. On admet que la probabilité qu'il rencontre exactement 2 feux verts un jour donné si cela ne lui est pas arrivé le jour précédent est 0,2.

Déterminer la probabilité P3 que le 3ème jour l'automobiliste rencontre exactement 2 feux verts.

Calculer ensuite la probabilité P10 que le 10ème jour l'automobiliste rencontre exactement 2 feux verts ? Que peut on en conclure ?

111 - JEU DE PLAGE

Alain, Bastien et Cyril jouent au ballon sur la plage : les probabilités que chacun reçoive le ballon sont indiquées sur le graphe ci- dessous :



Alain ayant le ballon à l'issue du 1[er] lancer, on notera $(a_1\ b_1\ c_1)$ la situation probabiliste au 1[er] lancer avec $(a_1\ b_1\ c_1) = (1\ 0\ 0)$. De même (an bn cn) est la situation probabiliste au n[ième] lancer où an, bn, cn sont les probabilités respectives qu'Alain, Bastien et Cyril ait le ballon au n[ième] lancer.

1 - Déterminer à l'aide du graphe ci- dessus la matrice M telle que $(a_2\ b_2\ c_2) = (a_1\ b_1\ c_1) \times M$

et plus généralement $(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = (a_n\ b_n\ c_n) \times M$.

2 - Monter que $(a_n\ b_n\ c_n) = (a_1\ b_1\ c_1) \times M^{n-1}$ pour n supérieur où égal à 1, puis calculer M^2

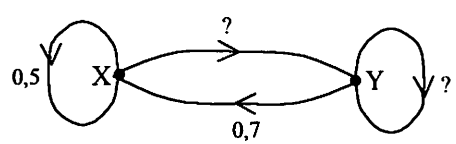
et en déduire les probabilités d'avoir le ballon au 3[ème] lancer pour chaque joueur.

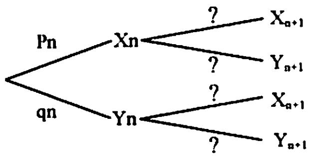
3 - Déterminer de même les probabilités pour chaque joueur d'avoir le ballon au 5[ème],au 10[ème] lancer. Que constate t'on ?. Les probabilités qu'au nième lancer : Alain, Bastien et Cyril aient le ballon dépendent-elles du joueur qui avait le ballon initialement ?

112 - AU PARFUM

Une parfumerie distribue deux marques X et Y. Le stock de départ est constitué pour les deux tiers de la marque X. Pour sa publicité, la parfumerie présente chaque mois un produit en promotion. On constate qu'un produit de marque X est en promotion un mois donné s'il était en promotion le mois précédent : une fois sur deux et s'il ne l'était pas : sept fois sur dix.

1 - Compléter le graphe et l'arbre pondéré ci-dessous :





P_n étant la probabilité que le produit promotion soit de marque X le n[ième] mois : $P_n = p(X_n)$ justifier que $P_{n+1} = 0{,}5P_n + 0{,}7Q_n$ puis trouver la matrice T telle que $(P_{n+1}\ Q_{n+1}) = (P_n\ Q_n) \times T$

Sachant que Q_n est la probabilité que le produit promotion le nième mois soit de marque Y.

2 - Justifier que $(P_n\ Q_n) = (P_o\ Q_o) \times T^n$ et en déduire la probabilité P_{12} qu'à Noël le produit promotion soit de marque X (on prendra $P_o = 2/3$).

3 - Les stocks de la marque X sont constitués de 10 % d'eau de toilette, 30 % de parfum le reste étant du déodorant ; quant aux stocks de Y : ils sont constitués de 50 % d'eau de toilette, 20 % de parfum et 30 % de déodorant. Déterminer la probabilité que le produit promotionnel le $n^{ième}$ mois soit une eau de toilette ; en déduire la probabilité qu'à Noël ($n = 12$) ce produit soit une eau de toilette.

113 - LE PROBLÉME DU CONTRÔLEUR DE PANNES

Un contrôleur dans un atelier désirant analyser le fonctionnement d'une machine remarque que si la machine n'a pas de panne un mois donné la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant est 6/25 ; si la machine est tombée en panne un mois donné la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant est 1/25.

1 - Faire le graphe probabiliste de la situation (on désignera par En l'évènement : « la machine tombe en panne le $n^{ième}$ mois »). Ecrire la matrice de transition T de ce graphe.

2 - Si p_n désigne l'état probabiliste le mois n : $Pn = (p_n \; q_n)$ où p_n est la probabilité de l'évènement En exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

3 - On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 -par $u_n = p_n - \frac{1}{5}$.

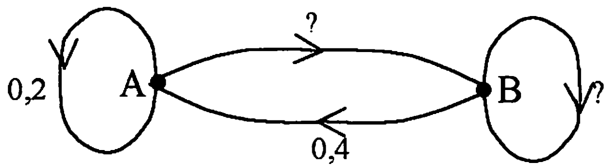
a- Montrer que (u_n) est une suite géométrique et exprimer u_n puis p_n en fonction de n sachant que $p_1 = 0,1$.

b- Déterminer la limite de p_n, quelle conclusion le contrôleur peut il tirer de ce résultat ?

114 - MADEMOISELLE PIPELETTE

Mademoiselle Pipelette possède un téléphone mobile, inquiète (et pour cause !) elle souhaite mieux gérer l'évolution de sa consommation : il y a 40 % de chances qu'elle dépasse son forfait sachant qu'elle ne l'a pas dépassé le mois précédent et 20 % de chances qu'elle dépasse son forfait si elle l'a dépassé le mois précédent.

1 - Représenter la situation en complétant (par les probabilités manquantes) le graphe ci-dessous puis donner sa matrice de transition.



2 - On désignera par p_n la probabilité que mademoiselle Pipelette dépasse son forfait le $n^{ème}$ mois et q_n la probabilité qu'elle ne le dépasse pas. Justifier que $p_2 = 0{,}2p_1 + 0{,}4q_1$ et $q_2 = 0{,}8p_1 + 0{,}6q_1$. En déduire la probabilité p_2 que mademoiselle Pipelette dépasse son forfait le $2^{ème}$ mois sachant qu'il y a 50 % de chances qu'elle le dépasse le 1^{er} mois.

3 - Justifier que $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}4q_n$ et $q_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}6q_n$, en déduire que $p_{n+1} = 0{,}4-0{,}2p_n$.

115 - « ON TOURNE ! »

Bastien et Cyril jouent au ping-pong, le perdant sera remplacé par leur ami Stéphane et ainsi après chaque partie le perdant est exclu et est remplacé par le joueur en attente.

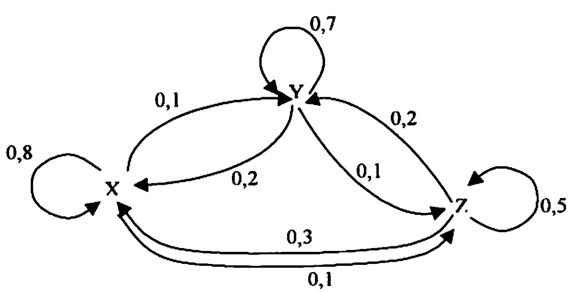
Le gagnant de la tournante est celui qui aura gagné deux fois de suite.

Quelles sont pour chacun des amis les chances de gagner ?

116 - PROBLÈME DE MARKETING

Un produit de consommation courante est distribué par 3 chaînes d'hypermarchés concurrentes X, Y, Z.

La distribution reste constante durant chaque mois mais évolue d'un mois à l'autre ("l'offre est fonction de la demande") selon le graphe :



1 - Que signifie concrètement les nombres figurant sur le graphe ci-contre ; décrire cette évolution en pourcentages.

2 - On note P_0 (x_0 y_0 z_0) la distribution initiale des parts de marché respectives dans X, Y, Z et $P_n = (x_n\ y_n\ z_n)$ cette distribution au bout de n mois.

Calculer P_3, P_6, P_{12} sachant que $x_0 = 0{,}3$ $y_0 = 0{,}5$ et $z_0 = 0{,}2$; Conclure sur l'évolution à long terme.

3 - L'évaluation des ventes mensuelles du produit est de 100 milliers d'unités et le bénéfice par unité vendue est de 1 € chez X, 0 € 90 chez Y et 1 € 10 chez Z. Une étude de marché a montré que la distribution de ce produit est abandonnée par une chaîne (ou plusieurs) si le bénéfice sur la vente du produit est inférieur à 26500 € (seuil de rentabilité).

a - Au bout de combien de mois une chaîne abandonne t'elle la distribution du produit ?

b - Au bout de combien de mois le produit est-il distribué exclusivement par une chaîne ? laquelle ?

117 - LE PROBLÈME DU CONSEILLER PRINCIPAL D'ÉDUCATION

Mademoiselle Piplette porte bien son nom !

Elle est souvent punie pour bavardage[1], en effet :

La probabilité qu'elle bavarde à un cours sachant qu'elle a bavardé au cours précédent est 0,2.

La probabilité qu'elle bavarde à un cours sachant qu'elle n'a pas bavardé au cours précédent est 0,7. On note p_n la situation probabiliste le n^{ième} cours avec $P_n = (p_n\ q_n)$ où p_n est la probabilité que mlle pipelette bavarde le n^{ième} cours et q_n la probabilité qu'elle ne bavarde pas (on a $p_n + q_n = 1$).

1 - Présenter les données sous forme d'un graphe probabiliste, en donner la matrice de transition, en déduire la probabilité que "Pipelette" soit punie pour bavardage le 2ème et le 3ème cours sachant qu'il y a 10 % de chances qu'elle bavarde au 1er cours.

2 - Le conseiller principal d'éducation étudiant l'évolution des bavardages (et donc des punitions) désire étudier la suite (p_n).

a - Sachant que $P_{n+1} = P_n \times T$ exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

1 Chaque fois qu'elle bavarde, elle est punie !

b - On pose $V_n = p_n - \frac{7}{15}$. Montrer que la suite (Vn) est une suite géométrique. En déduire Vn puis p_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (p_n) en $+\infty$.

c - Comment interpréter le résultat précédent ? Dépend t'il de l'état initial P_1 ? Peut on dire que mademoiselle Pipelette a sensiblement modifié son attitude ?

118 - BALL-TRAP

Un chasseur atteignant la cible a 60 % de chances de l'atteindre au coup suivant, par contre s'il rate la cible il a seulement 30 % de l'atteindre au coup suivant. Sachant qu'au 1er coup le chasseur a 50 % de chances d'atteindre la cible ; on notera $p_1 = (0{,}5\ 0{,}5)$ la situation probabiliste du 1er coup et $P_n = (p_n\ q_n)$ la situation au nième cours où p_n est la probabilité d'atteindre la cible au nième coup et q_n la probabilité de rater au nième coup ($q_n = 1-p_n$).

1 - Calculer p_2 et p_3 c'est-à-dire les probabilités de faire "mouche" au 2ème et 3ème coups.

2 - T étant la matrice de transition associé au graphe probabiliste du jeu

Vérifier que $T = N + 0{,}3R$ où $N = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} 4/7 & -4/7 \\ -3/7 & 3/7 \end{pmatrix}$

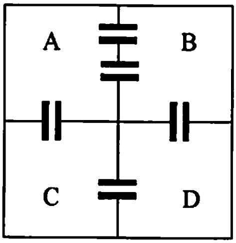
puis calcule N^2 N^3, N^n, R^2, R^3, R^n, R x N et N x R. En déduire que $T^2 = N + (0{,}3)^2 \times R$ et plus généralement $T^n = N + (0{,}3)^n \times R$

3 - Sachant que $P_n = P_1 \times T^{n-1}$, en déduire que pour n infiniment grand

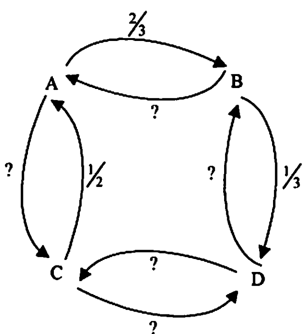
$P_n = P_1 \times N$ puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{7}$ (la probabilité d'atteindre la cible tend vers $\frac{3}{7}$ lorsque le nombre de coups devient de plus en plus grand).

119 - LAPIN - LAPINE

I - Un lapin est enfermé dans un clapier ayant la configuration suivante : il y a 4 compartiments A, B, C, D avec des passages (on admet que le lapin a autant de chances d'emprunter l'un quelconque de ces cinq passages).

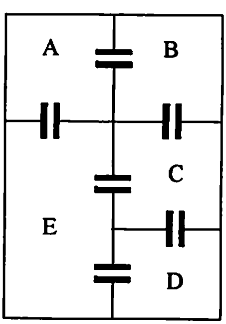


1 - Compléter le graphe indiquant la probabilité qu'a le lapin d'aller d'un compartiment au compartiment voisin et justifier les probabilités indiquées puis écrire la matrice associée au graphe.



2 - Une lapine se trouve dans le compartiment C où elle dort. Quelles sont les probabilités que le lapin venant de A rejoigne la lapine en 3 "coups*" ? ; en 4 "coups" ?

II - Reprendre cet exercice avec le clapier ci-contre dont on déterminera le graphe.



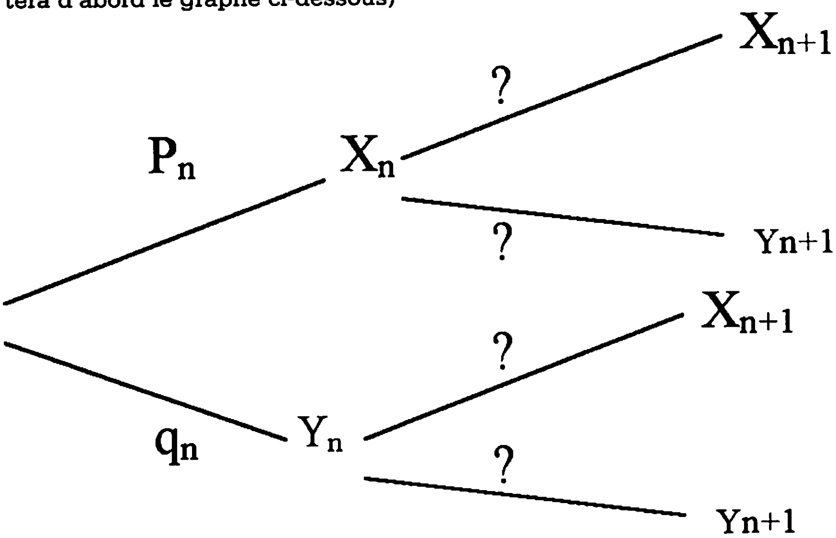
* Un "coup" étant le passage d'un compartiment à un compartiment voisin.

120 - CAMPAGNE DE PUBLICITÉ

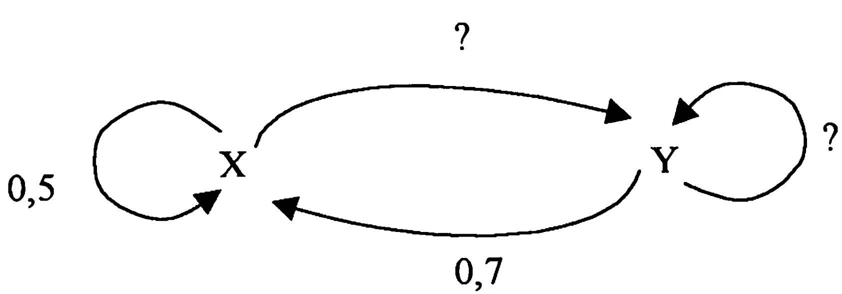
Deux constructeurs d'automobiles lancent simultanément 2 modèles de voitures a et b.

Afin de promouvoir leur produit ils font appel à une société de publicité qui procède à des sondages. La campagne publicitaire dure plusieurs mois. Chaque mois les mêmes personnes sont intérrogées.

1. Compléter l'arbre pondéré en indiquant les probabilités (on complétera d'abord le graphe ci-dessous)



Compléter le graphe ci-dessous :



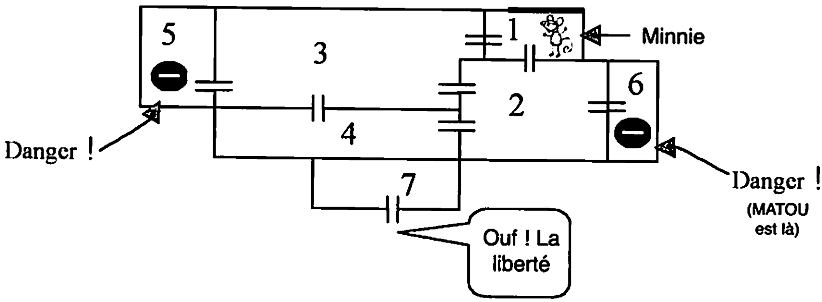
121 - « MINNIE PETITE SOURIS, SORS DE TON TROU ! »

Minnie la souris hésite à sortir de son trou !

Pour retrouver la liberté elle doit trouver son chemin en passant par certaines pièces de la maison (représentée ci-dessous), mais en évitant le Matou dans la pièce 6 et le piège à souris à l'entrée de la pièce 5.

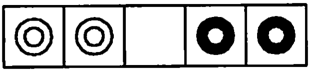
Minnie choisit au hasard le trajet d'une pièce à l'autre pièce (par les passages indiqués) ou de revenir d'où elle vient.

Minnie à t'elle beaucoup de chances de déjouer les pièges et d'atteindre la liberté (en sortant de la pièce 7) ?



POINT 7 JEUX

122 - LE JEU DES GRENOUILLES



On dispose 5 cases contiguës contenant soit 2 pions gris, 2 pions noirs et une case vide comme l'indique le dessin ci-dessous :

Le but du jeu est de permuter les pions (amener les gris à la place des noirs et vice-versa) en un minimum de coups.

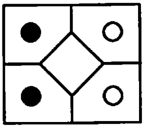
Les coups permis sont :

On peut pousser chaque pion d'une case à droite ou à gauche pour l'amener sur la case vide.

On peut faire sauter* chaque pion au dessus d'un autre à droite ou à gauche pour l'amener sur la case vide.

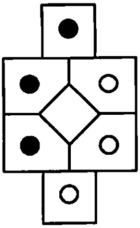
123 - A VOUS DE JOUER !

On dispose d'un damier à 5 cases où sont disposés (comme l'indique la figure ci-dessous) 2 pions gris et 2 pions noirs



Comment intervertir les pions noirs et les pions gris en un minimum de coups (un coup étant le déplacement d'un pion sur la case vide)

Tu as trouvé, essaie maintenant avec 3 pions noirs et 3 pions gris.



* « saut de grenouille »

124 - LE JEU DE BILLES

Deux camarades de classe jouent au jeu suivant :

Ils ont décidé de mettre en commun leurs billes, soit au total 26 billes et de prendre à tour de rôle 1, 2 ou 3 billes. Gagnera l'ensemble des billes soit les 26 billes celui qui prendra la dernière bille.

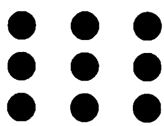
Comment jouer pour être sur de gagner ?

Le perdant estime qu'il y a supercherie et demande à son camarade de rejouer en modifiant la règle : c'est celui qui ramasse la dernière bille qui perd.

Mais le gagnant du 1er jeu gagne encore ! comment a-t-il joué ?

125 - LE JEU DES CAILLOUX

Deux enfants ont disposé sur le sol 9 cailloux comme l'indique la figure ci-contre :

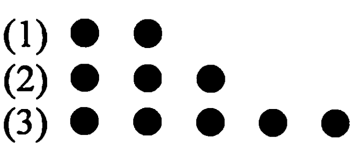


Chaque joueur choisit à son tour une rangée et retire dans celle-ci 1,2 ou 3 cailloux. Le gagnant est celui qui ramasse le dernier caillou.

Quelle est la stratégie à adopter pour être certain de gagner ?

126 - LE JEU DE NIM

Dix jetons sont disposés sur 3 rangées selon la disposition :



Chacun des deux joueurs choisit à son tour une rangée et prend le nombre de jetons qu'il veut. Le gagnant est celui qui ramasse le dernier jeton.

Quelle est la stratégie à adopter pour être certain de gagner ?

127 - LE JEU DE LA CHANCE

Pierre propose à Henri le jeu suivant : « Dis-moi un nombre. Nous allons maintenant chacun à son tour enlever 1 ou 2 ou 3 à ce nombre puis aux résultats trouvés. Gagnera celui que arrive à 0. Commence ».

Pierre finalement gagne.

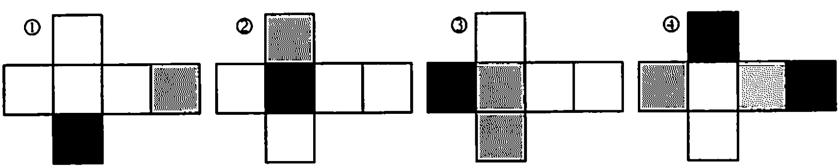
Henri lui dit alors : « C'est un coup de chance ». Pierre alors recommence le même jeu avec ses autres camarades Luc et Jean et, surprise, à chaque fois Pierre gagne. Quelle est donc la stratégie de Pierre ?

128 - FABRIQUONS UN JEU DIABOLIQUE

Avec 4 cubes de bois colorés comme l'indiquent les patrons ci-dessous on peut, en les empilant constituer une tour où sur chaque face (devant, derrière, gauche, droite) apparaissent 4 couleurs.

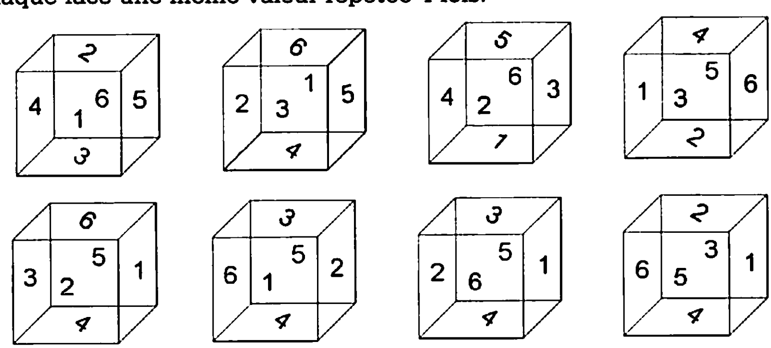
Oui c'est possible ! comment les empiler ?

Indication : Plutôt que de chercher les possibilités des faces vues des 4 cubes, examiner plutôt celles des faces à cacher lorsqu'on les empile !



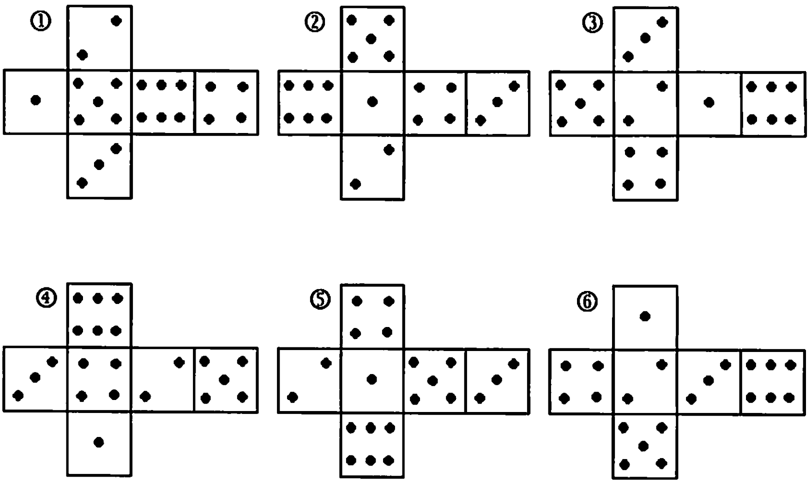
129 – JEU DE CUBES

Les 8 dés ci-dessous diffèrent tous par la position des valeurs. Les assembler en un grand cube de dimensions doubles présentant sur chaque face une même valeur répétée 4 fois.



130 - LA TOUR MAGIQUE

Voici 6 dés dont les patrons sont :



Peut-on empiler les 6 dés de façon à obtenir une tour où sur chaque face apparaissent les chiffres de 1 à 6 ?.

POINT 8 BAC (SUJETS OU EXTRAITS)

131 - « AU THÉÂTRE CE SOIR »

Un théâtre propose deux types d'abonnement pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles. On considère un groupe de 2500 personnes qui s'abonnent tous les ans. On note, n étant un entier naturel :

* a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;

* b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;

* P_n la matrice (a_n, b_n) traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Tous les ans, 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante .Les autres personnes changent d'abonnement.

1 - On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_o = (\ a_o\ b_o)$.(0,5 point).

2 - a- Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé. (1 point)

b- Déterminer la matrice de transition M de ce graphe. (0,5 point)

c- En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un. (0,5 point)

3 - Soit P = (x y) l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que x + y = 1.

a- Justifier que x et y vérifient l'équation : $x = 0{,}85x + 0{,}45y$. (0,5 point)

b- Déterminer x et y. (0,5 point)

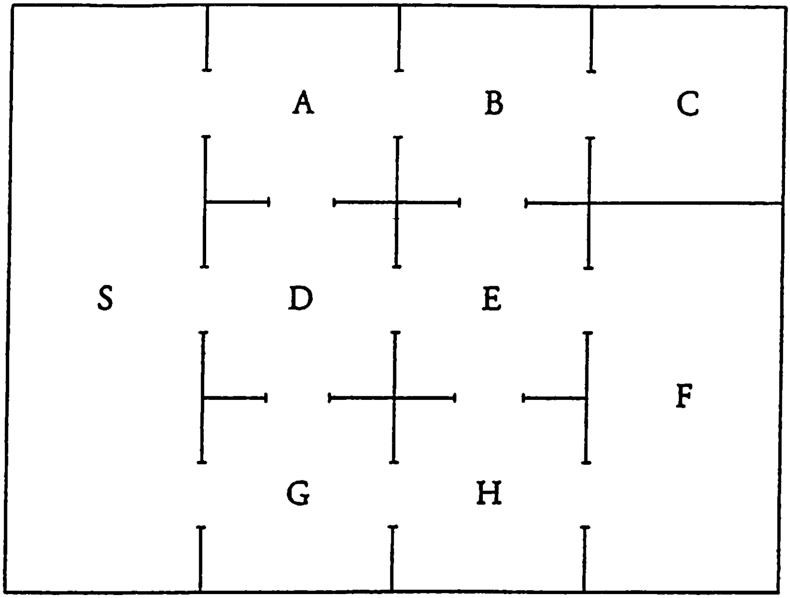
c- En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers $+\infty$. (0,5 point)

d- Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A. (1 point)

132 - PROBLÈME DE CIRCULATION DANS UN MUSÉE

PARTIE A

Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S. Le plan du musée est représenté ci-dessous :



Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, DouG. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F. On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1 - Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.

2 - Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ?

Justifier en utilisant un théorème du cours sur les graphes.

3 - Pour rompre une éventuelle monotonie, le conservateur du musée souhaite différencier chaque salle de sa ou ses salles voisines (c'est-à-dire accessible par une porte) par la moquette posée au sol .Quel est le nombre minimum de types de moquette nécessaires pour répondre à ce souhait ? Justifier. (1 point)

PARTIE B

On note M la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent,en convenant de l'ordre suivant des salles : S, A, B, C, D, E, F, G, H. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ? (0,5 point)

PARTIE C

On donne la matrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 02 & 20 & 12 & 06 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 03 & 06 & 11 & 20 & 05 & 18 & 05 \\ 11 & 03 & 16 & 00 & 19 & 03 & 08 & 04 & 12 \\ 02 & 06 & 00 & 03 & 01 & 07 & 01 & 04 & 01 \\ 20 & 11 & 19 & 01 & 31 & 09 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 03 & 07 & 09 & 28 & 09 & 20 & 09 \\ 06 & 05 & 08 & 01 & 11 & 09 & 09 & 08 & 09 \\ 12 & 18 & 04 & 04 & 12 & 20 & 08 & 20 & 06 \\ 12 & 05 & 12 & 01 & 19 & 09 & 09 & 06 & 17 \end{pmatrix}$$

1 - Combien y a-t-il de chemins qui, en 4 étapes, partent de D et reviennent à D ? (0,5point)

2 - Combien y a-t-il de chemins qui, en 4 étapes, partent de S et arrivent à C ? Les citer. (1point)

3 - Est-il toujours possible de joindre en quatre étapes deux salles quelconques ? Justifier. (0,5point)

133 - MARCHÉ DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

PARTIE A - Etude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,6u_n + 200$

1 - Calculer u_1 et u_2.

2 - On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 500$

a- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b- Exprimer (v_n) en fonction de n. En déduire que : $u_n = 400 \times (0,6)^n + 500$.

c- Déterminer la limite de la suite (u_n).

PARTIE B - Application économique

Dans un pays, deux sociétés A et B se partagent le marché des télécommunications. Les clients souscrivent, le 1er janvier, soit auprès de A, soit de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres à nouveau de choisir A ou B. L'année 2000, la société A détient 90 % du marché et la société B, qui vient de se lancer, 10 %. On estime que, chaque année, 20 %de la clientèle de A change pour B, et de même 20 % de la clientèle de B change pour A. On considère une population représentative de 1000 clients de l'année 2000. Ainsi, 900 sont clients de la société A et 100 sont clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

1 -

a- Vérifier que la société A compte 740 clients en 2001. Calculer le nombre de clients de A en 2002.

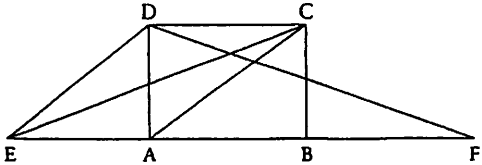
b- On note a_n le nombre de clients de A l'année (2000 + n). Etablir que :

$a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}2\,(1000\text{-}a_n)$. En déduire que $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 200$.

2 - En utilisant le résultat de la partie A, que peut-on prévoir pour l'évolution du marché des télécommunications dans ce pays ?

134 - LA GRANDE SURFACE

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe g ci-dessous.



1 -

a. recopier et compléter le tableau suivant : (0,5 pt)

Secteur	A	B	C	D	E	F
Degré						

b. Le graphe g est connexe. Pourquoi ? (0,5 pt)

2 - Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.

a. Démontrer que son souhait est réalisable. (1 pt)

b. Donner un exemple d'un tel parcours. (0,5 pt)

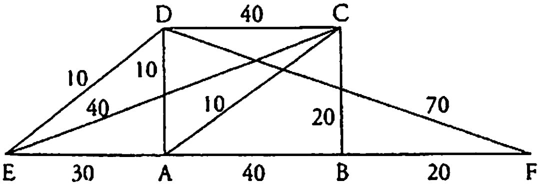
3 - Le directeur désire associer chaque secteur à une couleur de sorte que deux secteurs (sommets) ne portent pas la même couleur.

a. Démontrer que le nombre chromatique n du graphe vérifie $n \geq 4$ (0,5 pt)

b. Expliquer pourquoi $n \leq 5$ (0,5 pt)

c. Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique (0,5 pt)

4 - Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur F. Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistent pas, il leur faudra débourser une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.

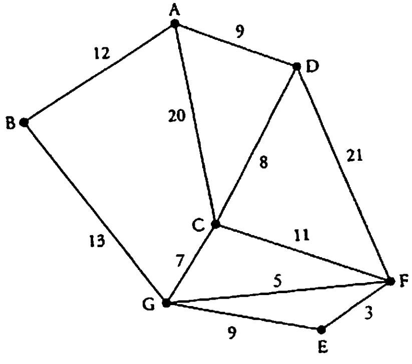


(AB = 40 ; AC = 10 ; AD = 10 ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF = 20 ; CD = 40 ; CE = 40 ; DE = 10 ; DF = 70)

Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.

135 - « VOYAGE, VOYAGE »

Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. Un guide fait visiter six sites touristiques notés B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1 - a. A partir de l'hôtel le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux ? Justifier la réponse. (1,5 point)

b. Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel. (1,5 point)

2 - Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E. Justifier la réponse. (2 Points).

136 - EXAMEN

Cinq étudiants, Xavier, Yann, Wanda, Valérie et Zoé, ont à passer un examen avec quelques épreuves écrites. Pour chaque étudiant voici la liste des épreuves écrites qu'il doit passer :

*Xavier : Anglais, Espagnol, Histoire ;

*Yann : Français, Histoire, Mathématiques ;

*Wanda : Biologie, Histoire ;

*Valérie : Anglais, Espagnol, Mathématiques ;

*Zoé : Espagnol, Histoire, Mathématiques.

Chaque épreuve dure une demi-journée. On cherche à organiser les sessions d'examen afin qu'elle dure le moins de demi-journées possibles. Pour cela on a représenté la situation par le graphe ci-dessous ; chaque sommet du graphe correspond à l'initiale d'une matière : A pour Anglais, B pour Biologie, E pour Espagnol, etc...

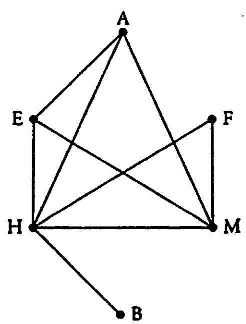
1 - Expliquer à quoi correspond chaque arête de ce graphe.(1 point)

2 - Expliquer comment traduire le problème posé par un problème de coloriage de ce graphe. (1 point)

3 - Proposer un coloriage de ce graphe permettant de minimiser le nombre de couleurs. (1 point)

4 - Quel est le nombre chromatique de ce graphe ? (1 point)

5 - Proposer une organisation de la session d'examen en un minimum de demi-journées. (1 point)



137 - ETUDE DE L'ÉVOLUTION MÉTÉO

Partie A

S'il fait sec aujourd'hui,alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$.

S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1 - Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi. (0,5 point)

2 - En déduire la probabilité des événements suivants :

J : « il fera sec lundi,mardi et mercredi »

K : « il fera sec mardi »

L : « il fera humide mercredi » (0,75 poimt)

Partie B

1 - Soit n un entier naturel,on note :

- s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec ;
- h_n la probabilité pour que le jour n, il fasse humide ;
- P_n la matrice $(s_n\ h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n.

Déterminer une relation entre s_n et h_n. (0,5 point)

2 -

a. Si le premier dimanche est le jour correspondant à n = 0, donner la matrice associée à l'état initial du temps.

b. Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste. (0,75 point)

3 - La matrice M de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a - Déterminer M^2 : utiliser la calculatrice (1 point)

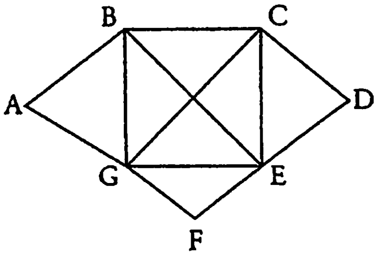
b - Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans la partie A. (0,5 point)

4 - a. Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique. (0,5 point)

b. En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$. (0,5point)

138 - PROBLÈME DE SÉCURITÉ

Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante. Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance.



Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :

AB : 16 min ;	AG : 12 min	BC : 8 min	BE : 12 min
BG : 8 min ;	CD : 7 min	CE : 4 min	CG : 10 min
DE : 2 min ;	EF : 8 min	EG : 15 min	FG : 8 min

Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours

En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet. (2,5 point)

L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? justifier la réponse. (0,5point)

Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D. En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, puis donner ce temps de parcours. (2 points)

139 - COMPÉTITION À L'UNIVERSITÉ

On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le score d'un étudiant(e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite.

- Si, lors de la $n^{ième}$ compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il(elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $n + 1^{ième}$ compétition est de $\frac{2}{5}$.

- Si, lors de la $n^{ième}$ compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il(elle) réalise un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états. On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes. On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n. L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \ b_n)$.

1 - Représenter G et donner sa matrice.(1 point)

2 - Jamalia, jeune étudiante,se présente à sa première compétition universitaire.

a. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition. (0,5 point)

b. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition. (1,5 point)

3 - Déterminer l'état stable du graphe G. (1,5 point)

4 - Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes...

Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres. (0,5 point)

140 - HORAIRES FIXES OU VARIABLES ?

Une grande entreprise propose à ses employés deux types d'horaires mensuels ou variables. Chaque trimestre, tous les employés sont consultés sur le type d'horaire qu'ils désirent adopter au trimestre suivant. Au début de l'expérience, 60 % des employés sont favorables aux horaires fixes. Autrement dit l'état probabiliste initial est décrit par la matrice ligne : $P_o = (0{,}6 \ \ 0{,}4)$.

On estime qu'un employé préférant les horaires fixes un trimestre donné garde sept fois sur dix le même avis au trimestre suivant ; alors qu'un employé préférant les horaires variables change d'avis une fois sur cinq au trimestre suivant. On suppose que les effets des changements de personnel dans l'entreprise sont négligeables.

1 - Traduire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. (1 point)

2 - On admet que la matrice de transition M de ce graphe est égale à :

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a - Donner l'état probabiliste deux trimestres après le début de l'expérience et interpréter le résultat obtenu. (1,5 point)

b - Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter. (1,5 point)

141 - CONCERT DE SOLIDARITÉ

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G). Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe ci-dessous Γ indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.

1 - Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).

2 - Quelle est la nature du sous graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ?

Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\aleph(\Gamma)$ du graphe Γ ?

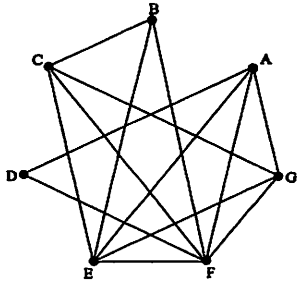
3 - Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?

En déduire un encadrement de $\aleph(\Gamma)$.

4 - Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ ci-dessous.

5 - Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?

Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.



142 - CAMPAGNE ÉLECTORALE

A Clochemerle la campagne électorale fait rage :deux listes A et B s'affrontent par des joutes oratoires quotidiennes. Chaque jour de campagne on interroge un électeur pris au hasard et on définit les événements suivants :

A_n : « l'électeur est favorable à la liste A au $n^{ième}$ jour de campagne » ;

B_n : « l'électeur est favorable à la liste B au nième jour de campagne ».

