

Dominique Bareille
Professeur agrégée
de physique appliquée en STS

Laurent Mossion
Professeur agrégé
de physique appliquée en STS

Claude Garnier
Professeur agrégé
de génie électrique
Inspecteur Pédagogique Régional
(académie de Versailles)

Électrotechnique Sciences appliquées en 28 fiches

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008, 2011 nouveau tirage corrigé
ISBN 978-2-10-055616-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

55616 - (I) - (I) - OSB 80° - 286 - LAS - VCT

Achévé d'imprimer sur les presses de Snel
Z.I. des Hauts-Sarts - Zone 3 - Rue Fond des Fourches 21 - B-4041 Vottem (Herstal)
Tél +32(0)4 344 65 60 - Fax +32(0)4 286 99 61 — décembre 2010 - 52575

Dépôt légal : janvier 2011

Imprimé en Belgique

Préface

Les métiers de l'électrotechnique connaissent une évolution très importante, la chaîne d'information et la chaîne d'énergie se rapprochent et parfois fusionnent quand la chaîne d'énergie devient support des courants porteurs et vecteur de communication. Les systèmes communiquent, dialoguent, s'adaptent à l'environnement. Dans ce contexte évolutif, les métiers de l'électrotechnique et la formation des techniciens en électrotechnique connaissent également des évolutions significatives. C'est dans cet esprit et ce besoin d'enseigner « autrement » que les Editions Dunod ont imaginé la collection Express BTS. Il faut remercier Dominique Bareille et ses collègues Laurent Mossion et Claude Garnier pour avoir tenté de résumer en 28 fiches les grands thèmes de l'électrotechnique moderne.

Cet ouvrage résume sous forme de fiches totalement indépendantes les principales notions, fondamentales de la discipline et indispensables pour appréhender les systèmes modernes. L'originalité de ce document réside dans la rédaction de chaque fiche qui aborde les différents thèmes en respectant l'histoire et l'évolution technologique. En effet, les moteurs électriques sont abordés, dans un premier temps, de manière traditionnelle ce qui permet de faire le lien avec les cours classiques, mais rapidement les notions modernes liées à la vitesse variable, qui sont maintenant usuelles pour les techniciens, sont abordées de manière synthétique. Les phénomènes fondamentaux en électromagnétisme sont également développés avec les mêmes soucis de précision et de concision des fiches.

Il faut féliciter les auteurs pour la faculté de synthèse dont ils ont fait preuve tout au long des 28 fiches. Il est en effet tentant, pour des professeurs passionnés, de transmettre des savoirs sans limitation mais il est beaucoup plus difficile d'extraire les savoirs essentiels et de se limiter pour « rentrer » le maximum d'informations dans un petit format de 160 pages. La rédaction était d'autant plus difficile que les auteurs n'ont pas voulu sacrifier la démarche pédagogique à la synthèse. Chaque fiche comporte des exemples d'applications industrielles, des descriptions de systèmes et des exercices qui garantissent une assimilation rapide et une compréhension des phénomènes permettant au lecteur un approfondissement plus aisé et une recherche plus efficace lorsque le besoin se fait sentir. On retrouve dans cet ouvrage la longue expérience acquise par les auteurs et leur passion commune pour cette discipline qui les anime depuis de nombreuses années.

Les lecteurs apprécieront ce concept moderne et trouveront très rapidement réponse aux questions qu'ils se posent.

Claude Bergmann
Professeur des universités
Inspecteur Général de l'Éducation nationale

Table des matières

Préface		3
Fiches méthodes		
Fiche 1	Chaîne motorisée	5
Fiche 2	Électronique de puissance	10
Fiches outils		
Fiche 3	Circuit en régime variable	17
Fiche 4	Circuit en régime sinusoïdal	22
Fiche 5	Circuit en régime périodique	27
Fiche 6	Triphasé	32
Fiche 7	Énergie	37
Fiche 8	À propos de puissances...	42
Fiche 9	Éléments de magnétisme	48
Fiche 10	Dynamique des fluides	53
Fiche 11	Régime transitoire	58
Synthèses de cours		
Fiche 12	La machine à courant continu	64
Fiche 13	Le moteur à flux constant	68
Fiche 14	Hacheur	74
Fiche 15	Redresseur non commandé	81
Fiche 16	Redresseur commandé	86
Fiche 17	Pollution harmonique	94
Fiche 18	Transformateur monophasé	99
Fiche 19	Transformateur triphasé	104
Fiche 20	Onduleur : stratégies de commandes	110
Fiche 21	Onduleur triphasé	116
Fiche 22	L'alternateur	121
Fiche 23	Le moteur synchrone	127
Fiche 24	La machine asynchrone	132
Fiche 25	MAS : variation de vitesse	139
Fiche 26	Régulation et asservissement	144
Fiche 27	Gradateur	151
Fiche 28	Électrothermie	156
Annexe		158

Chaîne motorisée

I Notion de système

- Pour exécuter un certain nombre de tâches (perçage, positionnement, levage, pompage...) il est nécessaire d'entraîner une charge mécanique en rotation ou en translation.

La démarche de conception de la chaîne doit être ascendante. Le point de départ est le « travail mécanique » à réaliser qui se traduit sous forme de **point(s) de fonctionnement (statiques et/ou dynamiques)** dans le plan couple/vitesse.

De ces contraintes on déduit la motorisation nécessaire, puis les points de fonctionnement associés dans le plan tension/courant. Ces derniers permettent de déterminer l'alimentation électrique appropriée.

On aboutit ainsi à la définition d'un **système** comportant généralement :

- une source d'énergie électrique ;
- un convertisseur permettant d'adapter et/ou de moduler l'énergie absorbée ;
- un moteur électrique qui convertit l'énergie électrique en énergie mécanique ;
- la charge mécanique, comportant ou non un transmetteur mécanique (réducteur, convertisseur rotation-translation...), qui peut être entraînant ou entraînée.

La solution est rarement unique, le choix entre les différentes possibilités devra tenir compte d'arguments techniques mais aussi économiques. Il est indispensable d'affiner le cahier des charges afin d'avoir la connaissance la plus précise possible de la tâche à réaliser et des contraintes associées (variation de vitesse, réversibilité).

II Point de fonctionnement

- **Recherche d'un point de fonctionnement mécanique**

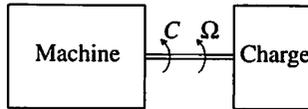
La loi d'évolution de la vitesse de rotation d'un groupe machine-charge est régie par le **principe fondamental de la dynamique (PFD)**. Les couples sont algébriques.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_u + C'$$

J : moment d'inertie de l'ensemble machine-charge entraînée, en kg m^2 ,
 C_u : couple utile disponible sur l'arbre en Nm ,
 C' : couple de charge en Nm .

Cette équation est différentielle. Elle traduit le fait que la vitesse de la machine ne peut pas varier instantanément en raison de l'inertie du système.

Conventions de signes



• Quelques exemples de charges

Loi de couple	$C' = k = \text{cte}$	$C' = k\Omega$	$C' = k\Omega^2$	$C' = k/\Omega$
Puissance $P = C'\Omega$	$P' = k\Omega$	$P' = k\Omega^2$	$P' = k\Omega^3$	$P' = k$
Exemples d'applications	Levage, broyeur, pompe à piston ou volumétrique ...	Agitateurs, mixeurs.	Pompes et ventilateurs centrifuges, certains compresseurs	Enrouleurs, dérouleurs, machines outils, broches...

• Régime permanent

Le point de fonctionnement en régime permanent est caractérisé par le fait :

- que la vitesse est constante ;
- que si elle varie à la suite d'un événement extérieur, elle revient à sa valeur initiale (stabilité).

Algébriquement : $C_u = -C'$

Graphiquement : le point est à l'intersection des courbes $C_u(\Omega)$ et $-C'(\Omega)$

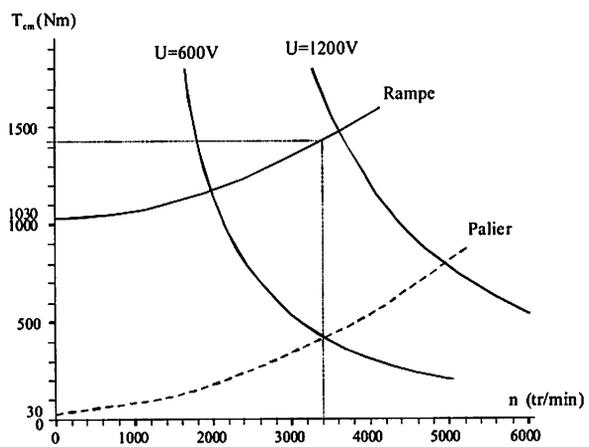
La connaissance du couple C_u et de la vitesse Ω permet ensuite de trouver la valeur des différents paramètres (tension, courant...) d'alimentation de la machine.

Exemple : TGV Sud-Est

Ce TGV comporte 12 moteurs à courant continu série par rame, un par boggie-moteur. Pour une vitesse v de 240 km/h du TGV, la vitesse de rotation des moteurs est de 3000 tr/min. Elle est contrôlée par la tension U .

Caractéristiques mécaniques :

- de la machine pour $U_1 = 600 \text{ V}$ (C_1) et $U_2 = 1\,200 \text{ V}$ (C_2)
- de la charge pour un palier (sol plat) et une rampe (côte).