On note p_n et q_n les probabilités respectives des événements A_n et B_n et on admet que chaque électeur ne se détermine que pour les listes A ou B.

1 - Donner une relation simple entre p_n et q_n.

2 - Les arguments des uns et des autres sont si convaincants et les électeurs sont si indécis qu'à l'issue de chaque jour de campagne, 20 % des électeurs favorables à la liste A et 30 % des électeurs favorables à la liste B changent d'avis pour le jour suivant.

a- Donner $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(A_{n+1})$.

b- Démontrer que $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8\, p_n$ et que $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0{,}3\, q_n$. En déduire grâce à la formule des probabilités totales que : $P(A_{n+1}) = 0{,}8\, p_n + 0{,}3\, q_n$, puis que $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}3$.

3 - Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = p_n - 0{,}6$.

a- Démontrer que (un) est une suite géométrique de raison 0,5. Quelle est sa limite ?

b- En déduire la limite de la suite (p_n). Peut-on conjecturer quelle sera la liste gagnante ?

143 - LE PROBLÈME DU JARDINIER

Un jardinier possède un terrain bien ensoleillé avec une partie plus ombragée. Il décide d'y organiser des parcelles où il plantera 8 variétés de légumes : de l'ail (A), des courges (Co), des choux (Ch), des poireaux (Px), des pois (Po), des pommes de terre (Pt), des radis (R) et des tomates (T). Il consulte un almanach où figurent des incompatibilités de plantes, données par les deux tableaux ci-dessous :

Pour tenir compte de ces incompatibilités le jardinier décide de modéliser la situation sous la forme d'un graphe de huit sommets, chaque sommet représentant un légume.

1 - Compléter le graphe ci-après mettant en évidence les incompatibilités d'exposition ou les associations incompatibles indiquées dans les deux tableaux ci-dessus. (1 point)

Expositions incompatibles de plantes	
Plantes d'ombre partielle	**Plantes de plein soleil**
pois radis	choux tomates courges

par exemple :
les pois sont incompatibles avec les choux, les tomates et les courges.

Associations incompatibles de plantes dans une même parcelle	
pois	ail, poireaux
pommes de terre	courges, radis et tomates
choux	tomates, ail poireaux et courges
courges	tomates

par exemple :
les pois sont incompatibles avec l'ail et les poireaux.

2 - Calculer la somme des degrés des sommets du graphe, en déduire le nombre de ses arêtes. (0,75 point)

3 - Rechercher un sous-graphe complet d'ordre 4, qu'en déduit-on pour le nombre chromatique du graphe ? (0,75 point)

4 - Donner le nombre chromatique du graphe et l'interpréter en nombre minimum de parcelles que le jardinier devra créer. (1 point)

5. Donner une répartition des plantes par parcelle de façon à ce que chaque parcelle contienne exactement deux types de plantes et que le nombre de parcelles soit minimum. (0,75 point)

6. Donner une répartition des plantes de façon à ce qu'une parcelle contienne trois plantes et que le nombre de parcelles soit minimum. (0,75 point)

CORRIGÉS

FAIRE LE POINT :

(Les cases réponses justes sont entourées).

POINT 1

D'après les définitions :

G_1 complet : faux

G_2 complet : faux

G_3 complet : vrai

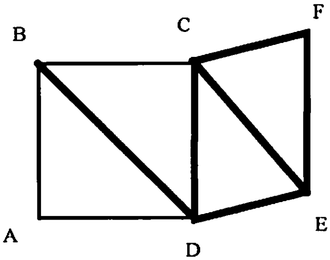
G_4 sous graphe de G_3 : faux

G_5 sous graphe de G_3 : faux

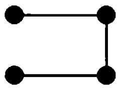
G_6 sous graphe de G_3 : vrai

G_7 sous graphe de G_3 : faux

POINT 2

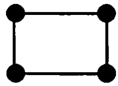


* ABDCBD est une chaîne de longueur 5	V	F
* La distance entre B et F est 3	V	F
* BDEFCB est un cycle	V	F
* ABDEFCBA est un cycle Eulérien	V	F



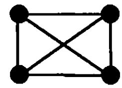
Complet X F

Connexe V X



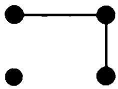
Complet X F

Connexe V X



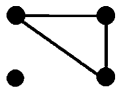
Complet V X

Connexe V X



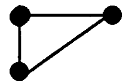
Complet X F

Connexe X F



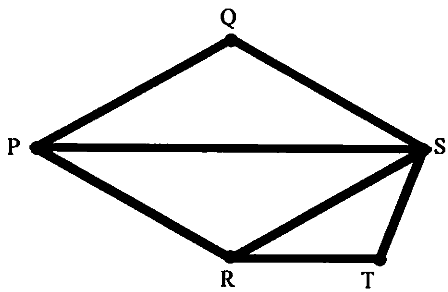
Complet X F

Connexe X F



Complet V X

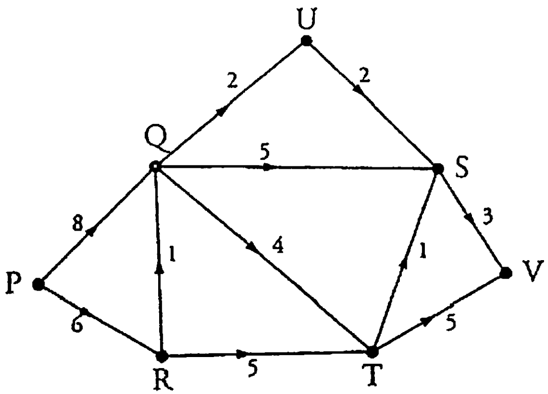
Connexe V X



Partant de Q et finissant en T	V	F
Partant de S et finissant en S	V	F
Partant de P et finissant en R	V	F
Partant de R et finissant en P	V	F
Partant de R et finissant en T	V	F

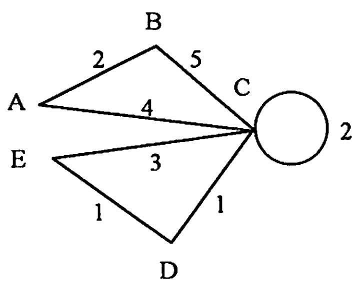
POINT 3

3.1



* a pour poids 16	V	F
* a pour poids 14	V	F
* contient la chaîne P-R-T	V	F

3.2

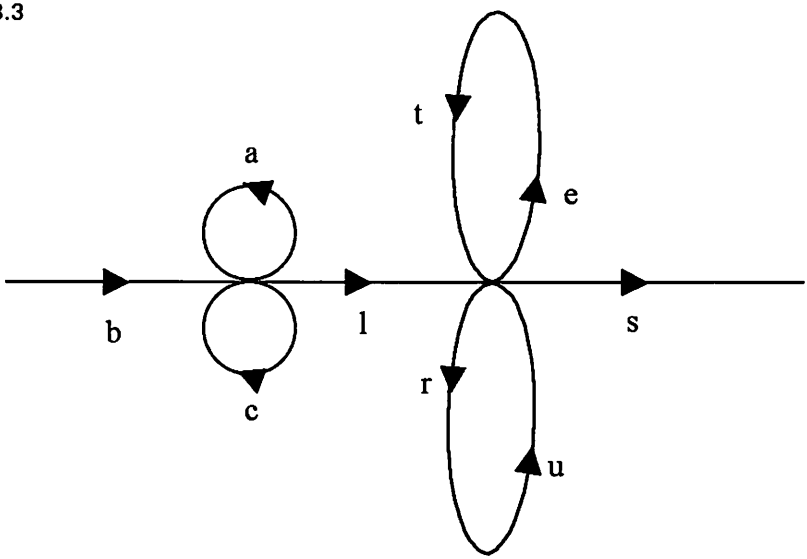


1 - La somme des degrés étant 14 est le double de 7 : il y a donc 7 arêtes

2 - ce graphe est connexe d'après la définition. Il existe une chaîne eulérienne et même un cycle eulérien car tous les sommets sont de degré pair.

3 - Une chaîne de poids minimum entre A et E est de poids 6, il s'agit de A C D E.

3.3

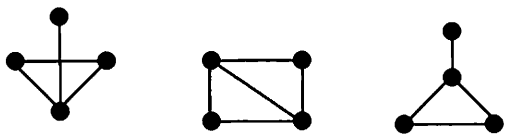


Le graphe étiqueté reconnaît le mot « baccalets »	:	Vrai
Il reconnaît tous les mots commençant par « bac »	:	Vrai
Il reconnaît le mot « bleus »	:	Faux d'après le graphe.

Il reconnaît exactement 6 mots de 5 lettres Faux en effet il reconnaît 7 mots de 5 lettres distinctes : bacle ; bacls ; balet ; balru ; baclu ; bcale ; bcalu mais il reconnaît aussi baccl ; baaac ; baaaa ; baacl ; baale ; baalu ; bccal ; bcccl ; bccaa.

POINT 4

I - On donne les graphes G1, G2 et G3 ci-dessous



G1 G2 G3

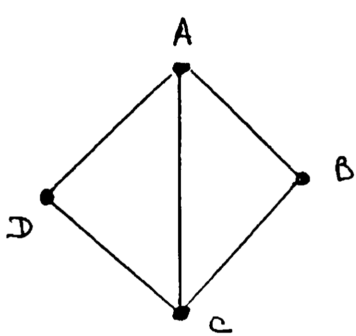
et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cocher la réponse V ou F pour les affirmations :

* A est associé à G1	V	F
* A est associé à G2	V	F
* A est associé à G3	V	F

II -

1 . Graphe associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



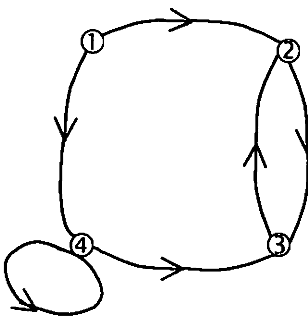
2 . Les degrés des sommets sont :

A : 3 ; B : 2 ; C : 3 ; D : 2 D'où la somme des degrés étant 10 le nombre d'arêtes est 5.

3 . Nombre chromatique du graphe : Un sous graphe d'ordre maximal est d'ordre 3 par exemple : A B C d'où le nombre chromatique du graphe est supérieur ou égal à 3. Une coloration de ce graphe pouvant être

A en rouge, B en vert ainsi que D, C en bleu ; il faut 3 couleurs donc le nombre chromatique du graphe est 3.

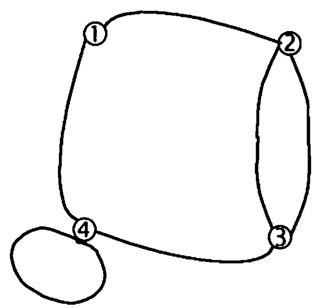
III . Cocher vrai ou faux pour les graphes et les matrices associés.



et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

V	F

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et



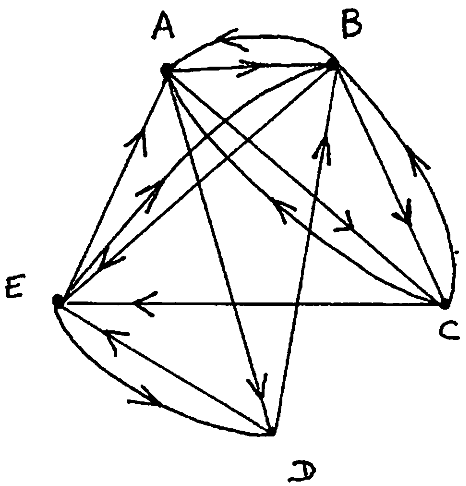
V	F

IV -

Soit la matrice M d'un graphe orienté G2 dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique.

On donne $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1 - graphe G_2 :



2 - Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à D est le nombre situé à la 2ème ligne et à la 4ème colonne de la matrice M^3 donc 3. Ces chaînes sont : B C A D, B C E D, B E A D.

V -

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

associée au graphe :

2 - Le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et C est 1, il s'agit de A D C. C'est le nombre figurant à la 1er ligne et à la 3ème colonne de M^2, On obtient $(0 \times 1) + (0 \times 1) + (1 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times 0) = 1$.

3 - Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A et C est d'après la figure égal à 7 : il s'agit des chaînes : A E A C ; A E B C ; A E D C ; A C B C ; A C A C ; A C D C ; A D A C.

4 - On peut retrouver ce nombre avec M^3, en effet il s'agit de trouver le nombre situé à la 1er ligne et à la 3ème colonne de M^3. La 1er ligne de M^2 étant (3 2 1 2 1) : obtenue en multipliant la 1er ligne de M par chaque colonne de M ; on multiplie cette 1er ligne de M^2 par la 3ème colonne de M : $(3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 0) = 7$.

VI

V	F

V	F

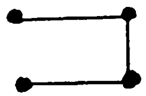
POINT 5

Point 5 - I

1 - Vrai (cours)

2 - Vrai (cours)

3 - Faux par exemple le graphe
n'est pas complet et pourtant il est Connexe.



4 - Vrai : c'est la contraposée de « tout graphe complet est connexe » qui est vraie

Point 5 - II

1 - Les seuls sommets de degré impair étant F (degré 5) et E (degré 3) il existe une chaîne eulérienne reliant F et E (G est connexe). Par exemple : F B C F E A D F A B E.

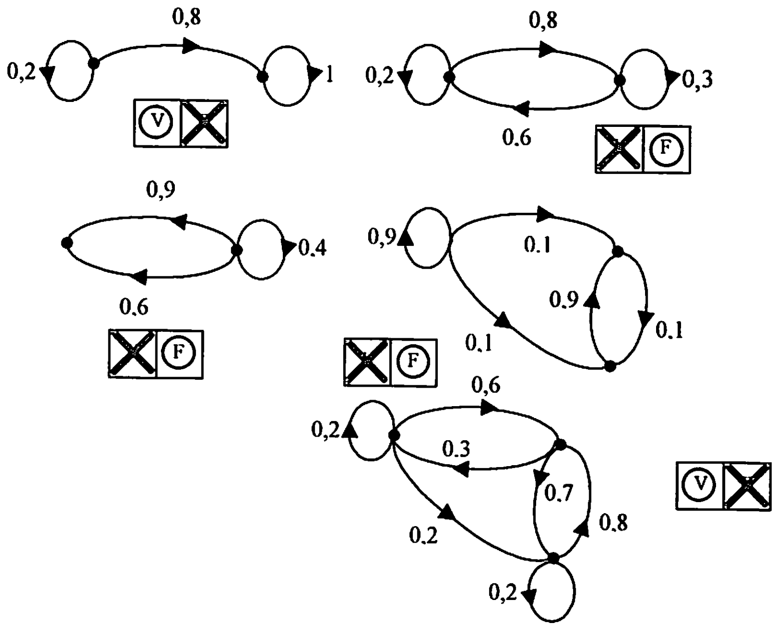
2 - Un sous graphe complet d'ordre maximal de G est B A E F d'ordre 4 donc le nombre chromatique de G est supérieur ou égal à 4.

3 - Le nombre chromatique est inférieur ou égal à 5 + 1 = 6 (5 étant le degré maximal du graphe).

4 - Une coloration peut être : F en rouge, F étant relié à tous les autres sommets on choisit une autre couleur : vert pour B, D étant le seul à ne pas être relié à B est aussi colorié en vert. On choisit une autre couleur : bleu pour A ; seul C peut être colorié en bleu (car il n'est pas relié à A) et il faut une autre couleur : noir pour E. 4 couleurs sont nécessaires, le nombre chromatique d'après 2- et 3- également est 4.

POINT 6

1 - Dans un graphe probabiliste la somme des poids des arêtes partant de chaque sommet doit être égale à 1.



2- Il faut que la somme des nombres de chaque ligne soit égale à 1 :

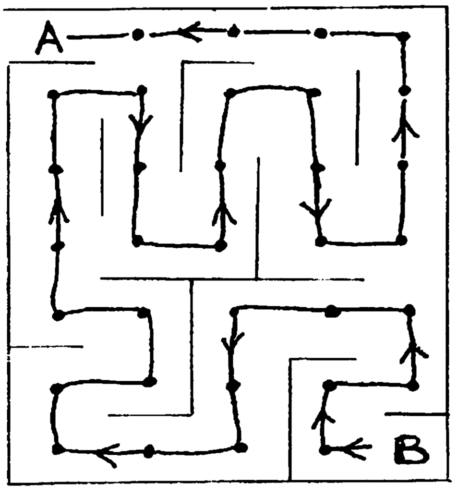
$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 \\ 0,8 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

F　　　V　　　V

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

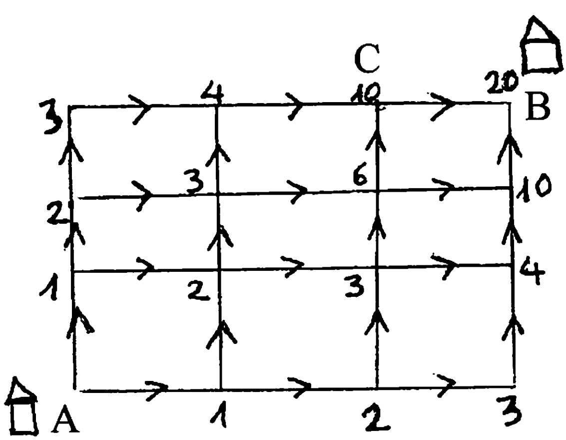
V　　　V　　　V

1 - LE PETIT POUCET



2 - COMBIEN DE CHEMINS ?

Comptons à partir de A le nombre de chemins menant à chaque croisement, ainsi à chaque croisement le nombre de chemins s'additionne.

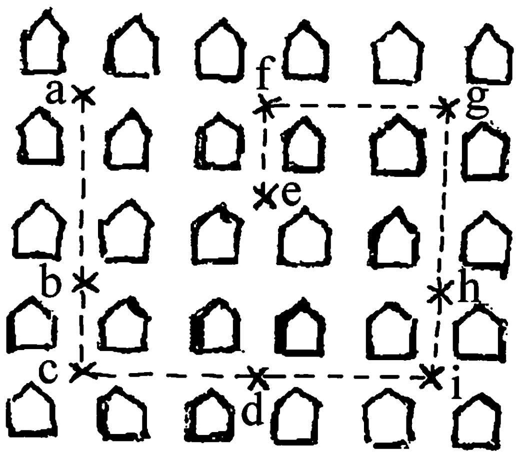


Il y a 20 chemins allant de A à B (selon les règles énoncées) dont 10 passent par C.

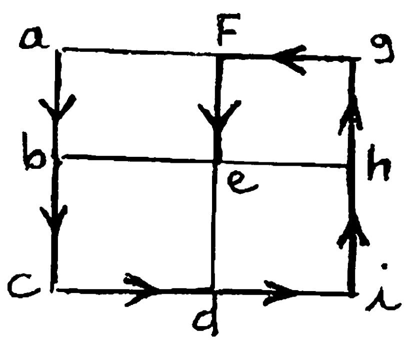
3 - LE PROBLÈME DE SURVEILLANCE DU GARDIEN DE POLICE

Voici la ronde possible (en pointillé) :

En effet, en notant a, b, c, d, e, f, g, h, i les carrefours stratégiques il s'agit de trouver un chemin passant par ces 9 carrefours sans emprunter 2 fois la même rue (ou portion de rue)



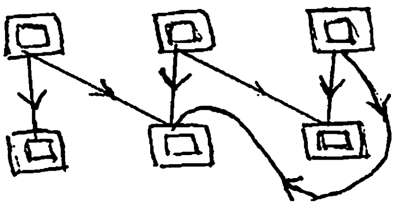
Le problème revient à trouver une chaîne éventuellement fermée de longueur minimum passant par les 9 points a, b, c, d, e, f, g, h, i. En considérant le graphe ci-dessous on trouve une chaîne possible : a b c d i h g f e ;



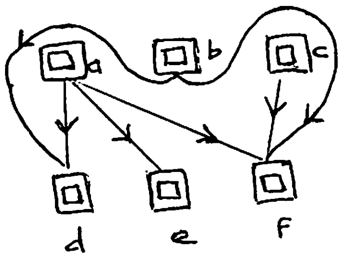
Le gardien de police ne peut revenir au point a de départ sans emprunter 2 fois la rue reliant les carrefours a et b.

4 - RÉSEAU INFORMATIQUE

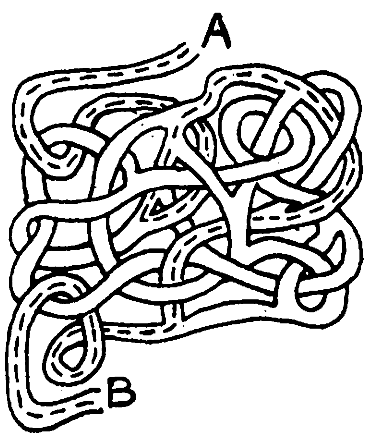
C'est possible ! Voici un raccordement parmi d'autres.



Impossible ! Dans cet essai on ne peut relier ni b à c ni c à e ; tu peux essayer d'autres raccordements c'est encore impossible !

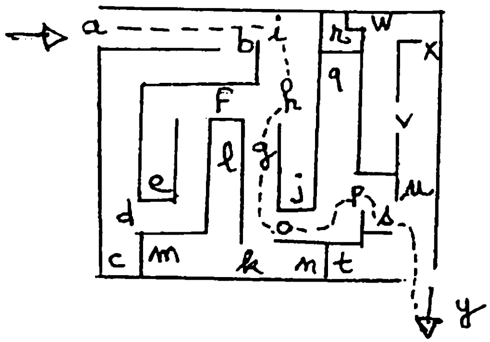


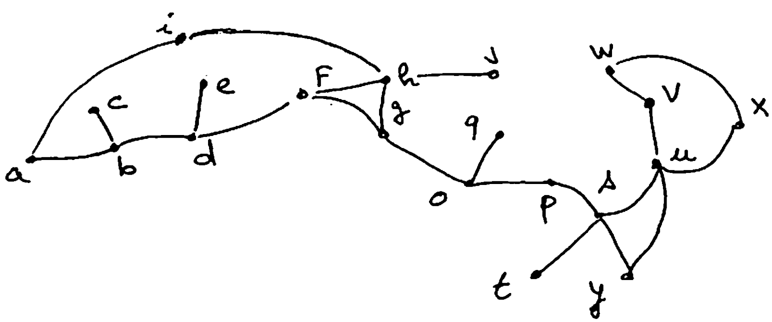
5 - SAC DE NŒUDS



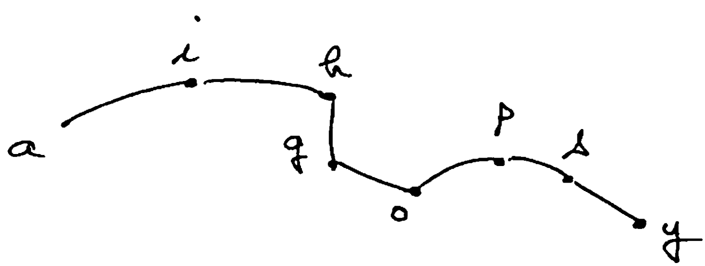
6 - COMMENT SORTIR AU PLUS VITE ?

En désignant par des lettres les carrefours et les impasses, trouver le chemin pour sortir du labyrinthe revient à trouver le chemin (le plus court) reliant a à y dans le graphe ci-dessous

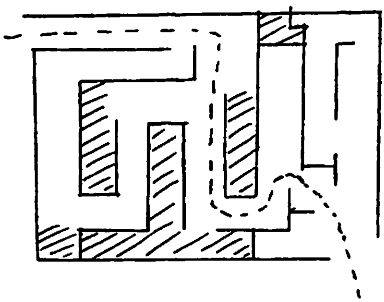




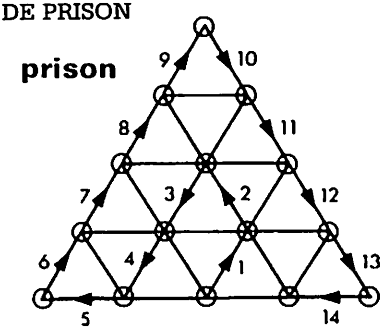
La solution est



D'où le tracé en pointillé dans le labyrinthe ci-dessus. On aurait pu trouver le chemin solution en supprimant (en les hachurant) toutes les impasses, on voit mieux ainsi les chemins possibles et parmi ceux là (s'il y en a plusieurs) le plus court.

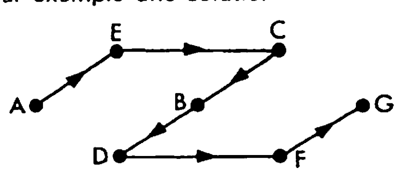


7 - LE PROBLÈME DU GARDIEN DE PRISON

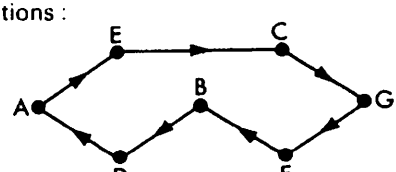


8 - LE PROBLÈME DU FACTEUR

1) Voici par exemple une solution :

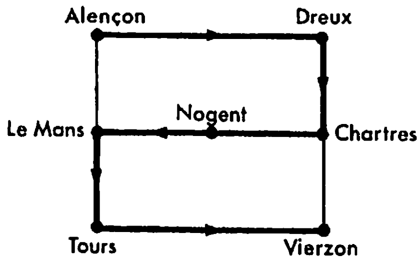


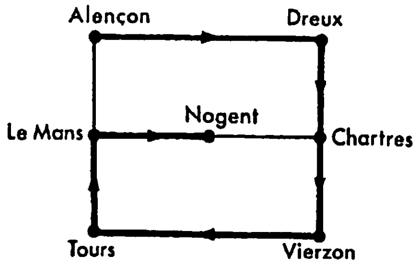
2) Voici une des solutions :



9 - LE PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

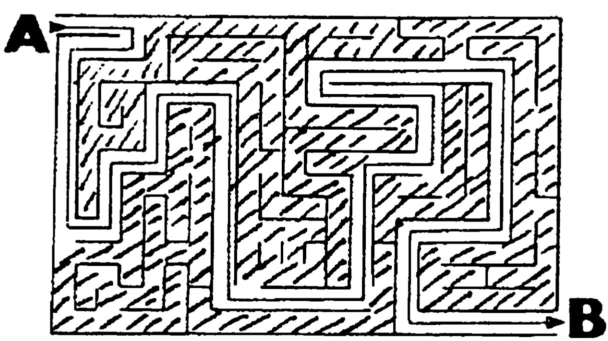
1) Voici deux des nombreuses solutions :

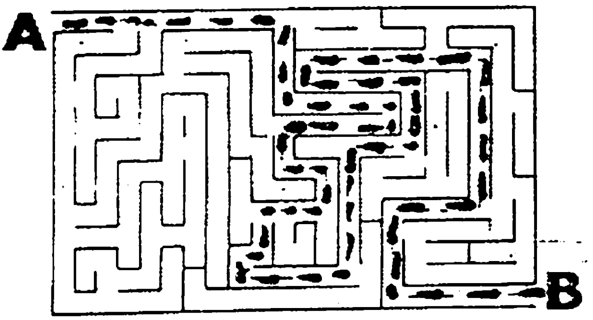


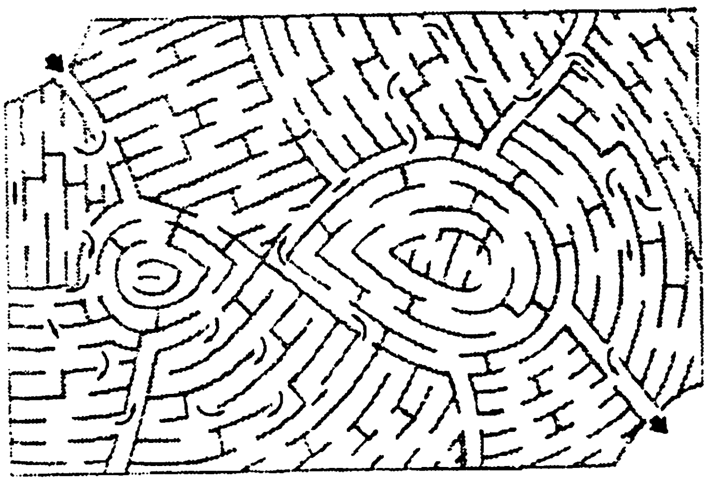


10 - LE LABYRINTHE

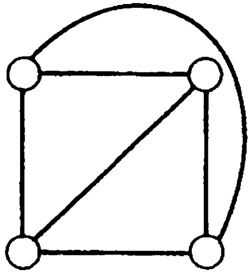
On commence par hachurer toutes les impasses : certains chemins qui n'avaient pas l'air d'être des impasses le sont après suppression des impasses qui y aboutissent. Après de telles suppressions le labyrinthe n'a qu'un seul chemin.





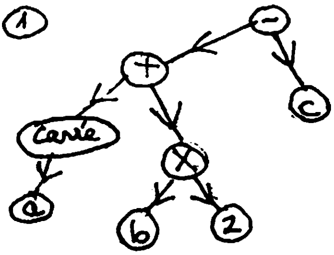


11 - LE PROBLÈME DE L'URBANISTE

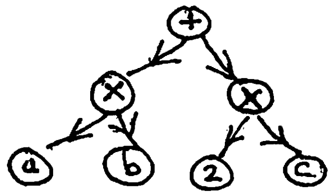


12 - ARBRES SYNTAXIQUES ET INFORMATIQUE

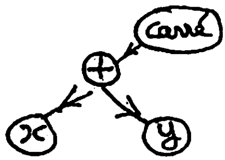
1



a^2+2b-c



$ab+2c$



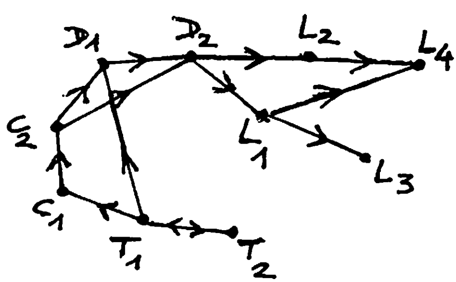
$(x+y)^2$

2

$$\frac{2}{3b}+a$$

13- LE PROBLÈME DU PROFESSEUR

On représente les 10 tâches d'un professeur par les sommets d'un graphe où les arêtes orientées entre 2 sommets indiquent s'il y a un ordre entre les tâches correspondantes. On obtient :



Les possibilités de planning sont :

T2 T1 C1 C2 D1 D2 L1 L3 L2 L4 ou

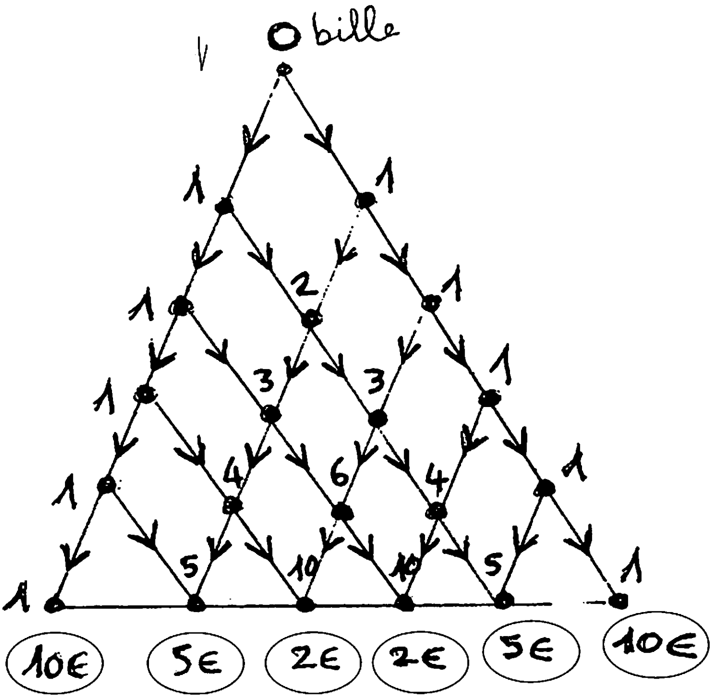
T2 T1 C1 C2 D1 D2 L2 L1 L3 L4 ou

T2 T1 C1 C2 D1 D2 L1 L2 L3 L4 ou

T2 T1 C1 C2 D1 D2 L2 L1 L3 L4 et les mêmes en inversant T1 et T2.

14 - LA PLANCHE À BILLES

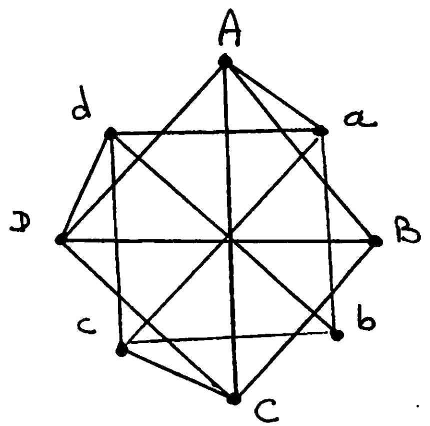
En numérotant le graphe on obtient le nombre de chemins atteignant chaque sommet.



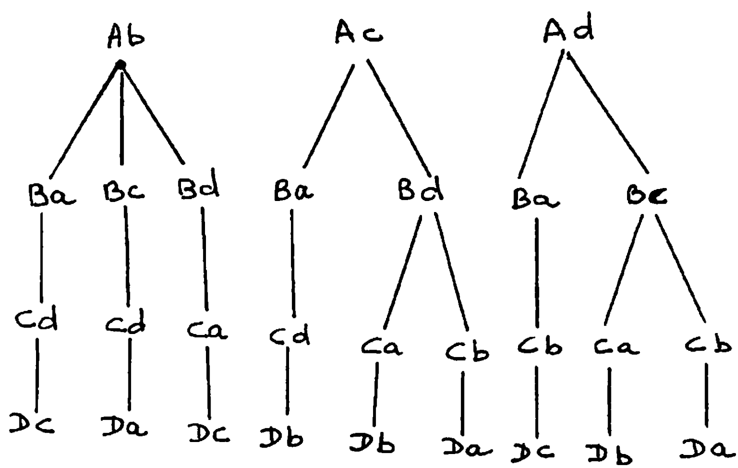
Ainsi, il y a 2 chemins gagnant chacun 10 euros ; 5 + 5 = 10 chemins gagnant 5 euros ; 10 + 10 = 20 chemins gagnant 2 euros, j'ai donc 2 chances sur 32 (nombre total de chemins) : soit 1 chance sur 16 de gagner 10euros ; 10 chances sur 32 soit 5 chances sur 16 de gagner 5 euros et 20 sur 32 soit 5 chances sur 8 de gagner 2 euros.

15 - CONCOURS DE DANSE

Le graphe ci- dessous traduit les « incompatibilités »ou plutôt les exigences :



On peut aussi faire un arbre des possibilités de couples de danseurs :



Il y aura donc 9 danses correspondants à :

Ab-Ba-Cd-Dc

Ab-Bc-Cd-Da

Ab-Bd-Ca-Dc

Ac-Ba-Cd-Db

Ac-Bd-Ca-Db

Ac-Bd-Cb-Da

Ad-Ba-Cb-Dc

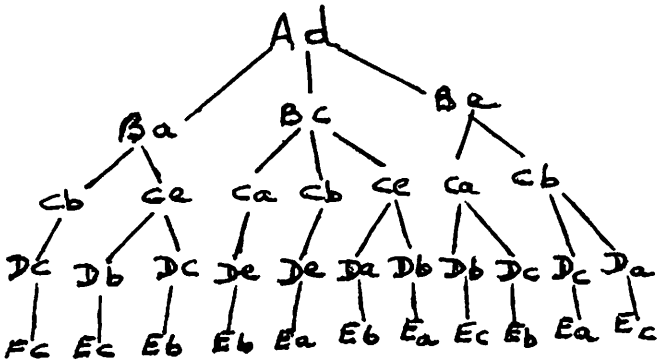
Ad-Bc-Ca-Db

Ad-Bc-Cb-Da

Avec les 5 couples : Aa, Bb, Cc, Dd, Ee on procède de même par exemple :

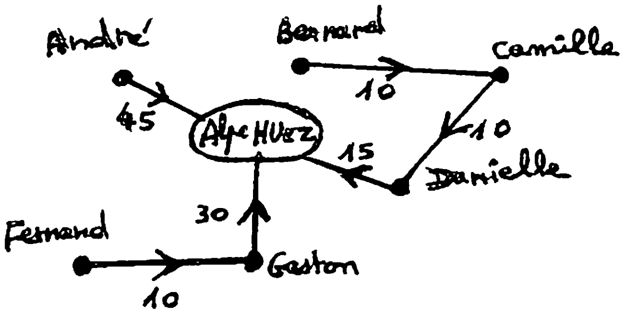
On peut associer A avec b soit le couple Ab ou Ac , Ad, Ae

Avec le choix Ad on a d'après le graphe ci-dessous 11 possibilités ; de même pour Ab, Ac, Ae. Au total on aura 4 x 11 = 44 possibilités (ou danses).



16 - QUI ARRIVE LE PREMIER À L'ALPE D'HUEZ ?

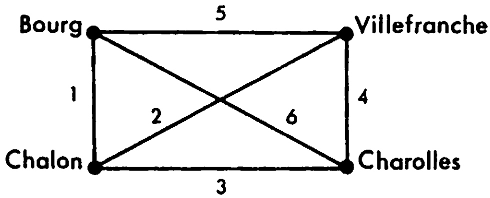
On schématise le problème par le graphe ci-dessous :



André, Bernard et Fernand partent à la même heure or André met 45 minutes ; Fernand met 40 minutes et Bernard met 35 minutes pour arriver à L'alpe d'Huez ; Donc ce ne sont ni André, ni Fernand,ni Gaston (qui arrive avec Fernand) qui seront les premiers. Par contre Bernard, Camille et Danielle arrivent ensemble, 35 minutes après le départ de Grenoble de Bernard : ils seront les premiers arrivés à la station

17 - LE REPRÉSENTANT TROP CALCULATEUR

Le représentant a effectivement menti car il est impossible qu'il soit passé par Bourg, Villefranche, Chalon, Charolles en empruntant une fois et une seule chacune des routes indiquées et numérotées sur le plan.

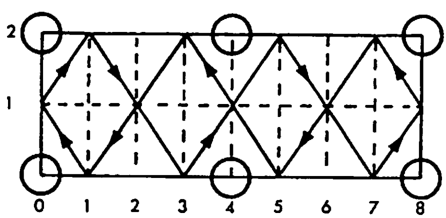


Chaque ville étant de degré 3, il ne peut y avoir de cycle eulérien : c'est-à-dire de chaîne partant d'une ville et y revenant en passant par toutes les villes en empruntant exactement une fois chacune toutes les routes indiquées

18 - LE JOUEUR DE BILLARD

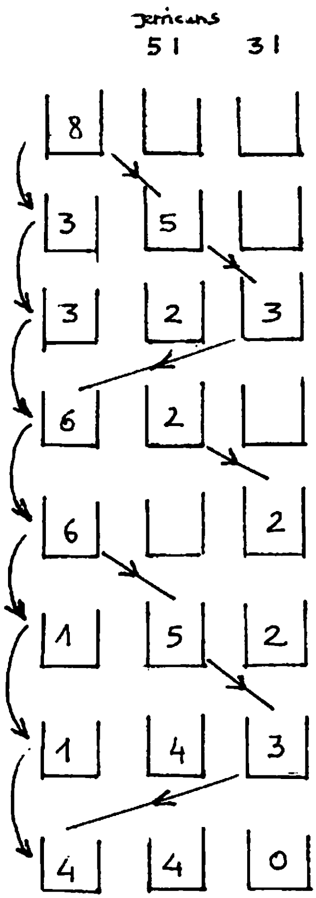
Ceci revient à chercher les chemins partant de la position (0,1) et revenant à (0,1) après avoir rencontré plusieurs fois les bords du billard, mais sans être passé aux points (0,0) (0,2) (4,0) (4,2) (8,0) (8,2) correspondant aux trous.

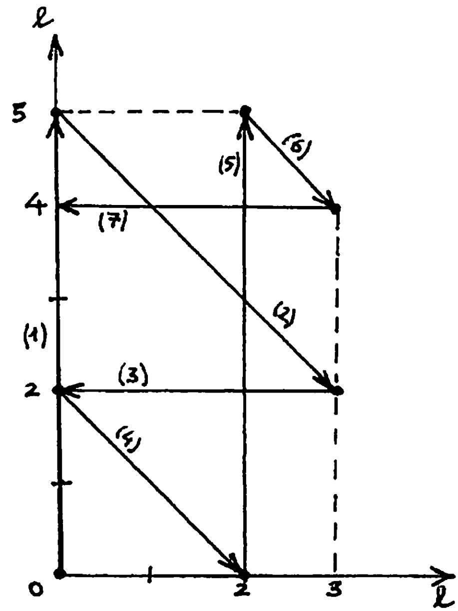
Un des chemins possibles est : (0,1) (1,2) (3,0) (5,2) (7,0) (8,1) (7,2) (5,0) (3,2) (1,0) (0,1)



19 - LE PROBLÈME DU VIGNERON

On fait un graphe où chaque sommet est un point dont les coordonnées dans un repère indiquent la quantité de vin contenu dans le jerrican de 5 l et dans celui de 3 l.



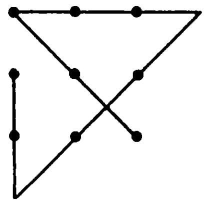


Les flèches dans le graphique correspondent aux transvasements et sont notés de (1) à (7)

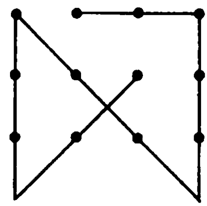
Il faut donc 7 transvasements.

20 - DES POINTS ET DES LIGNES

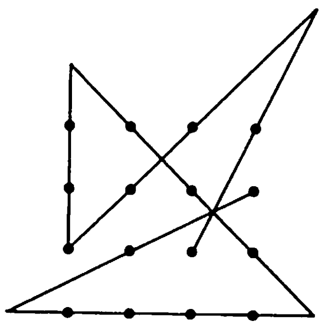
1)



2)

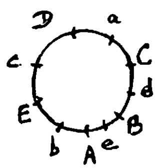


3)



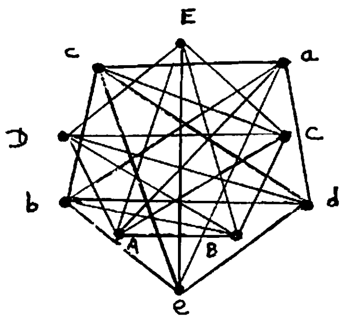
21 - LE PROBLÈME DE LA MAÎTRESSE DE MAISON

On note les couples (A,a), (B,b), (C,c), (D,d), (E,e). Une disposition possible est que l'on peut noter A e B d C a D c E b ou plus simplement :



e d a c b en fixant la place des maris : A, B, C, D, E

En faisant un graphe des « incompatibilités » : une incompatibilité correspondant à 2 personnes ne pouvant être cote à cote :



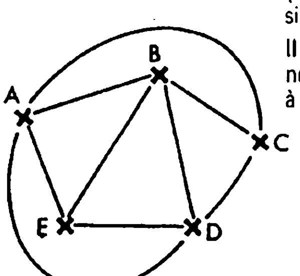
Les dispositions possibles sont :

A	B	C	D	E
e	d	a	c	b :
e	d	a	b	c
e	d	b	a	c
e	a	b	c	d
d	a	e	c	b
d	a	e	b	c
d	e	b	a	c
d	e	a	b	c
d	e	a	c	b
c	a	e	b	d
c	e	a	b	d
c	e	b	a	d
c	d	e	a	b

Elles sont au nombre de 13.

On aurait pu les obtenir aussi avec un arbre ou un tableau d'incompatibilité

22 - LE PROBLÈME DE L'ÉLECTRONICIEN



En fait le problème est impossible. En effet du sommet A peuvent être issus les conducteurs (A, D) et (A, C) ; comme le conducteur (E, B) leur interdit d'être à l'intérieur du réseau A B C D E, les conducteurs (A, D) (A, C) doivent être placés à l'extérieur. Le conducteur (D, B) ne peut être placé alors qu'à l'intérieur du réseau sinon il croiserait soit (A, D), soit (A, C).

Il est alors impossible de placer le conducteur (C, E) car il ne peut ni être à l'intérieur du réseau à cause de (D, B), ni à l'extérieur à cause de (A, D).

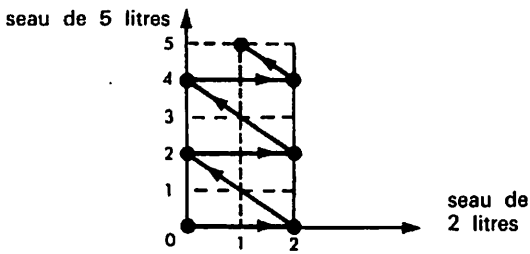
23 - LE PROBLÈME DU FERMIER

1) La seule façon d'obtenir une mesure précise du lait versé au cours d'un transvasement est de vider ou de remplir l'un des seaux de 5 litres ou 2 litres.

Les transvasements successifs sont donc :

Seau de 2 litres	Seau de 5 litres	Seau de 10 litres
0	0	10
2	0	8
0	2	8
2	2	6
0	4	6
2	4	4
1	5	4

On peut représenter graphiquement ces différents transvasements :



Les flèches correspondent aux transvasements.
Initialement les seaux de 2 et 5 litres sont vides, ce qui correspond au point (0, 0), etc.

Chaque point représente la situation après un nouveau transvasement.

D'après ce qui est dit au début de la solution, seules les situations correspondant à des points du bord du rectangle peuvent être atteintes.

On voit ainsi qu'il est impossible de donner en même temps 1 litre à Gaston et 1 litre à Firmin, le point (1, 1) se trouvant à l'intérieur du rectangle.

Le fermier donne d'abord 1 litre à Gaston d'après la méthode précédente, il lui reste alors 9 litres, il a alors deux possibilités :

– soit il recommence sa traite de façon à compléter le seau de 10 litres, et recommence pour Firmin les mêmes transvasements que ceux effectués pour Gaston ;

– soit il poursuit les transvasements précédents de la façon suivante :

Seau de 2 litres	Seau de 5 litres	Seau de 10 litres
0	5	4
2	3	4
0	3	6
2	1	6

la deuxième méthode étant plus rapide.

24 - LE PROBLÈME DE CYRIL

1 - Dans le graphe proposé il y a 2 sommets seulement de degré impair D et L donc il existe bien une chaîne eulérienne reliant D et L, le graphe étant connexe. Il y a donc un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues du plan si toutes les rues étaient à double sens ; mais il y a des sens interdits !

Néanmoins il existe un trajet : LSCBPSBDCLD. Il n'est pas possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues car tous les sommets ne sont pas de degré pair.

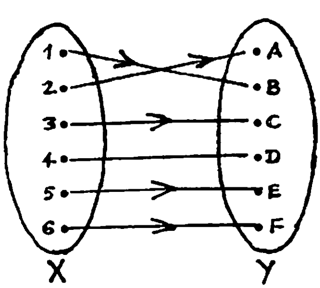
2 - Les trajets partant de D sont

DCBP de longueur	17
DLSP	21
DCBSP	16
DLCSP	22
DLCBP	22
DLSBP	32
DLCSBP	33

Le trajet le plus court possible est donc DCBSP ; (On peut aussi faire un algorithme pour trouver ce résultat).

25 - PREMIER DE CORDÉE

1 - a - Toute cordée est alors une numérotation de 1 à 6 des 6 alpinistes.



Il y a 6 choix pour le 1^{er} de cordée ; le premier de cordée étant choisi il y a 5 choix pour le $2^{ème}$ puis 4 choix pour le $3^{ème}$.

Par conséquent, le nombre de cordées est le nombre de permutations des 6 alpinistes soit 6 ! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720 b - Le 1^{er} de cordée étant A, les 5 autres pouvant être à n'importe quelle place donc le nombre de cordées est le nombre de permutations de BCDEF soit : 5 ! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120.

c - Il y a 2 possibilités : A est 1^{er} de cordée donc 5 ! possibilités de cordées soit120.
B est 1^{er} de cordée donc 5 ! possibilités de cordées SOIT 120.

D'où le nombre de cordées où A et B sont les seuls capables d'êtres 1^{er} est 120 x 2 = 240.

2 - Si A est 1^{er} et B est $6^{ème}$ il reste 4 places où CDEF peuvent permuter d'où 4 ! Cordées possibles soit 4 x 3 x 2 x 1 = 24 ; de même si A et C sont respectivement 1^{er} et $6^{ème}$ il y a encore 4 ! = 24 cordées possibles d'où le résultat : 24 + 24 = 48.

26 – DÉMÉNAGEMENT

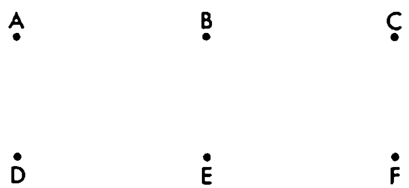
On désigne les meubles par leur initiale P, B, A, C, T les déplacements sont

P3→P2 B6→B3 A5→A6 S4→S5 T1→T4 P2→P1 S5→S2 T4→T5 P1→P4 S2→S1 T5→T2 P4→P5 S1→S4 T2→T1 B3→B2 A6→A3 P5→P6

IL faut 17 déplacements.

27 - LE PROBLÈME DU PROMOTEUR

Notons A, B, C, D, E, F les points du réseau :

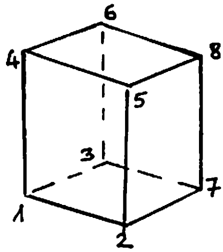


Traçons des arrêtes (AD (AE) (AF). Ces arrêtes figurent à l'intérieur du rectangle A C F D Nous ne pouvons joindre B à D que par l'extérieur de ce rectangle, de même pour (BE) et (BF). IL est alors impossible de joindre C à E sans croiser soit (AF), soit (BF), soit (BD).

Le problème est donc impossible.

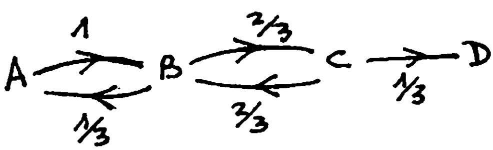
28 - LA COCCINELLE ET LES PUCERONS

En notant les sommets de la boite cubique comme ci- dessous :



Il y a 10 chemins reliant 1à 8 sans emprunter 2 fois la même arête ni repasser 2 fois par un sommet :

1258-1278-1378-1368-1468-1458-127368-125468-137258-145278. En fait on peut schématiser le problème par le graphe pondéré :



A étant le sommet 1, B représentant les sommets 2 ou 3 ou 4, C représentant 5 ou 6 ou 7, D étant le sommet 8. Si l'on désigne par x_a le nombre d'arêtes parcourues en partant de A, x_b le nombre d'arêtes parcourues en partant de B...... ;

On a $x_a = 1 + x_b$

$x_b = 1 +(1/3)\ x_a +(2/3)\ x_c$

$x_c = 1 +(2/3)\ x_b$

D'où

$x_a = 1 + x_b$

$x_b = 1 +(1/3)(1 + x_b) + (2/3)(1 + (2/3)\ x_b)$

$x_c = 1 +(2/3)\ x_b$

Soit

$x_a = 1 + x_b$

$x_b\text{-}(1/3)\ x_b\text{-}(4/9)\ x_b = 2$

$x_c = 1 +(2/3)\ x_b$

Donc

$x_a = 1+ x_b$

$x_b = 9$

$x_c = 1 + (2/3)\ x_b$

Et

$x_a = 10$

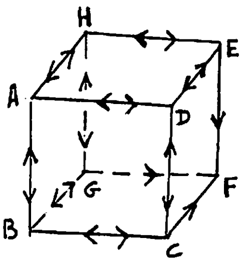
$x_b = 9$

$x_b = 7$

La coccinelle aura parcouru (en moyenne) 10 arêtes lorsqu'elle aboutira à ses « faims » !

29 - « A PAS DE FOURMI »

1 - De A la fourmi peut en 1 pas aller en B ou en H ou en D. En 2 pas elle peut faire les trajets : ABA ou AHA ou ADA ou ABC ou ABG ou ADC ou ADE ou AHG ou AHE ; il n'y a aucune possibilité que la fourmi atteigne en 2 pas.



2 - D'après 1 - il y a 3 chances sur 9 c'est-à-dire 1 chance sur 3 que la fourmi revienne en A après 2 pas.

3 - Si l'on désigne par x_A le nombre de pas que la fourmi devra faire pour atteindre l'intérieur de la boite (c'est-à-dire F)

$x_A = 1 + x_I$; I étant soit B soit D soit H et x_I étant le nombre de pas nécessaires pour atteindre F en partant de I (le 1 correspond au pas AB ou AD ou AH). De même J désignant E ou C ou G on a :

$x_I = 1 + (1/3)\, x_A + (2/3)\, x_J$

$x_J = 1 + (2/3)\, x_I$

D'où

$x_I = 1 + (1/3)(1+x_I) + (2/3)(1 + (2/3)\, x_I)$

$x_I = 2 + 1/3\, x_I + 4/9\, x_I = 2 + 7/9\, x_I$

d'où $2/9\, x_I = 2$

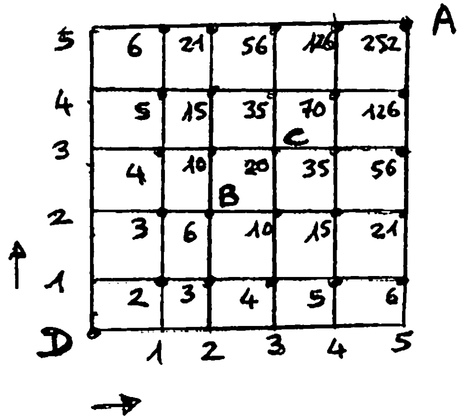
On trouve donc $x_I = 9$ et par suite $x_A = 10$.

Le nombre moyen de pas que la fourmi devra faire pour atteindre le sucre est 10.

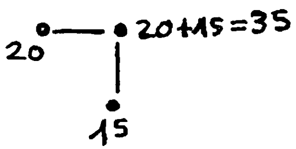
30 - LE LIÈVRE ET LA TORTUE

1 - Le lièvre et la tortue ont tous deux raison !

2 -



Les nombres de chemins s'ajoutent ainsi :

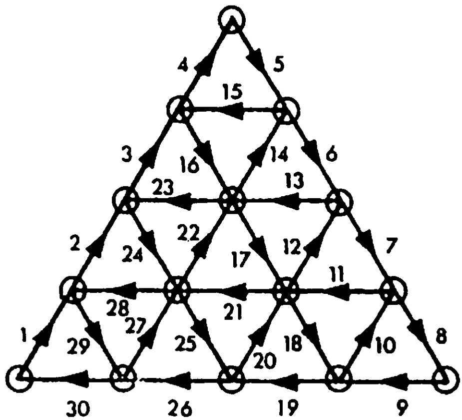


3 - Le nombre de plus courts chemins arrivant à B est de 6, le nombre de plus courts chemins reliant B à A est égal au nombre de plus courts chemins reliant D à C donc 20. Par conséquent le nombre de plus courts chemins arrivant à A en passant par B est 6 x 20 = 120 ; il y a donc 120/252 chances soit 30/63 = 47,62 % environ de chances que le lièvre emprunte ce chemin.

4 - De même il y a 2 chemins allant de B à C (les lus courts) et 6 chemins reliant C à A donc 6 x 2 x 6 = 72 chemins possibles empruntables par la tortue ; Il y a donc 72/252 = 6/21 = 28,57 % environ de chances que la tortue fasse ce chemin.

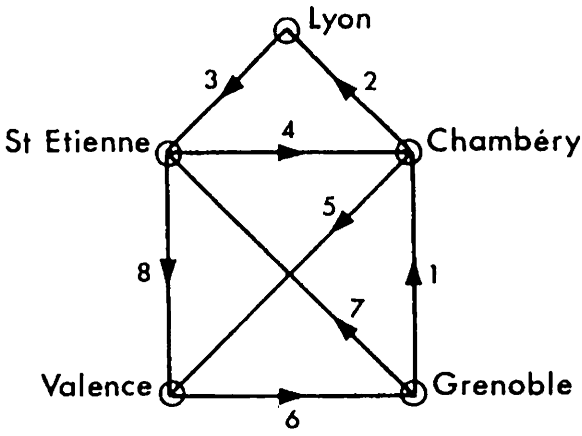
5 - Les chances trouvées précédemment n'indiquent pas qui arrivera le premier !

31- LA RONDE DU GARDIEN DE PRISON

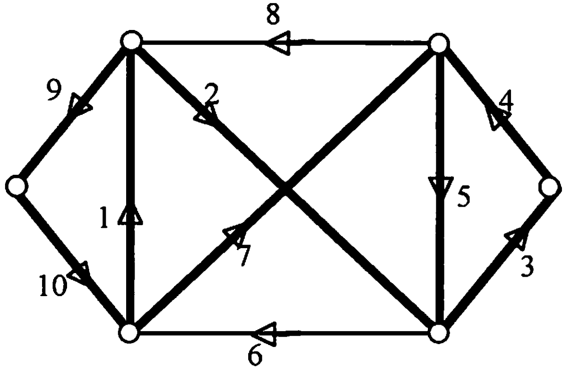


32 - LE PROBLÈME DU RALLYMAN AMATEUR

Le point de départ ne peut être ni Lyon ni Saint Etienne, ni Chambéry, car dans le cas contraire le trajet ne pourrait pas passer dans toutes les villes sans emprunter plusieurs fois une des routes. Le point de départ est donc Valence ou Grenoble, il est facile de voir que le point d'arrivée est respectivement Grenoble ou Valence. L'arrivée n'ayant pas lieu à Grenoble, elle a lieu à Valence et par conséquent le départ a lieu à Grenoble, d'où le trajet :



33 - LE PROBLÈME DU COMMISSAIRE DE COURSE



34 - LE PROBLÈME DE DÉNEIGEMENT

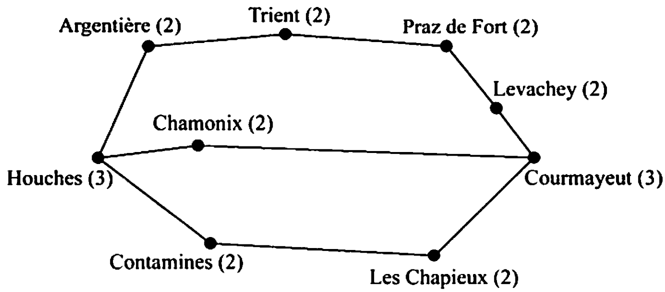
Le plan du village est un graphe où les sommets ont pour degrés :

local des pompiers : 3 ; boucherie : 3 ; mairie : 4 ; gare : 4 ; épicerie : 4 ; église : 2 ; boulangerie : 2.

1 - Il y a donc seulement 2 sommets de degré impair d'où il existe un chemin eulérien joignant le local pompiers à la boucherie (en passant par chacune des rues une seule fois), ce parcours est : local pompiers - boucherie - gare - mairie - local pompiers, gare, épicerie, école, église, mairie, école, boulangerie, épicerie, boucherie.

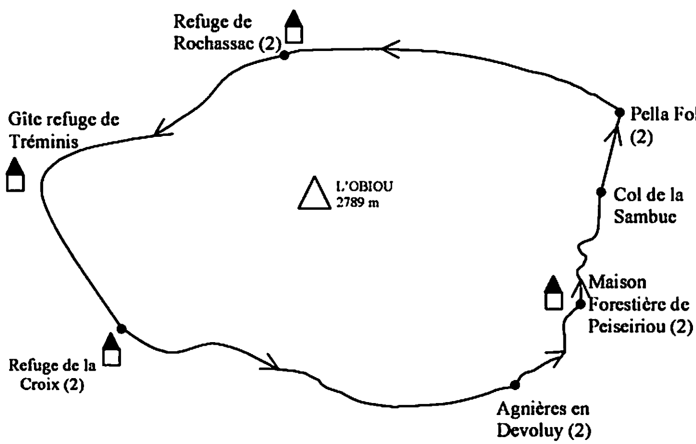
2 - Le chasse neige ne peut revenir au local pompiers sans repasser dans la rue déjà déneigée reliant la boucherie et le local

35 – LE TOUR DU MONT BLANC



Le degré de chaque sommet est indiqué entre parenthèses : seuls 2 sommets H et Cou sont de degré impair de plus le graphe est connexe donc il existe (d'après le théorème d'Euler) une chaîne eulérienne (parcourant toutes les arêtes, chacune étant parcourue une seule fois) dont le point de départ est soit H (les Houches) soit Cou (Courmayeur) ; l'arrivée étant alors respectivement Cou ou H. Il n'y a pas d'itinéraire revenant au point de départ et parcourant chaque arête une fois et une seule (pas de cycle eulérien) car tous les sommets ne sont pas de degré pair ; il faudrait pour cela supprimer C (Chamonix) le cycle eulérien étant alors H Co Ch Cou L P T A H ou dans l'autre sens.

36 - LE TOUR DE L'OBIOU



Chaque sommet du graphe ci-dessus étant de degré pair (2), le graphe étant connexe il existe un cycle eulérien partant de Pellafol et y revenant (théorème d' Euler) :

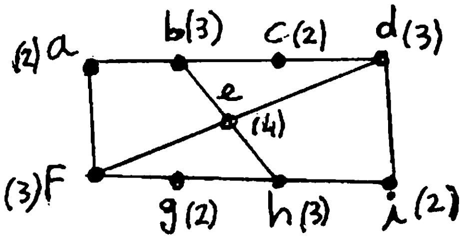
Le 1er jour il est prévu Pellafol - Refuge de Rochassac : 6 h

2ème jour	Refuge de Rochassac - gite refuge de Tréminis
3ème jour	Refuge de Tréminis - Refuge de la croix
4ème jour	Refuge de la croix - Agnières : 5 h 30
5ème jour	Agnières - maison forestière : 5 h 30
6ème jour	Maison forestière - Pellafol : 5 h 30

Il faut donc prévoir 6 jours.

37 - PROBLÈME DE CIRCULATION DANS LE MUSÉE

Chaque ville étant représentée par un point et une arête reliant 2 points représentant une porte, on a le graphe :

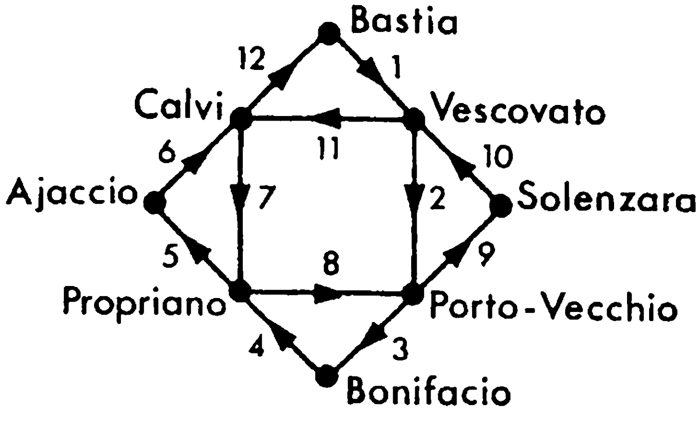


Les degrés des sommets sont indiqués entre parenthèses.

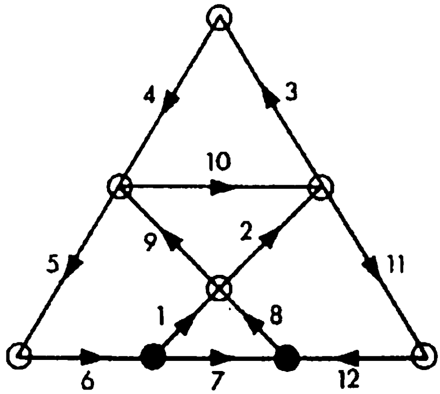
1 - Pour ce graphe il n'y a ni chaîne eulérienne (on a 4 sommets de degré impair et pas 2), ni cycle eulérien (il n'y a pas que des sommets de degré pair) donc on ne peut visiter ainsi toutes les salles. Les portes à supprimer pour faire la visite de toutes les salles sont par exemple : be et de ; ainsi b, d et e sont de degré 2 et alors il existe une chaîne eulérienne reliant f et h : f a b c d i h e f g h

2 - Il n'est pas possible de supprimer d'autre porte afin d'obtenir un cycle eulérien car quoi qu'on fasse on aura au moins un sommet de degré 1.

38 - LE MOTOCYCLISTE FLÂNEUR



39 - LE PROBLÈME DES GARDIENS DE LA PAIX



Pour que leur trajet n'emprunte qu'une fois et une seule chacune des rues, c'est-à-dire que leur ronde soit la plus courte possible, il faut que les gardiens partent obligatoirement de l'un ou l'autre des bars « noirs » et ils aboutissent alors, à la fin de leur ronde, à l'autre.

40 - L'ARBRE DE NOËL

Non car le parcours est mal fléché : il faut inverser le sens de H vers G et flécher de G vers H.

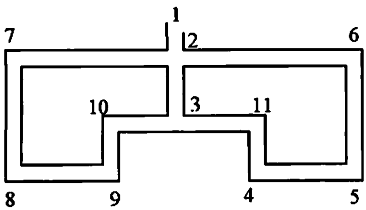
En fléchant de G vers H chaque sommet du graphe étant de degré pair, le graphe étant connexe il existe un cycle eulérien donc on peut parcourir tout l'itinéraire (chaque piste étant parcourue une seule fois) en partant de n'importe quel sommet pour y revenir, par exemple : B C D E K G H I J G F E L M A B.

Il y a exactement 2 sommets de degré impair A et B donc il existe une chaîne eulérienne : B C D E K G H I J G F E L M A. Cette chaîne part obligatoirement de B pour arriver à A.

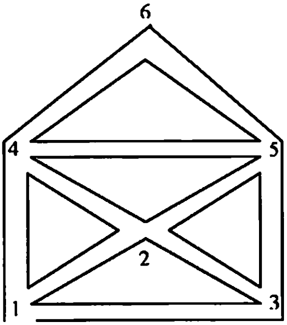
41 - OÙ EST DONC LE TRÉSOR ?

En faisant un graphe où chaque sommet correspond à un carrefour et chaque arête représente un couloir du labyrinthe, la théorie des graphes permet de se sortir de n'importe quel labyrinthe, mieux, d'explorer et de partir à la recherche du trésor !

Les graphes des labyrinthes proposés sont :

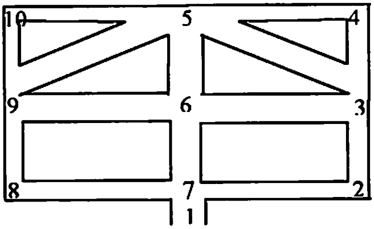


Labyrinthe 1



Labyrinthe 2

Dans les graphes 1 et 2, il y a 2 sommets de degré impair : les sommets 1 et 3, tous les autres sommets sont de degré pair ; donc il existe un chemin (chaîne) eulérien reliant ces 2 sommets en empruntant chaque arête une seule fois. Pour le graphe 1 il s'agit du chemin : 1-2-6-5-4-11-3-2-7-8-9-10-3 puis 2-1 pour sortir. Pour le graphe 2 il s'agit de 1-2-3-1-4-5-6-4-2-5-3, puis 1 pour sortir.



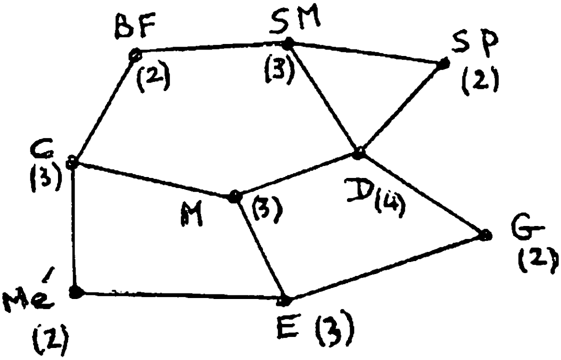
Labyrinthe 3

Le labyrinthe 3 a pour graphe

Les sommets sont numérotés de 1 à 10, seuls les sommets 1 et 5 ont des degrés impairs : il y a donc un chemin eulérien allant de 1 à 5 en passant par tous les couloirs, il s'agit par exemple de 1-7-2-3-6-9-8-7-6-5-3-4-5-10-9-5 puis pour sortir 6-7-1.

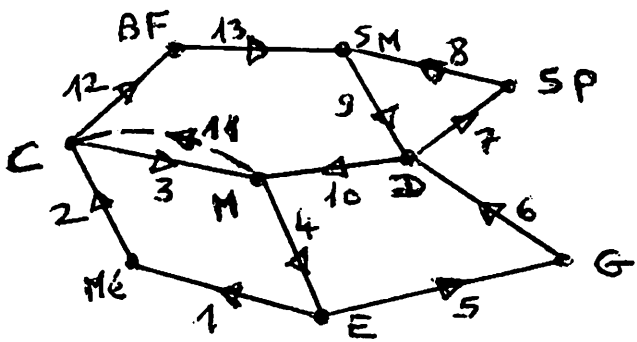
42 - « LA TRACE BLANCHE »

On cherche le degré de chaque sommet du graphe ci-dessous qu'on indique entre parenthèses.



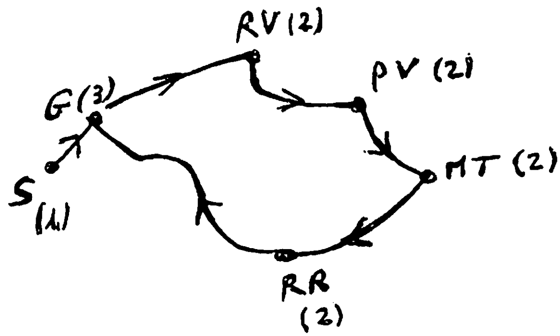
BF : Baraque des feuilles
SM : Le sabot de Maron
SP : Scialet de Pertuzon
D : Davière
M : Meillan
C : Colombière
Mé : Méaudre
E : Les Eymes
G : Les Gonnets

Il y a 4 sommets de degré impair, on ne peut donc trouver une chaîne eulérienne reliant un sommet à un autre (il faudrait 2 sommets de degré impair seulement ou 0 : pour un cycle eulérien). Si l'on crée une 2ème liaison Meillan - Colombière alors M et C auront pour degrés 4 et l'on peut relier Les Eymes à Sabot de Maron (qui sont les seuls de degré impair) par une chaîne eulérienne : l'itinéraire est par exemple : E-Mé-C-M-E-G-D-SP-SM-D-M-C-BF-SM



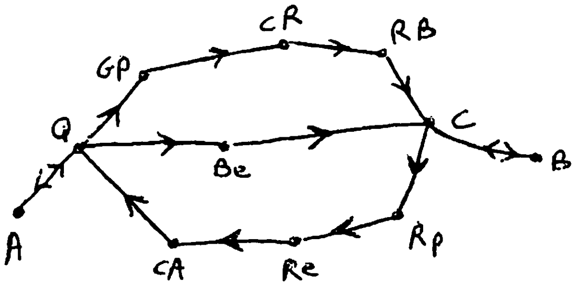
43- LE TOUR DES LACS DU MERCANTOUR

1 - Il n'est pas possible de parcourir tous les chemins (y compris le chemin de l'énergie) car on n'a pas que des sommets de degré pair ni seulement 2 sommets de degré impair ; par contre on peut faire un circuit faisant le tour des lacs en partant de Saint Etienne de Tinée et arrivant aux granges de Fournels si l'on exclut de prendre le chemin de l'énergie (seuls Saint Etienne de Tinée et les granges sont de degré impair) ; le graphe étant bien sûr connexe.



2 - On voit aisément qu'on peut faire au maximum 2100 m de dénivelé par jour donc on peut réaliser le tour des lacs en 3 jours minimum.

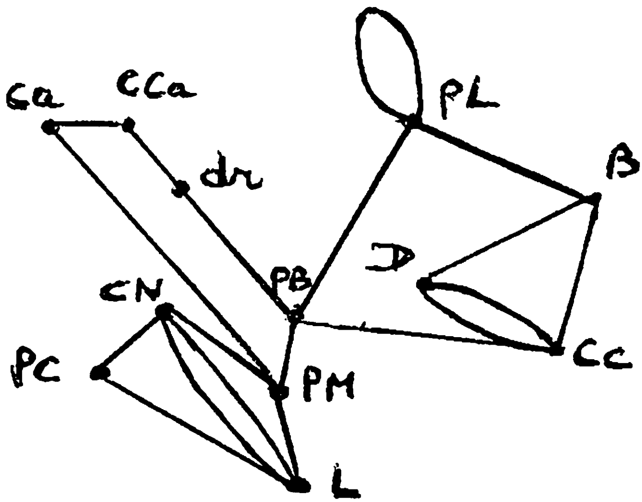
44 - LE TOUR DU BEAUFORTIN



1 - Il faut flécher de Queije vers Beaufort et de Beaufort à Cornuet. Il faut supprimer les liaisons Queije-Beaufort et Beaufort - Cornuet.

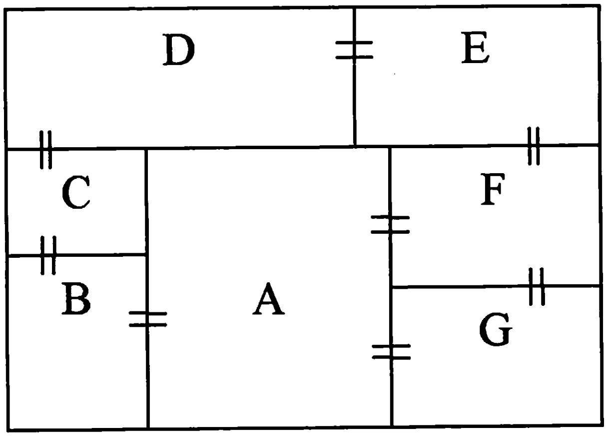
2 - Chaque étape mentionnée pouvant se faire en moins de 8 h ou 9 H pour la dernière il faudra au minimum 7 jours.

45 - COURSE DE FOND DANS LE VERCORS SUD

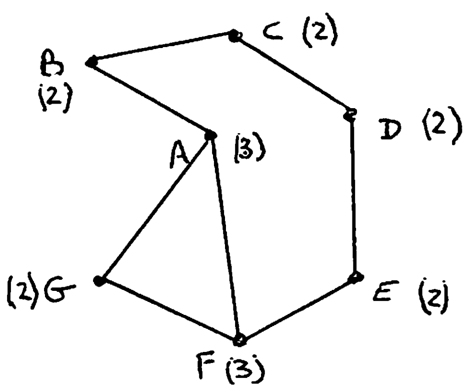


Degrés : Chaud-clapier : (Cc) : 4
La Doline : (D) : 3
La Baume : (B) : 3
Pelouse de Bournette : (PB) : 4
Pelouse du lièvre blanc : (PL) : 4
Pot de la Muette : (PM) : 4
Combe Noire : (CN) : 4
Pra Courrier : (PC) : 2
Lente : (L) : 4
Caramentrant : (Ca) : 2
Col de Carri : (C Ca) : 2
Draille des moutons : (dr) : 2

Il y a 2 sommets impairs, le graphe étant connexe, il existe donc une chaîne eulérienne (il faut 2 sommets impairs et 2 seulement), il n'y a pas de cycle eulérien (il ne faudrait que des sommets pairs). Donc il n'est pas possible de faire tout le parcours sans repasser 2 fois par une piste ou une portion de piste en partant d'un point et en y revenant. Par contre il existe un parcours partant d'un sommet impair et reliant l'autre sommet impair (par exemple de la Doline à la Baume). Si l'on crée la 2ème liaison : la Doline - la Baume,tous les sommets sont de degré pair il existe alors un cycle eulérien : Cc-D-B-D-Cc-B-PL-PL-PB-PM-CN-L-CN-PC-L-PM-Ca-C Ca-dr-PB-Cc



Le graphe correspondant est



1 - Les arêtes du graphe représentent les passages. On a indiqué à chaque sommet le degré. 2 sommets seulement ayant un degré impair, le graphe étant connexe, il existe d'après le théorème d'Euler une chaîne eulérienne reliant A et F. Le directeur peut donc flécher ainsi : A-G-F-A-B-C-D-E-F.