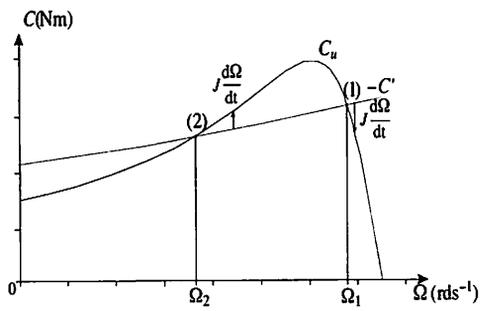


On règle la valeur moyenne de la tension d'alimentation du moteur à 600 V. Sur un sol plat le point de fonctionnement est à l'intersection de la caractéristique (C_1) et de celle correspondant à un palier : la vitesse de rotation s'établit à $n_1 = 3400$ tr/min, celle du TGV à $v_1 = 272$ km/h.

S'il aborde une côte, le point de fonctionnement est à l'intersection de (C_2) et de celle correspondant à une rampe : la vitesse de rotation s'établit à $n_2 = 2000$ tr/min, soit $v_2 = 160$ km/h.

Pour maintenir sa vitesse à la valeur v_1 il faut augmenter U. Avec 1200 V on obtient $v_2 = 304$ km/h, c'est trop, il faudra adopter un réglage intermédiaire.

• **Stabilité d'un point de fonctionnement**



Supposons qu'à la suite d'un évènement extérieur la machine s'écarte de son point de fonctionnement :

- si elle y revient à l'issue d'un régime transitoire, le point de fonctionnement est stable (1),
- dans le cas contraire, il est instable (2).

De manière générale, un point de fonctionnement correspondant à la vitesse Ω_0 sera stable si, en ce point, la pente de la caractéristique de la charge entraînée est supérieure à celle de la machine (cas 1).

Graphiquement cette règle se traduit par le fait que la caractéristique du moteur est au-dessus de $-C'(\Omega)$ pour des valeurs de vitesse inférieures à Ω_0 et au-dessous pour des valeurs supérieures à Ω_0 .

- **Démarrage**

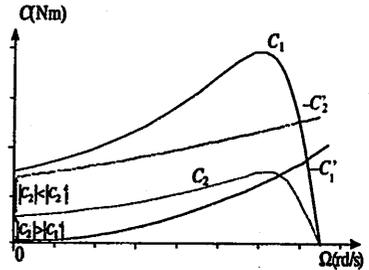
Quand on démarre une machine, sa vitesse est nulle mais pas son accélération. Il faut donc que $|C_u| \geq |C'|$ pour que le démarrage en charge soit possible.

Dans le cas d'une vitesse positive, la caractéristique du moteur doit être « au-dessus » de celle de la charge pour $\Omega = 0$ rds⁻¹.

Démarrage avec différents types de charges

La machine dont la caractéristique est C_1 permet de démarrer et d'entraîner les deux charges.

Celle dont la caractéristique est C_2 ne peut démarrer et entraîner que C'_1 .



Pour trouver les conditions électriques (tension et courant de démarrage), on utilise l'hypothèse $\Omega = 0$ rds⁻¹ et on en tire les conséquences pour la machine étudiée : pour un moteur à courant continu $E = 0$, pour un moteur asynchrone $g = 1$.

- **Variation de vitesse (hors asservissement)**

Le système travaille en régime dynamique mais les variations imposées sont suffisamment lentes pour que l'on puisse considérer qu'elles constituent une **succession de régimes permanents** (succession d'états quasi-stationnaires).

On raisonne sur les caractéristiques établies en régime permanent.

Les variables électriques varient beaucoup plus vite que les variables mécaniques ce qui permet de dissocier leurs évolutions lors de l'analyse (découplage des variables).

Schématiquement on peut dire que **lorsque le courant varie, la vitesse est constante et inversement** quand la vitesse commence à varier, le courant a atteint son régime permanent.

III Analyse énergétique

- **Fonctionnement dans les 4 quadrants**

En multipliant par Ω chaque membre du PFD il vient : $\Omega J \frac{d\Omega}{dt} = \Omega C_u + \Omega C'$

$P_u = C_u \Omega$, puissance mécanique **fournie** par la machine,

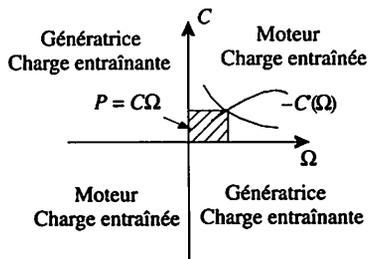
$P' = C' \Omega$, puissance mécanique **fournie** par la charge,

$P_c = \Omega J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \Omega^2 \right)$, puissance cinétique.

Dans le cadre de l'étude d'un système motorisé, la machine électrique sera considérée **a priori** comme fonctionnant en moteur, donc fournissant de la puissance mécanique ($P_u \geq 0$).

Comme le système peut fonctionner dans les 4 quadrants, il faudra examiner le signe de la vitesse si l'on souhaite raisonner à partir des couples.

	< 0	> 0
P_u	Génératrice	Moteur
P'	Charge entraînée	Charge entraînant

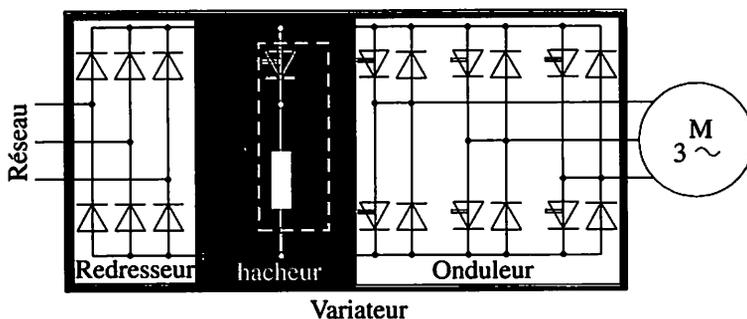


Dans le plan couple vitesse, la puissance mécanique est représentée par une surface.

• Réversibilité

Quand la charge est entraînée (système de levage en descente par exemple) la machine peut fonctionner en génératrice. Il est alors possible de récupérer l'énergie de freinage : on parle alors de réversibilité. Cependant **pour qu'un système soit réellement réversible il est indispensable que tous les éléments de la chaîne qui le compose le soient.**

Exemple : variateur de vitesse



Quand la machine passe en fonctionnement génératrice, l'onduleur (réversible) transfère l'énergie qu'elle restitue mais le redresseur à diodes (non réversible) rend impossible le renvoi sur le réseau. Le hacheur intercalé entre l'étage d'entrée et l'onduleur dissipe cette énergie en chaleur dans la résistance qu'il alimente.

I Composants

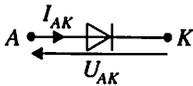
Les convertisseurs statiques permettent grâce à une commande appropriée de transférer de l'énergie d'une source vers un récepteur. Ils nécessitent l'utilisation d'interrupteurs à semi-conducteurs, commandés ou non, comme les transistors, les thyristors, les diodes...

Les composants évoqués dans ce livre seront considérés comme parfaits :

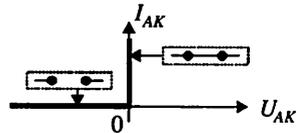
- passage instantané de l'état passant à l'état bloqué et réciproquement ;
- comportement équivalent à un interrupteur fermé pour l'état passant ;
- comportement équivalent à un interrupteur ouvert pour l'état bloqué.

Aucune perte de puissance ne leur sera imputable.

• Diode



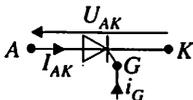
A : anode ;
K : cathode.



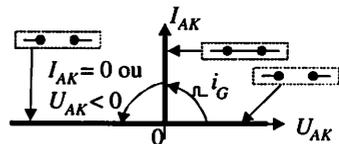
Modèle de la diode idéale :

- sens direct $I_{AK} > 0$ et $U_{AK} = 0$, la diode est modélisée par un interrupteur fermé ;
- sens inverse $U_{AK} < 0$ et $I_{AK} = 0$, la diode est modélisée par un interrupteur ouvert

• Thyristor



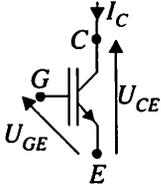
A : anode ;
K : cathode ;
G : gâchette..



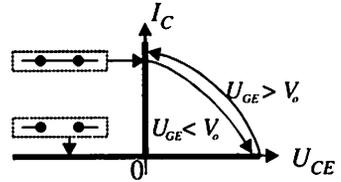
Pour amorcer un thyristor, c'est-à-dire le faire passer de l'état bloqué à l'état passant, on doit lui appliquer une impulsion positive de courant de gâchette i_G et respecter la condition $U_{AK} > 0$.

Le blocage est assuré par l'annulation du courant principal I_{AK} (blocage dit « naturel ») ou par application d'une tension $U_{AK} < 0$ pendant une durée « suffisante » (blocage dit « forcé »).

- **Transistor IGBT**



<p>C : collecteur E : émetteur G : grille</p>



Le transistor IGBT est passant si les conditions suivantes sont satisfaites :

- tension principale $U_{CE} > 0$;
- tension de commande $U_{GE} > V_o$ tension de seuil de quelques volts.

- **Interrupteur commandé**

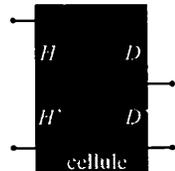
Quelle que soit la technologie utilisée, on utilisera le symbole ci-contre pour représenter un interrupteur à semi-conducteur commandé à l'ouverture et à la fermeture.



II Cellule de commutation

- **Définition**

Une cellule de commutation est un ensemble formé de deux interrupteurs unidirectionnels commandés et des deux diodes montées en antiparallèle. On utilise ces cellules dans les hacheurs, les onduleurs et les redresseurs à absorption sinusoïdale.



- **Réversibilité**

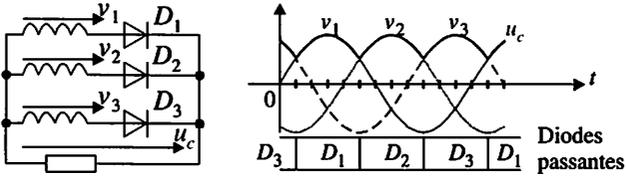
L'orientation des interrupteurs commandés et des diodes en antiparallèle donne à la cellule de commutation la propriété de réversibilité. Cette réversibilité n'est effective que si les sources reliées sont réversibles.

- **Commande**

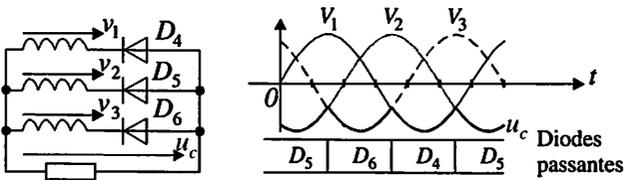
Pour ne pas court-circuiter la source de tension, présente en amont d'une cellule, on interdit la commande à la fermeture simultanée des interrupteurs H et H'.

- **Cellules des ponts redresseurs**

Cathodes communes : seule la diode dont l'anode est au potentiel le plus élevé est passante.



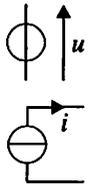
Anodes communes : seule la diode dont la cathode est au potentiel le plus bas est passante.



III Sources

Le terme de source est indifféremment utilisé pour les générateurs et les récepteurs d'énergie.

- source de tension : elle impose à ses bornes une tension quel que soit le courant qui la traverse ;
- source de courant : elle impose l'intensité du courant la traversant quelle que soit la tension à ses bornes.

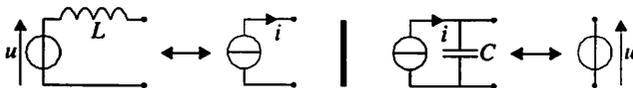


- **Nature d'une source**

Les grandeurs imposées par les sources sont rarement constantes et peuvent présenter des fluctuations. On utilisera les définitions suivantes :

- une source de tension ne peut subir de discontinuité de tension à ses bornes du fait de la charge ;
- une source de courant ne peut subir de discontinuité de l'intensité du courant la traversant du fait de la charge.

Les propriétés des condensateurs et des bobines (cf. fiche 3) permettent de changer la nature d'une source.



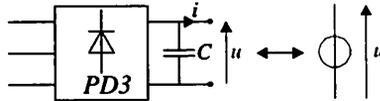
• **Réversibilité d'une source**

Une source réversible peut passer d'un fonctionnement générateur à un fonctionnement récepteur et réciproquement.

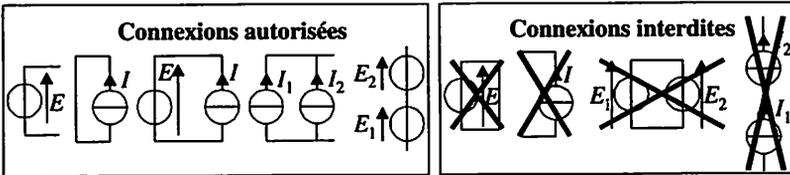
Si ce changement est fugitif cette réversibilité est dite « instantanée »

Si ce changement est durable cette réversibilité est dite « permanente ».

Exemple : l'association d'un pont de diodes et d'un condensateur constitue une source de tension. Le courant i ne peut être de valeur moyenne négative, mais peut, par la présence du condensateur, présenter des pointes négatives. Ce montage est équivalent à une source de tension à réversibilité instantanée de courant.



• **Connexions des sources**



Les commandes et les structures des convertisseurs statiques doivent respecter ces règles de connexion.

Remarque : si un convertisseur statique est affecté au transfert d'énergie entre deux sources de même nature, deux sources de courant ou deux sources de tension, il doit comporter des éléments tampons comme des bobines ou des condensateurs.

IV Tracé des tensions en conduction continue

Méthode : on remplace les blocs constitués d'un interrupteur commandé H et d'une diode D par :

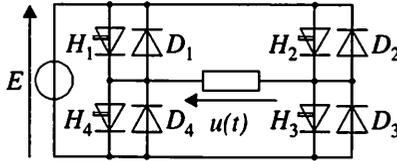


Un interrupteur fermé si H est commandé à la fermeture



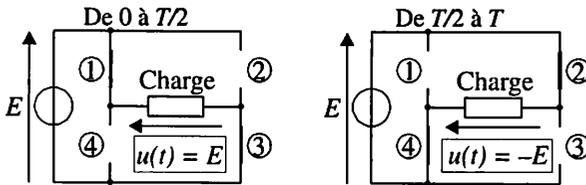
Un interrupteur ouvert si H est commandé à l'ouverture

Exemple :



De 0 à T/2 : les interrupteurs H_1 et H_3 sont commandés à la fermeture et les interrupteurs H_2 et H_4 sont commandés à l'ouverture.

De T/2 à T : les interrupteurs H_1 et H_3 sont commandés à l'ouverture et les interrupteurs H_2 et H_4 sont commandés à la fermeture.

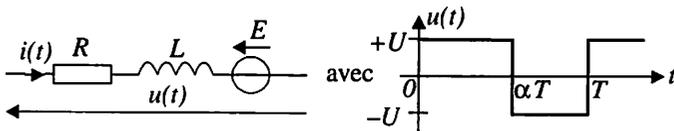


V Étude des courants

- Courant dans la charge

Méthode : Nous déterminons la forme du courant dans une charge à partir de son équation différentielle et de la forme de la tension à ses bornes.

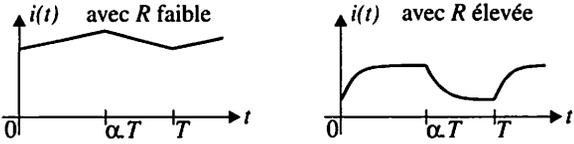
Exemple 1 :



De 0 à αT , on doit résoudre : $u(t) = U = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E$.

De αT à T , on doit résoudre : $u(t) = -U = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E$.

Influence de la valeur de la résistance sur la forme du courant :



La forme du courant dans une charge de type RLE est une succession d'évolutions exponentielles. Lorsque la résistance est suffisamment faible, cette forme s'apparente à une succession d'évolutions linéaires. La valeur de la résistance n'influe plus sur la forme du courant. Le terme $Ri(t)$ devient négligeable devant les autres tensions.

L'équation de la charge devient : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + E$.

Remarque : même si la résistance n'influe pas sur la forme du courant, elle reste prépondérante dans la détermination de sa valeur moyenne :

$$\overline{i(t)} = \frac{\overline{u(t)} - E}{R}$$

Généralement on considère le terme $Ri(t)$ comme négligeable si la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ de la branche RLE est très supérieure à la demi période $\frac{T}{2}$ de la commande.

Exemple 2 : on reprend la branche RLE de l'exemple 1

Si $Ri(t)$ est négligeable on résout :

de 0 à αT , $U = L \frac{di(t)}{dt} + E$, $\frac{di(t)}{dt} = \frac{U - E}{L} \implies i(t) = \frac{U - E}{L} t + \text{cste.}$

La constante est déterminée à partir de la valeur du courant à l'instant $t = 0$. Si on note $i(0) = I_0$, on obtient : $\text{cste} = I_0$

$$i(t) = \frac{U - E}{L} t + I_0 \text{ Valeur initiale du courant}$$

Pente $di(t)/dt$

de αT à T , $-U = L \frac{di(t)}{dt} + E \implies i(t) = \frac{-U - E}{L} t + \text{cste.}$

La constante est déterminée à partir de la valeur du courant à l'instant $t = \alpha T$. Si on note $i(\alpha T) = I_1$, on obtient : $I_1 = \frac{-U - E}{L} \alpha T + \text{cste}$

Instant initial

$$i(t) = \frac{-U - E}{L} (t - \alpha T) + I_1 \text{ Valeur initiale du courant}$$

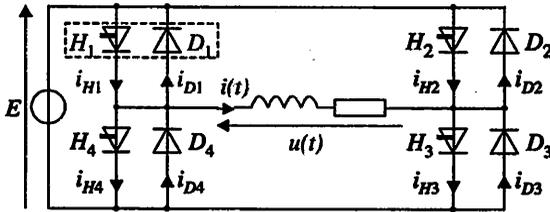
Pente $di(t)/dt$

• **Courants dans les interrupteurs**

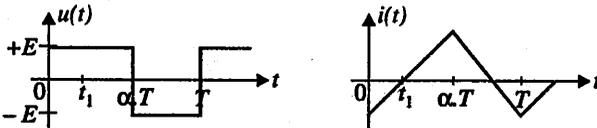
Pour dimensionner un interrupteur à semi-conducteur, on doit connaître le courant qui le traverse. On travaille sur un bloc constitué d'un interrupteur H et d'une diode D .