2 - Pour obtenir un parcours fermé il faut qu'il existe un cycle eulérien et pour cela il faut que tous les sommets soient de degré pair il est donc nécessaire de supprimer le passage AF.

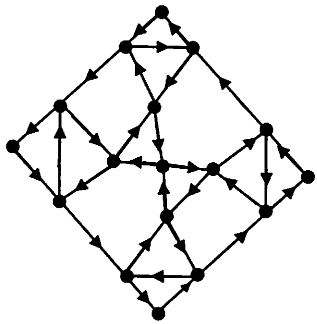
Ainsi le parcours sera : A-G-F-E-D-C-B-A

47 - TOILE D'ARAIGNÉE

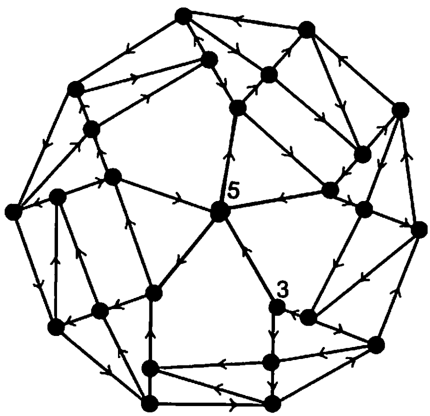
Le problème revient à chercher dans chaque graphe (toile d'araignée) s'il existe une chaîne eulérienne : c'est le cas de la toile n° 3 qui a 2 sommets de degré impair (ceux marquées 3 et 5), tous les autres sommets étant de degré pair ; d'où le tissage possible commençant au sommet 3 et finissant au sommet 5 ou le contraire (le graphe étant connexe).

Pour la toile n° 2, le graphe n'ayant que des sommets de degré pair, ce graphe admet un cycle eulérien : un seul fil reliant tous les sommets en partant et arrivant au même point (voir la figure ci-dessous). Pour la toile n° 1 : l'araignée s'y est pris en plusieurs fois : pas de chaîne eulérienne ni de cycle eulérien car il y a 1 sommet de degré pair (degré 4) et tous les autres sont de degré impair (degré 3).

Toile n° 2

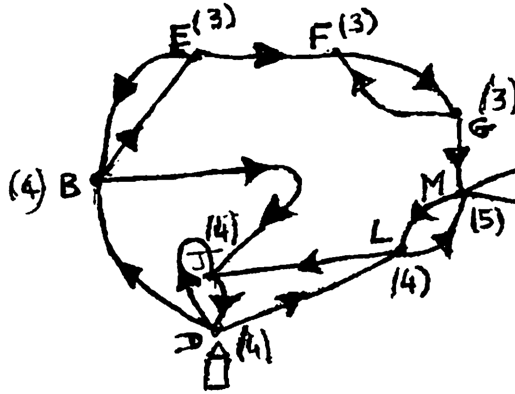


Toile n° 3

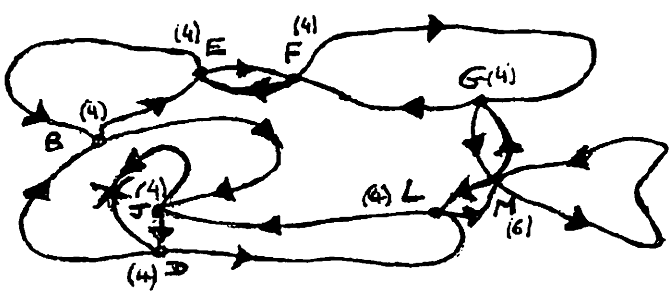


48 - DANS LE MASSIF DE BELLEDONNE

Voici le graphe correspondant et le degré de chaque sommet (indiqué entre parenthèses) :

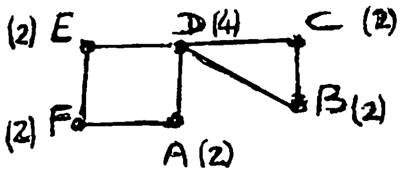


Il n'y a pas que des sommets de degré pair donc il n' y a pas de solution. Pour qu'un itinéraire passe par toutes les pistes (chaque piste étant parcourue une seule fois) et revienne à son point de départ il faut rajouter les liaisons de M vers G et de F vers E et flécher de J vers D.

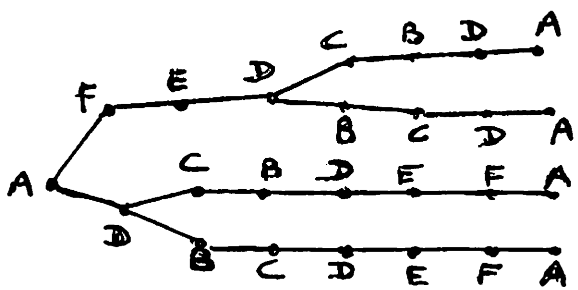


49 - ENQUÊTE POLICIÈRE

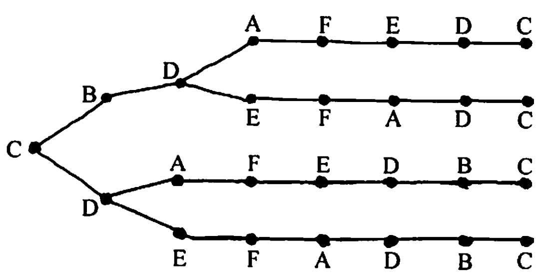
La maison comporte 6 pièces et 8 portes dont 2 peuvent être la porte d'entrée en A ou en C. On peut modéliser par un graphe d'ordre 6 dont les sommets sont les pièces et les arêtes représentent les portes entre 2 pièces



Tous les sommets étant de degré pair, le graphe étant connexe donc il existe (d'après le théorème d'Euler) un cycle eulérien c'est-à-dire une chaîne fermée constituée de toutes les arêtes, chacune étant parcourue une fois et une seule. Donc le cambrioleur a pu visiter toutes les pièces en franchissant toutes les portes, chacune une seule fois. Il a pu entrer par A ou C et a pu repartir par où il était entré. Les possibilités sont de A à A :



Et de C vers C

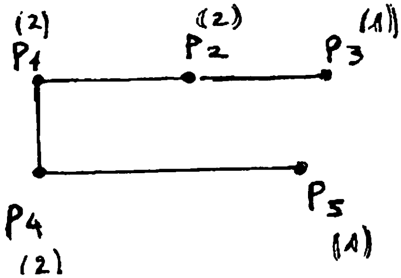


Il y a donc 8 possibilités.

- Un itinéraire possible en entrant par A est : AFEDBC, les portes fermées étant AD et DC. Un itinéraire possible en entrant par C est : CBDEFA, les portes fermées étant encore AD et DC.

50 - TRAVERSÉE DE FRONTIÈRES

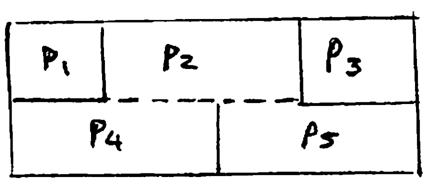
Voici le graphe où sont indiqués entre parenthèses les degrés des sommets ; chaque arête représentant une frontière ;

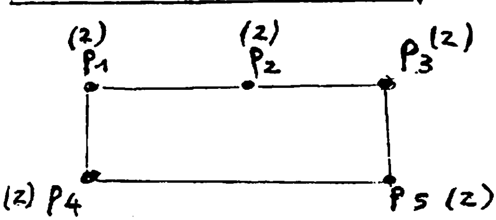


Ce graphe n'admettant pas de cycle eulérien : un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

1 - Il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule. Par contre il y a un chemin joignant P3 et P5 car le graphe admet exactement 2 sommets de degré impair.

2 -

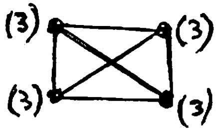




Ce graphe admet un cycle eulérien (il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair), donc il est possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule.

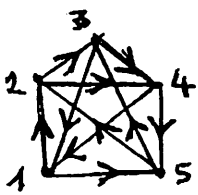
51 - LE PROBLÈME DE L'ARCHITECTE (N°1)

Chaque pièce étant représentée par un point, deux points reliés signifiant que les deux pièces s'ouvrent l'une sur l'autre, on obtient le graphe :



Le problème revient à chercher s'il est possible de relier chaque point à tous les autres en empruntant une fois et une seule chaque arête. Chaque point ou sommet du graphe étant de degré impair (indiqué sur la figure entre parenthèses), on sait qu'il ne peut exister de chaîne eulérienne donc le problème n'a pas de solution : c'est l'architecte qui a raison !

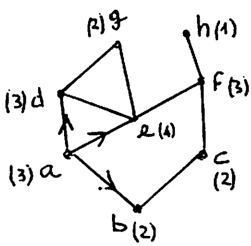
Avec 5 pièces : on a le graphe suivant :



Les pièces étant numérotées de 1 à 5, elles communiqueront toutes ensemble si l'on peut relier tous les points en passant par toutes les arêtes en empruntant chaque arête une fois et une seule. Les sommets du graphe ayant tous un degré pair, le graphe étant connexe le théorème d'Euler nous permet d'affirmer qu'il existe un cycle eulérien : par exemple 12345241531. Le problème est possible.

52 - PAUVRE PETIT LAPIN

I-

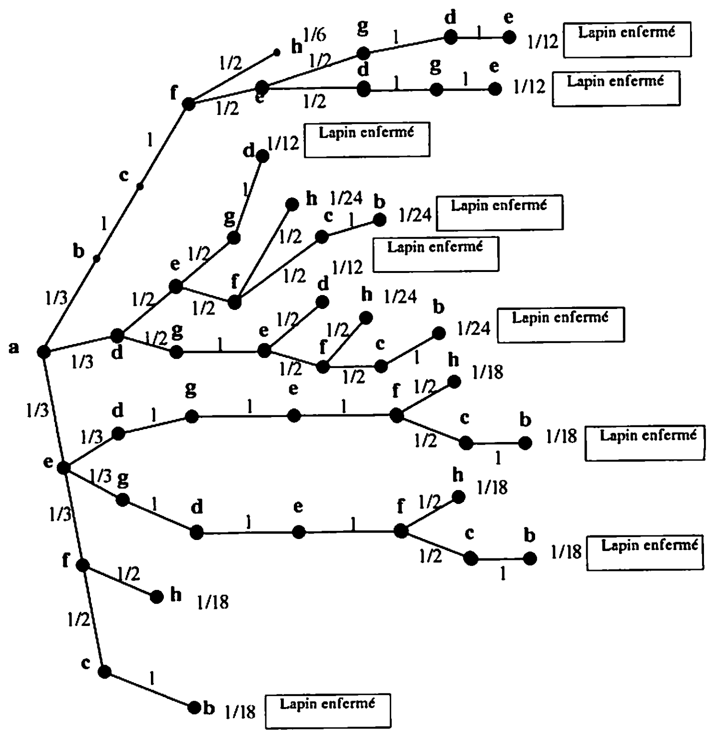


1 - On ne tient évidemment pas compte de la dimension des cavernes, le chemin le plus court est : a e f h.

2 - D'après les degrés(indiqués entre parenthèses) des sommets du graphe il n'y a pas de chaîne eulérienne (4 sommets sont de degré impair). Il n'existe donc pas de chemin empruntant toutes les galeries, même si chacune est parcourue une fois c'est une chance pour le lapin !

II -

1 - Le graphe pondéré (des probabilités) des différents chemins possibles pour le lapin est :



2 - La probabilité que le lapin emprunte le chemin le plus court c'est-à-dire a e f h est d'après l'arbre précédent : (1/3) x (1/3) x (1/2) = 1/18

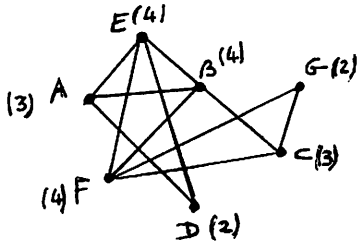
Le lapin a 1 chance sur 18 de voir le plus rapidement le jour.

3 - La probabilité que le lapin s'en sorte est : 1/6 + (2 x 1/24) + (3 x 1/18) = 1/6 + 1/12 + 1/6 = 5/12

Le lapin a même pas 1 chance sur 2 de s'en sortir, heureusement que ce n'est qu'un jeu électronique !

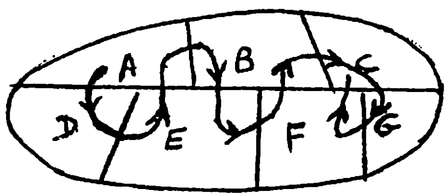
53 - JUMPING

En faisant un graphe où chaque sommet représente une des aires et les arêtes les obstacles (ou palissades) à franchir, on obtient :

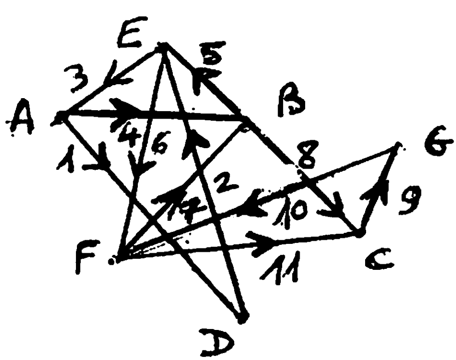


Il y a 2 sommets de degré impair : A et C (ce sont les seuls), donc puisque le graphe est connexe il existe une chaîne eulérienne reliant A et C, un des trajets possible est ADEABEFBCG FC, la longueur de cette chaîne étant égale à 11 le nombre d'obstacles franchis est égal à 11 : tous les obstacles sont franchis. Non il n'y a pas d'itinéraire partant de D (car son degré est pair).

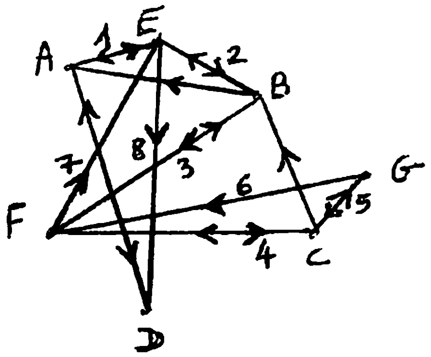
Itinéraire dans le parc :



Correspondant à la chaîne eulérienne représentée sur le graphe :



2 - Le graphe orienté (compte tenu du passage orienté de certains obstacles)

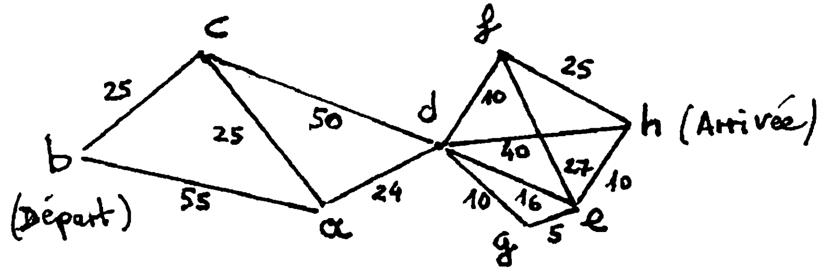


Sur ce graphe on a tracé un itinéraire possible : AEBFCGFED, la longueur de cette chaîne étant 8 : on a franchi 8 obstacles.

3 - Le graphe se réduit à 6 arêtes (représentant les obstacles), le graphe étant connexe et possédant seulement 2 sommets de degré impair il existe une chaîne eulérienne reliant ces 2 sommets D et G. Il existe donc un parcours empruntant toutes les arêtes (obstacles), chacune étant franchie une seule fois. Il y a 2 parcours possibles : DAEBFCG ou le parcours en sens inverse GCFBEAD.

54 - LE PROBLÈME DU TRANSPORTEUR

a-



b- La solution la plus économique pour aller de b à h est : b c a d g e h

c- La solution la plus économique est : b c a d g e d f h.

55 - LE PROBLÈME DU COURSIER

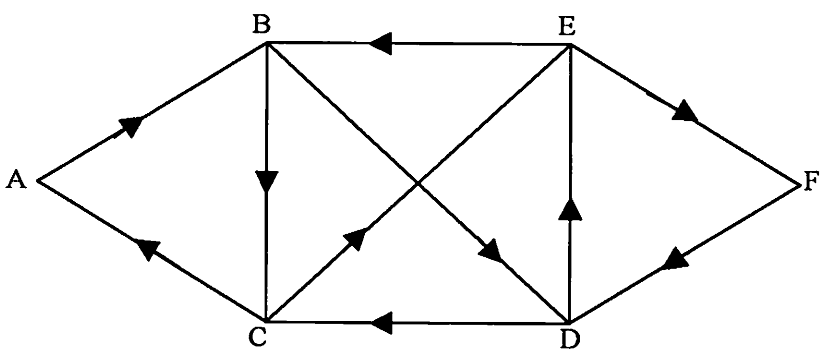
Avec l'algorithme de Dijkstra on obtient le tableau :

A	B	C	D	E	F	
0	1(A)	3(A)				A
	1(A)					AB
		4(B)	3(B)	11(B)		
		3(A)	5(C)	9(C)		ABC
			3(B)	6(D)	6(D)	ABCD
					6(D)	ABCDF

1 - On voit dans le tableau que l'itinéraire le plus court partant de A pour atteindre F est de 6 kms ; en effet pour atteindre F on vient de D (6(D)) ; pour atteindre D on vient de B (3(B)) ; pour atteindre B on vient de A (1(A)). Donc l'itinéraire le plus court est ABDF il est de 6 kms.

Si le coursier doit passer par C on trouve que le trajet le plus court est ACDF, il est de 8 kms.

Un trajet partant de A et revenant à A en passant par toutes les rues (chacune une seule fois) existe en modifiant le sens de E vers B ; de F vers D. de D vers C (ou D vers B) et de C vers A (ou B vers A). Ce trajet existe car le graphe est connexe et tous les sommets sont de degré pair, on a par exemple : ABCEBDEFDCA ou ACEBCDEFDBA



56 - LE PROBLÈME DU VRP

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, on obtient le tableau où tous les temps sont convertis en mn.

a	b	c	d	e	f	g	h	
0	20(a)			60(a)	80(a)			a
	20(a)	30(b)						ab
		30(b)	110(c)	50(c)		120(c)		abc
			90(e)	50(c)	70(e)			abce
			85(f)		70(e)	120(c)	140(f)	abcef
			85(f)			95(d)		abcefd
						95(d)	140(e)	abcefdg
							115(g)	abcefdgh

La méthode consiste à affecter aux sommets adjacents à a les temps nécessaires pour parvenir à ces sommets en partant de a. On fixe le temps minimum c'est-à-dire 20 pour b : on note 20(a) dans le tableau.

Pour les sommets adjacents à b (et non déjà fixés) on calcule le temps nécessaire depuis a en passant par b, ici seul c est adjacent à b ; le temps nécessaire pour atteindre c en passant par b est 20 + 10 = 30 : on note 30(b) dans le tableau.

Pour les sommets adjacents à c c'est-à-dire d, e et g on procède de même : on fixe 50 pour e (le plus petit).

Pour les sommets adjacents à e c'est-à-dire d et f : même procédé, on calcule 70 pour f que l'on fixe (70<80).

Pour les sommets adjacents à f c'est-à-dire h et d on trouve 140 pour h et 85 pour d ; on fixe 85 pour d et on entoure 85 (f).

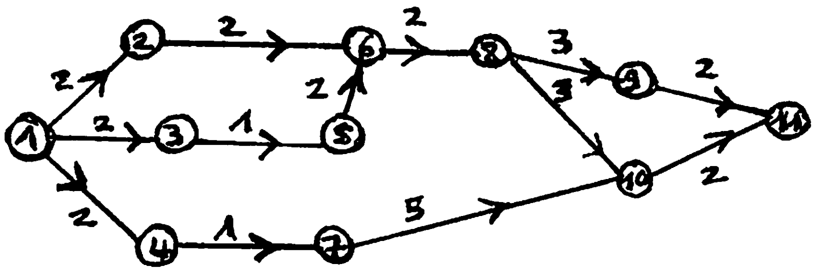
Pour le sommet adjacent à d c'est-à-dire g on trouve 85 + 10 = 95 pour g que l'on fixe (car 95<120).

Pour le sommet adjacent à g c'est-à-dire h on trouve 95 + 20 = 115 et l'on fixe 115 pour h (115<140).

L'itinéraire le plus rapide dure 115 mn soit 1 h 55 mn permettant au VRP de voir dans l'ordre les clients :
a b c e f d g h.

57 - LE PROBLÈME DU CHEF DE CHANTIER

La méthode consiste à représenter les contraintes dans un graphe où chaque tâche est un sommet du graphe et où chaque arête est pondérée par la durée de la tâche dont elle est issue. On obtient :



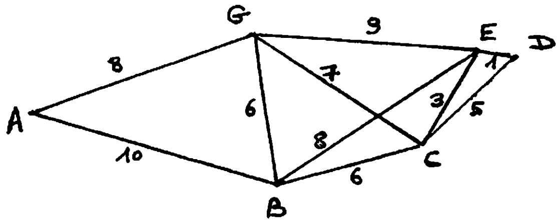
L'algorithme de Dijkstra donne :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Tâches fixées
0	2(1)	2(1)	2(1)								1
		2(1)		3(3)							3
				3(3)	5(3)						5
					5(3)		7(6)				6
							7(6)	10(8)	10(8)		8
								10(8)		12(9)	9
										12(9)	

Le déroulement des tâches est donc : 1 3 5 6 8 9 11 de durée minimum 12 semaines.

L'ordonnancement est le suivant :
Semaine 0 : début tâche 1
Semaine 2 : début tâches 2, 3, 4
Semaine 3 : début tâches 5, 7
Semaine 5 : début tâche 6
Semaine 7 : début tâche 8
Semaine 10 : début tâches 9, 10
Donc la durée minimum du projet est 10 + 2 = 12 semaines.

58 - L'AGENT DE SÉCURITÉ



1 - Tous les sommets du graphe ci-dessus étant de degré pair ce graphe étant connexe il existe un cycle eulérien c'est-à-dire un parcours empruntant tous les chemins indiqués ; chacun étant parcouru une seule fois. Par exemple l'agent de sécurité part de A et revient à A en faisant le parcours ABCDEGCEBGA.

On fait l'algorithme de Dijkstra :

Partant de A l'agent est plus vite en G qu'en B,on fixe G à 8,on cherche ensuite,en passant par G quels sont les temps de parcours s'il va en B ou en C ou en E : AGB : 8 + 6 = 14 ; AGC : 8 + 7 = 15 ; AGE : 8 + 9 = 17, le plus court est AGB : on fixe donc B à 14.

Partant de B, on calcule le temps pour atteindre un sommet adjacent : G ou E ou C ;

ABG : 10 + 6 = 16 on a mieux (AG = 8) d'ailleurs on a fixé G à 8 !

ABE : 10 + 8 = 18 on a mieux AGE : 17

ABC : 10 + 6 = 16 on avait mieux AGC = 15 donc on fixe C à 15.

Partant de C les temps pour atteindre un sommet adjacent : AGCE : 15 + 3 = 18 on avait mieux AGE : 17 on fixe E à 17 (AGCD : 15 + 5 = 20).

On relie D : AGED : 17 + 1 = 18 ; le trajet le plus court est AGED en 18 mn.

2 - En voulant surveiller le pole F en plus !, les sommets E et G étant de degré impair, les autres étant de degré pair, le graphe étant connexe il existe une chaîne eulérienne reliant E et G. Donc l'agent peut emprunter une fois chacun des parcours reliant les pôles mais il ne pourra qu'aller de G vers E (ou de E vers G) et ne pourra ainsi revenir au point de départ. Un trajet possible est GABGCBEGFECDE.

Partant de A on fixe G à 8, les sommets adjacents étant :

B : 8 + 6 = 14 moins bien que AB : 10 on fixe B à 10, on obtient

C : 8 + 7 = 15

E : 8 + 9 = 17

F : 8 + 6 = 14

on obtient le tableau :

	A	B	G	F	E	C	D
A(0)		10 (A)	8 (A)				
G(8)				14 (G)	17 (G)	15 (G)	

Ayant fixé B à 10 (A) ; les sommets adjacents à B :

C : 10 + 6 = 16 moins bon que 15(G)

E : 10 + 8 = 18 moins bon que 17 (G)

Donc on garde 15(G) et on fixe C à 15(G)

Ayant fixé C à 15 (G) ; les sommets adjacents à C :

E : 15 + 3 = 18 (C) moins bon que 17(G)

D : 15 + 5 = 20(C)

Donc on fixe E à 17(G)

Ayant fixé E à 17(G) ; les sommets adjacents à E :

F : 17 + 6 = 23(E) et D : 17 + 1 = 18(E) mieux que 20(C), on fixe D à 18(E) d'où le tableau résumé :

	A	B	G	F	E	C	D
A(0)		10 (A)	8 (A)				
G(8)				14 (G)	17 (G)	15 (G)	
B(10)						15 (G)	
C(15)					17 (G)		20 (C)
E(17)				23 (E)			18 (E)

Donc pour atteindre D on passe par E (18(E))

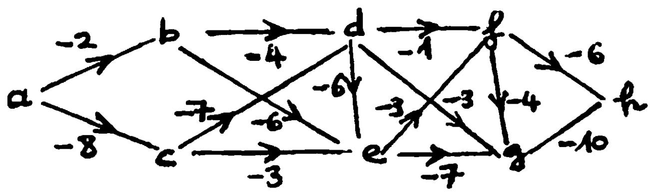
E on passe par G (17(G))

G on passe par A (8(A))

Le trajet le plus rapide reliant A à D est AGED dont le temps de parcours est 18 mn.

59 - STRATÉGIE DE JEU

Pour trouver l'itinéraire de réussite maximum il suffit de faire l'algorithme de Dijkstra en prenant les opposés des poids correspondants aux chances ; Voici le graphe :



On peut représenter les différentes étapes de l'algorithme de Dijkstra par le tableau ci-dessous :

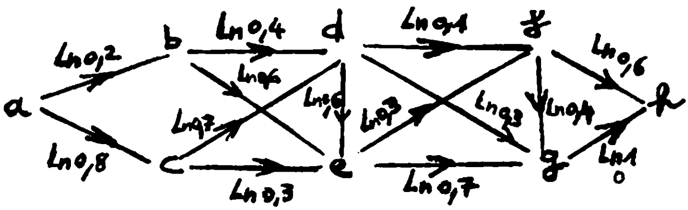
a	b	c	d	e	f	g	h	Sommets de poids fixé
0	-2(a)	-8(a)						a
		-8(a)	-15(c)	-11(c)				ac
			-15(c)	-21(d)	-16(d)	-18(d)		acd
				-21(d)	-24(e) -24(e)	-28(e) -28(f)		acde acdef
						-28(e) ou -28(f)	-38(g)	acdefg
							-38(g)	acdefgh

Pour atteindre h on vient de g

g .... e
e .... d
d c
c .... a

L'itinéraire de poids minimum (-38) est a c d e g h c'est celui de réussite maximum (38).

La probabilité d'un cheminement étant le produit des probabilités des chemins successifs qui le composent, on prend comme poids de chaque arête du graphe le logarithme des probabilités de chaque arête (obtenues en divisant le nombre de chances par 10) Ainsi on peut faire l'algorithme de Dijkstra (les poids étant le logarithme des probabilités : ils s'ajoutent) Le graphe est :



L'algorithme de Dijkstra donne :

a	b	c	d	e	f	g	h	Sommets de poids fixé
0	-1,61(a)	-0,2 (a)						a
	-1,61(a)	-0,22 (a)	-2,54(b)	-2,12(b)				ab
			-2,52(b)	-3(d)	-4,83(d)	-3,73(d)		abd
				-3(d)	-4,24(e)	-3,53(e)		abde
					-4,83(d)	-5,74(F)	-5,34 (F)	abdeF
						-5,74 (F)	-5,74 (g)	abdefg
					.		-5,74(g)	abdefgh

Pour arriver en h on vient de g

g .... f

f .... d

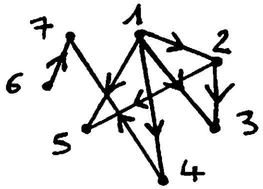
d .... b

b .... a

Pour arriver à la fin du jeu avec la plus grande probabilité de réussite il faut passer par les phases : a b d f g h.

60 - QUE DOIT-ON RÉVISER EN PRIORITÉ ?

Dans le graphe ci-dessous chaque flèche du sommet i au sommet j signifie que i est un chapitre pré-acquis au chapitre j ; on obtient :



la matrice de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La ligne dont la somme des termes est la plus grande correspond au chapitre que les élèves doivent réviser en priorité.

61 - LE PROBLÈME DU FACTEUR

1 - E n choisissant l'ordre : PABCDE

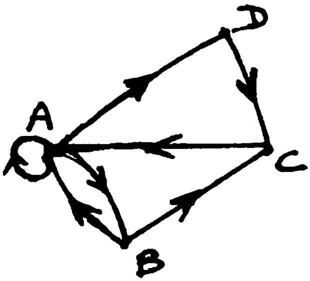
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2 - La matrice M^6 donne le nombre de parcours de longueur 6 passant donc par tous les hameaux. Il y a 3 parcours reliant P à P il s'agit de : PDCEBAP, dont le temps de parcours est 19 mn PDCBAEP dont le temps de parcours est 24 mn ou PDCBEAP dont le temps de parcours est 25 mn, le plus rapide est donc PDCEBAP.

3 - Le facteur ayant choisi PDCEBAP devra faire PDCEABP mais ce n'est pas possible car il n'y a pas de chemin direct de A à B. Le parcours le plus rapide pour relier B à P est PDCEAEBAP il mettra 27 mn donc son étourderie lui coûte 8 mn en plus.

62 - PISTES DE SKI DE FOND

1 - Le graphe est :



Les points ABCD sont numérotés de 1 à 4 la matrice du graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 -

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc il y a : 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14 itinéraires composés de 2 pistes successives.

Le nombre d'itinéraires de longueur 2 partant de A est obtenu en ajoutant les termes de la 1ère ligne de M^2 soit 2 + 1 + 2 + 1 = 6 ; il s'agit de AAA ; ABA ; ABC ; ADC ; AAD ; AAB.

3 - On peut calculer M^3 mais plus simplement : le nombre d'itinéraires de longueur 3 partant de B est obtenu en ajoutant les termes de la 2ème ligne de M^3. La 2ème ligne de M^3 est obtenue en multipliant la 2ème ligne de M^2 par chaque colonne de M, soit

$$(2\ \ 1\ \ 0\ \ 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (3\ \ 2\ \ 2\ \ 2)$$

d'où le nombre d'itinéraires de longueur 3 partant de B est 3 + 2 + 2 + 2 = 9

4 - Oui, l'itinéraire BAABCAD.

5 - Non car le graphe ne comporte pas que des sommets de degré pair (il n'y a donc pas de cycle eulérien)

63 - RANDONNÉE EN BRIANÇONNAIS (1)

On écrit la matrice A associée au graphe de la figure précédente en prenant l'ordre D F N T V.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc il y a 8 itinéraires de une étape : ND (1 h) DN (7 h) NF (3 h) FN (2 h) NT(4 h 30) TN (3 h) NV (3 h) VN (6 h)

1 - Pour dénombrer le nombre de randonnées : Nevache-Nevache en 2 étapes on fait le produit de la 3ème matrice ligne de A et de sa 3ème matrice colonne soit :

$$(1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

soit 4 randos qui sont : NFN (5h), NDN (8h),

NTN(7h30), NVN(9h).

*Le nombre de randonnées Nevache-Nevache en 3 étapes : on fait le produit de la 3ème ligne de A^2 et de la matrice A. Calculons la 3ème ligne de A^2 : (11011) x A = (00400) ; puis on fait le produit (00400) x A = (44044) d'où le nombre de randonnées de 3 étapes partant de Nevache est : 4 + 4 + 0 + 4 + 4 = 16 ; il n'y en a aucune partant et revenant à Nevache.

*Cherchons maintenant le nombre de randonnées Nevache-Nevache en 4 étapes. Il suffit de multiplier la 3ème ligne de A^3 et la 3ème colonne de A soit :

$$(4 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 4) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 \text{ (voir figure)}$$

NFNVN (14 h) ; NFNDN (13 h) ; NFNTN (12 h 30) ; NFNFN « il faut être maso ! » ; NDNVN (17 h) ; NDNDN « il faut être maso ! » ; NDNTN (15 h 30) ; NDNFN (13 h) ; NTNVN (16 h 30) ; NTNDN (15 h 30) ; NTNTN « il faut être maso » ; NTNFN (12 h 30) ; NVNVN (maso ?) ; NVNDN (17 h) ; NVNTN (16 h 30) ; NVNFN (14 h).

2 - Le nombre de randonnées de 2 jours est 3 : NDN (8 h) ; NTN (7 h 30) ; NVN (9 h). Il y a 6 randonnées de 3 jours (elles sont constituées de 4 étapes) : NFNVN (14 h) ; NFNDN (13 h) ; NFNTN (12 h 30) ; NDNFN (13 h) ; NTNFN (12 h 30) et NVNFN (14 h).

64 - A CHACUN SON TREK

Les sommets D, B, C, E, F, G, H et A sont numérotés de 1 à 8. La matrice $M = (a_{ij})$ associée au graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 1$ s'il y a une étape reliant i à j $a_{ij} = 0$ s'il n'y a pas d'étape de i à j

1 - Le terme b_{18} de la matrice M^4 est le nombre de chemins de longueur 4 (4 étapes) reliant 1 à 8, le terme b_{18} est le produit de la 1ère ligne de M^2 par la 8ème colonne de M^2. La 1ère ligne de M^2 est le produit de la 1ère ligne de M par chaque colonne de M c'est donc (01102110). La 8ème colonne de M^2 est obtenue en multipliant chaque ligne de M par la 8ème colonne de M ; on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } b_{18} = (0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 1\ 0) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

Il y a 4 treks de 4 étapes.
Le terme c_{18} de la matrice M^8 est le nombre de chemins de longueur 8 (8 étapes) reliant 1à 8. Or c_{18} est le produit de la 1ère ligne de M^4 par sa 8ème colonne. La 1ère ligne de M^4 obtenue en multipliant la 1ère ligne de M^2 par chaque colonne de M^2 est (00003324) sachant que M^2 est obtenue avec la calculatrice. La 8ème colonne de M^4 obtenue en multipliant chaque ligne de M^2 par sa 8ème colonne

$$\text{est : } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } C_{18} = (\, 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 2\ 4) \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5$$

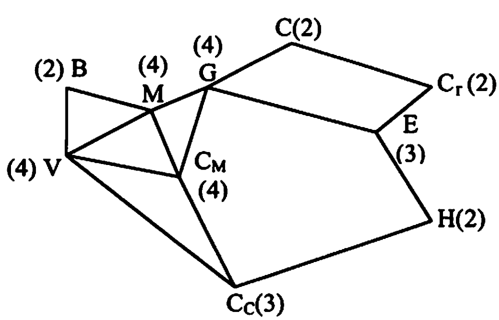
Il y a 5 treks de 8 étapes

On trouve que le trek le plus court est DCBGFDS (on peut le vérifier par l'algorithme de Dijkstra), en effet le dénivelé est : 500 + 400 + 400 + 400 + 800 + 400 = 2900 m

Le temps moyen de parcours de ce trek est de 9 h 40 mn.

65 - RANDONNÉE PÉDESTRE

On peut faire le graphe : on indique entre parenthèses le degré de chaque sommet ; Il y a exactement 2 sommets de degré impair, le graphe étant connexe il existe donc une chaîne eulérienne qui relie les sommets E et Cc ;



2 - Les sites ou lieux : C, Cr, E, H, Cc, V, Cm, M, B et G sont numérotés de 1 à 10. Il n'y a pas de chaîne eulérienne partant de C et arrivant à C (cycle eulérien) car pour que ce soit possible il faudrait que tous les sommets soient de degré pair. Par contre on peut se rendre de Corrençon (c) à Corrençon en passant par tous les villages ou sites sans emprunter tous les trajets : par exemple : un itinéraire possible est 1-2-3-4-5-6-9-8-7-10-1

3 - Le graphe ci-dessus admet pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0100000001 \\ 1010000000 \\ 0101000001 \\ 0010100000 \\ 0001011000 \\ 0000101110 \\ 0000110101 \\ 0000011011 \\ 0000010100 \\ 1010001100 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } M^2 = \begin{pmatrix} 2020001100 \\ 0201000002 \\ 2030101100 \\ 0102011001 \\ 0010311211 \\ 0001142212 \\ 1011124221 \\ 1010222411 \\ 0000112121 \\ 0201121114 \end{pmatrix}$$

On obtient des matrices symétriques par rapport à la diagonale descendante car le graphe n'est pas orienté.
D'après la théorie des graphes le nombre d' itinéraires de 4 jours (donc de longueur 4) partant de C (n° 1) est la somme des nombres de la $1^{\text{ère}}$ ligne de la matrice M^4. On pourrait obtenir M^4 avec la calculatrice mais ce n'est pas la peine : il suffit de multiplier la $1^{\text{ère}}$ ligne de M^2 par chacune des colonnes de M^2 soit : (2 0 2 0 0 0 1 1 0 0) x M^2 = (10 0 12 1 5 4 10 10 3 2) ; le nombre cherché est : 10 + 12 + 1 + 5 + 4 + 10 + 10 + 3 + 2 = 57.