Si l'interrupteur H est commandé à l'ouverture les deux composants sont bloqués. Si l'interrupteur H est commandé à la fermeture, le composant passant a l'orientation compatible avec le sens du courant dans la charge.

Étude d'un onduleur de tension monophasé



L'interrupteur H_1 est commandé à la fermeture de 0 à αT et à l'ouverture de αT à T . On donne les formes de la tension $u(t)$ et du courant $i(t)$.



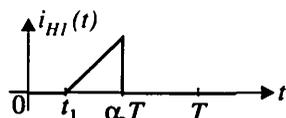
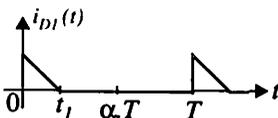
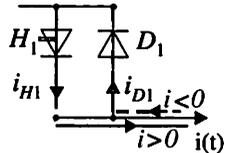
Déterminer la forme de l'intensité des courants dans les composants H_1 et D_1 .

Solution

Les composants H_1 et D_1 sont bloqués entre αT à T , et H_1 est commandé à l'ouverture. Il reste à déterminer sur la phase de fonctionnement de 0 à αT , leurs intervalles de conduction. Or, $i(t) = i_{H_1}(t) - i_{D_1}(t)$.

De 0 à t_1 : l'intensité de $i(t)$ est négative, la conduction ne peut être assurée que par la diode D_1 , d'où $i_{D_1}(t) = -i(t)$.

De t_1 à αT : l'intensité de $i(t)$ est positive, l'interrupteur H_1 assure la conduction, d'où $i_{H_1}(t) = i(t)$.

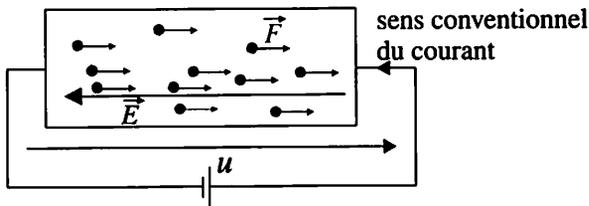


Circuit en régime variable

I Conducteur

- **Courant électrique**

Les électrons des couches externes des atomes des conducteurs se libèrent facilement et circulent de façon désordonnée dans un réseau d'ions fixes. Quand on polarise le conducteur, on crée un champ électrostatique interne \vec{E} .



Les électrons sont alors soumis à une force électrostatique $\vec{F} = q \vec{E}$ ($q < 0$) et présentent un mouvement d'ensemble que l'on appelle courant électrique.

- **Résistivité du conducteur**

On exprime la relation entre la tension et l'intensité du courant par :

$$u(t) = \rho \frac{L}{S} i(t).$$

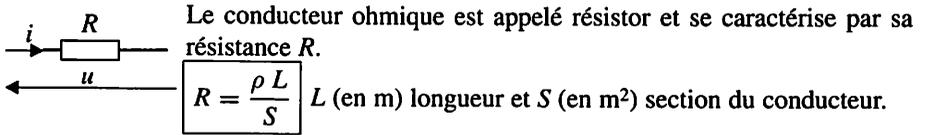
On note ρ (en $\Omega \cdot m$) la résistivité du matériau, L (en m) la longueur du conducteur et S (en m^2) sa section. La résistivité dépend de la nature du conducteur et de la température : $\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T)$

ρ_0 résistivité du conducteur à $0^\circ C$, T température en $^\circ C$ et α coefficient de température (voisin de $4 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ C^{-1}$ pour les métaux).

Exemples de valeurs : pour le cuivre $\rho = 1,7241 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ à une température de $20^\circ C$ avec un coefficient de $3,9 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ C^{-1}$.

II Dipôles passifs, actifs

• Résistor



Loi d'Ohm : $u(t) = R i(t)$: u en Volts (V), i en Ampères (A) et R en Ohms (Ω).

Association série :

La résistance équivalente d'un groupement série de résistors est égale à la somme des résistances de chacun des résistors composant ce groupement.

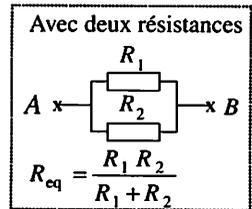
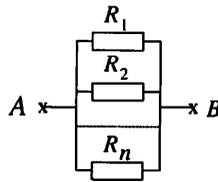
$$R_{\text{éq}} = R_{AB} = \sum_{i=1}^n R_i$$



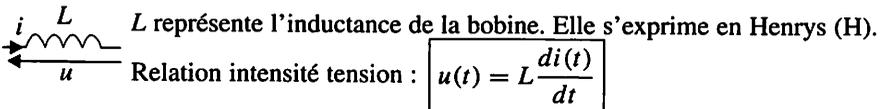
Association dérivation :

La conductance équivalente d'un groupement parallèle de résistors est égale à la somme des conductances de chacun des résistors composant ce groupement.

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_{AB}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$



• Bobine



Remarque : dans un circuit fonctionnant en continu, l'intensité du courant i est constante et la tension u aux bornes de la bobine est nulle ($u(t) = L \frac{di}{dt} = 0$). La bobine peut être représentée par un court-circuit.

Utilisation : lisser un courant, c'est-à-dire en atténuer les variations.

• **Condensateur**

Le condensateur porte la charge : $q(t) = C u(t)$; C représente la capacité du condensateur. Elle s'exprime en Farads (F)

En appliquant $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ on obtient $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$.

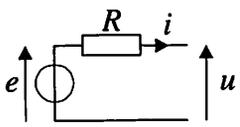
Remarque : dans un circuit fonctionnant en continu, la tension u est constante et le courant i est nul ($i(t) = C \frac{dU}{dt} = 0$). Le condensateur peut être représenté par un circuit ouvert.

Utilisations : filtrer une tension c'est-à-dire en atténuer les variations ; réservoir d'énergie.

• **Dipôles actifs**

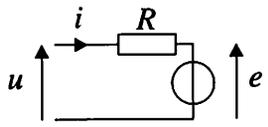
Source de tension parfaite et source de courant parfaite : (cf. fiche 2).

Générateur (source réelle) :



$u(t) = e(t) - R i(t)$

Récepteur (source réelle) :



$u(t) = e(t) + R i(t)$

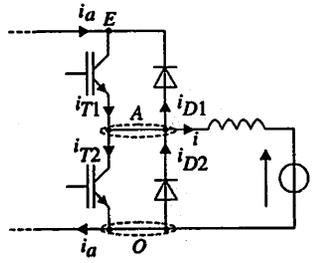
II Lois générales

• **Loi des nœuds**

La somme algébrique des intensités des courants orientés vers un nœud est égale à la somme algébrique des intensités des courants orientés à partir de ce nœud.

Application sur un hacheur

Ecrire les équations relatives aux lois des nœuds appliquées à ce montage.



FICHE 3 – Circuit en régime variable

Solution

Ce circuit comporte trois nœuds : A, E et O. Nœud A : $i_{T1} + i_{D2} = i_{T2} + i_{D1} + i$.
Nœud E : $i_a + i_{D1} = i_{T1}$ et Nœud O : $i_{T2} + i = i_a + i_{D2}$.

Remarque : L'équation au nœud O n'est rien d'autre que la combinaison des équations obtenues aux nœuds A et E.

Un circuit comportant N nœuds sera décrit par N-1 équations de courants.

• Loi des mailles

La somme algébrique des tensions rencontrées dans le parcours d'une maille est nulle.

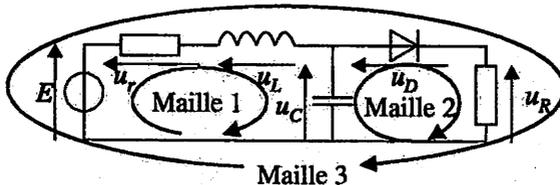
Pour appliquer cette loi nous devons respecter la convention suivante :

- affecter du signe + les tensions dont la flèche représentative est rencontrée par le talon ;
- affecter du signe – les tensions dont la flèche représentative est rencontrée par la pointe.

Remarque : la validité de la loi est confirmée si l'on inverse le sens des signes dans la convention précédente et ce quel que soit le sens de parcours choisi.

Application

Écrire les équations relatives aux lois des mailles appliquées au montage suivant :



Solution

Maille 1 : $E - u_r - u_L - u_C = 0$. Maille 2 : $u_C - u_D - u_R = 0$ et Maille 3 :
 $E - u_r - u_L - u_D - u_R = 0$ (combinaison des deux mailles précédentes).

Un circuit comportant M mailles sera décrit par M-1 équations d'application de la loi des mailles.

• **Théorème de superposition**

L'intensité du courant dans une branche AB d'un réseau linéaire est la somme des intensités des courants qu'imposeraient dans cette branche chacune des sources les autres étant « désactivées ».

Une source de tension « désactivée » sera remplacée par un court-circuit.

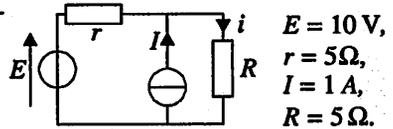
Une source de courant « désactivée » sera remplacée par un circuit ouvert.



Remarque : on procède de la même façon pour déterminer la différence de potentiel entre les bornes A et B.

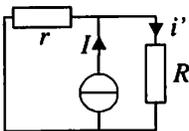
Application

Déterminer, en appliquant le théorème de superposition, le courant i traversant la résistance R .

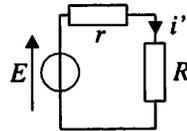


Solution

Source de courant seule



Source de tension seule



Source de courant seule (source de tension E remplacée par un court-circuit) :

$i' = I \frac{r}{R+r} = 0,5I = 0,5A$. Source de tension seule (source de courant I remplacée

par un circuit ouvert) : $i'' = \frac{E}{r+R} = \frac{10}{5+5} = 1A$.

Intensité du courant i dans la résistance : $i = i' + i'' = 1,5A$.

I Définition

La valeur instantanée d'une grandeur sinusoidale peut se mettre sous la forme : $g(t) = G\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ ou $g(t) = \widehat{G}\cos(\omega t + \varphi)$.

\widehat{G} représente l'amplitude de la grandeur $g(t)$ et G sa valeur efficace. Ces deux valeurs sont liées par la relation : $\widehat{G} = G\sqrt{2}$.

ω représente la pulsation de la grandeur $g(t)$, f sa fréquence et T sa période. Ces trois grandeurs sont liées par les relations : $f = \frac{1}{T}$ et $\omega = 2\pi f$.

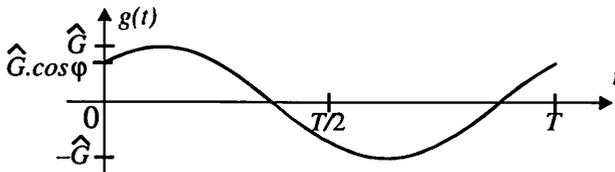
φ représente la phase initiale de la grandeur $g(t)$ et $\omega t + \varphi$ sa phase à l'instant t .

Unités : ω en (rad/s ou rad.s⁻¹), φ en (rad), f en (Hz), T en (s).

II Représentations

- Représentation cartésienne

C'est la représentation de l'évolution de la grandeur sinusoidale en fonction du temps. Elle peut être relevée à l'aide d'un oscilloscope.

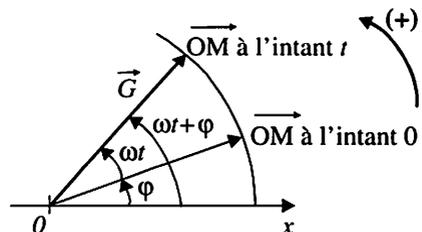


- Représentation vectorielle

On représente la grandeur $g(t)$ par un

vecteur : $\vec{G} = \vec{OM}$:

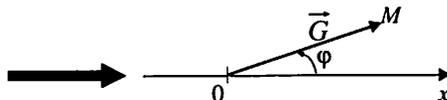
- tournant à la vitesse de rotation angulaire ω ;
- de longueur $OM = G$;
- d'angle polaire $\omega t + \varphi$.



Remarque : dans un circuit linéaire alimenté par une source sinusoïdale tous les vecteurs tournent à la même vitesse de rotation angulaire ω . Ils constituent une figure qui garde la même forme quel que soit l'instant considéré et présentent entre eux des angles invariants.

Simplification : au regard de la remarque précédente nous simplifierons la construction en la traçant pour l'instant initial $t = 0$.

$$g(t) = G \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$



• Représentation par les nombres complexes

La grandeur sinusoïdale $g(t) = G\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est égale à la partie réelle du nombre complexe $\underline{G}(t) = G\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) + jG\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$.

On associe à la grandeur sinusoïdale $g(t) = G\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ le nombre complexe $\underline{G} = Ge^{j\varphi} = [G; \varphi] = G\cos\varphi + jG\sin\varphi$.

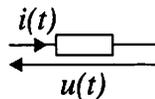
Le terme ωt a disparu de cette expression pour des raisons de simplification précédemment expliquées dans la représentation vectorielle.

Dans les constructions vectorielles on pourra associer la notation complexe aux vecteurs.

• Impédances

Soit un dipôle linéaire fonctionnant en régime linéaire sinusoïdal.

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u) \text{ et } i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_i).$$



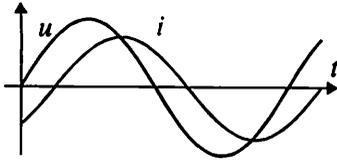
A $u(t)$ on associe $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$ et à $i(t)$ on associe $\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$.

L'impédance complexe est égale au rapport des complexes \underline{U} et \underline{I} .

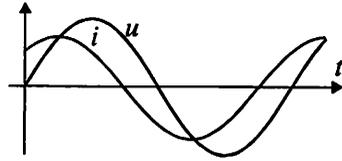
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

L'impédance complexe \underline{Z} peut se mettre sous la forme $\underline{Z} = [Z; \varphi]$.

$Z = \frac{U}{I}$ représente la valeur de l'impédance. $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ représente le déphasage du courant par rapport à la tension.



Si $\varphi > 0$ le courant est en retard



Si $\varphi < 0$ le courant est en avance.

L'impédance complexe \underline{Z} peut se mettre sous la forme $\underline{Z} = R + jX$. R et X représentent respectivement la résistance et la réactance du dipôle. R , X et Z s'expriment en ohms (Ω).

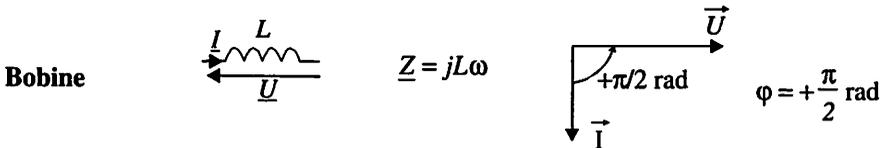
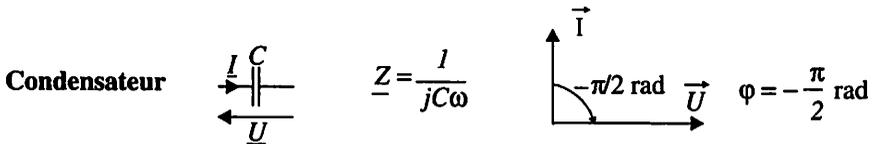
• Admittance

L'admittance complexe est égale au rapport des complexes \underline{I} et \underline{U} .

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I \cdot e^{j\varphi_i}}{V \cdot e^{j\varphi_u}} = \frac{I}{V} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = \frac{I}{V} e^{j(-\varphi)} = \left[\frac{I}{V}; -\varphi \right]$$

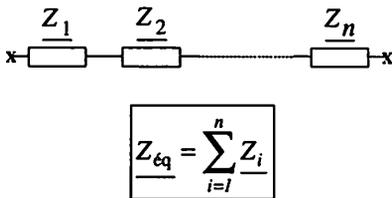
On peut également mettre l'impédance sous la forme $\underline{Y} = G + jB$. G est la conductance du dipôle et B sa susceptance. G , B et Y s'expriment en (Ω^{-1}).

• Dipôles



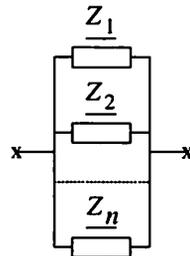
• Association de dipôles en régime sinusoïdal

Association série :



Association dérivation :

$$\frac{1}{Z_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}$$



• Lois fondamentales

Les lois fondamentales sont transposables en régime sinusoïdal en utilisant les notations complexes ou les constructions vectorielles.

Exemples : $I_1 - I_2 + I_3 = I_4 + I_5$ ou $\vec{I}_1 - \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{I}_4 + \vec{I}_5$

Sauf cas très particuliers où toutes les grandeurs sont en phases, on ne peut pas faire de somme de valeurs efficaces.

~~$I_1 - I_2 + I_3 = I_4 + I_5$~~

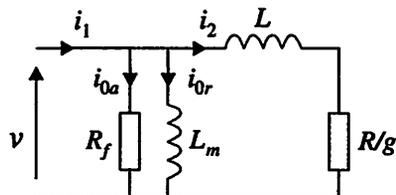
Schéma équivalent ramené sur une phase d'une machine asynchrone

On utilise le schéma équivalent suivant :

$v(t) = 230\sqrt{2} \cos(2\pi 50 t)$ (V),

$i(t) = 36\sqrt{2} \cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{6}\right)$ (A),

$R_f = 115 \Omega$ et $X_m = L_m\omega = 23 \Omega$.

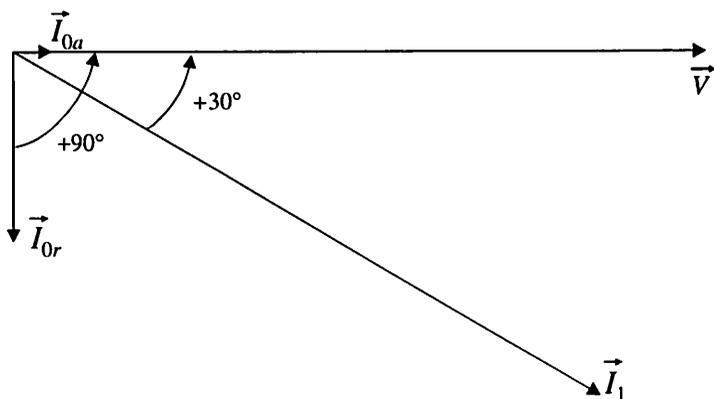


1. Déterminer l'intensité efficace des courants i_{0a} et i_{0r} .
2. Faire la construction vectorielle représentant les courants i_{0a} , i_{0r} , i_1 et la tension v . On adoptera l'échelle : 1cm \rightarrow 4 A et 1cm \rightarrow 25 V.
3. En déduire en complétant la construction vectorielle la valeur efficace de l'intensité du courant i_2 .