De même le nombre d'itinéraires de 8 jours en partant de Corrençon (n° 1) est la somme des termes de la 1ère ligne de M^8. La 1ère ligne de M^8 est obtenue en multipliant la 1ère ligne de M^4 par M^4. On obtient avec la calculatrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 12 & 1 & 5 & 4 & 10 & 10 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 2 & 5 & 3 & 2 & 2 & 13 \\ 12 & 0 & 16 & 1 & 9 & 5 & 12 & 13 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 9 & 5 & 4 & 11 \\ 5 & 2 & 9 & 3 & 18 & 16 & 17 & 21 & 11 & 13 \\ 4 & 5 & 5 & 10 & 16 & 31 & 26 & 25 & 15 & 23 \\ 10 & 3 & 12 & 9 & 17 & 26 & 33 & 27 & 18 & 18 \\ 10 & 2 & 13 & 5 & 21 & 25 & 27 & 32 & 15 & 17 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 11 & 15 & 18 & 15 & 12 & 12 \\ 2 & 13 & 3 & 11 & 13 & 23 & 18 & 17 & 12 & 29 \end{pmatrix}$$

D'où (10 0 12 1 5 4 10 10 3 2) x M^4 est la 1ère ligne de M^8 soit (499 118 646 259 754 915 1132 1135 587 668)

La somme des termes de cette ligne est 6713 ! il y a donc,qui l'eût crû !, 6713 itinéraires de 8 jours partant de C !, par contre le nombre d'itinéraires possibles de 8 jours dont le départ et l'arrivée sont à Corrençon est le terme a_{11} de M^8 c'est-à-dire 499

4 - On impose le début d'itinéraire 1-2-3-4 (C Cr E H), le graphe est alors fléché de C à Cr, de Cr à E, de E à H, de G à E et de G à C ; la matrice M du graphe est :

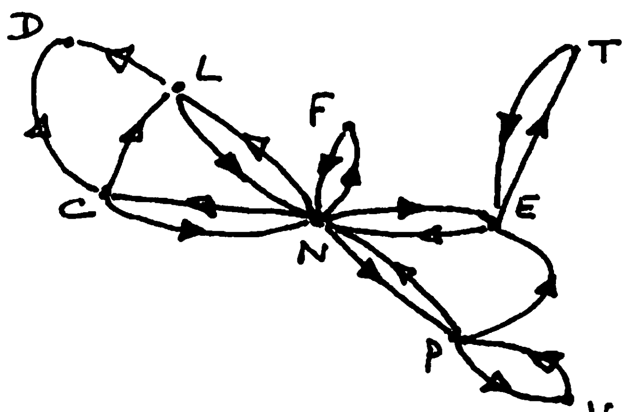
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 7 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 17 & 16 & 16 & 20 & 11 & 11 \\ 4 & 2 & 4 & 9 & 16 & 31 & 26 & 25 & 15 & 18 \\ 6 & 1 & 7 & 8 & 17 & 26 & 31 & 25 & 18 & 15 \\ 6 & 1 & 7 & 5 & 21 & 25 & 25 & 30 & 15 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 11 & 15 & 18 & 15 & 12 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 11 & 19 & 16 & 15 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Donc la 1ère ligne de M^8 est le produit de la 1ère ligne de M^4 par la matrice M^4, on obtient :
(3 1 3 3 17 16 16 20 11 11) ; le 1er terme de cette matrice ligne est le nombre d'itinéraires de 8 jours reliant C à C soit 3 itinéraires qui sont : C Cr E H Cc V M G C ou C Cr E H Cc Cm M G C et C Cr E H Cc V Cm G C. La 1ère ligne de M^5 étant : (0 0 0 1 0 1 1 0 0 0), le 1er terme de la 1ère ligne de M^9 est le 1er terme du produit de la 1ère ligne de M^5 par la matrice M^4, on obtient 11 ; soit 11 itinéraires de longueur 9 (jours) reliant C à C .

66 - RANDONNÉE EN BRIANÇONNAIS (2)

La matrice associée au graphe est :



(en prenant dans l'ordre : C D E F L N P T V)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 18 itinéraires de une étape (et par exemple 5 partent de Nevache).

1 - le nombre d'itinéraires de deux étapes partant de Nevache se trouve en multipliant la $6^{ème}$ ligne de M par la matrice M : (1 0 1 1 1 0 1 0 0) x M = (0 1 1 0 1 5 0 1 1) on obtient la $6^{ème}$ ligne de M^2 d'où le nombre d'itinéraires de 2 étapes partant de Nevache est : 1 + 1 + 1 + 5 + 1 + 1 = 10 (parmi-eux : 5 itinéraires reviennent à Nevache).
Ces itinéraires sont : NLD (1 h) ; NPE (7 h) ; NCL (7 h) ; NCN (pas intéressant : que de la route !) ; NLN (même remarque) ; NEN (idem) ; NPN (idem) ; NFN (5 h) ; NPV (3 h) et NET (4 h 30). Les itinéraires d'une journée sont donc :
NFN (5 h) ; NLD (1 h) ; NPV (3 h) ; NET (4 h 30), parmi eux : seul NFN part et revient à Nevache.

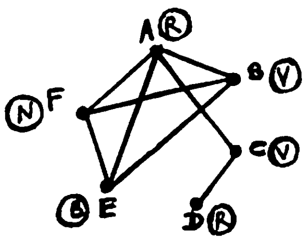
2 - On multiplie la $6^{ème}$ ligne de M^2 par M on obtient la $6^{ème}$ ligne de M^3 : (0 1 1 0 1 5 0 1 1)xM = (6 1 6 5 5 2 6 1 0) ; il y a donc : 6 + 1 + 6 + 5 + 5 + 2 + 6 + 1 + 0 = 32 itinéraires de 3 étapes partant de Nevache, parmi eux seulement 2 itinéraires reviennent à Nevache. Dans les 32 randonnées partant de Nevache il y a :
Nevache-refuge Chardonnet dont 2 seulement sont intéressants (n'empruntent pas que de la route !comme NLNC,NCNC NENC,NPNC) : NFNC (5 h) et NLDC (8 h).
1 Nevache-refuge Drayères : NCLD (8 h).
6 Nevache-col Echelle dont 2 sont intéressants : NFNE (5 h) et NETE (7 h 30) ; les autres : NENE, NPNE, NLNE, et NCNE n'empruntent que de la route.
5 Nevache-Fontcouverte : NCNF (3 h), NLNF (3h), NENF (3 h), NPNF (3 h), NFNF (8 h mais il faut être « maso » !).

5 Nevache-Laval dont seul NFNL (5 h) n'emprunte pas que de la route.
2 Nevache-Nevache : NPEN (7 h) et NCLN (7 h).
6 Nevache-Plampinet dont seuls sont intéressants : NPVP (9 h) et NFNP (5 h).
1 Nevache-Mont Thabor : NPET (11 h 30).
Sachant qu'un randonneur "moyen" marche 3 à 5 h par jour, les randonnées de 2 jours sont :
NCNFN (5 h), NENFN (5 h), NETEN (7 h 30)
NFN (5 h), NFNCN (5 h), NFNEN (5 h), NFNLN (5 h), NFNPN (5 h), NLNFN (5 h), NPNFN (5 h) ; étant bien entendu que le temps des liaisons par route (pour voir du pays !) n'est pas compté.

3 - IL est possible d'organiser un circuit dont le départ et l'arrivée sont à Nevache,circuit empruntant tous les chemins et routes sauf la route Nevache- Refuge Chardonnet :
1er jour : NFNLD : 6 h de marche (nuit au refuge Drayères)
2ème jour : DC : 7h (nuit au refuge Chardonnet)
3ème jour : CLN : 7 h de marche (nuit à Nevache)
4ème jour : NPV : 3 h de marche (nuit au refuge de Val des prés).
5ème jour : VP : 6 h de marche (nuit à Plampinet) ;
6ème jour : PEM : 7 h de marche (nuit au refuge des 3 Mages).
7ème jour : MT : 4 h 30 de marche (nuit au refuge du mont-Thabor).
8ème jour : TEN : 3 h de marche.

67 - FÊTE DE LA MUSIQUE

On peut faire le graphe des incompatibilités :



Par coloration on obtient : Rouge en A et en D
Vert en B et en C
Bleu en E
Noir en F

Il faut 4 couleurs ; le plus grand sous graphe complet étant ABEF d'ordre 4 le nombre chromatique du graphe est 4.

A peut jouer avec D et B avec C

B .... D et C avec E ou C avec F.

C .... B et D avec E ou D avec F

D .... E et C avec F

E .... C et D avec A

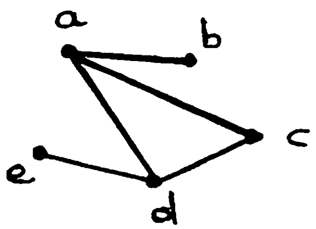
F .... D et C avec E

F .... C et D avec A ou D avec F.

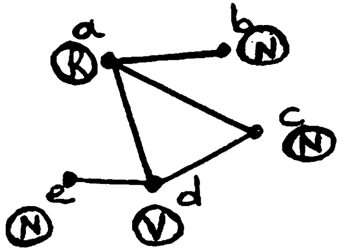
IL y a 10 « bœufs » possibles ; il ne peut pas y avoir de trios !, il n'y aura que des duos.

68 - OUVERTURE LE DIMANCHE

1 -



2 - Il s'agit parmi les points a, b, c, d, e de trouver un sous graphe maximal tel que 2 points quelconques de ce sous graphe ne soient pas reliés par une arête en procédant par coloration on obtient :

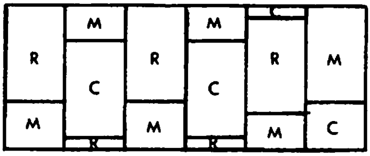


N : noir
R : rouge
V : vert

On trouve donc que le sous graphe maximal cherché est b, c, e : les supermarchés b, c et e peuvent ouvrir ensemble le dimanche.

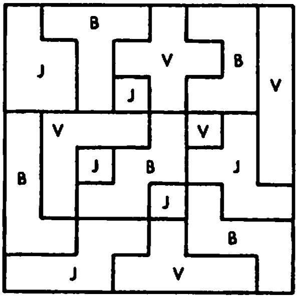
69 - LE CLIENT EXIGEANT

Voici une des solutions :



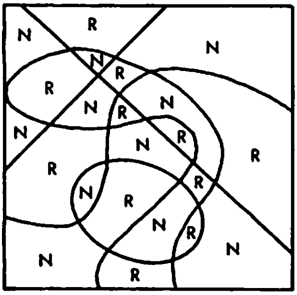
70 - LE PEINTRE ÉCONOME

Le minimum de couleurs que doit utiliser Gaston est de 3. Si par exemple on choisit les couleurs jaune, blanc, vert, on obtient la solution ci-après :

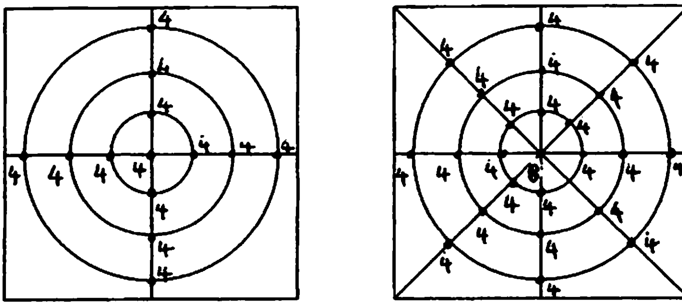


71 - LE ROUGE ET LE NOIR

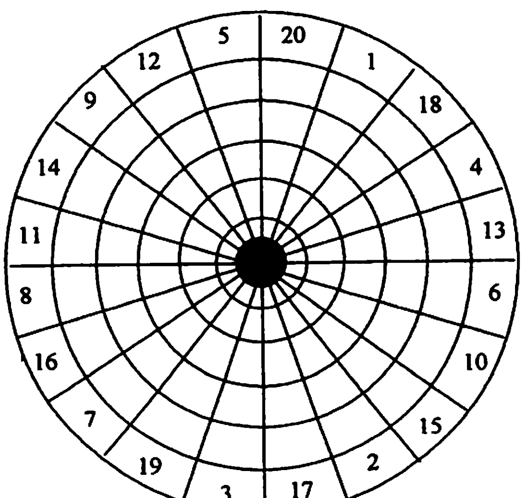
Voici une des deux solutions possibles :



Oui c'est possible chaque fois que tous les points d'intersection des lignes (courbes ou droites) sont de degré pair (le degré d'un point étant le nombre de lignes aboutissant (ou partant) de ce point).

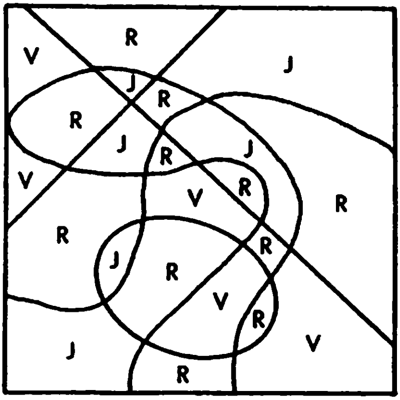


Chaque point d'intersection est de degré 4, sauf le centre de la 2ème figure qui est de degré 8



Tout point d'intersection situé à l'extérieur du disque central et à l'intérieur du cercle extérieur a pour degré un nombre pair : 4 ; donc d'après le théorème des 2 couleurs le problème posé a une solution. Si la zone centrale était colorié en noir ou blanc le problème ne pourrait être résolu car les points du cercle central sont de degré 3.

73 - AVEC TROIS COULEURS



74 - AVEC QUATRE COULEURS

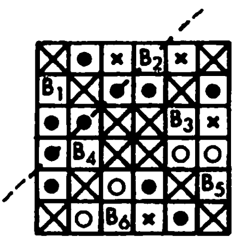
Il est facile de trouver une solution au premier jeu. En voici une :

R	M	B	V		
	R	M	B	V	
		R	M	B	V
V			R	M	B
B	V			R	M
M	B	V			R

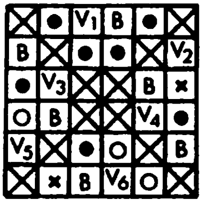
Voici une solution satisfaisant la condition sur les diagonales :

	R	M	B	V	
B		V	R		M
V	M			B	R
R	B			M	V
M		R	V		B
	V	B	M	R	

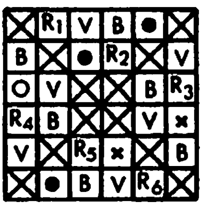
On doit placer 6 fois chaque couleur (une fois par ligne et il y a 6 lignes, tout en ne plaçant qu'une fois chaque couleur par colonne). Il y aura donc en tout 24 cases coloriées et 12 cases resteront « vides ». En remarquant une certaine symétrie, il apparaît logique de ne pas colorier les cases des diagonales du grand carré. En procédant par élimination, on trouve une solution :



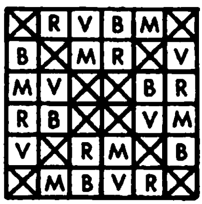
On place les bleus



On place les verts



Place les rouges

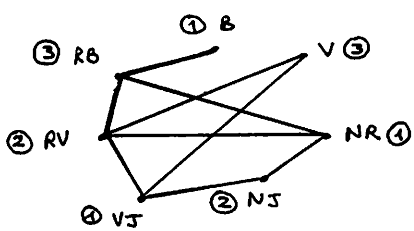


On place les marrons

Après avoir placé B_1, il reste une case vide sur l'axe diagonal marqué en pointillés, d'où B_2 dans cette case.

75 - LE PROBLÈME DE LA DOCUMENTALISTE

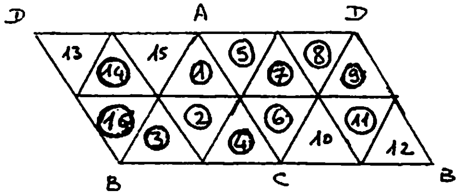
Les sommets du graphe ci-dessous représentent les divers types de livres et chaque arête relie les livres ayant une couleur commune.



Les sommets numérotés correspondent aux numéros de casiers, il faut donc 3 casiers (le plus grand sous graphe complet étant d'ordre 3).

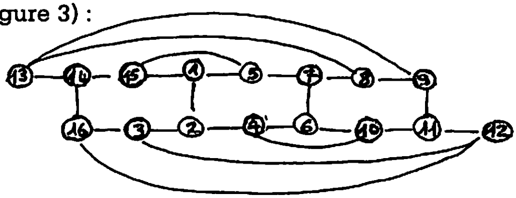
76 - LE PROBLÈME DE MONSIEUR TRICOLORE

On peut numéroter chaque triangle du développement ci- dessous :



Puis on fait le graphe où les triangles ayant un coté commun sont reliés par une arête, on obtient (figure 3) :

On a colorié :



En rouge : 1, 3, 4, 7, 9,14 qui ne sont pas reliés (pas de coté commun).
En noir : 2, 5, 6, 8, 11.
En bleu : 10, 12, 13, 15.
En vert : 16
Monsieur Tricolore ne peut colorier avec seulement 3 couleurs !, 4 couleurs au minimum sont nécessaires

77 - COMBIEN DE COULEURS ?

En numérotant les faces du développement (figure 2), on dessine le graphe où les faces ayant un coté commun sont reliées par une arête (figure 3).

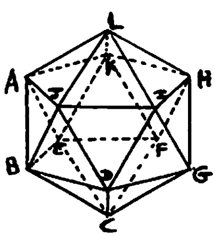


Figure 1

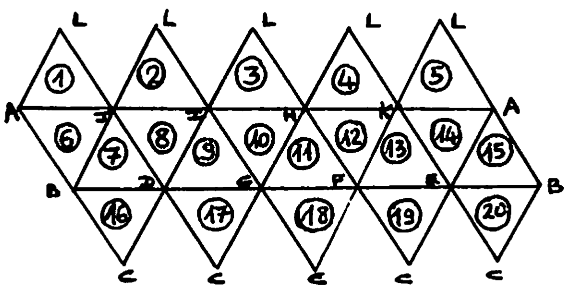
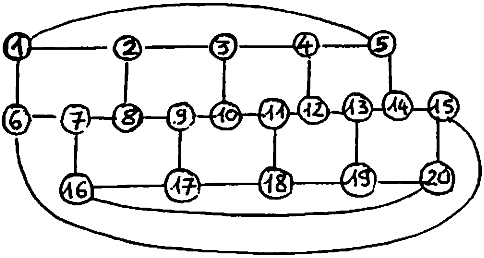


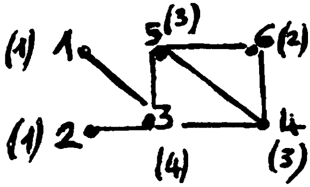
Figure 2

On voit qu'il faut au minimum 4 couleurs d'après le graphe ci-dessous : on colorie en rouge : 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15 qui n'ont pas de coté commun (pas d'arête les reliant directement). On colorie en noir : 2, 4, 6, 10, 14, 18 et 20 et en bleu : 5, 8, 12, 17, 19 et puis en vert : 16.



78 - LE PROBLÈME DU CARTOGRAPHE

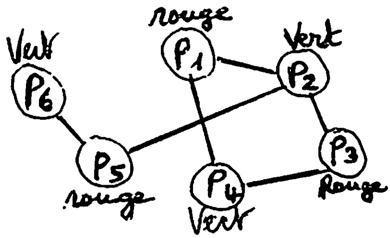
D'après le théorème des 4 couleurs, on sait qu'on peut colorier avec 4 couleurs n'importe quelle carte plane de façon que 2 pays voisins soient toujours de couleurs différentes. Mais peut-on faire mieux ? ; en représentant chaque région (numérotée au préalable) par un point et en reliant les points correspondants à des régions voisines, on obtient le graphe



J'indique entre parenthèses le degré de chaque sommet de ce graphe. Je classe les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré : 3, 4, 5, 6, 1, 2. Je commence par colorier 3 en rouge ainsi que 6 (non adjacent à 3). Les autres sommets étant adjacents à 3 ou 6, on choisit une autre couleur et on colorie 4 par exemple en vert ainsi que 1 et 2 (non adjacents à 4 et non adjacents entre eux). Il ne reste plus qu'à colorier 5 d'une autre couleur (car 5 est adjacent à 4) par exemple en bleu. Trois couleurs sont nécessaires : est-ce le minimum ?

Oui car le sous graphe constitué des sommets 3,4 et 5 est complet et nécessite 3 couleurs ; donc le nombre chromatique est égal à 3. Il faut donc 3 couleurs au minimum.

79 - LE PROBLÈME DE LA SOCIÉTÉ DE TRANSPORT

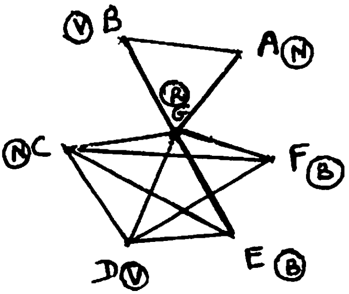


On indique entre parenthèses le degré de chaque sommet du graphe, chaque arête du graphe traduisant l'incompatibilité des 2 produits reliés par cette arête. On attribue une couleur au sommet ayant le plus fort degré, donc à P_2 : couleur verte que l'on peut attribuer aussi à P_4 et P_6 (car ils ne sont pas incompatibles avec P_2). Il faut une autre couleur pour les produits restants : P_1 P_3 et P_5 qui sont incompatibles avec P_2. Il faut donc 2 couleurs au minimum (le sous graphe complet d'ordre maximal étant d'ordre 2) donc 2 camions au minimum sont nécessaires : le camion rouge transportera P_1 P_3 et P_5. Le camion vert transportera P_2 P_4 et P_6.

80 - « JEUX SANS FRONTIÈRES »

Chaque arête du graphe ci-dessous indique chaque incompatibilité, les sommets A et B ont pour degré 2 ; C et D ont pour degré 4 ; E et F ont pou degré 3 et G a pour degré 6. En procédant par coloriage, on attribue les couleurs indiquées sur le graphe : rouge (R) pour G, vert (V) pour D et B, noir (N) pour C et A, bleu (B) pour E et F.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
degrés	2	2	4	4	3	3	6

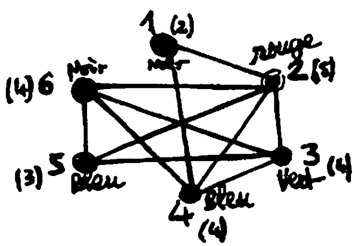


Il y a donc bien 3 équipes de deux : l'équipe verte, l'équipe noire et l'équipe bleue.

NB Dans le graphe il existe un sous graphe complet d'ordre 4 : D E G C donc le nombre chromatique du graphe est supérieur ou égal à 4 ; comme on a trouvé un coloriage de 4 couleurs alors le nombre chromatique est égal à 4.

81 - LE PROBLÈME DES JARDINIERS

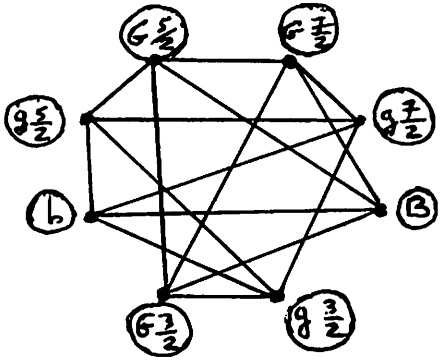
On réalise le graphe ci-dessous où chaque arête reliant 2 travaux indique que ces derniers ne peuvent être réalisés en même temps.



On a indiqué entre parenthèses le degré de chaque sommet du graphe. En classant les sommets de ce graphe selon les degrés décroissants on obtient le coloriage ci- dessus. Le sous graphe constitué de 2, 3, 5, 6 étant complet on peut dire que le nombre chromatique du graphe est supérieur ou égal à 4 (il faut 4 couleurs pour colorier ce sous graphe) ; de plus le degré maximum du graphe étant 5, le nombre chromatique est inférieur ou égal à 5 + 1 = 6 (d'après le cours). On voit par coloriage que le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe est 4 donc les travaux pouvant être réalisés en même temps sont 1 et 6 ; 4 et 5 ; puis 2 et enfin 3. Le temps minimal pour réaliser les 6 travaux est donc de 4 x 2 = 8 h.

82 - LE MONÔME

1 - On note $G_{3/2}$ le groupe des 3/2 « mâles » et g 3/2 le groupe des 3/2 « femelles », de la même manière $G_{5/2}$ les 5/2 « mâles » ; $g_{5/2}$ les 5/2 « femelles » ; idem pour $G_{7/2}$ et $g_{7/2}$. Les bizuts mâles forment le groupe noté B et b désigne les bizuts « femelles ». Ces 8 groupes sont les sommets d'un graphe et l'on relie par une arête les groupes qui ne peuvent défiler les uns derrière les autres. On obtient :



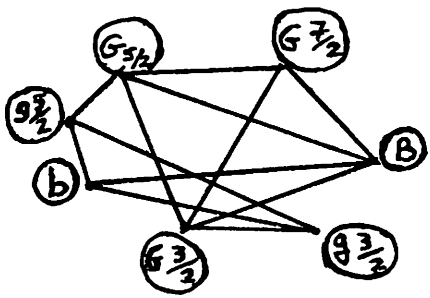
2 - On procède par coloriage en commençant par exemple par $G_{3/2}$ en rouge et on colorie également en rouge les sommets non adjacents à $G_{3/2}$ et non adjacents entre eux : $g_{7/2}$. On recommence le même procédé avec $g_{3/2}$ colorié en vert ainsi que B ; $G_{5/2}$ en bleu ainsi que b et enfin $g_{5/2}$ en noir ainsi que $G_{7/2}$. On obtient les sous graphes stables

$\{G_{3/2}\ ;\ g_{7/2}\}$ $\{g_{3/2}\ ;\ B\}$ $\{b\ ;\ G_{5/2}\}$ $\{g_{5/2}\ ;\ G_{7/2}\}$.

Une des solutions de défilé est par exemple :

$G_{3/2} - g_{7/2} - B - g_{3/2} - G_{5/2} - b - G_{7/2} - g_{5/2}$.

3 - Le graphe devient :



Le coloriage peut être $G_{3/2}$ rouge b rouge

$G_{3/2}$ vert B vert

$G_{5/2}$ bleu

$G_{7/2}$ noir et $g_{5/2}$ noir

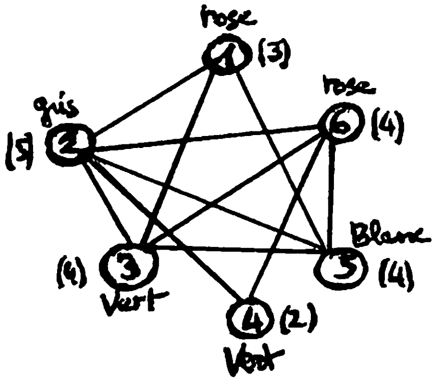
Les sous groupes sont $\{G_{3/2},\ b\}$ $\{g_{3/2},\ B\}$ $\{G_{5/2}\}$

$\{G_{7/2},\ g_{5/2}\}$; une des solutions est : $G_{3/2} - b - G_{5/2} - g_{3/2} - B - g_{5/2} - G_{7/2}$.

4 - On ne peut alterner « mâle » et « femelle » dans un défilé de 7 groupes commençant par un groupe « femelle » car en queue il y aura 2 groupes « mâles ».

83 - LE PROBLÈME DE L'ORGANISATRICE DE VOYAGE

Ce problème peut être ramené au problème de coloration du graphe :

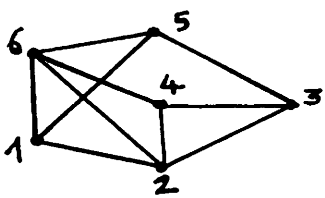


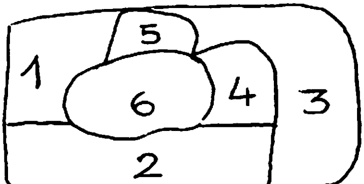
On a indiqué entre parenthèses le degré de chaque sommet. Il faut au minimum 4 couleurs, il faut donc 4 chambres. La répartition peut être :

1 et 6 dans la chambre rose
3 et 4 .... verte
5 .... blanche
2 .... grise.

84 - MATHÉMATIQUE ET GÉOGRAPHIE

1 - Une carte géographique correspondant au graphe :





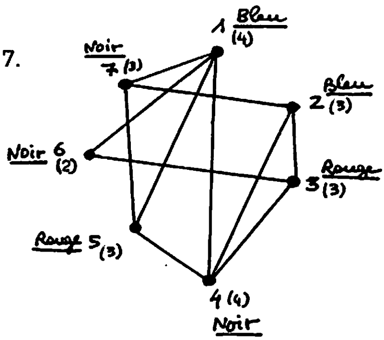
2 - Ce n'est pas possible : il n'existe pas de carte correspondant au graphe proposé.

85 - LA COUPE MICKEY

Les sommets du graphe sont les 7 épreuves et chaque arête représente une incompatibilité.
On indique à chaque sommet son degré (entre parenthèses) et l'on cherche le nombre minimum de couleurs : ce nombre est 3.

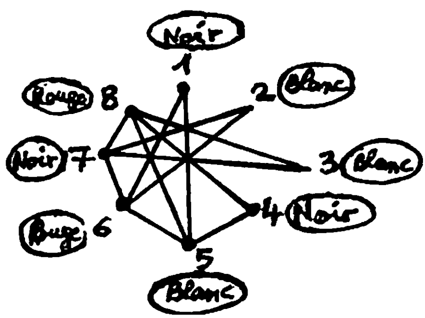
L'organisation peut être :

Epreuve 1 et épreuve 2
Epreuve 3 et épreuve 5
Epreuve 4 et épreuve 6 et épreuve 7.



86 - PROBLÈME DE SURVEILLANCE AU MUSÉE

Au niveau 0 : il y a 8 salles, un gardien ne pouvant surveiller que 2 salles, le nombre minimum de gardiens est 8 : 2 = 4. Cherchons où les poster. On construit le graphe où les sommets sont les couloirs et où deux sommets sont reliés par une arête si les couloirs donnent sur une même salle ; on obtient :

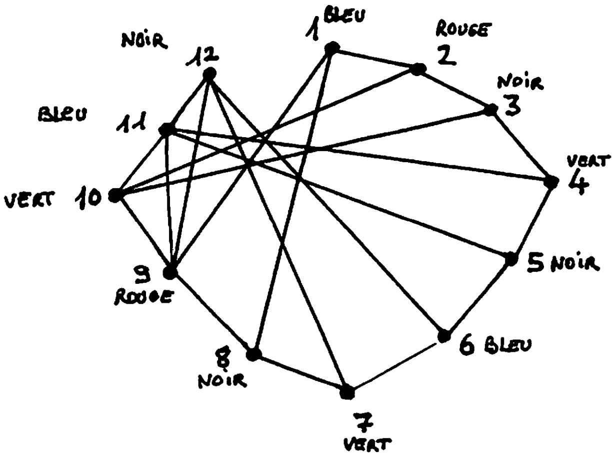


On cherche le nombre chromatique de ce graphe (nombre minimum de couleurs), on trouve 3. On obtient 3 sous groupes : {1, 7, 4} {2, 3, 5} {8, 6}
Il suffit de mettre 4 gardiens postés en 1, 2, 3 et 4.

Au niveau 1, il y a 9 salles donc il faut au moins 5 gardiens ; on procède de même :

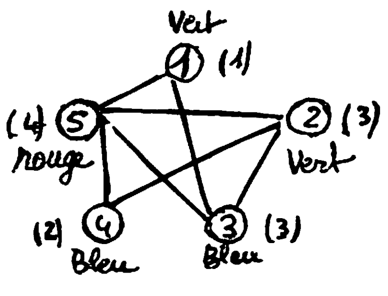
Le nombre chromatique est 4, il suffit de poster les 5 gardiens en 10, 1, 7, 5 et 4.

Le nombre minimum de gardiens pour surveiller l'ensemble du musée est donc 9.



87 - LE PROBLÈME DU GARAGISTE

On réalise le graphe des contraintes en indiquant pour chaque sommet de ce graphe le degré (indiqué entre parenthèses), puis on le colorie, on obtient :



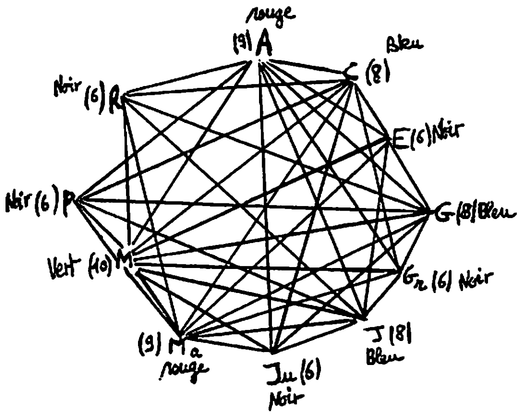
3 couleurs étant nécessaires, on peut réaliser en même temps les travaux (de même couleur) c'est-à-dire 3 et 4 ; 1 et 2 ; 5. Le temps minimal pour réaliser ces travaux est :

1 h 30 pour 3 et 4

2 h pour 1 et 2

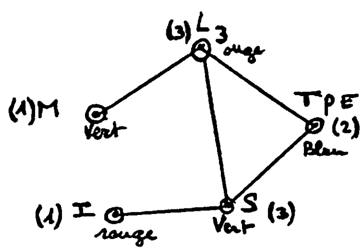
30 mn pour 5 soit au total 4 h.

Voici le graphe des incompatibilités :



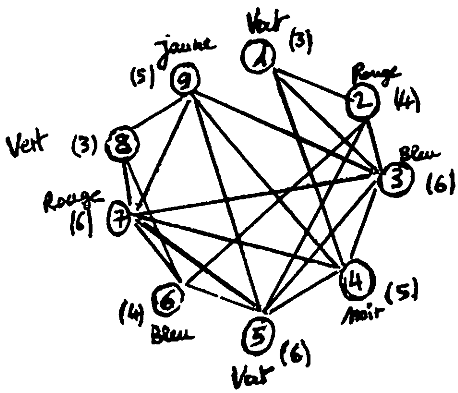
Le nombre de couleurs est de 4, il y a 4 types de calendriers :
*Les lunaires (fondés sur le cycle des phases de la lune) : le calendrier Musulman.
*Les calendriers solaires (fondés sur le cycle des saisons) : calendriers Egyptien, Julien, Républicain, Perpétuel Grégorien.
Les calendriers luni-solaires (fondés à la fois sur le cycle lunaire et des saisons) : calendriers Gaulois, Chinois, Juif.
Les calendriers rituel solaire tels : les calendriers Aztèque et Maya.

89 - LE PROBLÈME DU CHEF D'ÉTABLISSEMENT



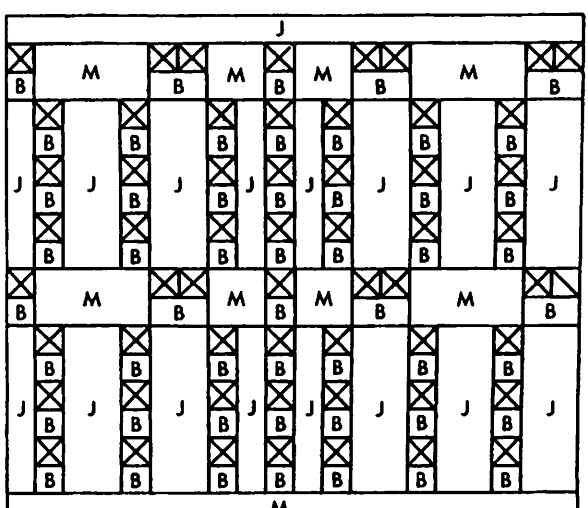
Chaque matière est le sommet du graphe ci-contre et 2 matières sont reliées par une arête si elles ont été choisies par un candidat. Il suffit de rechercher le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer les 5 sommets de ce graphe afin que 2 sommets adjacents ne soient pas de la même couleur. On cherche le degré de chaque sommet (écrit entre parenthèses sur le graphe) et on colore en suivant l'ordre décroissant (par exemple) des degrés. On obtient 3 couleurs : la durée est donc de 9 h.

90 - LE PROBLÈME DE L'ARCHITECTE (N°2)



Par coloration du graphe ci-dessus on trouve : le nombre minimum de bouches est de 5 (5 couleurs nécessaires).

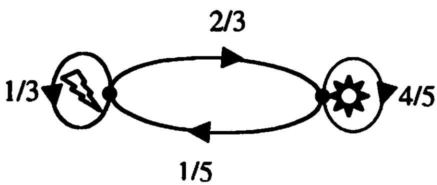
91 - LE PROBLÈME DU PEINTRE EN BÂTIMENT



On a ainsi :

58 carrés élémentaires de 1 m², c'est-à-dire 58 m², peints en blanc (B), 68 m² peints en marron (M), et 176 m² peints en jaune (J).

92- SOLEIL DU MIDI

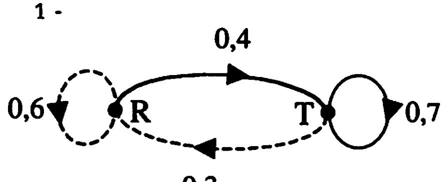


$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ est la matrice T du graphe ; l'état probabiliste le n° jour est $P_n = P_0 \times T^n$ avec $P_n = (p_n, q_n)$; p_n étant la probabilité qu'il fasse mauvais et $q_n = 1 - p_n$.

On sait d'après le cours que P_n tend vers P (quand n devient de plus en plus grand) ; P étant l'état stable (x,y) tel que P x T = P, c'est-à-dire :
$\begin{cases} (1/3)x + (1/5)y = x \\ (2/3)x + (4/5)y = y \end{cases}$ d'où $\begin{cases} -(2/3)x + (1/5)y = 0 \\ (2/3)x - (1/5)y = 0 \end{cases}$ les 2 équations sont équivalentes, mais x + y = 1 donc
(2/3)x - (1/5)y = 0 avec x + y = 1 d'où (13/15)x = 1/5 soit x = 3/13 et y = 1 - (3/13) = 10/13. Comme 10/13 est supérieur à 3/13, le temps le plus fréquent est au beau (temps).

93 - LE PROBLÈME DU BUTEUR

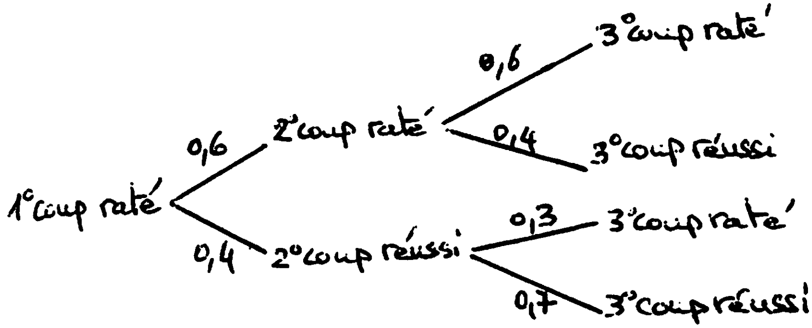
1 -



On a noté R la situation « il rate le coup de pied »
T la situation « il réussit le coup de pied ».
On a complété le graphe en pondérant les arêtes en pointillés par les probabilités 0,6 en R et 0,3 de T vers R (car la somme des probabilités pondérant deux arêtes issues d'un même sommet est égale à 1). La matrice de transition est :

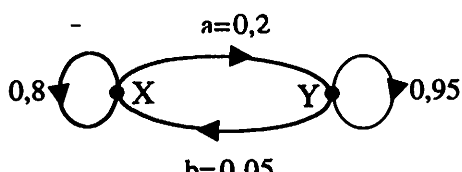
$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

2 - Le buteur ayant raté le 1[er] coup de pied :



La probabilité de réussir le 3[ème] coup de pied (s'il a raté le 1[er]) est 0,6 x 0,4 + 0,4 x 0,7 = 0,52
Il y a 52 % de chances que le buteur réussisse le 3[ème] coup de pied ayant raté le 1[er].

94 - QUE CHOISIR ?



La matrice de transition est T = $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$

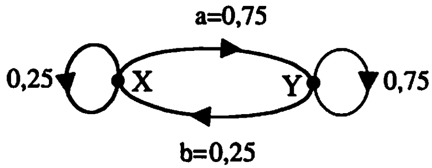
On note P_0 = (250 600) la matrice ligne correspondant au nombre d'employés de X et de Y ; on a $P_1 = P_0$ x T = (250 600) x T = (230 620)
Au bout d'un an il y a 230 employés chez X et 620 employés chez Y.

Au bout de 5 ans : $P_5 = P_0$ x T^5 ou P_1 x T^4 = (230 620) x $\begin{pmatrix} 0,4531 & 0,5468 \\ 0,1367 & 0,8633, \end{pmatrix}$

P_5 = (188,98 661,02) soit environ 189 employés chez X et 661 chez Y.

On a $P_8 = P_5$ x T^3 = (189 662) x $\begin{pmatrix} 0,5373 & 0,4625 \\ 0,1156 & 0,8844 \end{pmatrix}$ = (178 672).

En fait à long terme P_n tend vers (170 680), en effet d'après le cours :
850 x (b/a + b) = 170 et 850 x (a/a + b) = 680.

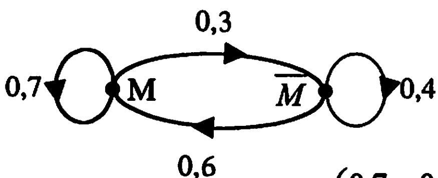


La matrice de transition du graphe est T = $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

P_1 = (250 600) x T = (212 638) environ
P_5= P_1 x T^4 = P_1 x T car $T^2 = T^3 = T^4$ .... d'où P_5 = (212 638)
P_8 = P_5 x T^3 = (212 638)

La situation est stable après la 1ère année.

95 RIEN N'EST GAGNÉ D'AVANCE



La matrice du graphe est T = $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Les résultats du devoir n° 1 sont :
10 élèves ont la moyenne et 25 ne l'ont pas ce qui se traduit par la matrice P_1 = (10 25).
Au devoir n° 2 on aura P_2 = P_1 x T = (10 25) x T = (22 13) ; de même au devoir n° 3 : P_3 = P_1 x T^2 =
P_2 x T .... d'où au devoir n° 6 : P_6 = P_1 x T^5, sachant qu'avec la calculatrice on trouve

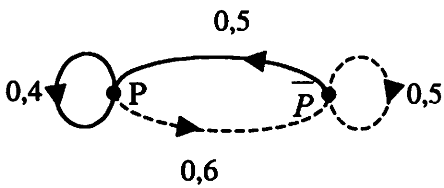
$T^5 = \begin{pmatrix} 0{,}66667 & 0{,}33333 \\ 0{,}66666 & 0{,}33334 \end{pmatrix}$ on obtient P_6 = (23,3332 11,6668) soit environ 23 élèves ont la moyenne et 12 ne l'ont pas. On constate que lorsque le nombre de devoirs augmente il y a de plus en plus d'élèves qui ont la moyenne à un devoir (ce qui est encourageant).
En fait si l'on pose a = 0,3 et b = 0,6 ; on sait d'après le cours que cette évolution des résultats va se stabiliser (pour n grand) vers P = (b/a + b a/a + b) soit (2/3 1/3) d'où
35 x (2/3) = 23 élèves auront la moyenne au n° devoir et 35 x (1/3) = 12 ne l'auront pas.

S'il y avait eu 60 % soit 21 élèves ayant eu la moyenne au devoir n° 1, on aurait obtenu au devoir n° 6 : $P_6 = (21 \quad 14) \times T^5$ ce qui donne environ le même résultat que dans le 2-

Donc on peut dire que la répartition P_n est indépendante de P_1 pour n suffisamment grand : ce qui vérifie le résultat du cours !

96 - DANS UNE ENTREPRISE

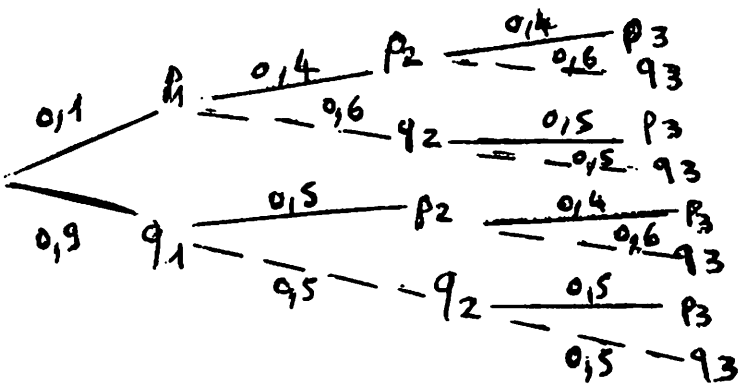
1 - On peut représenter la situation par le graphe pondéré que l'on complète avec les probabilités : 0,6 et 0,5.



Sa matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

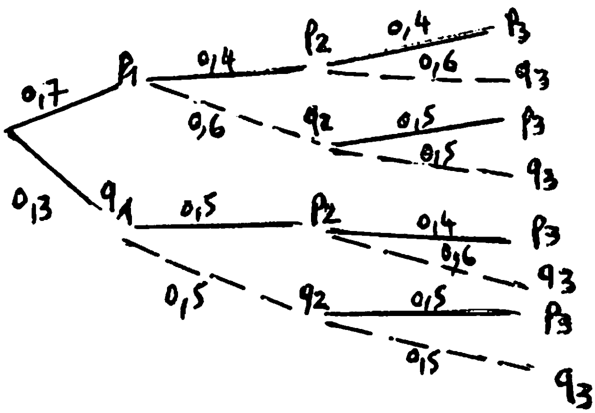
En désignant par p_n la probabilité que l'appareil tombe en panne l'année n ; $q_n = 1 - p_n$, on a la 2ème année $(p_2 \; q_2) = (p_1 \; q_1) \times T$ or $p_1 = 0,7$ $q_1 = 0,3$, d'où $(p_2 \; q_2) = (0,43 \; 0,57)$.
De même $(p_3 \; q_3) = (p_2 \; q_2) \times T = (0,457 \; 0,543)$. Il est vrai qu'il y a moins d'une chance sur deux que l'appareil tombe en panne la 2ème année ; (c'est confirmé la 3ème année)

2 - $(p_2 \; q_2) = (0,1 \; 0,9) \times T = (0,49 \; 0,51)$
$(p_3 \; q_3) = (0,49 \; 0,51) \times T = (0,451 \; 0,549)$



La probabilité que l'appareil tombe en panne la 2ème année ou la 3ème année ou les deux est 0,9 x 0,5 x 0,5 - 0,6 x 0,5 = 0,475 (sachant que l'appareil est garanti la 1ère année on enlève 0,6 x 0,5). L'espérance du coût de réparation est 0,475 x 150 = 71,25 €, ce coût étant inférieur à 80 € : on avait intérêt à ne pas prendre l'extension de garantie.

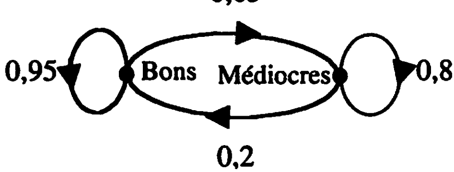
Si l'appareil n'était pas garanti la 1ère année l'espérance de coût est : (1 - 0,9 x 0,5 x 0,5) x 150 = 116 € 25 donc supérieur à 80 €, alors il était préférable de prendre l'extension de garantie.



De la même manière :
P = 1-0,3 x 0,5 x 0,5 - 0,6 x 0,5 = 0,625 ; l'espérance de coût est alors 150 x 0,625 = 93,75 € qui est supérieur à 80 €, donc on avait intérêt à prendre l'extension de garantie !

97 - LE PROBLÈME D'ŒNOLOGIE

On qualifiera de « bons » les vins notés au dessus de 3 étoiles et de « médiocres » ceux notés moins de 3 étoiles.



La matrice de transition de ce graphe est $T = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

On désigne par B_n l'évènement « le vin est bon » l'année n et A_n l'évènement « le vin est médiocre » l'année n. Soit p_n la probabilité de B_n : $p_n = p(B_n)$ et donc $q_n = p(A_n)$.

On a $p_{n+1} = 0{,}95\, p_n + 0{,}2\, q_n$

$q_{n+1} = 0{,}05\, pn + 0{,}8\, q_n$ ou $(p_{n+1}\ q_{n+1}) = (p_n\ q_n) \times T$

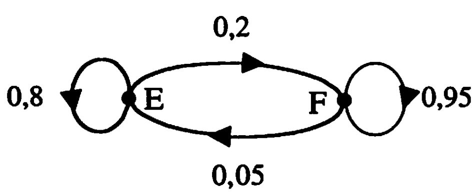
D'où au bout d'un an $(p_1\ q_1) = (p_0\ q_0) \times T$ or $p_0 = 0{,}1$ et donc $q_0 = 0{,}9$; on en déduit $(p_1\ q_1) = (0{,}275\ 0{,}725)$. Cinq ans après 1991 on a $(p_5\ q_5) = (0{,}1\ 0{,}9) \times T^5$ d'où $(p_5\ q_5) = (0{,}634\ 0{,}366)$ car

$$T^5 = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}61 & 0{,}39 \end{pmatrix}$$

L'évolution des vins de la dite région de France est bonne puisque la probabilité d'avoir un bon vin augmente sensiblement (de 0,1 à 0,6 et plus) en 5 ans : le vin se bonifie au fil du temps (c'est bien connu !).

98 - LE PROBLÈME DU P D G

On a le graphe probabiliste (E désignant l'entreprise et F sa filiale) :



dont la matrice est $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

D'où $P_1 = P_0 \times M$

$P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M^2$ etc....

On trouve à la calculatrice $M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}245 & 0{,}755 \\ 0{,}189 & 0{,}811 \end{pmatrix}$ (nombres arrondis à 10^{-3} près) d'où $P_{10} = P_0 \times M^{10} = (1\ 0) \times M^{10} = (0{,}245\ \ 0{,}755)$ et $P'_{10} = P'_0 \times M^{10} = (0{,}234\ 0{,}766)$.

On vérifie, aisément que pour n grand P_n et P'_n sont quasiment égaux à $(p_n\ q_n)$ avec $p_n = \dfrac{b}{a+b}$

Et $q_n = \dfrac{a}{a+b}$ d'après le cours. Ici a = 0,2 et b = 0,05 donc P_n est indépendant de P_0 pour n prenant de très grandes valeurs et par conséquent l'investissement à long terme ne dépend pas de l'état initial P_0 des bénéfices.

99 - LE PROBLÈME DU MAÎTRE DE CHAI

1 - D'une année sur l'autre :

*Un grand cru garde son appellation dans 50 % des cas ; il devient 1er grand cru dans 10 % des cas et devient cru bourgeois dans 40 % des cas.

*Un cru bourgeois prend l'appellation 1er grand cru dans 5 % des cas, prend l'appellation grand cru dans 15 % des cas et garde son appellation dans 80 % des cas.

2 - La matrice de transition du graphe étant : $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,25 & 0,15 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,05 & 0,15 & 0,8 \end{pmatrix}$ l'état initial étant

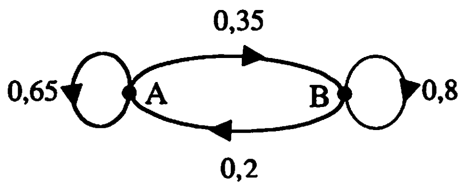
$P_0 = (0,05\ 0,15\ 0,8)$ on a la 1er année l'état $P_1 = P_0 \times T$,
2ème année l'état $P_2 = P_1 \times T = P_0 \times T^2$,
....
5ème année l'état $P_5 = P_0 \times T^5$ soit

$$P_5 = (0,05\ 0,15\ 0,8) \times \begin{pmatrix} 0,1845 & 0,2701 & 0,5453 \\ 0,1401 & 0,2556 & 0,6042 \\ 0,1283 & 0,2466 & 0,6250 \end{pmatrix}$$

D'où $P_5 = (0,1329\ 0,2491\ 0,6180)$; donc la 5ème année les proportions de 1er Grand cru et de Grand cru ont augmenté, seule a baissé la proportion de cru bourgeois ; l'évolution est bonne : le Maître de Chai peut être satisfait !

Au bout de 15 ans : $P_{15} = P_0 \times T^{15} = (0,1391\ 0,2521\ 0,6088)$; on a trouvé T^{15} avec la calculatrice. La bonification s'est poursuivie mais tend à se stabiliser, l'adage « se bonifie avec le temps comme le bon vin » n'est pas contredit !

100 - LE PROBLÈME DE L'ENTRAÎNEUR



1 - La matrice du graphe ci-dessus est : $T = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2 - $(p_3\ q_3) = (p_0\ q_0) \times T^3 = (0{,}1\ 0{,}9) \times \begin{pmatrix} 0,421 & 0,578 \\ 0,330 & 0,670 \end{pmatrix} = (0{,}3392\ 0{,}6608)$
d'où $p_3 = 0{,}3391 \approx 0{,}34$.

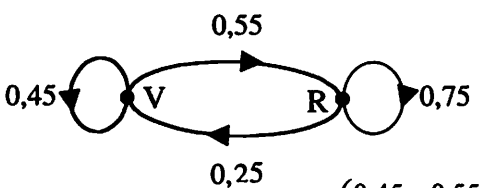
$(p_5\ q_5) = (0{,}1\ 0{,}9) \times T^5 = (0{,}3588\ 0{,}6412)$ car $T^5 = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,624 \\ 0,357 & 0,643 \end{pmatrix}$ d'où
$p_5 = 0{,}3588 \approx 0{,}36$

3 - $P_n = (p_n\ q_n) = P_0 \times T^n$ d'où $P_{15} = P_0 \times T^{15} = (p_0\ q_0) \times \begin{pmatrix} 0,364 & 0,636 \\ 0,364 & 0,636 \end{pmatrix}$
$= (0{,}364\ 0{,}636)$

Donc la probabilité p_{15} que le compétiteur fasse le temps de qualification au 15ème entraînement est 0,364 ; même si cette probabilité augmente au fil des entraînements elle tend à se stabiliser à 0,364 inférieur à 0,5 donc l'entraîneur n'a pas intérêt à présenter ce compétiteur à la course. Le jugement de l'entraîneur ne dépend pas de p_0 puisque p_n tend vers 0,364 pour $n \geq 15$

101 - LE PROBLÈME DU BANQUIER

1 - Le graphe probabiliste étant :



La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$ La situation bancaire du client le 1er mois est :

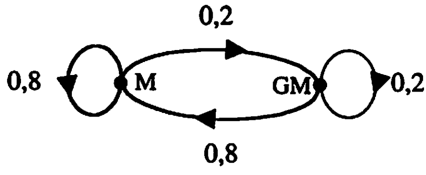
$P_1 = P_0 \times T = (1\ 0) \times \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,45\ 0,55)$. Le 2ème mois cette situation devient $P_2 = P_1 \times T = (0,45\ 0,55) \times T = (0,34\ 0,66)$. Le 3ème mois on a $P_3 = P_2 \times T \approx (0,3180\ 0,682)$

D'où la probabilité que le client soit créditeur à la fin du 3ème mois est 0,318 environ : on peut dire que la situation bancaire du client s'aggrave (la probabilité qu'il soit créditeur passe de 1 à 0,45 puis 0,34 et ensuite 0,318 !).

2 - On obtient avec la calculatrice $T^5 = \begin{pmatrix} 0,3127 & 0,6873 \\ 0,3124 & 0,6876 \end{pmatrix}$ et $T^{12} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,6875 \\ 0,3125 & 0,6875 \end{pmatrix}$ et $T^{18} = T^{12}$, $T^{24} = T^{18}$; par suite $P_5 = P_0 \times T^5 = (0,3127\ 0,6873)$ et $P_{12} = P_0 \times T^{12} = (0,3125\ 0,6875) = P_{18} = P_{24}$. La situation tend à se stabiliser au fil du temps : en effet la probabilité que le client soit créditeur se stabilise à 0,3125 et qu'il soit débiteur : 0,6875. Le client reste dans « le rouge » et sa situation ne s'est pas arrangée!

102 - LES GÉNÉRIQUES

1 - Le graphe demandé est :



Sa matrice est $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

2 - a- $P_1 = P_0 \times T$ de même $P_2 = P_1 \times T = P_0 \times T^2$ et par suite... $P_n = P_0 \times T^n$.

b- On vérifie aisément que $T^2 = T$; $T^3 = T$ d'où $T^n = T$ (cela peut se démontrer par récurrence).

c- $P_n = P_0 \times T^n = P_0 \times T = (1\ 0) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} = (0,8\ 0,2)$

3 - On sait (cf cours) qu'à long terme (pour n grand) P_n tend vers P (x y) tel que

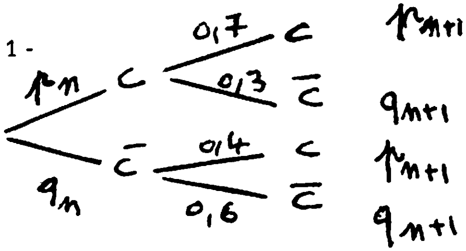
P x T = P d'où (x y) x $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ = (x y) ; on obtient :

x = 0,8x + 0,8y ou -0,2x + 0,8y = 0
y = 0,2x + 0,2y ou 0,2x -0,8y = 0

On a 2 équations équivalentes mais x et y vérifient x + y = 1
Par suite x et y vérifient x + y = 1 et 0,2x -0,8y = 0, on obtient x = 0,8 et y = 0,2.
Il y a donc stabilisation à (0,8 0,2) des marchés à long terme.

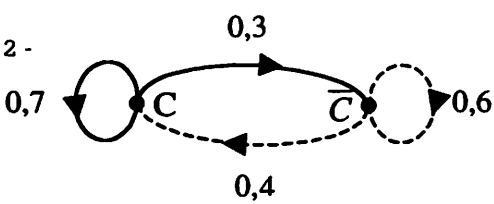
103 - JEU DE FLÉCHETTES

1 -



Donc $p_{n+1} = 0{,}7\ p_n + 0{,}4\ q_n$, on a évidemment $p_n + q_n = 1$

2 -



Sa matrice est $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; la probabilité d'atteindre la cible est de 0,7 quand on a atteint la cible précédemment ; elle est de 0,4 quand on a raté précédemment la cible.

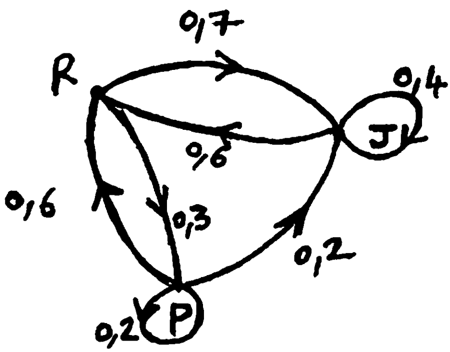
3 -

On a $(p_2\ q_2) = (p_1\ q_1) \times T$ et $(p_3\ q_3) = (p_1\ q_1) \times T^2$ or $(p_1\ q_1) = (0{,}5\ 0{,}5)$ et

$T^2 = \begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{pmatrix}$ d'où $(p_3\ q_3) = (0{,}565\ \ 0{,}435)$ donc la probabilité que la $3^{ème}$ fléchette atteigne la cible est 0,565 : c'est bien plus qu'une chance sur deux !

104 - LA PARTIE DE POKER

On a les mouvements d'argent représentés par le graphe :



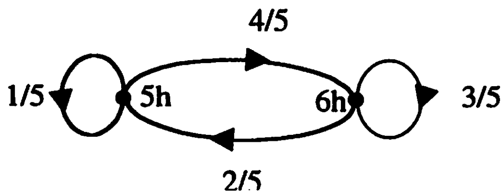
Il faut compléter les données par une boucle de poids 0,4 en J (car la somme des poids des arêtes partant d'un sommet est égale à 1),de même il faut une boucle en P de poids 0,2 ; ce qui signifie que Jojo garde 40 % de son magot à chaque partie et Popol garde 20 %. On note $(R_0\ J_0\ P_0)$ = (400 500 700). La matrice de transition du graphe est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ d'où à l'issue

De la 1ère partie : $(R_1\ J_1\ P_1)$ = (400 500 700) x T = (720 620 260)

De la 2ème partie : $(R_2\ J_2\ P_2)$ = (400 500 700) x T^2 = (528 804 268)

De la 20ème partie : $(R_{20}\ J_{20}\ P_{20})$ = (400 500 700) x T^{20} = (600 775 225) : on trouve T^{20} avec la calculatrice. Le grand gagnant est Jojo dont le magot est passé de 500 à 775 € ; le joueur le plus malchanceux est Popol car après la 20ème partie il n'a plus que 225 € sur les 700 € du début de la partie.

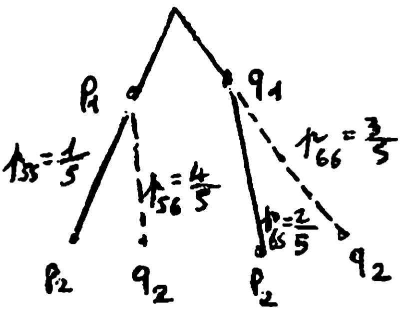
105 - IL EST CINQ HEURES... CLARA S'ÉVEILLE



1 - En complétant le graphe pondéré ci-contre, on obtient les probabilités :

$P_{56} = 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}= 0{,}8$: il y a 4 chances sur 5 que si le biberon est pris à 5 h, il le soit à 6 h le jour suivant.

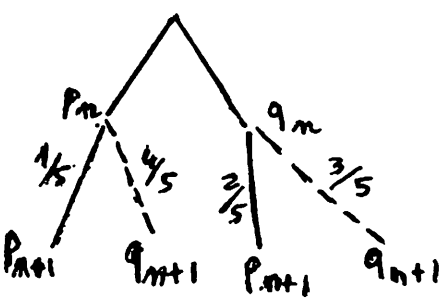
$P_{66} = 1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}= 0{,}6$ d'où il y a 3 chances sur 5 que si le 1er biberon est pris à 6 h, il le soit encore à 6 h le jour suivant. On aurait pu trouver ces résultats en complétant l'arbre pondéré.



On a $p_2 = \frac{1}{5}\ p_1 + \frac{2}{5}\ q_1 = 0{,}2\ p_1 + 0{,}4\ q_1$ et $q_2 = \frac{4}{5}\ p_1 + \frac{3}{5}\ q_1 = 0{,}8\ p_1 + 0{,}6\ q_1$

soit en écriture matricielle $(p_2\ q_2) = (p_1\ q_1) \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

2 - Si l'on considère le n° jour et le (n + 1)° jour on a de même $(p_{n+1}\ q_{n+1}) = (p_n\ q_n) \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$



Sachant qu'il y a le n° jour 1 chance sur 2 que Clara prenne son 1er biberon à 6 h on a donc $q_n = \frac{1}{2}$ (et évidemment $p_n = \frac{1}{2}$) d'où $q_{n+1} = 0{,}8\ p_n + 0{,}6\ q_n$

$= 0{,}8\text{x} \dfrac{1}{2} + 0{,}6\text{x} \dfrac{1}{2} = 0{,}7$; donc il y a 7 chances sur 10 que la gentille Clara prenne 2 jours de suite son 1er biberon à 6 h le matin

3 - On a donc $p_1 = 0{,}5$ d'où $(p_2\ q_2) = (0{,}5\ 0{,}5) \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = (0{,}3\ 0{,}7)$; de même

$(p_3\ q_3) = (p_2\ q_2) \times T$ en notant T la matrice du graphe : $T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$
d'où $(p_3\ q_3) = (0{,}34\ 0{,}66)$ et $(p_5\ q_5) = (p_1\ q_1) \times T^4$; on trouve avec la calculatrice :

$$T^4 = \begin{pmatrix} 0{,}3344 & 0{,}6656 \\ 0{,}3328 & 0{,}6672 \end{pmatrix}$$

D'où $(p_5\ q_5) = (0{,}3336\ 0{,}6664)$. Les probabilités que Clara prenne son 1er biberon à 5 h sont respectivement le 2ème jour, le 3ème jour, le 5ème jour de 0,3 ; 0,34 ; 0,3336. Par contre Clara prend son 1er biberon à 6 h : le 2ème jour, le 3ème, le 5ème avec les probabilités respectives de 0,7 ; 0,66 ; 0,6664 : l'heure du 1er biberon la plus fréquente à court terme est donc 6 h du matin.

4 - On cherche l'état probabiliste stable (p q) tel que $(p\ q) = (p\ q) \times T$, ce qui donne :
$p = 0{,}2p + 0{,}4q$ et $q = 0{,}8p + 0{,}6q$ ces 2 équations sont équivalentes mais on a $p + q = 1$ d'où l'on obtient $0{,}8p = 0{,}4\,(1-p)$ soit $p = \dfrac{1}{3}$ et donc $q = \dfrac{2}{3}$; On sait d'après le cours qu'a long terme la probabilité q_n que Clara prenne le biberon à 6 h le n° jour tend vers $q = \dfrac{2}{3}$: il y a 2 fois plus de chances qu'elle prenne le 1er biberon à 6 h qu'à 5 h !

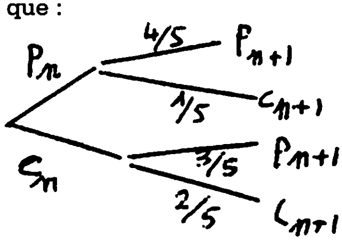
106 - L'ÉVOLUTION DES ESPÈCES

1 - En désignant par p_n le nombre de pucerons et c_n le nombre de coccinelles le n° jour, on admet que :

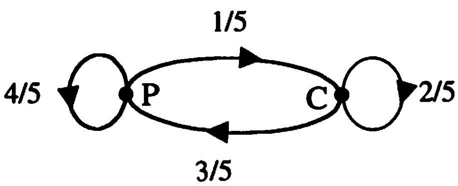
$p_{n+1} = \dfrac{4}{5} p_n + \dfrac{3}{5} c_n$

$q_{n+1} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{2}{5} c_n$

d'où l'arbre pondéré



Et le graphe probabiliste :



dont la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2 - Si le 1er jour $c_1 = 100$ et $p_1 = 500$: on a le 2ème jour $(p_2\ c_2) = (p_1\ c_1) \text{x}\ M = (460\ 140)$, le 3ème jour $(p_3\ c_3) = (500\ 100)\ \text{x}\ M^2$ avec
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix}$$ d'où $(p_3\ c_3) = (452\ 148)$: le 3ème jour il y a 452 pucerons et 148 coccinelles . Le 5ème jour $(p_5\ c_5) = (500\ 100)\ \text{x}\ M^4 = (450\ 150)$ car
$$M^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$; il y a 450 pucerons et 150 coccinelles le 5ème jour : le nombre de pucerons a diminué et celui des coccinelles a augmenté ! de plus il est vrai qu'à court terme, il y a 3 fois plus de pucerons que de coccinelles. A l'issue d'une semaine : $(p_7\ c_7) = (500\ 100) \text{x}\ M^6$.

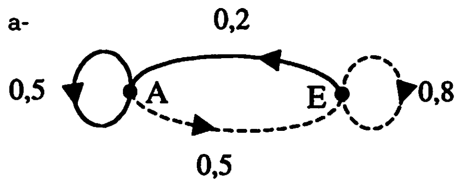
On trouve avec la calculatrice que $M^4 \approx M^5 \approx M^6 = \ldots\ldots$ d'où $(p_7\ c_7) = (450\ 150)$: il n'y a plus d'évolution à partir du 5ème jour !

3 -* Avec $p_1 = 500$ et $c_1 = 500$ on obtient : $(p_2\ c_2) = (500\ 500)\ \text{x}\ M = (700\ 300)$; $(p_3\ c_3) = (500\ 500)\ \text{x}\ M^2 = (740\ 260)$ et $(p_5\ c_5) = (500\ 500)\ \text{x}\ M^4 = (750\ 250)$; on constate qu'il y a de plus en plus de pucerons et de moins en moins de coccinelles ! et qu'il n'y a plus d'évolution à partir du 5ème jour, on a donc $(p_7\ c_7) = (750\ 250)$.

*Avec $p_1 = 100$ et $c_1 = 500$ on obtient : $(p_2\ c_2) = (100\ 500)\ \text{x}\ M = (380\ 220)$, $(p_3\ c_3) = (100\ 500)\ \text{x}\ M^2 = (436\ 164)$, $(p_5\ c_5) = (100\ 500)\ \text{x}\ M^4 = (450\ 150)$ et $(p_7\ c_7) = (100\ 500)\ \text{x}\ M^6 = (450\ 150)$: l'évolution reste la même que dans le cas précédent.

107 - LE PROBLÈME DU GARDIEN DE BUT

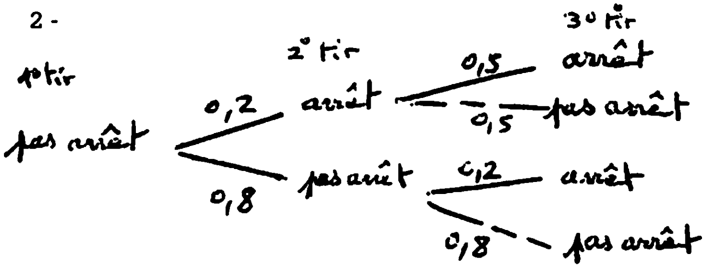
1 - a-



A est la situation : « le gardien arrête le tir » et E est la situation : « le gardien encaisse le but ». On complète le graphe en marquant les probabilités manquantes (sur les arêtes en pointillés).

b- La matrice de transition du graphe est : $T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2 -

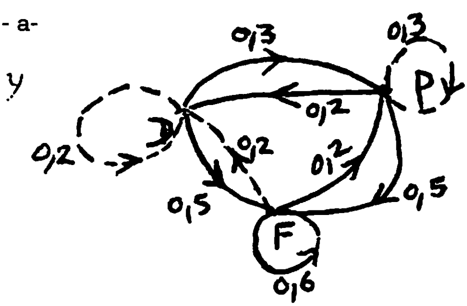


Le gardien n'a pas arrêté le 1er tir, la probabilité qu'il arrête le 3ème tir est : 0,2 x 0,5 + 0,8 x 0,2 = 0,26 (il y a plus d'une chance sur quatre qu'il arrête le 3ème tir).

108 - LE PROBLÈME DU RESTAURATEUR

1 $d = \dfrac{200}{1000} = 0,2$; $f = \dfrac{500}{1000} = 0,5$; $p = \dfrac{300}{1000} = 0,3$

2 - a-



On complète le graphe par une boucle en D pondérée par 1 - (0,5 + 0,3) = 0,2, par une boucle en P pondérée par 1 - (0,5 + 0,2) = 0,3 et par l'arête orientée de F vers D pondérée par 1 - (0,6 + 0,2) = 0,2.

b- En prenant dans l'ordre D F P, la matrice du graphe est : $T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$

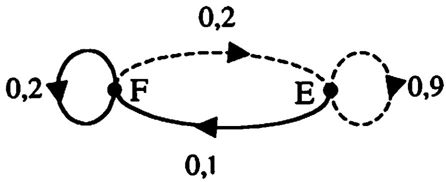
d'où $(d_2\ f_2\ p_2) = (d\ f\ p) \times T = (0,2\ 0,5\ 0,3) \times T = (0,2\ 0,55\ 0,25)$ et $(d_3\ f_3\ p_3) = (0,2\ 0,55\ 0,25) \times T = (0,2\ 0,555.\ 0,245)$. On constate qu'à court terme la probabilité qu'un client choisisse le menu Découverte ne change pas depuis le début (elle ne changera pas non plus à long terme).

Par contre le nombre de clients pour le menu frisson a tendance à augmenter et les clients pour le menu Passion diminuent.

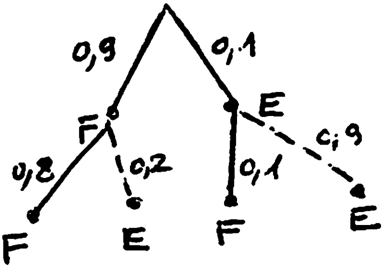
109 - L'AGENCE DE VOYAGES

L'évolution des séjours d'une année sur l'autre peut se représenter par le graphe probabiliste où F représente les séjours en France et E ceux à l'étranger.

1 - En complétant on obtient les probabilités demandées, soit 0,2 et 0,9.



2 - On peut faire l'arbre pondéré :



La probabilité qu'un client ait choisi un séjour en France à la fois en 2002 et 2003 est donc 0,9 x 0,8 = 0,72. La probabilité qu'il fasse un séjour en France en 2003 est : O,9 x 0,8 + 0,1 x 0,1 = 0,72 + 0,01 = 0,73.

3 - La probabilité qu'un client ait effectué un séjour à l'étranger à la fois en 2002 et 2003 étant 0,1 x 0,9 = 0,09 ; le nombre de clients cherché est 3000 x 0,09 = 270.

4 - En 2006 ,en notant f_4 et e_4 les probabilités qu'un client fasse respectivement un séjour en France ou un séjour à l'étranger on a : $(f_4\ e_4) = (f_0\ e_0) \times T^4$ avec $f_0 = 0{,}9$ $e_0 = 0{,}1$ et T matrice de transition du graphe : $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ d'où $(f_4\ e_4) \approx (0{,}4694 \quad 0{,}5306)$, la répartition envisageable en 2006 est : 3000 x 0,4694 = 1408 séjours en France et 3000 x 0,5306 = 1592 séjours à l'étranger (on aurait pu faire : 3000 - 1408 = 1592).

5 - On cherche l'état stable (f e) tel que (f e) = (f e) x T d'où f = 0,8f + 0,1e avec e = 1 - f

On trouve $f = \frac{1}{3}$ et $e = 1 - f = \frac{2}{3}$. A long terme l'évolution des séjours est donc :

1 séjour sur 3 se déroulera en France et 2 séjours sur 3 se dérouleront à l'étranger.

110 - LE PROBLÈME L'AUTOMOBILISTE PRESSÉ

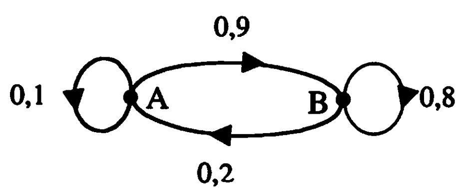
1 - Les probabilités que l'automobiliste rencontre 1 feu vert ; 1 feu orange ; 1 feu rouge sont respectivement :

$p(V) = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$; $p(O) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$; $p(R) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

L'expérience étudiée est la répétition de 3 expériences identiques et indépendantes : l'évènement noté A « l'automobiliste rencontre exactement 2 feux verts » est réalisé dans les cas (VVO) (VOV) (OVV) (VVR) (VRV) (RVV), la probabilité cherchée est donc :

$P(A) = 3 \times (\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{1}{12}) + 3 \times (\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{1}{3}) = \frac{245}{572} \approx 0{,}43.$

2 - On a le graphe suivant



A est l'évènement « il rencontre 2 feux verts », la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

On a $(p_2\ q_2) = (p_1\ q_1) \times T$ avec $p_1 = p(A) = \frac{245}{576}$ d'où $(p_3\ q_3) = (p_2\ q_2) \times T = (p_1\ q_1) \times T^2 = (0{,}1842\ \ 0{,}8158)$ sachant qu'on a $T^2 = \begin{pmatrix} 0,19 & 0,81 \\ 0,18 & 0,82 \end{pmatrix}$.