Solution

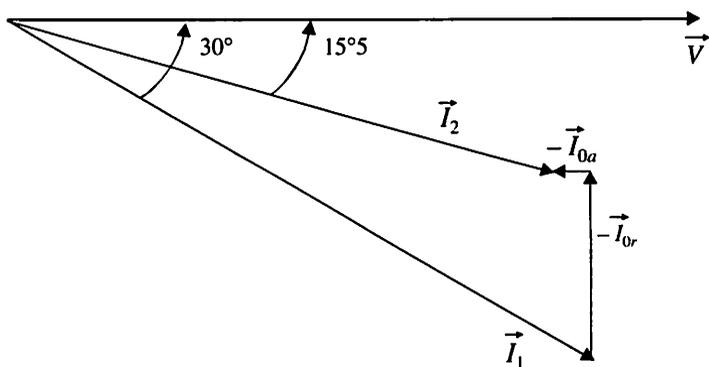
1. Prenons la relation $I = \frac{U}{Z}$. $I_{0a} = \frac{V}{R_f} = \frac{230}{115} = 2 \text{ A}$ et $I_{0r} = \frac{V}{X_m} = \frac{230}{23} = 10 \text{ A}$.

2. La tension v est prise comme référence. On calcule la longueur des différents vecteurs : $\vec{V} \rightarrow \frac{230}{25} = 9,2 \text{ cm}$; $\vec{I}_{0a} \rightarrow \frac{2}{4} = 0,5 \text{ cm}$; $\vec{I}_{0r} \rightarrow \frac{10}{4} = 2,5 \text{ cm}$; $\vec{I}_1 \rightarrow \frac{36}{4} = 9 \text{ cm}$. Le courant i_{0a} est en phase avec la tension v , le courant i_{0r} est en retard de 90° et le courant i_1 en retard de 30° .



3. En appliquant la loi des nœuds, on complète la construction vectorielle :

$$i_1 = i_{0a} + i_{0r} + i_2 \rightarrow \vec{I}_1 - \vec{I}_{0a} - \vec{I}_{0r} = \vec{I}_2$$



On mesure une longueur du vecteur \vec{I}_2 égale à $7,5 \text{ cm}$: $I_2 = 7,5 \cdot 4 = 30 \text{ A}$.

Circuit en régime périodique

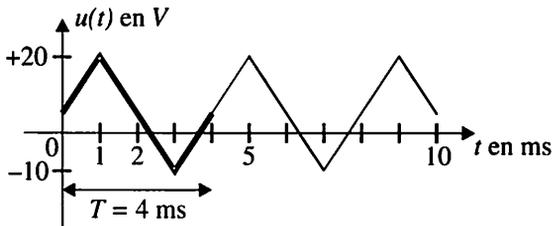
Avertissement : les définitions données pour une grandeur périodique $g(t)$ sont transposables pour des tensions en utilisant la notation $u(t)$ ou pour des courants en utilisant la notation $i(t)$.

I Analyse temporelle

- **Définition**

Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui même au bout d'un certain temps T appelé période. T s'exprime en secondes (s).

Exemple :



La tension $u(t)$ présente un motif élémentaire triangulaire de durée 4 ms. C'est une tension périodique de période $T = 4$ ms.

- **Fréquence**

La fréquence d'une grandeur périodique est donnée par la relation : $f = \frac{1}{T}$.

Elle correspond au nombre de périodes par seconde et s'exprime en Hertz (Hz).

- **Valeur moyenne**

La valeur moyenne notée $\overline{g(t)}$ (ou $\langle g(t) \rangle$) d'une grandeur périodique $g(t)$ est la

valeur algébrique donnée par la relation :
$$\overline{g(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt .$$

L'intégrale est calculée sur une période du signal mais pas obligatoirement entre 0 et T . Pour réduire les calculs, on choisira les bornes d'intégration en fonction de la symétrie du signal.

Si la forme du signal est relativement simple, rectangulaire par exemple, on préférera passer par le calcul de l'aire algébrique correspondant à l'intégrale.

La valeur moyenne d'un signal alternatif est nulle.

La valeur moyenne d'un signal est mesurée avec un multimètre numérique en position DC.

- **Valeur efficace**

La valeur efficace notée G d'une grandeur périodique $g(t)$ est la valeur positive

donnée par la relation :
$$G = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt} .$$
 C'est la racine carrée de la valeur

moyenne du carré (RMS : ROOT MEAN SQUARE en anglais). On mesure la valeur efficace d'un signal périodique à l'aide d'un multimètre TRMS (True RMS : valeur efficace vraie) en position AC.

- **Valeur efficace de la composante alternative**

Un signal périodique $g(t)$ peut être considéré comme la somme d'un signal continu constant et d'un signal alternatif : $g(t) = \overline{g(t)} + g_a(t)$.

La relation $G = \sqrt{\overline{g(t)}^2 + G_a^2}$ donne la valeur efficace du signal en fonction de la valeur efficace de sa composante alternative et de sa valeur moyenne.

Certains multimètres RMS n'indiquent que la valeur efficace de la composante alternative du signal.

- **Facteur de crête**

Il est défini par la relation : $f_c = \frac{|G_{\max}|}{G}$

II Analyse fréquentielle

• Théorème de Fourier

Tout signal périodique $g(t)$, de période T et de fréquence f , peut être considéré comme étant la somme d'une composante continue et d'une série infinie de sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples de f .

$$g(t) = \overline{g(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cos(n \omega t) + \hat{B}_n \sin(n \omega t) \text{ avec } \omega = 2\pi f$$

$$\text{ou } g(t) = \overline{g(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{G}_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Le terme $\hat{G}_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ représente l'harmonique de rang n du signal $g(t)$.
L'harmonique de rang 1 : $\hat{G}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ prend le nom de fondamental.
Le calcul des coefficients \hat{A}_n , \hat{B}_n et \hat{G}_n relève du cours de mathématiques.

• Cas particuliers

Signal présentant des alternances positives qui au signe près sont identiques aux alternances négatives.

Dans ce cas :

$$-\overline{G} = 0 ;$$

– le développement ne contient pas d'harmoniques de rang pairs.

$$g(t) = \hat{G}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{G}_3 \sin(3 \omega t + \varphi_3) + \hat{G}_5 \sin(5 \omega t + \varphi_5) + \dots$$

Signal impair

$$-\overline{G} = 0 ;$$

– $g(t)$ ne contient que des termes en sinus ;

$$g(t) = \hat{G}_1 \sin(\omega t) + \hat{G}_2 \sin(2 \omega t) + \hat{G}_3 \sin(3 \omega t) + \dots$$

Signal pair

– le développement ne contient que des termes en cosinus

$$g(t) = \overline{G} + \hat{G}_1 \cos(\omega t) + \hat{G}_2 \cos(2 \omega t) + \hat{G}_3 \cos(3 \omega t) + \dots$$

• Taux de distorsion harmonique

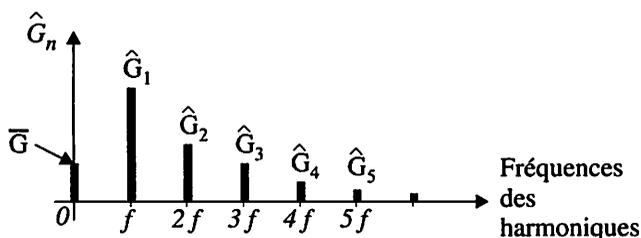
Le taux de distorsion harmonique d'un signal est donné par la relation :

$$TDH = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} G_n^2}}{G_1} = \frac{\sqrt{G_2^2 + G_3^2 + G_4^2 + G_5^2 + \dots}}{G_1} = \frac{\sqrt{G^2 - G_1^2}}{G_1}$$

Il permet de quantifier le contenu en harmoniques d'un signal. Un taux voisin de 0 indique que l'on est en présence d'un signal quasi-sinuoidal, alors qu'un taux très supérieur à 1 signifie que le signal est fortement « chargé » en harmoniques.

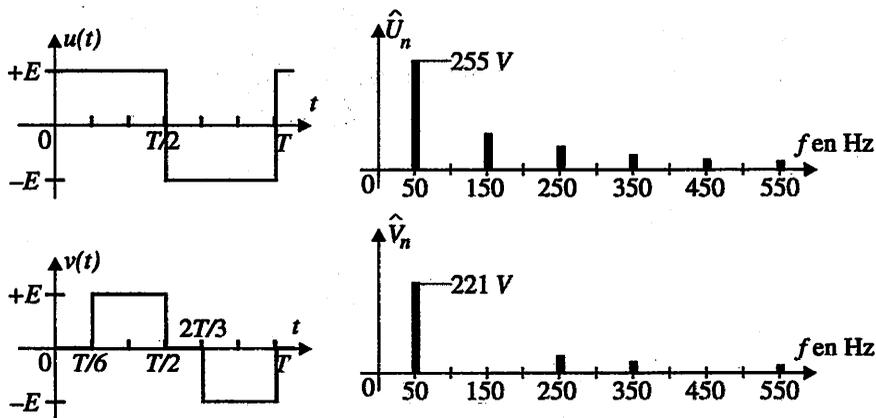
• **Spectre des amplitudes**

Cette représentation, sous forme de raies, permet de connaître l'amplitude et la fréquence de chacun des harmoniques du signal.