De même $(p_{10}\ q_{10}) = (p_1\ q_1) \times T^9 = (\frac{245}{576}\ \frac{331}{576}) \times \begin{pmatrix} 0,182 & 0,818 \\ 0,182 & 0,818 \end{pmatrix} = (0{,}182\ 0{,}818)$.

La situation se stabilise au bout d'environ 10 jours (la probabilité p_n tend vers 0,182).

111 - JEU DE PLAGE

1 - On a d'après le graphe $(a_2\ b_2\ c_2) = (a_1\ b_1\ c_1) \times \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

M étant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; plus généralement $(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = (a_n\ b_n\ c_n) \times M$.

2 - Ayant $(a_2\ b_2\ c_2) = (a_1\ b_1\ c_1) \times M$; on a également $(a_3\ b_3\ c_3) \times M = (a_1\ b_1\ c_1) \times M^2$.

On suppose que $(a_n\ b_n\ c_n) = (a_1\ b_1\ c_1) \times M^{n-1}$ et l'on va démontrer par récurrence que $(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = (a_1\ b_1\ c_1) \times M^n$. On a $(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = (a_n\ b_n\ c_n) \times M$ d'où $(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = (a_1\ b_1\ c_1) \times M^{n-1} \times M = (a_1\ b_1\ c_1) \times M^n$. Cette propriété étant vraie pour n = 2, n = 3 ; étant supposée vraie pour n, on a démontré qu'elle était vraie pour n + 1 : elle est donc vraie pou tout $n \geq 1$

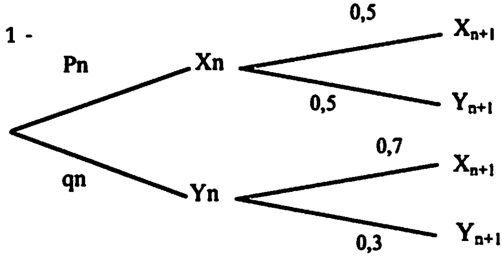
On trouve $M^2 \approx \begin{pmatrix} 0,562 & 0,25 & 0,187 \\ 0 & 0,812 & 0,187 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et donc $(a_3\ b_3\ c_3) = (1\ 0\ 0) \times M^2 = (0{,}562\ 0{,}25\ 0{,}188)$.

On a $(a_5\ b_5\ c_5) = (1\ 0\ 0) \times M^4$, pour effectuer ce calcul il suffit d'avoir la 1ère ligne de M^4 qui est le produit de la 1ère ligne de M^2 par chaque colonne de M^2 : on obtient la 1ère ligne .de M^4 : (0,457 0,343 0,2) d'où $(a_5\ b_5\ c_5) = (0{,}457\ 0{,}343\ 0{,}2)$. On obtient de même $(a_{10}\ b_{10}\ c_{10}) = (0{,}316\ 0{,}484\ 0{,}2)$.

Par conséquent on constate que Bastien a de plus en plus souvent le ballon, Alain : de moins en moins souvent. Les probabilités d'avoir le ballon ne dépendent pas du joueur qui avait le ballon au 1er coup.

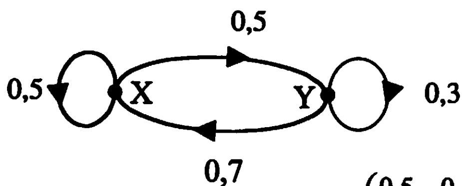
112 - AU PARFUM

1 -



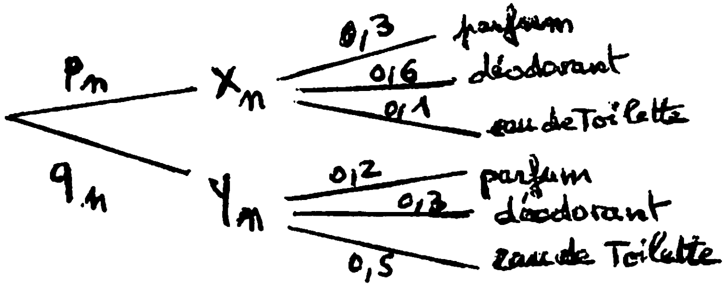
D'où $P_{n+1} = P(X_{n+1}) = 0{,}5P_n + 0{,}7Q_n$

Le graphe étant :



2 - La matrice du graphe est $T = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ et l'on a $(P_{n+1}\ Q_{n+1}) = (P_n\ Q_n) \times T$ soit $P_{n+1} = 0{,}5\ P_n + 0{,}7\ Q_n$ et $Q_{n+1} = 0{,}5\ P_n + 0{,}3\ Q_n$; sachant que d'après l'énoncé $P_0 = \frac{1}{3}$, on a $(P_1\ Q_1) = (\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}) \times T$, $(P_2\ Q_2) = (P_1\ Q_1) \times T = (\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}) \times T^2$ et plus généralement
$(P_6\ Q_6) = (\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}) \times T^6$ or $T^6 = \begin{pmatrix} 0{,}5834 & 0{,}4166 \\ 0{,}5833 & 0{,}4167 \end{pmatrix}$ d'où $P_6 = 0{,}5833$.

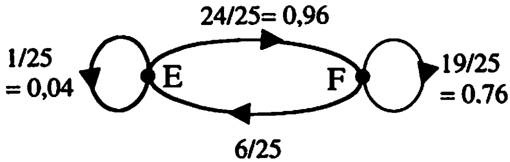
3 - On a l'arbre pondéré



D'où $P_n\,(T) = 0{,}3\ P_n + 0{,}2\ Q_n = 0{,}3\ P_n + 0{,}2\ (1-P_n) = 0{,}1P_n + 0{,}2$
Par suite $P_6\,(T) = 0{,}1\ P_6 + 0{,}2 = 0{,}258$

113 - LE PROBLÈME DU CONTRÔLEUR DE PANNES

1 - On désigne par E l'évènement « la machine tombe en panne » et F : « la machine ne tombe pas en panne »



La matrice de transition du graphe ci-dessus est $T = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,96 \\ 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$

2 - $p_{n+1} = 0,24 - 0,2p_n$ car $p_{n+1} = 0,04p_n + 0,24\,(1-p_n)$

3 -

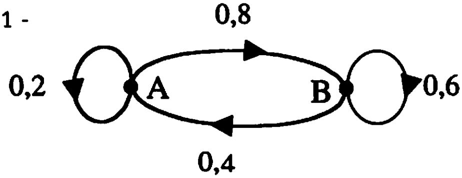
a- $u_n = p_n - 0,2$; (u_n) est une suite géométrique en effet $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2$ $= 0,24 - 0,2p_n - 0,2 = 0,04 - 0,2\,(u_n + 0,2) = -0,2u_n$; donc (u_n) est pour $n \geq 1$ une suite géométrique de raison -0,2 et de 1er terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,1 - 0,2 = -0,1$. On a $u_n = (-0,1) \times (-0,2)^{n-1}$ et $p_n = (-0,1) \times (-0,2)^{n-1} + 0,2$

b- $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,2)^{n-1} = 0$

Le contrôleur constate que au fil du temps la machine tombe 2 fois plus souvent en panne qu'au début ($p_1 = 0,1$).

114 – MADEMOISELLE PIPELETTE

1 -



La matrice de transition du graphe est $T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

2 -

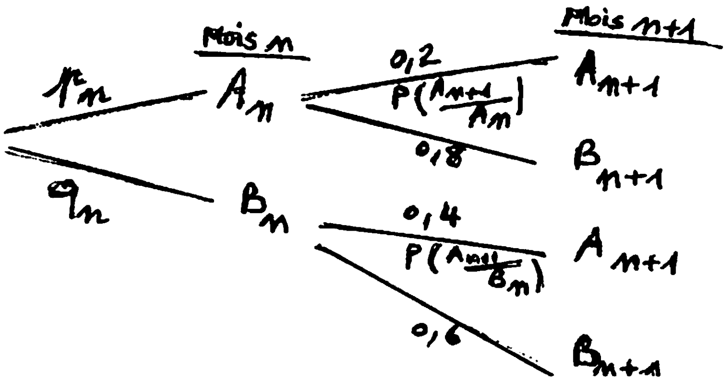
D'après le cours on a $(p_2\ q_2) = (p_1\ q_1) \times T = (0,2\,p_1 + 0,4\,q_1\ \ 0,8\,p_1 + 0,6\,q_1)$
D'où $p_2 = 0,2\,p_1 + 0,4\,q_1$ et $q_2 = 0,8\,p_1 + 0,6\,q_1$
Par suite la probabilité que Mademoiselle Pipelette dépasse son forfait le 2ème mois est $p_2 = 0,2 \times 0,5 + 0,4\,(1-0,5) = 0,1 + 0,2 = 0,3$

3 - $(p_2\ q_2) = (p_1\ q_1) \times T$, de même $(p_3\ q_3) = (p_2\ q_2) \times T = (p_1\ q_1) \times T^2$, et plus généralement $(p_{n+1}\ q_{n+1}) = (p_n\ q_n) \times T$ d'où $(p_{n+1}\ q_{n+1}) = (0{,}2\ p_n + 0{,}4 q_n\quad 0{,}8 p_n + 0{,}6 q_n)$, par suite $p_{n+1} = 0{,}2\ p_n + 0{,}4\ q_n$ et $q_{n+1} = 0{,}8\ p_n + 0{,}6\ q_n$.

AUTRE METHODE

En faisant l'arbre pondéré ci-dessous, on a :

$P_{n+1} = p\,(A_{n+1}) = 0{,}2\ p_n + 0{,}4\ q_n = 0{,}2\ p_n + 0{,}4\ (1 - p_n) = 0{,}4 - 0{,}2\ p_n$.



1 - $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} = 0{,}4 - 0{,}2\ p_n - \frac{1}{3} = 0{,}4 - 0{,}2\ (u_n + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = -\ 0{,}2\ u_n$;

donc (u_n) pour $n \geq 1$

est une suite géométrique de raison - 0,2 et de 1er terme $u_1 = \frac{1}{6}$.

2 - $u_n = u_1 \times (-\ 0{,}2)^{n-1} = \frac{1}{6} \times (-\ 0{,}2)^{n-1}$ et $p_n = u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times (-\ 0{,}2)^{n-1} + \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{3}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}2)^{n-1} = 0$

S'il y avait 1 chance sur 2 que mademoiselle Pipelette dépasse son forfait le 1er mois ,il y aura à long terme 1 chance sur 3 qu'elle dépasse son forfait : mademoiselle Pipelette a mieux géré avec le temps !

115 - « ON TOURNE ! »

A l'issue d'une partie un joueur peut être gagnant (état G) ou perdant donc exclu (état E) ou rentrant (état R). On note g la probabilité de gagner la tournante pour un joueur qui vient de gagner ; de même e désignera la probabilité de gagner la tournante pour un joueur exclu et r sera la probabilité de gagner pour un rentrant. Les graphes ci-dessous représentent la situation :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "1/2"] \arrow[d, "1/2"'] & E \text{ (G est exclu)} \arrow[d, "e"] \\ G & G \end{tikzcd}$$

(le gagnant gagne encore)

donne $g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "1/2"] \arrow[d, "1/2"'] & G \text{ (rentrant gagne)} \arrow[d, "g"] \\ E & G \end{tikzcd}$$

(Rentrant perd et est exclu)

donne $r = \frac{1}{2}g$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "1/2"] \arrow[d, "1/2"'] & R \text{ (l'exclu rentre)} \arrow[d, "r"] \\ {} & G \end{tikzcd}$$

donne $e = \frac{1}{2}r$

donc $g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}r = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}g$ par suite $\frac{7}{8}g = \frac{1}{2}$ d'où $g = \frac{4}{7}$ et $r = \frac{2}{7}$ $e = \frac{1}{7}$ (on vérifie que $g + r + e = 1$). La probabilité que Bastien gagne la tournante est $p(B) = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}e$ (Bastien a 1 chance sur 2 de se trouver en G et 1 chance sur 2 de se trouver en E), d'où $p(B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "1/2"] \arrow[d, "1/2"'] & E \arrow[r, "e"] & G \\ G \arrow[d, "g"'] & & \\ G & & \end{tikzcd}$$

Cyril a la même probabilité de gagner (B et C jouant la 1ère partie ont des rôles symétriques)

Quant à Stéphane, joueur rentrant, sa probabilité de gagner est $\frac{2}{7}$; on vérifie que $p(S) = 1 - p(B) - p(C) = 1 - 2 \times \frac{5}{14} = \frac{2}{7}$.

116 - PROBLÈME DE MARKETING

1 - D'un mois sur l'autre la part de marché chez X, du produit est multiplié par 0,8 (soit 80 % de la distribution reste acquis à X). Par contre 10 % sont abandonnés au profit de Y et 10 % sont abandonnés au profit de Z. De même Y conserve 70 % de sa part de marché et délaisse 10 % de ses commandes au profit de Z et 20 % au profit de X.

Enfin Z conserve 50 % de sa part de marché mais abandonne 30 % au profit de X et 20 % au profit de Y.

2 - La matrice de transition du graphe est $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$ et l'on a (avec la calculatrice) :

$T^2 = \begin{pmatrix} 0,69 & 0,17 & 0,14 \\ 0,33 & 0,53 & 0,14 \\ 0,43 & 0,27 & 0,3 \end{pmatrix}$ d'où $P_2 = P_0 \times T^2 = (0,458\ 0,37\ 0,172)$

$T^3 = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,216 & 0,15 \\ 0,412 & 0,432 & 0,15 \\ 0,488 & 0,292 & 0,22 \end{pmatrix}$ d'où $P_3 = P_0 \times T^3 = (0,492\ 0,339\ 0,164)$

$T^6 = \begin{pmatrix} 0,559 & 0,274 & 0,166 \\ 0,513 & 0,321 & 0,166 \\ 0,534 & 0,295 & 0,17 \end{pmatrix}$ d'où $P_6 = P_0 \times T^6 = (0,531\ 0,302\ 0,167)$

$T^{12} = \begin{pmatrix} 0,542 & 0,291 & 0,167 \\ 0,54 & 0,293 & 0,167 \\ 0,541 & 0,292 & 0,167 \end{pmatrix}$ d'où $P_{12} = P_0 \times T^{12} = (0,541\ 0,292\ 0,167)$

A long terme la distribution des parts de marché évolue : elle augmente chez X (0,458-0,492-0,531-0,541). Elle diminue chez Y (0,37-0,339-0,302-0,292) et est sensiblement stable chez Z.

3 - Au bout de 3 mois on a $P_3 = (0,492\ 0,339\ 0,164)$, d'où le bénéfice pour :
X est : $0,492 \times 10^5 \times 1 = 49200$ €
Y est : $0,339 \times 10^5 \times 0,9 = 30510$ €
Z est : $0,164 \times 10^5 \times 1,1 = 18040$ €

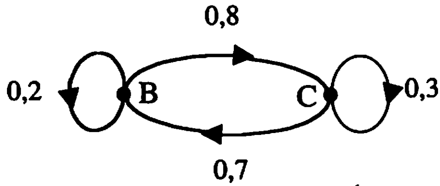
Donc la chaîne Z abandonne la distribution du produit.
Au bout de 12 mois on a $P_{12} = (0,541\ 0,292\ 0,167)$, d'où le bénéfice pour Y est :
$0,292 \times 10^5 \times 0,9 = 26280$ € < 26500 ; mais en fait on constate que dès le 9ème mois le bénéfice est inférieur au seuil de rentabilité,

en effet : $y_9 = P_0 \times \begin{pmatrix} 0,2876 \\ 0,2979 \\ 0,2924 \end{pmatrix} = 0,29371$

D'où le bénéfice pour Y au bout du 9ème mois est : $0,29371 \times 0,9 \times 10^5 = 26434 < 26500$, donc en fait au bout du 9ème mois seule l'entreprise X distribue le produit.

117 - LE PROBLÈME DU CONSEILLER PRINCIPAL D'EDUCATION

On note B l'état « bavardage » et C l'état « pas bavardage ». Le graphe demandé est :



Sa matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

1 - $P_2 = P_1 \times T$ avec $P_1 = (0,1\ 0,9)$ d'où $P_2 = (0,65\ 0,35)$: la probabilité que Pipelette bavarde au 2ème cours est $p_2 = 0,65$. De même $P_3 = P_2 \times T = (0,375\ \ 0,625)$: la probabilité de bavardage au 3ème cours est $p_3 = 0,375$.

2 -

a- $P_{n+1} = P_n \times T$ d'où $(p_{n+1}\ q_{n+1}) = (p_n\ q_n) \times T = (0,2\ p_n + 0,7 q_n\ \ 0,8\ p_n + 0,3\ q_n)$ donc $p_{n+1} = 0,2\ p_n + 0,7\ q_n = 0,2\ p_n + 0,7\ (1-p_n) = -0,5\ p_n + 0,7$.

b- $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{7}{15} = -0,5\ p_n + 0,7 - \frac{7}{15} = -0,5\ (v_n + \frac{7}{15}) + \frac{7}{10} - \frac{7}{15} = -0,5\ v_n - 0,5 \times \frac{7}{15} + \frac{7}{10} - \frac{7}{15} = -0,5\ v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison -0,5 et de 1er terme

$v_1 = p_1 - \frac{7}{15} = -\frac{11}{30}$

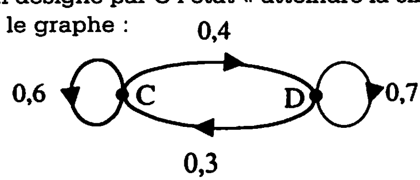
On a $v_n = v_1 \times (-0,5)^{n-1} = -\frac{11}{30} \times (-0,5)^{n-1}$ d'où $p_n = v_n + \frac{7}{15} = -\frac{11}{30}(-0,5)^{n-1} + \frac{7}{15}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \frac{7}{15}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,5)^{n-1} = 0$

Mademoiselle Pipelette n'a pas fait d'effort pour modifier son comportement ! Ce résultat ne dépend pas de l'état initial p_1.

118 - BALL-TRAP

On désigne par C l'état « atteindre la cible » et D l'état « rater la cible ». On a le graphe :



La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

1 - On a $P_2 = (0,5\ 0,5) \times T = (0,45\ 0,55)$ d'où $p_2 = 0,45$.

$P_3 = P_2 \times T$ d'où $p_3 = 0,435$.

2 - On vérifie aisément que $T = N + 0,3\ R$ ainsi que $N^2 = N = N^3 = N^n$
$R^2 = R$ donc $R^3 = R$ et par suite $R^n = R$, enfin $R \times N = N \times R = 0$
D'où $T^2 = (N + 0,3\ R)^2 = N^2 + (2 \times 0,3) \times N \times R + (0,3)^2\ R^2 = N + (0,3)^2\ R$ et de proche en proche (on peut le démontrer par récurrence) :

$T^n = N + (0,3)^n\ R$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,3)^n = 0$

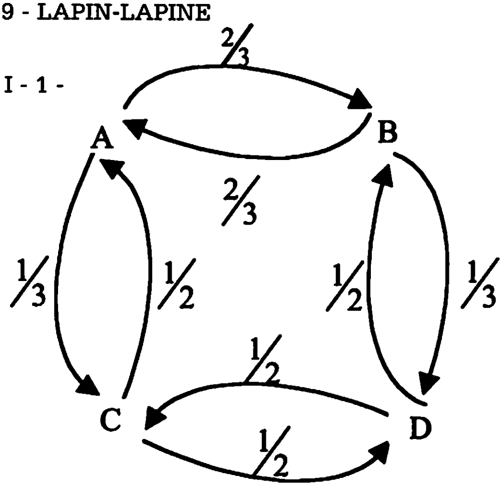
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n = N$

On sait que $P_n = (p_n\ q_n) = P_1 \times T^{n-1} = (0,5\ 0,5) \times T^{n-1}$ d'où pour n très grand on peut admettre que
$P_n = (0,5\ 0,5) \times N$ par suite $P_n = \left(\frac{3}{7}\ \ \frac{4}{7}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \frac{3}{7}$

Donc la probabilité de faire mouche tend vers 3/7 pour n de plus en plus grand.

119 - LAPIN-LAPINE

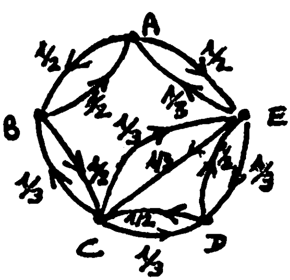
I - 1 -



Dans un graphe probabiliste la somme des poids des arêtes partant d'un sommet est égale à 1 d'où le graphe ci-dessus. Le poids de l'arête orientée de A vers B est 2/3 car le lapin a deux possibilités d'aller de A vers B (2 passages) et une possibilité d'aller de A vers C, donc partant de A il a 2 chances sur 3 d'aller vers B. La matrice du graphe est : $\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

2 - Pour atteindre C le lapin peut en 3 coups faire le trajet ABAC avec la probabilité :
p (AB) x p (BA) x p (AC) = (2/3) x (2/3) x (1/2) = 2/9 ;ou faire le trajet ABDC avec la probabilité : p (AB)x p (BD)x p (DC) = (2/3) x (1/3) x (1/2) = 1/9. Donc la probabilité que le lapin rejoigne la lapine en 3 coups est (2/9) + (1/9) = 3/9 = 1/3. Le lapin ne pouvant rejoindre la lapine en 4 coups la probabilité cherchée est nulle.

II- Le graphe est :



La matrice associée est :

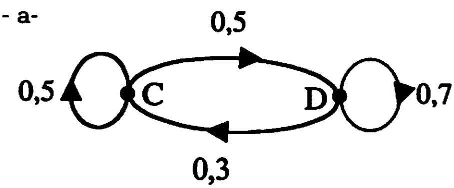
$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$ En prenant dans l'ordre ABCDE.

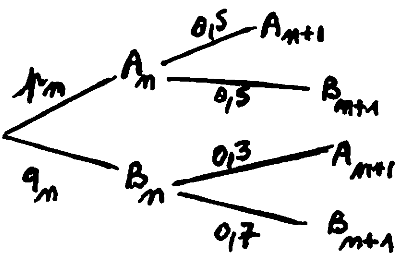
Le lapin partant de A peut rejoindre son amie en 3 coups en faisant le trajet AEDC avec la probabilité : p (AE) x p (ED) x p (DC) = (1/2) x (1/3) x (1/2) = 1/12. Il peut la rejoindre en 4 coups en faisant le trajet ABAEC de probabilité (1/2) x (1/2) x (1/2) x (1/3) = 1/24 ou en faisant AEABC de probabilité (1/2) x (1/3) x (1/2) x (1/2) = 1/24 ou encore en faisant AEDEC de probabilité (1/2) x (1/3) x (1/2) x (1/3) = 1/36 ; donc le lapin rejoint son amie en 4 coups avec la probabilité (1/24) + (1/24) + (1/36) = (1/12) + (1/36) = 4/36 = 1/9

120 - CAMPAGNE DE PUBLICITÉ

1 - On a évidemment $p_n + q_n = 1$

2 - a-





$P_{An}(A_{n+1})$ étant la probabilité que l'évènement A_{n+1} se réalise sachant que l'évènement A_n s'est réalisé, on a $P_{An}(A_{n+1}) = 0{,}5$: c'est la probabilité que la personne interrogée soit favorable le n + 1ème mois au modèle a sachant qu'elle était favorable le nème mois au modèle a.

De même $P_{An}(B_{n+1}) = 0{,}5$ est la probabilité que la personne interrogée soit favorable le n + 1ème mois au modèle b sachant qu'elle était favorable le nème mois au modèle a. La probabilité que la personne interrogée soit favorable le n + 1ème mois au modèle a sachant qu'elle était favorable le nème mois au modèle b est $P_{Bn}(A_{n+1}) = 0{,}3$ et l'on a également $P_{Bn}(B_{n+1}) = 0{,}7$.

b-

On a d'après le graphe $(P_{n+1}\ Q_{n+1}) = (P_n\ Q_n) \times T$ avec $T = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ d'où

$(P_{n+1}\ Q_{n+1}) = (0{,}5\,P_n + 0{,}3\,Q_n \quad 0{,}5\,P_n + 0{,}7\,Q_n)$ d'où $P_{n+1} = 0{,}5\,P_n + 0{,}3\,Q_n$
et $Q_{n+1} = 0{,}5\,P_n + 0{,}7\,Q_n$

Avec l'arbre on obtient : $P_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{An}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{Bn}(A_{n+1}) \times P(B_n) = 0{,}5\,P_n + 0{,}3\,Q_n$

De même

$Q_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{An}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{Bn}(B_{n+1}) \times P(B_n) = 0{,}5\,P_n + 0{,}7\,Q_n$

Mais d'après 1- : $P_n = 1 - Q_n$ d'où

$Q_{n+1} = 0{,}5\,(1-Q_n) + 0{,}7\,Q_n = 0{,}2\,Q_n + 0{,}5$

c-

On a $U_{n+1} = Q_{n+1} - 0{,}625 = 0{,}2\ Q_n + 0{,}5 - 0{,}625 = 0{,}2\ Q_n - 0{,}125 = 0{,}2\ (U_n + 0{,}625) - 0{,}125 = 0{,}2\ Q_n$

Par conséquent la suite $(U_n)_{n>0}$ est une suite géométrique de raison 0,2.

d- On a $U_n = U_1 \times (0{,}2)^{n-1}$ d'où $Q_n = U_n + 0{,}625 = U_1 \times (0{,}2)^{n-1} + 0{,}625$

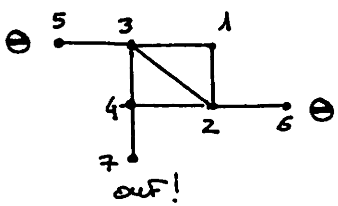
$\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n = 0{,}625$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}2)^{n-1} = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} Q_n = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$

Au fil du temps P_n se stabilise avec $P_n < Q_n$ donc il semblerait que le modèle b ait de plus en plus les préférences des personnes interrogées.

121 - « MINNIE PETITE SOURIS, SORS DE TON TROU ! »

Le graphe correspondant à la situation est :



On désigne par p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 les probabilités pour la souris d'atteindre « la liberté » en partant de 1, 2, 3, 4, 5, 6 .Le degré du sommet 1 étant égal à 2 la souris a autant de chances d'aller en 2 ou en 3 soit 1 chance sur 2 d'où $p_1 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} p_3$.

Le degré des sommets 2 et 3 étant égal à 4, la souris se trouvant en 2 (ou en 3) a une chance sur 4 d'atteindre le sommet suivant d'où : $p_2 = \frac{1}{4} p_1 + \frac{1}{4} p_3 + \frac{1}{4} p_4 + \frac{1}{4} p_6 = \frac{1}{4} (p_1 + p_3 + p_4)$ car $p_6 = 0$. De même $p_3 = \frac{1}{4} p_1 + \frac{1}{4} p_2 + \frac{1}{4} p_4 + \frac{1}{4} p_5 = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_4)$ car $p_5 = 0$. Par symétrie on a évidemment $p_2 = p_3$ et par conséquent $p_1 = \frac{1}{2} (p_2 + p_3) = p_2$. On a $p_4 = \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3 + \frac{1}{3} p_7 = \frac{1}{3} (p_2 + p_3 + 1)$ car $p_7 = 1$ d'où $p_4 = \frac{1}{3} (2\ p_2 + 1)$ car $p_2 = p_3$ par suite on a :

$p_1 = p_2 = p_3$

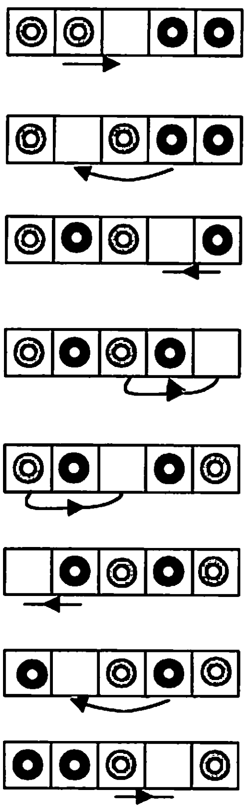
$p_2 = \frac{1}{4} (p_1 + p_3 + p_4)$

$p_4 = \frac{1}{3}(2\ p_1 + 1)$

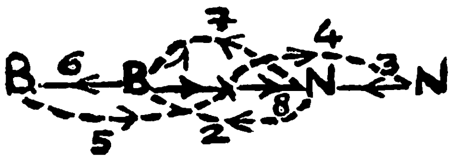
on trouve $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$ et $p_4 = \frac{1}{2}$.
La souris a 1 chance sur 4 de gagner la liberté !

122 - LE JEU DES GRENOUILLES

Le nombre minimum de coups est de 8 : 4 glissements et 4 sauts :



La méthode consiste à faire glisser les Blancs seulement à droite et les Noirs uniquement à gauche (pour éviter de revenir en arrière) de même pour les sauts (à droite pour les Blancs, à gauche pour les Noirs). Lorsque on a une solution en commençant par déplacer un Blanc on a évidemment une autre solution en commençant par un Noir du fait de la symétrie de la figure. La solution ci-dessus est schématisé par le graphe ci-dessous :



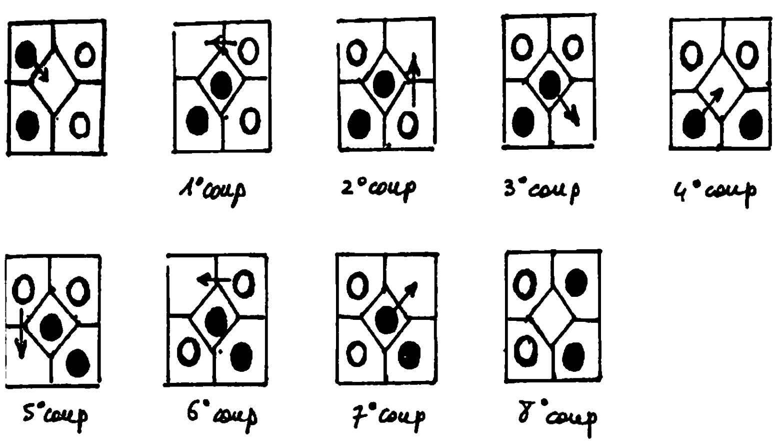
Flèche en trait plein : glissement
Flèche en pointillé : saut

On peut généraliser : si n est le nombre de pions d'une couleur

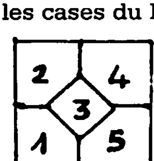
* $n = 2$ 8 coups (on vient de le voir)
* $n = 3$ 15 coups (6 glissements, 9 sauts)
* $n = 4$ 24 coups (8 glissements, 16 sauts)
* $n = 5$ 35 coups (10 glissements, 25 sauts)

On peut démontrer (par récurrence) qu'il faut au minimum n^2 sauts et 2n glissements donc $n^2 + 2n$ coups minimum.

123 - A VOUS DE JOUER !



On trouve 8 coups minimum. Une autre façon de procéder consiste à numéroter les cases du Damier :



On a la disposition initiale : 1 2 3 4 5

N N / N B B

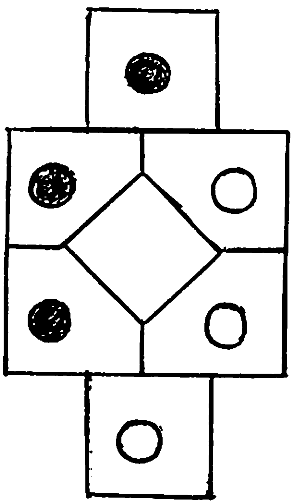
On est ainsi ramené au problème des Grenouilles (vu précédemment).

Les déplacements sont

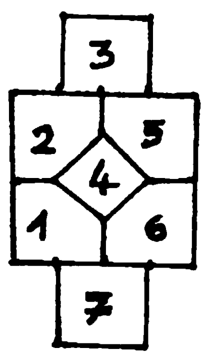
1er coup	N / N B B
2ème coup	N B N / B
3ème coup	N B N B /
4ème coup	N B / B N
5ème coup	/ B N B N
6ème coup	B / N B N
7ème coup	B B N / N
8ème coup	B B / N N

En fait on a vu dans le problème des grenouilles que si n est le nombre de grenouilles ou le nombre de pions d'une couleur, on a $n^2 + 2n$ coups pour intervertir les noirs et les blancs. Pour n = 2 on a bien $2^2 + 2 \times 2 = 8$ coups !

Si l'on a 3 pions noirs et 3 pions rouges,



En numérotant les cases du Damier :



On a la disposition initiale :

1	2	3	4	5	6	7
N	N	N	/	B	B	B

Les coups successifs sont :

1er coup	N	N	/	N	B	B	B
2ème coup	N	N	B	N	/	B	B
3ème coup	N	N	B	N	B	/	B
4ème coup	N	N	B	/	B	N	B
5ème coup	N	/	B	N	B	N	B
6ème coup	/	N	B	N	B	N	B
7ème coup	B	N	/	N	B	N	B
8ème coup	B	N	B	N	/	N	B
9ème coup	B	N	B	N	B	N	/
10ème coup	B	N	B	N	B	/	N
11ème coup	B	N	B	/	B	N	N
12ème coup	B	/	B	N	B	N	N
13ème coup	B	B	/	N	B	N	N
14ème coup	B	B	B	N	/	N	N
15ème coup	B	B	B	/	N	N	N

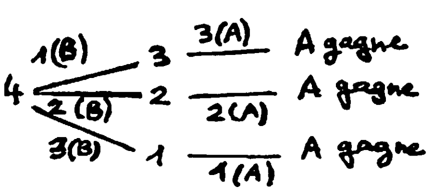
On pouvait s'y attendre car $n^2 + 2n$ pour $n = 3$ donne $3^2 + 2 \times 3 = 9 + 6 =$ 15 coups

124 - LE JEU DE BILLES

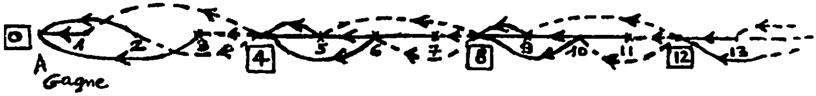
Soient A et B les 2 copains,en fait le gagnant A a compris qu'il suffit de prendre à chaque coup le nombre de billes pour qu'il reste un total de billes qui soit un multiple de 4. Supposons que A commence (si c'est B la méthode reste la même !)

billes	26	24	21	20	17	16	13	12	11	8	6	4
prise	2(A)	3(B)	1(A)	3(B)	1(A)	3(B)	1(A)	1(B)	3(A)	2(B)	2(A)	

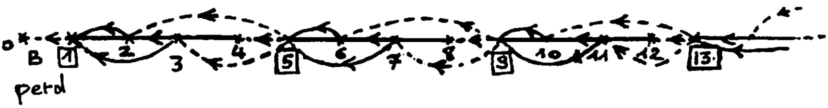
Pour chaque prise indiquée ci- dessus, on a marqué entre parenthèses le joueur. Dans ce déroulement du jeu : A est sûr de gagner car il reste 4 billes et les possibilités de fin de jeu sont :



On peut représenter la fin du jeu par un graphe dont les arêtes sont les coups et les sommets indiquent le nombre de billes restantes. Les coups possibles de B sont indiqués par des flèches en pointillés et ceux de A par des flèches en trait plein. On voit bien ainsi les situations gagnantes : 0, 4, 8, 12... c'est à dire les multiples de 4



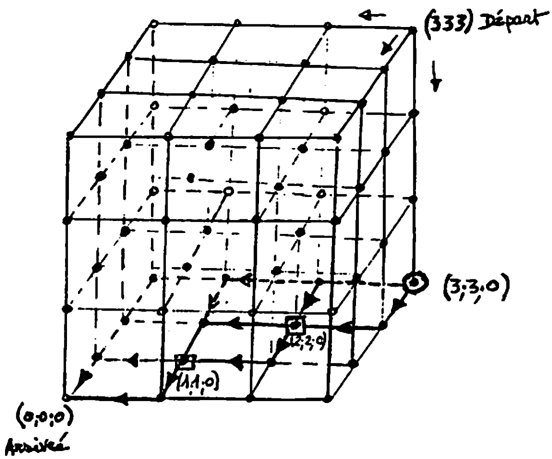
A gagne encore avec la nouvelle règle du jeu car il prend à chaque coup le nombre de billes afin qu'il reste un total de billes qui soit un multiple de 4 plus 1. En effet représentons cette stratégie utilisée par A :



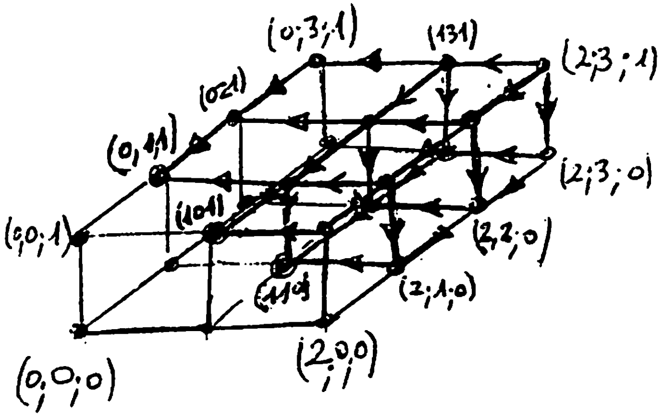
Les situations gagnantes sont à la fin du jeu : 13, 9, 5, 1 (multiples de 4 augmentés de 1).

125 - LE JEU DES CAILLOUX

Le graphe ci-dessous représente les diverses possibilités de jeu. Les stades de ce jeu sont les sommets du graphe,il faut se déplacer dans le sens des flèches afin d'atteindre le stade terminal (0 ; 0 ; 0). Il est nécessaire pour le 1er coup d'enlever 3 cailloux dans une rangée (n'importe laquelle : puisque il y a symétrie du jeu). On est ramené à (3 ; 3 ; 0) ou (0 ; 3 ; 3) ou (3 ; 0 ; 3) qui sont des situations identiques par symétrie.