Analyse d'une tension rectangulaire

Un onduleur autonome fournit en commande pleine onde la tension $u(t)$ et en commande décalée la tension $v(t)$:



Les spectres des amplitudes des deux tensions sont donnés pour une valeur de E égale à 200 V.

1. Les valeurs moyennes des deux tensions sont nulles. Justifier.
2. Déterminer l'expression de la valeur efficace U de la tension $u(t)$ puis celle de la valeur efficace V de la tension $v(t)$. Calculer ces valeurs pour $E = 200$ V.
3. Donner la valeur efficace U_1 du fondamental de la tension $u(t)$ et la valeur efficace V_1 de la tension $v(t)$.

4. Calculer le taux de distorsion harmonique $TDH(u)$ de la tension $u(t)$ puis $TDH(v)$ de la tension $v(t)$.
5. Quel est l'intérêt d'une commande décalée ?

Solution

1. Ces tensions sont alternatives donc les valeurs moyennes sont nulles.

$$2. U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{T/2} E^2 \cdot dt + \int_{T/2}^T (-E)^2 \cdot dt \right)}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \left([E^2 \cdot t]_0^{T/2} + [E^2 \cdot t]_{T/2}^T \right)} = \sqrt{\frac{1}{T} \left([E^2 \cdot (T/2)] + [E^2 \cdot (T/2)] \right)} = E$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(\int_{T/6}^{T/2} E^2 \cdot dt + \int_{2T/3}^T (-E)^2 \cdot dt \right)}$$

$$V = \frac{1}{T} \left([E^2 t]_{T/6}^{T/2} + [E^2 t]_{2T/3}^T \right) = \sqrt{\frac{1}{T} \left([E^2(T/3)] + [E^2(T/3)] \right)} = \sqrt{\frac{2}{3}} E$$

Pour $E = 200$ V on obtient $U = 200$ V et $V = \sqrt{\frac{2}{3}} 200 = 163$ V.

3. La valeur de l'amplitude du fondamental de la tension $u(t)$ est donnée par la première raie (50 Hz) du spectre des amplitudes, soit $\hat{U}_1 = 255$ V et $\hat{V}_1 = 221$ V. On obtient la valeur efficace de ce fondamental en appliquant : $U_1 = \frac{\hat{U}_1}{\sqrt{2}} = 180$ V et

$$V_1 = \frac{\hat{V}_1}{\sqrt{2}} = 156$$
 V.

4. Pour la tension $u(t)$, nous obtenons le taux de distorsion harmonique :

$$TDH(u) = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{200^2 - 180^2}}{180} = 48,43 \%$$

Pour la tension $v(t)$, nous obtenons le taux de distorsion harmonique :

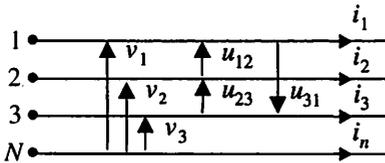
$$TDH(v) = \frac{\sqrt{V^2 - V_1^2}}{V_1} = \frac{\sqrt{163^2 - 156^2}}{156} = 30,29 \%$$

5. La commande décalée permet d'éliminer les harmoniques de rangs multiples de trois. La tension obtenue présente un taux de distorsion plus faible qui traduit cette diminution des harmoniques.

Les systèmes triphasés sont utilisés dans la production, le transport et la distribution de l'énergie électrique. À puissance égale ils offrent un rendement supérieur aux systèmes monophasés.

I Réseau triphasé équilibré

- **Définition**



Un réseau triphasé est composé de trois phases et éventuellement d'un neutre. Les phases sont notées (1,2,3), ou (R,S,T) ou (A,B,C).

- **Tensions simples**

Ces tensions sont prises entre phase et neutre : $v_1 = v_{1N}$, $v_2 = v_{2N}$ et $v_3 = v_{3N}$.

- **Système triphasé équilibré**

Trois grandeurs sinusoïdales de même nature, de même fréquence, de même valeur efficace, et déphasées les unes par rapport aux autres de 120° , forment un système triphasé équilibré.

Système triphasé équilibré direct (TED)

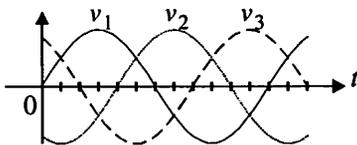
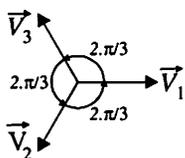
La grandeur d'indice 3 est en retard de 120° sur la grandeur d'indice 2, qui est en retard de 120° sur la grandeur d'indice 1.

$$v_1(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t), \quad v_2(t) = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad v_3(t) = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

$$\underline{V}_1 = [V; 0], \quad \underline{V}_2 = \left[V; -\frac{2\pi}{3} \text{ rad}\right], \quad \underline{V}_3 = \left[V; -\frac{4\pi}{3} \text{ rad}\right]$$

À chaque instant, $v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$.

La somme de trois grandeurs formant un système triphasé équilibré est nulle.



Système triphasé équilibré indirect (TEI)

La grandeur d'indice 2 est en retard de 120° sur la grandeur d'indice 3, qui est en retard de 120° sur la grandeur d'indice 1. Pour commuter un TED en TEI, il suffit d'inverser deux phases.

• Tensions composées

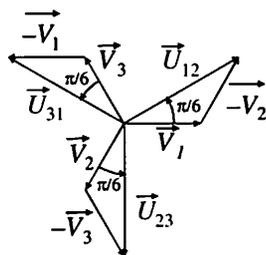
Les tensions composées sont prises entre phases :

$$u_{12} = v_1 - v_2$$

$$u_{23} = v_2 - v_3$$

$$u_{31} = v_3 - v_1$$

Le système des tensions composées est décalé de $\frac{\pi}{6}$ rad par rapport au système des tensions simples.



• Relation entre tension composée et tension simple

Les valeurs efficaces des tensions composées et les valeurs efficaces des tensions simples sont liées par la relation : $U = \sqrt{3} V$

• Courants

Les courants i_1 , i_2 et i_3 sont appelés courants de ligne.

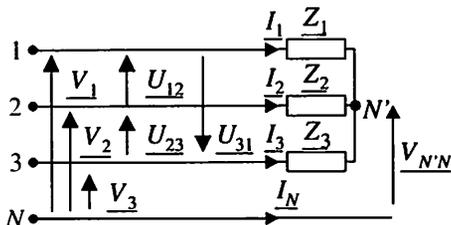
II Couplage

• Couplage étoile

Un réseau triphasé équilibré direct alimente une charge triphasée équilibrée :

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}.$$

Cette charge est couplée en étoile.



Le réseau étant équilibré la somme des tensions simples est nulle : $\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0$.

En appliquant la loi des nœuds la somme des intensités des courants de lignes est nulle : $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$.

En appliquant la loi des mailles on peut écrire les relations suivantes : $\underline{V}_1 = \underline{Z} \underline{I}_1 + \underline{V}_{N'N}$, $\underline{V}_2 = \underline{Z} \underline{I}_2 + \underline{V}_{N'N}$ et $\underline{V}_3 = \underline{Z} \underline{I}_3 + \underline{V}_{N'N}$. La somme de ces trois relations donne le résultat suivant : $0 = 0 + 3\underline{V}_{N'N} \Rightarrow \underline{V}_{N'N} = 0$.

Conclusion : Le point commun aux trois branches d'un montage étoile équilibré est au même potentiel que le neutre du réseau. Le branchement du neutre sera sans conséquence pour les courants.

La relation entre tension simple et intensité du courant de ligne pour la charge est donnée par : $\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$ ($\underline{V}_1 = \underline{Z} \underline{I}_1$, $\underline{V}_2 = \underline{Z} \underline{I}_2$, $\underline{V}_3 = \underline{Z} \underline{I}_3$).

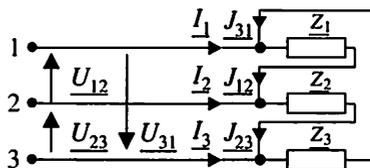
• Couplage triangle

Un réseau de tensions TED alimente une charge triphasée équilibrée :

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}.$$

Cette charge est couplée en triangle.

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

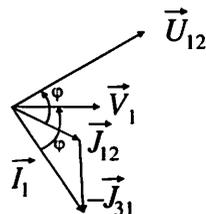


$\underline{U}_{12} = \underline{Z} \underline{J}_{12}$, $\underline{U}_{23} = \underline{Z} \underline{J}_{23}$ et $\underline{U}_{31} = \underline{Z} \underline{J}_{31} \Rightarrow \underline{U} = \underline{Z} \underline{J}$ l'impédance \underline{Z} impose le déphasage φ entre le courant dans une branche du triangle et la tension composée correspondante.

Courants de lignes :

$$\underline{I}_1 = \underline{J}_{12} - \underline{J}_{31}, \underline{I}_2 = \underline{J}_{23} - \underline{J}_{12}, \underline{I}_3 = \underline{J}_{31} - \underline{J}_{23}.$$

En construisant le courant \underline{I}_1 avec $\underline{I}_1 = \underline{J}_{12} - \underline{J}_{31}$, on remarque que ce déphasage φ apparaît également entre le courant de ligne \underline{I}_1 et la tension simple \underline{V}_1 .