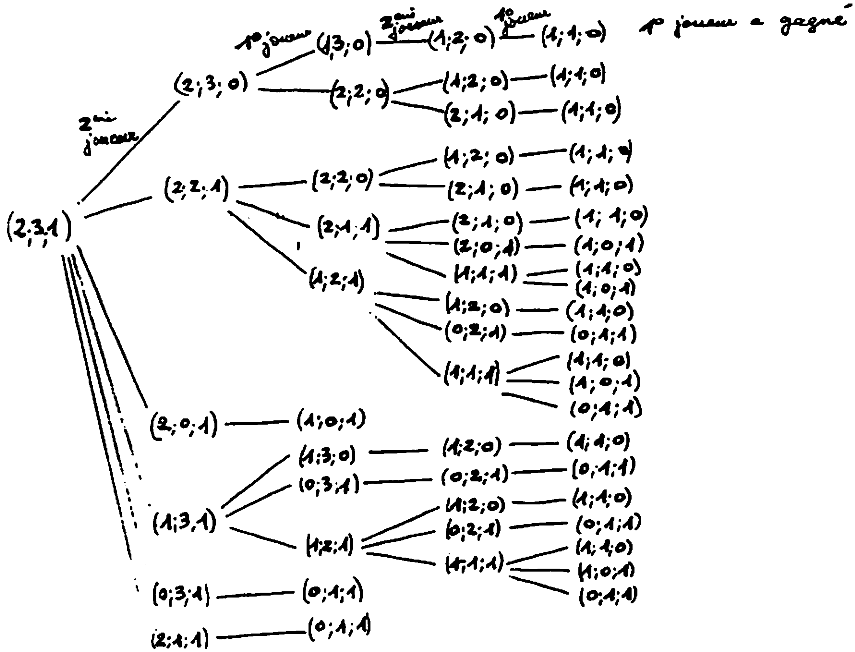
Le 1[er] joueur prend 4 jetons dans la rangée (3) (on numérote dans l'ordre les rangées (1), (2) et (3)), il reste 2 jetons dans la rangée (1) 3 jetons dans la rangée (2) et 1 jeton dans la rangée (3), on note cette situation (2 ; 3 ; 1).



On a représenté ci- dessus le jeu sur un graphe en 3 dimensions. Le jeu consiste à parcourir les arêtes du graphe de manière à atteindre les situations gagnantes dans le sens des flèches ; alors quel que soit le mouvement de l'adversaire on atteint la situation (0 ; 0 ; 0) donc on gagne !.

Les situations gagnantes sont (0 ; 1 ; 1) (1 ; 0 ; 1) (1 ; 1 ; 0) et (2 ; 2 ; 0).

Les cheminements gagnants pour celui qui aboutit aux situations gagnantes mentionnées ci-dessus peuvent aussi être trouvés par un arbre des possibilités, ils sont d'après le graphe ci-dessous :

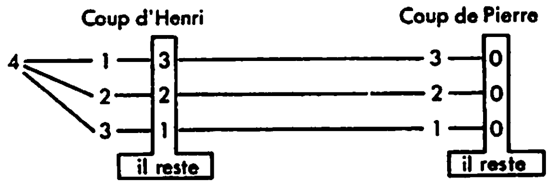


127 - LE JEU DE LA CHANCE

Exemple : Henri choisit 26

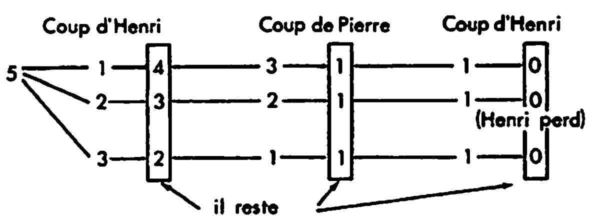
Henri enlève 2 il reste 24
Pierre enlève 3 il reste 21
Henri enlève 2 il reste 19
Pierre .... 3 il reste 16
Henri .... 1 il reste 15
Pierre .... 3 il reste 12
Henri .... 2 il reste 10
Pierre .... 2 il reste 8
Henri .... 3 il reste 5
Pierre .... 1 il reste 4

Alors quoi que fasse Henri, Pierre a Gagné car :



La stratégie de Pierre est de se ramener au plus vite à un multiple de 4 avant qu'Henri joue. Poursuivant ce but, Pierre arrive, après avoir joué, à 4 et il a gagné quoi que fasse Henri. Bien entendu on peut généraliser ce jeu par exemple : si on a le droit d'enlever au nombre (quelconque) 1, 2, 3 ou 4, il faut se ramener à un multiple de 5. En procédant ainsi tout au long du jeu on arrive avant le dernier coup de « l'adversaire » au plus petit multiple de 5 non nul, c'est-à-dire 5 et alors on a gagné à tous les coups. On peut aussi changer la règle du jeu en proposant que c'est celui qui finit à 0 qui perd : alors pour gagner il faut avant chaque coup de l'adversaire ramener le nombre à un multiple de 4 augmenté de 1 (si on peut enlever 1, ou 2 ou 3).

Exemple :

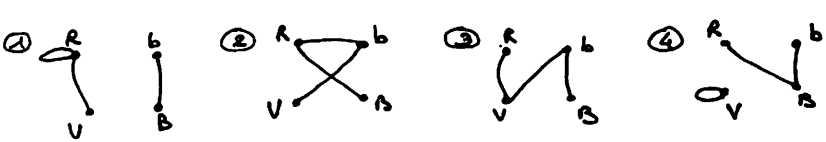


128 - FABRIQUONS UN JEU DIABOLIQUE

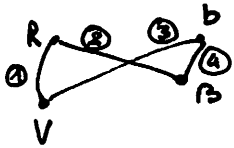
Chaque cube étant représenté par un graphe dont chaque sommet représente une couleur, deux couleurs étant reliées si elles correspondent à 2 faces opposées du cube

On obtient ainsi pour les cubes 1 - 2 - 3 et 4 :

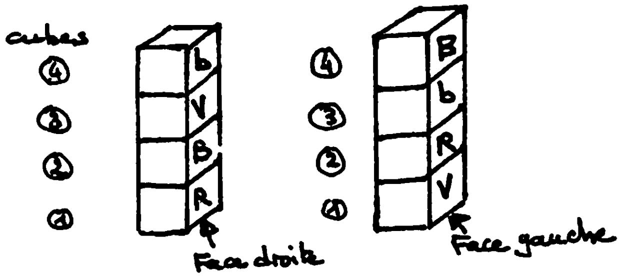
Cube 1 Cube 2 Cube 3 Cube 4



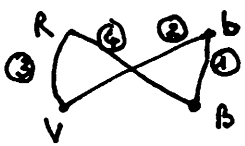
A partir des graphes ci-dessus on peut trouver le graphe correspondant aux faces droite et gauche de la tour : il faut pour cela qu'il y ait une arête de chaque graphe précédent et que de chaque sommet partent 2 arêtes (ainsi chaque couleur est sur 2 cubes). On obtient :



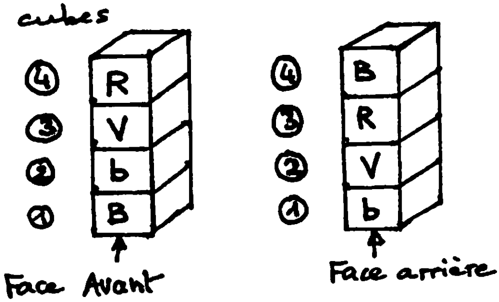
D'où la disposition :



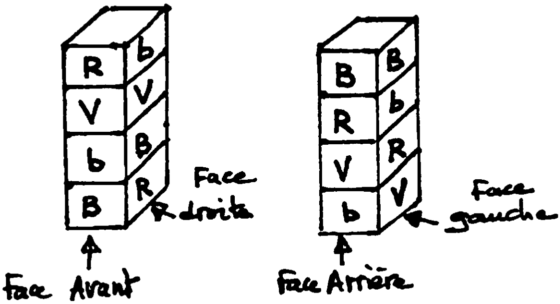
On procède de même pour les faces avant et arrière de la tour (sachant qu'on ne peut réutiliser une arête de même étiquette du graphe précédent). On obtient :



D'où la disposition :

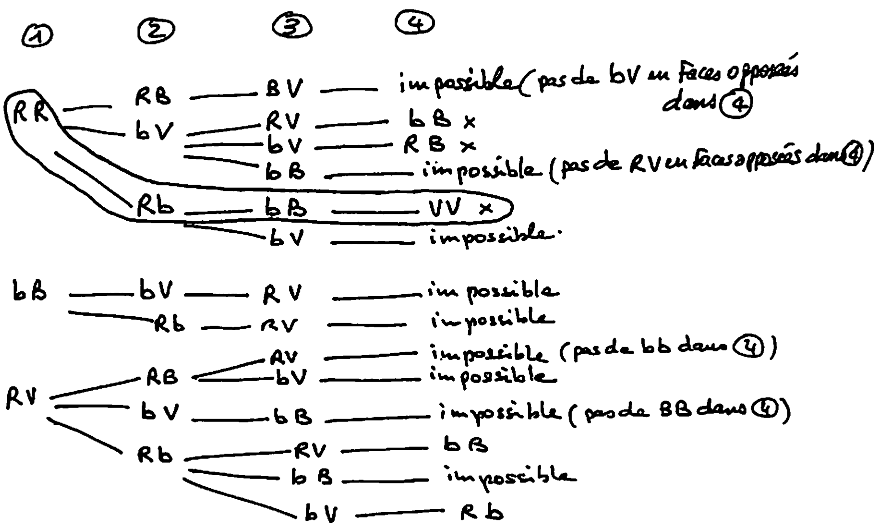


D'où une solution :

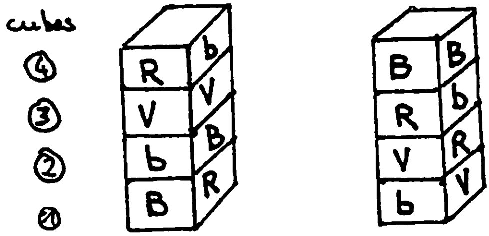


Autre solution :

Les cubes 1, 2, 3 et 4 possèdent au total 6 faces vertes, 5 bleues 7 rouges et 6 blanches. Pour que les 4 couleurs apparaissent sur les 4 faces de la tour il faut donc cacher 2 faces vertes, 1 bleue, 3 rouges et 2 blanches d'où l'arbre des possibilités des faces à cacher (faces du dessus et du dessous comprises).

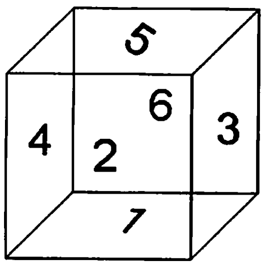


Le cheminement entouré donne une solution (ce n'est pas la seule !).



129 - JEU DE CUBES

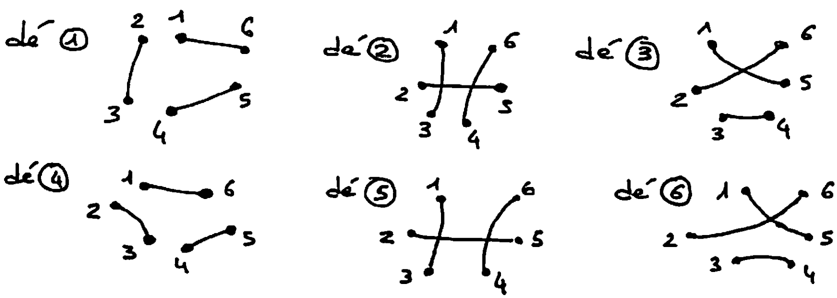
Une des solutions est la suivante :



Il est bien entendu possible de retrouver cette solution par un raisonnement analogue à celui fait pour les cubes diaboliques.

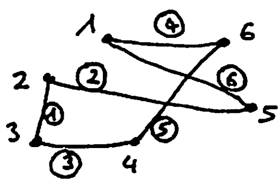
130 - LA TOUR MAGIQUE

Chaque dé peut se représenter par un graphe où deux chiffres sont reliés s'ils se situent sur des faces opposés. Les graphes de chacun des 6 dés sont :

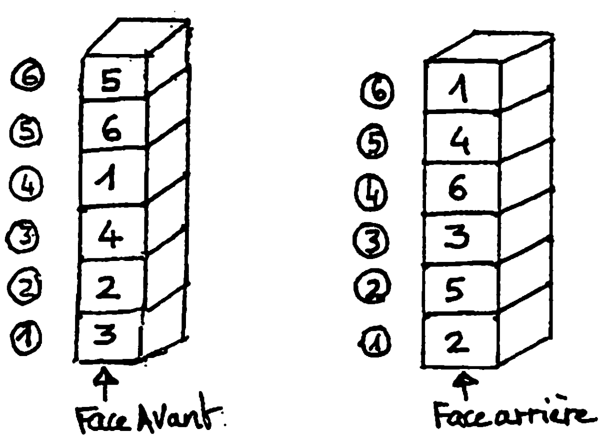


Sur chaque face de la tour doivent apparaître une fois et une seule chaque chiffre de 1 à 6, donc au total quatre fois chacun des chiffres de 1 à 6. Il faut donc cacher deux fois chaque chiffre. On peut rechercher une solution avec un arbre (comme pour le jeu diabolique) mais on va procéder autrement : en construisant un graphe correspondant aux faces Avant et Arrière de la Tour. Pour cela on prend une arête du graphe de chaque dé de telle façon que de chaque sommet partent 2 arêtes (on étiquette ces arêtes utilisées avec le numéro du dé correspondant) :

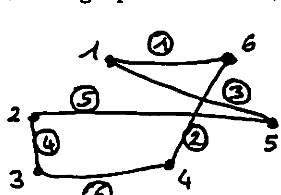
on obtient



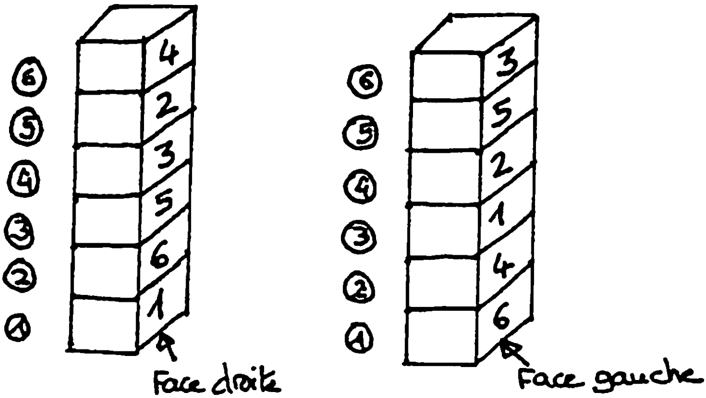
ce qui donne



On procède de même pour les faces droite et gauche en choisissant une arête du graphe de chaque dé, mais différente de celle étiquetée utilisée dans le graphe ci-dessus, on obtient le graphe :

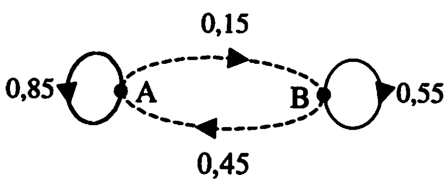


d'où la disposition :



131 - SOLUTION DE « AU THÉÂTRE CE SOIR »

1 - On a $P_0 = (a_0\ b_0)$ avec $a_0 = \frac{1500}{2500} = 0{,}6$ et $b_0 = \frac{1000}{2500} = 0{,}4$ d'où $P_0 = (0{,}6\ 0{,}4)$



2 - a. Graphe ci-dessus

b. Sa matrice est $M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

c. La 1ère année $P_1 = (a_1\ b_1) = (a_0\ b_0) \times M = (0{,}69\ 0{,}31)$

Le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement la 1ère année est donc $0{,}69 \times 2500 = 1725$ pour l'abonnement A et $0{,}31 \times 2500 = 775$ pour l'abonnement B. soit un total de $1725 + 775 = 2500$

3 - a. L'état stable étant défini par $P \times M = P$ d'où $(x, y) \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} = (x, y)$, donc $0{,}85x + 0{,}45y = x$

$0{,}15x + 0{,}55y = y$

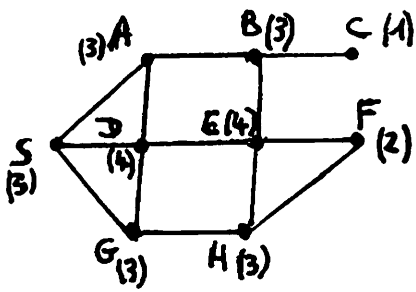
b. le système ci-dessus équivaut à : $\begin{cases} -0{,}15x + 0{,}45y = 0 \\ 0{,}15x - 0{,}45y = 0 \end{cases}$ ces deux équations sont équivalentes, mais $x + y = 1$ d'où $0{,}15x - 0{,}45(1-x) = 0$ soit $x = 0{,}75$ et $y = 0{,}25$

c. On sait d'après le cours que lorsque $n \to +\infty$ l'état P_n tend vers l'état stable P = (0,75 0,25) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}75$

d. A long terme le nombre d'abonnements de type A tend vers 2500 x 0,75 = 1875

132 - PROBLÈME DE CIRCULATION DANS UN MUSÉE

1- Pour chaque sommet le degré est indiqué entre parenthèses.



2 -

D'après la théorie d'Euler il n'existe pas de chaîne eulérienne empruntant une fois et une seule chaque arête car il n'y a pas seulement deux (ou zéro pour un cycle eulérien) sommets de degré impair ; il n'est donc pas possible de visiter le musée en empruntant chaque porte (représentée par une arête du graphe) une fois et une seule.

3 - En procédant par coloration on obtient

E	A	C	G	B	H	S	F
Rouge	Rouge	Rouge	Rouge	Vert	Vert	Vert	Noir

Le plus grand sous graphe complet est d'ordre 3 (par exemple ADS), il faut 3 couleurs donc le nombre chromatique du graphe est 3.

a. D'après la matrice M^4 donnant le nombre de chemins en 4 étapes, ceux partant de D et revenant à D sont au nombre de 31.

b. Ceux partant de S et revenant à C sont au nombre de 2 il s'agit de SDEBC et SDABC.

c. Non il n'est pas toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques, par exemple les salles B et C d'après la matrice M^4 (3ème ligne, 4ème colonne)

133 - MARCHÉ DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

Partie A

1 - $u_1 = 0{,}6u_0 + 200 = 540 + 200 = 740$
$u_2 = 0{,}6u_1 + 200 = 444 + 200 = 644$

2 - $v_0 = u_0 - 500 = 900 - 500 = 400$

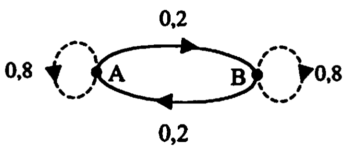
a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 0{,}6u_n + 200 - 500 = 0{,}6(v_n + 500) - 300 = 0{,}6v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de 1[er] terme $v_0 = 400$ et de raison 0,6.

b. $V_n = v_0 \times q^n = 400 \times (0{,}6)^n$ d'où $u_n = v_n + 500 = 400 \times (0{,}6)^n + 500$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (400 \times (0{,}6)^n + 500) = 500$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}6)^n = 0$

Partie B

La situation peut se représenter par le graphe :



En notant a_0 le nombre de clients de A en 2000
.... b_0 .... B ....
On a $a_0 = 900$ et $b_0 = 100$

1 - a. La matrice du graphe est $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ d'où en 2001 : $(a_1\ b_1) = (a_0\ b_0) \times T = (900 \times 0{,}8 + 100 \times 0{,}2 \quad 900 \times 0{,}2 + 100 \times 0{,}8) = (740\ \ 260)$;
En 2002 : $(a_2\ b_2) = (a_1\ b_1) \times T = (740 \times 0{,}8 + 260 \times 0{,}2 \quad 740 \times 0{,}2 + 260 \times 0{,}8) = (644\ 356)$

b. En l'année (2000 + n) on a $(a_{n+1}\ b_{n+1}) = (a_n\ b_n) \times T = (0{,}8a_n + 0{,}2b_n \quad 0{,}2a_n + 0{,}8b_n)$ d'où $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}2b_n = 0{,}8a_n + 0{,}2\,(1-a_n) = 0{,}6a_n + 200$ car $a_n + b_n = 1000$.

2 -

On a vu dans la partie A que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 500$, sachant que $u_0 = 900$ et $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 200$ or
$a_{n+1} = 0{,}6a_n + 200$ et $a_0 = 900$ donc de même $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 500$ (d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1000 - 500 = 500$)

L'évolution du marché des télécommunications tend vers le partage équitable du marché entre les 2 sociétés A et B.

134 - LA GRANDE SURFACE

1 - a.

secteur	A	B	C	D	E	F
degré	4	3	4	4	3	2

b. Le graphe C est connexe car il y a au moins une chaîne entre 2 sommets quelconques de ce graphe

2 - a. Le souhait est réalisable en reliant B à E (ou E à B) seuls sommets de degré impair (d'après le théorème d'Euler).

b. Par exemple le parcours peut être E D C E A D F B A C B.

3 - a. Le plus grand sous graphe complet étant d'ordre 4 (E D C A), le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4

b. On a $n \leq 5$ car le nombre chromatique est inférieur ou égal à d + 1 (d étant le plus grand degré c'est-à-dire 4).

c. On attribue à A la couleur rouge ainsi qu'à F.
On attribue à C............. verte.
.... D............. bleue ainsi qu'à B
.... E............. noire.

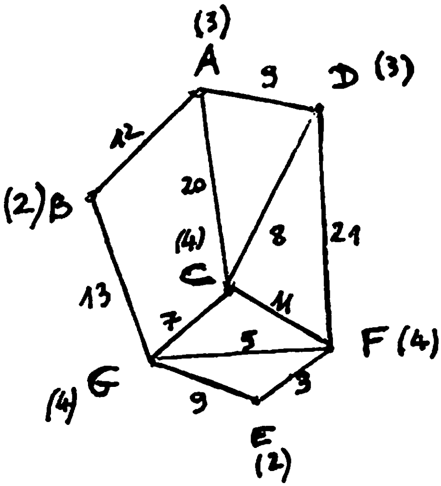
Il faut 4 couleurs or $4 \leq n \leq 5$ donc n = 4

4 - On peut faire l'algorithme de Dijkstra :

Sommets fixés	A	B	C	D	E	F
E (0)	30 (E)		40 (E)	10 (E)		
D : 10 (E)	20 (D)		50 (D)			80 (D)
A : 20 (D)		60 (A)	30 (A)			
C : 30 (A)		50 (C)				
B : 50 (C)						
F : 70 (B)						70 (B)

La chaîne qui minimise la dépense de la famille est : E D A C B F qui coûtera 70 euros

135 – « VOYAGE, VOYAGE »



1 - a. Le graphe étant connexe et ayant 2 sommets de degré impair A et D, il existe une chaîne eulérienne reliant A et D, donc le guide peut emprunter tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux.

b. Il n'existe pas de cycle eulérien car tous les sommets ne sont pas de degré pair donc le guide ne peut terminer son circuit à l'hôtel.

2 - Le plus court chemin menant de A à E est A D C F E de longueur 9 + 8 + 11 + 3 = 31

Sommets fixés	A	B	C	D	E	F	G
A (0)		12 (A)	20 (A)	9 (A)			
D (9)			17 (D)			30 (D)	
C (17)						28 (C)	24 (C)
G (24)		37 (G)			33 (G)	29 (G)	
F (28)					31 (F)		
E (31)							

On a obtenu le tableau en procédant ainsi :

*On fixe D à 9, les sommets adjacents à D sont C et F, pour C ; 17 (D) et pour F : 30 (D) donc

*On fixe C à 17, les sommets adjacents à C non fixés sont F et G ; pour F : 28 (C) et pour G : 24 (C) donc
*On fixe G à 24, les sommets adjacents à G non fixés sont B, F, E ; pour B : 24 + 13 = 37 (G) ; pour E : 24 + 9 = 33
pour F : 24 + 5 = 29 (G) moins bon que 28 (C) donc on fixe F à 28 (C)
*F est fixé à 28 (C), les sommets adjacents à F non fixés : E : 28 + 3 = 31

Pour atteindre E on passe par F, pour atteindre F on passe par C, pour atteindre C on passe par D donc le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E est A D C F E.

136 - EXAMEN

1 - Chaque arête indique les épreuves écrites qui ne peuvent se passer en même temps.

2 - En coloriant, on va chercher quelles épreuves écrites peuvent se passer en même temps et en un minimum de temps.

3 - On colore H en rouge, M en vert ainsi que B, A en noir ainsi que F, E en bleu, il a fallu 4 couleurs.

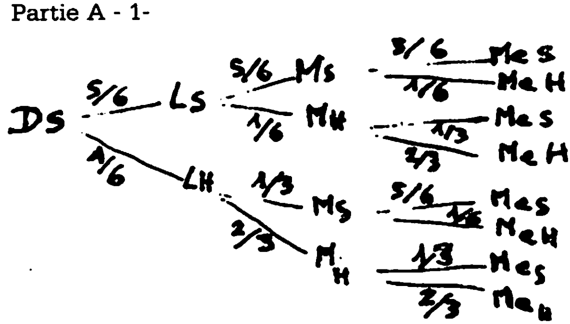
4 - Le nombre chromatique n est supérieur ou égal à 4 car le plus grand sous graphe complet est d'ordre 4 (H E A M), on a aussi n inférieur ou égal à 6 (le plus grand degré est 5 C'est celui de H) et il a fallu 4 couleurs ; donc le nombre chromatique est 4.

5 - Une organisation de la session d'examen peut être :

Une demi-journée pour l'histoire, une demi-journée pour maths et biologie, une demi-journée pour anglais et français et une demi-journée pour l'espagnol. Il faut donc 4 demi-journées.

137 - ETUDE DE L'ÉVOLUTION MÉTÉO

Partie A - 1-



2 -

La probabilité de « il fera sec Lundi, Mardi et Mercredi » est $P(J) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

La probabilité de « il fera sec Mardi » est $P(K) = (\frac{5}{6})^2 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

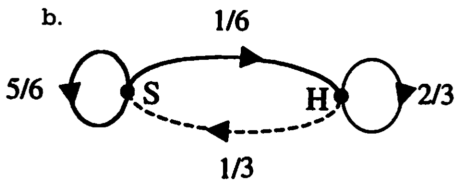
Enfin la probabilité de L est $P(L) = (\frac{5}{6})^2 \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + (\frac{1}{6})^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{7}{14}$

Partie B

1 - On a évidemment $s_n + h_n = 1$

2 - a. La matrice associée à l'état initial est $(s_0 \ h_0) = (1 \ 0)$

b.



La matrice est $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3 - a.

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b. Mardi correspond à $n = 2$, donc $P_2 = (s_2 \ h_2)$ est l'état probabiliste du temps Mardi ; on a donc $P_2 = P_0 \times M^2 = (s_0 \ h_0) \times M^2 = (\frac{3}{4} \ \ \frac{1}{4})$ d'où $s_2 = \frac{3}{4}$ c'est ce qu'on avait trouvé en A.

4 - a. L'état stable est $P = (s \ h)$ tel que $P = P \times M$ d'où $(s \ h) = (s \ h) \times M = (\frac{5}{6}s + \frac{1}{3}h \ \ \ \frac{1}{6}s + \frac{2}{3}h)$

Par suite $s = \frac{5}{6}s + \frac{1}{3}h$ avec $s + h = 1$ d'où $s = \frac{5}{6}s + \frac{1}{3}(1-s) = \frac{2}{3}$ et $h = \frac{1}{3}$.

b. A long terme la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $h = \frac{1}{3}$.

138- PROBLÈME DE SÉCURITÉ

1 - Les degrés des sommets du graphe sont : A (2) ; B (4) ; C (4) ; D (2) ; E (5) ; F (2) ; G (5).
Il y a 2 sommets seulement de degré impair donc d'après le théorème d'Euler (le graphe étant connexe) il existe une chaîne eulérienne reliant E et G, donc il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine en partant de E et arrivant à G (ou le contraire), par exemple G A B G C B E F G E C D E .

2 - L'agent de sécurité ne peut revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins car tous les sommets du graphe n'ayant pas un degré pair, il n'y a pas de cycle eulérien .

3 - On utilise l'algorithme de Dijkstra.
*On fixe G à 12 : les sommets de marque non fixée, adjacents à G étant :
B : 12 + 8 = 20 moins bon que 16 donc on garde 16 (A) : c'est-à-dire 16 en passant par A

C : 12 + 10 = 22, on barre $+\infty$ et on marque 22 (G),

E : 12 + 15 = 27, on barre $+\infty$ et on marque 27 (G),

F : 12 + 8 = 20, on barre $+\infty$ et on marque 20 (G).

*On fixe B à 16 : les sommets de marque non fixée, adjacents à B étant

C : 16 + 8 = 24 > 22, on garde 22 (G) ,

E : 16 + 12 = 28 > 27, on garde 27 (G) mais on fixe C à 22.

*On fixe C à 22 : les sommets de marque non fixée, adjacents à C étant :
E : 22 + 4 = 26 < 27, on garde 26 (C),
D : 22 + 7 = 29, on barre $+\infty$ et on écrit 29 (C) mais on fixe E à 26.

*On fixe E à 26 : les sommets de marque non fixée,adjacents à E étant :
F : 26 + 8 = 34 > 20 donc on garde 20 (G),
D : 26 + 2 = 28 < 29, on garde 28 (E), on obtient le tableau :

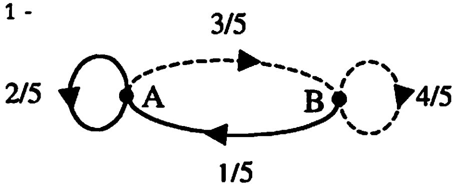
Sommets fixés	A	B	G	F	E	C	D
A (0)	0	16 (A)	12 (A)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
G (12)				20 (G)	27 (G)	22 (G)	
B (16)						22 (G)	
C (22)					26 (C)		29 (C)
E (26)				34 (E)			28 (E)

Pour atteindre D on passe par E : 28 (E),
.... E .... C : 26 (C),
.... C .... G : 22 (G),
.... G .... A : 12 (A).

Le chemin dont le temps de parcours est le plus court est donc A G C E D en 28 min.

139 - COMPÉTITION À L'UNIVERSITÉ

1 -



La matrice de transition du graphe est : $T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2 -

a. On a la probabilité que Jamalia réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 m lors de la 1ère compétition : $a_1 = 0$ et par conséquent $b_1 = 1$.

b. $(a_2\ b_2) = (a_1\ b_1) \times T = (0\ 1) \times T = (0,2\quad 0,8)$

$(a_3\ b_3) = (a_2\ b_2) \times T = (0,2\quad 0,8) \times T = (0,24\quad 0,76)$

La probabilité cherchée est 0,24.

3 -

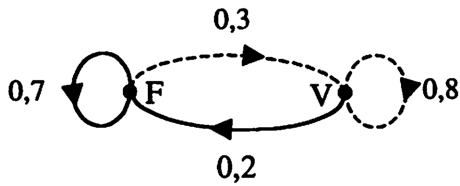
$$(a\ b) = (a\ b) \times T \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 0,4a + 0,2b \\ a + b = 1 \end{array} \Leftrightarrow 0,6a = 0,2(1-a) \Leftrightarrow a = 0,25 \text{ et } b = 0,75.$$

4 - D'après 3- et le cours, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a = 0,25$.

Donc Julien a bien 1 chance sur 4 de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 m.

140 - HORAIRES FIXES OU VARIABLES ?

1 - En complétant le graphe par les probabilités manquantes : 0,8 et 0,3 on obtient :



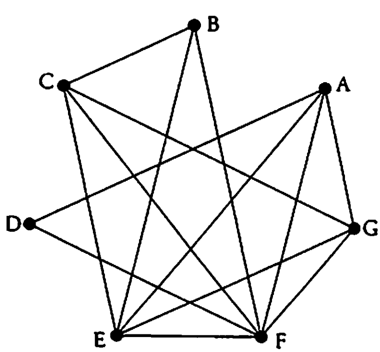
2 - a. La matrice de transition du graphe est $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

$P_0 = (0,6\ 0,4)$, d'où $P_1 = P_0 \times T = (0,5\ 0,5)$, et $P_2 = P_1 \times T = (0,45\ 0,55)$; deux trimestres après le début de l'opération, le nombre d'employés favorables aux horaires fixes n'a cessé de diminuer pour être en pourcentage de 45 %.

b. L'état probabiliste stable P est tel que $P = P \times T$, d'où $(f\ \ v) = (f\ \ v) \times T$ par suite on obtient : $(f\ \ v) = (0,7f + 0,2v\ \ \ 0,3f+0,8v)$ donc $f = 0,7f + 0,2v = 0,7f + 0,2\,(1-f)$, car $f + v = 1$

On obtient $f = 0,4$ donc à long terme il y a 40 % d'employés favorables aux horaires fixes.

141 - CONCERT DE SOLIDARITÉ



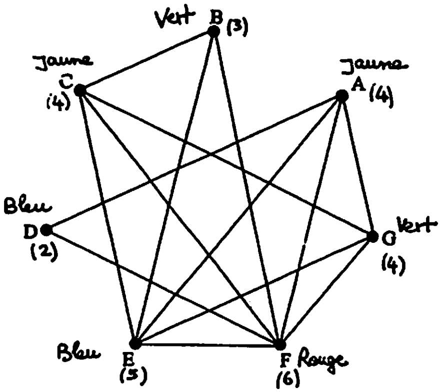
Graphe Γ

La matrice associée au graphe Γ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 - Le sous graphe constitué des sommets A, E, F et G est complet, on peut en déduire que le nombre chromatique du graphe Γ est supérieur ou égal à 4, puisque ce sous graphe est d'ordre maximal égal à 4.

3 - Le sommet de plus haut degré de Γ est F (degré 6), donc un encadrement du nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ est $4 \leq \chi(\Gamma) \leq 7$.

4 - Les sommets classés par ordre de degré décroissant sont : F E G C A B D ; on colorie le graphe (voir ci-dessous) :

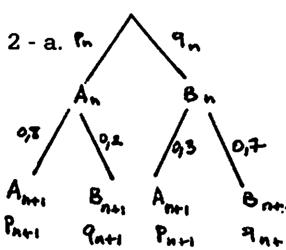


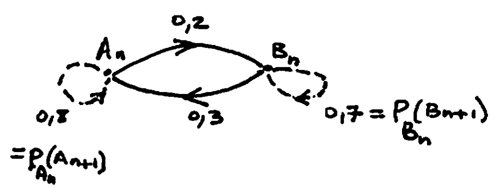
5 - L'organisateur du concert doit prévoir 4 parties (4 couleurs sont nécessaires) ; une répartition possible des musiciens pour chacune de ces parties est : F ; E avec D ; B avec G ; A avec C (cela correspond aux couleurs).

142 - CAMPAGNE ÉLECTORALE

1 - $p_n + q_n = 1$

2 - a.





$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8$

$P_{B_n}(A_{n+1}) = 0,3$

b- $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0,8\ p_n$ (D'après l'arbre ci-dessus), de même $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0,3\ q_n$, d'où $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$ d'après la formule des probabilités totales ;

donc $P(A_{n+1}) = 0,8\ p_n + 0,3\ q_n$, or $q_n = 1 - p_n$ d'où $P(A_{n+1}) = 0,8\ p_n + 0,3\ (1 - p_n) = 0,5\ p_n + 0,3$

3- a .

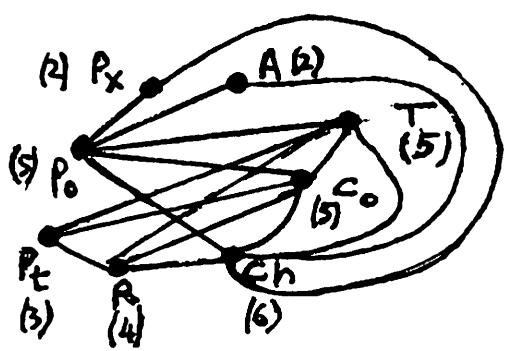
On a $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,6 = 0,5\ p_n + 0,3 - 0,6 = 0,5\ p_n - 0,3 = 0,5\ (u_n + 0,6) - 0,3 = 0,5\ u_n$, d'où la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5, par conséquent $u_n = u_0 \times (0,5)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + 0,6 = 0,6 > 0,5$ donc la liste gagnante est A.

143 - LE PROBLÈME DU JARDINIER

1 - Graphe ci-dessous.

2 - Les degrés sont indiqués entre parenthèses pour chaque sommet ; le nombre d'arêtes est la moitié de la somme des degrés (égale à 32) ; il est donc de 16.



3 - Un sous graphe complet d'ordre 4 est { P_t, R, C_0, T } donc le nombre chromatique
Du graphe est supérieur ou égal à 4.

4 - En procédant par coloriage,on attribue à C_h la couleur rouge ainsi qu'à P_t ; à C_0 la couleur verte ainsi qu'à A et P_x ; à T la couleur bleue ; à P_0 la couleur noire ainsi qu'à R : il faut donc 4 couleurs, donc 4 parcelles

(le nombre chromatique étant 4). Dans une parcelle on mettra C_h et P_t ; dans la 2ème parcelle C_0, A et P_x ; dans la 3ème parcelle on mettra T et dans la 4ème parcelle P_0 et R.

5 - Si on veut que chaque parcelle contienne exactement 2 types de plantes, le nombre minimum de parcelles étant de 4 d'après la question précédente, on mettra C_h et P_t ensemble ; C_0 et A ensemble ; T et P_x ; P_0 et R .

6 - La répartition est celle donnée dans la question 4.