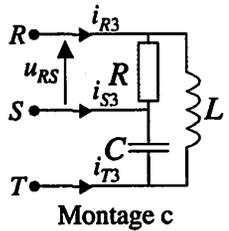
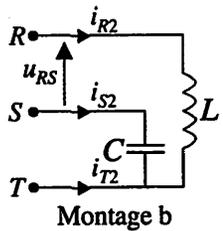
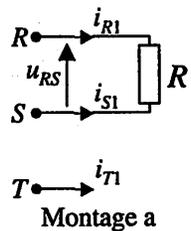


Que l'on soit en couplage étoile ou en couplage triangle, le déphasage φ entre courant de ligne et tension simple correspondante est imposé par l'impédance de la charge.

Relation entre la valeur efficace d'un courant de ligne et la valeur efficace du courant dans une branche du montage triangle : $I = \sqrt{3} J$

Équilibrage d'une charge monophasée utilisée sur un réseau triphasé (d'après sujet BTS 1999)

Un four électrique de forte puissance a pour élément chauffant une résistance monophasée. On peut la considérer comme étant une charge triphasée déséquilibrée. La charge est alimentée par un réseau triphasé équilibré direct, parfaitement sinusoïdal, (noté R, S, T, N) ; le neutre N n'est pas relié.



Étude des perturbations (montage a)

La résistance de chauffage permettant d'obtenir une puissance $P = 104 \text{ kW}$ est branchée entre les phases R et S , du réseau triphasé $400 \text{ V}, 50 \text{ Hz}$.

1. Quel est le déphasage φ du courant i_{R1} dans la résistance R par rapport à la tension u_{RS} ? Calculer les intensités efficaces des courants i_{R1}, i_{S1}, i_{T1} , et placer ces courants sur un diagramme de Fresnel. On prendra comme échelle : un cm pour 200 V et un cm pour 100 A . La direction de la tension u_{RS} sera prise comme axe de référence.

Correction des perturbations

On utilise le circuit d'équilibrage constitué d'une inductance L et d'une capacité C (montage b). Les valeurs de C et de L sont choisies de manière à ce que les puissances réactives mises en jeu dans ces deux dipôles soient égales entre elles en valeur absolue : $|Q| = 60 \text{ kvar}$.

2. Déterminer les valeurs de $C\omega$ et de $L\omega$.
3. Calculer l'intensité du courant i_{S2} et son déphasage par rapport à u_{ST} . Calculer l'intensité efficace du courant i_{R2} et son déphasage par rapport à u_{RT} .
4. Placer ces courants sur le diagramme de Fresnel. En déduire l'intensité du courant i_{T2} .

On ajoute ce circuit de compensation à la résistance (montage c).

5. Déterminer les intensités efficaces et les phases des trois courants de ligne i_{R3}, i_{S3}, i_{T3} . Placer ces courants sur le diagramme de Fresnel. Que peut-on dire du système de courants obtenu ? Calculer la puissance active P et la puissance réactive Q fournies par le réseau R, S, T .

Solution

1. Le déphasage produit par une résistance est nul : $\varphi_{i_{R1}/u_{RS}} = 0$.

$I_{R1} = I_{S1} = \frac{P}{U_{RS}} = \frac{104\,000}{400} = 260 \text{ A}$ et $I_{T1} = 0 \text{ A}$. $i_{R1}(t) = -i_{S1}(t)$, les vecteurs représentatifs de ces deux courants sont opposés.

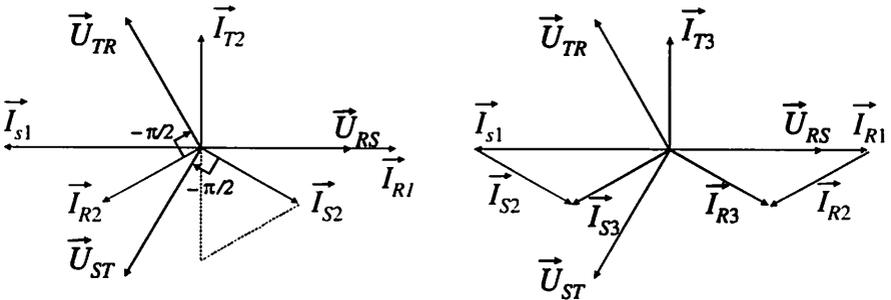
2. On exprime la puissance réactive pour la bobine $Q = \frac{U_{TR}^2}{L\omega}$, puis celle pour le condensateur $Q = -C\omega U_{ST}^2$. On en déduit : $L\omega = 2,67 \Omega$ et $C\omega = 0,375 \Omega$.

3. $I_{S2} = C\omega U_{ST} = 0,375 \cdot 400 = 150 \text{ A}$ et $I_{R2} = \frac{U_{RT}}{L\omega} = 150 \text{ A}$. Le condensateur positionne le courant i_{S2} en avance de 90° sur la tension u_{ST} et la bobine positionne le courant i_{R2} en retard de 90° sur la tension u_{RT} . Conséquences : $\varphi_{i_{S2}/u_{ST}} = -90^\circ$ et $\varphi_{i_{R2}/u_{TR}} = \varphi_{i_{R2}/u_{RT}} + \varphi_{u_{RT}/u_{TR}} = 90 - 180 = -90^\circ$.

4. On détermine graphiquement le courant i_{T2} en appliquant la loi des nœuds : $\vec{I}_{T2} = -\vec{I}_{R2} - \vec{I}_{S2}$. On mesure : $I_{T2} = 150 \text{ A}$ et $\varphi_{i_{T2}/u_{RS}} = -90^\circ$.

5. On applique la loi des nœuds : $\vec{I}_{R3} = \vec{I}_{R1} + \vec{I}_{R2}$, $\vec{I}_{S3} = \vec{I}_{S1} + \vec{I}_{S2}$ et $\vec{I}_{T3} = \vec{I}_{T1} + \vec{I}_{T2}$. On mesure $I_{R3} = I_{S3} = I_{T3} = 150 \text{ A}$. Les trois courants de ligne ont même valeur efficace et sont régulièrement déphasés de 120° . Ils forment un système triphasé équilibré.

Théorème de Boucherot : $P = P_R = 104 \text{ kW}$ et $Q = Q_L + Q_C = 0 \text{ var}$.



Énergie

7

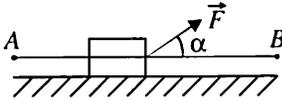
I Travail d'une force

Une force effectue un travail lorsqu'elle provoque le déplacement d'un corps. Le travail est une grandeur algébrique, il peut être positif (moteur) ou négatif (résistant).

• Force constante

Le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ effectué par une force constante \vec{F} au cours d'un déplacement \vec{AB} de son point d'application est le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{AB}$.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

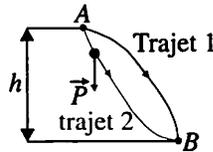


W en Joules (J),
 F en Newtons (N),
 AB en mètres (m).

Le travail d'une force constante est indépendant du trajet suivi. Il ne dépend que de la position initiale et de la position finale du point d'application de la force.

Exemple : travail de la force de pesanteur

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = mgh$$



g est l'intensité de l'attraction terrestre en Newtons par kilogramme ($\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$), m la masse du solide en kilogrammes (kg) et h la dénivellation en mètres (m).

Le travail du poids $\vec{P} = m \vec{g}$ est le même quel que soit le trajet suivi.

- **Cas d'une force quelconque**

Le travail élémentaire $dW(\vec{F})$ d'une force \vec{F} pour un déplacement infiniment petit \vec{dl} de son point d'application est le produit scalaire : $dW(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{dl}$

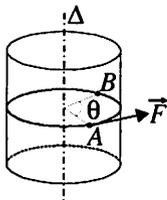
Le travail effectué par la force \vec{F} lors du parcours AB s'obtient en faisant la somme des travaux élémentaires. Nous le notons de la façon suivante :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \sum_{A \rightarrow B} dW(\vec{F}) = \sum_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

- **Travail d'une force appliquée à un solide en rotation**

On considère un solide mobile autour d'un axe Δ . On lui applique une force \vec{F} dont le moment par rapport à l'axe Δ est constant.

Le travail de la force \vec{F} , de moment constant T , au cours d'une rotation d'angle θ autour de l'axe fixe Δ est donné par :



$$W(T) = T \cdot \theta$$

W en Joules (J),

T en Newtons mètres (N.m),

θ en radians (rad).

On peut étendre cette définition au travail d'un couple de forces.

II Puissance

La puissance d'une force \vec{F} est une grandeur qui caractérise la rapidité avec laquelle elle accomplit un travail. La puissance est notée p et s'exprime en Watts (W).

- **Puissance instantanée d'une force \vec{F}**

La puissance instantanée se met sous la forme : $p(t) = \frac{dW}{dt}$

Remarque : si on remplace dans cette expression le travail élémentaire par $\vec{F} \cdot \vec{dl}$ on obtient :

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} \Rightarrow p(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

\vec{v} représente la vitesse instantanée du point d'application de la force \vec{F} .

- **Puissance instantanée d'un couple de forces de moment T**

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{T d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{p(t) = T\Omega}$$

Ω représente la vitesse de rotation angulaire.

- **Puissance moyenne**

Si une force \vec{F} effectue un travail ΔW pendant une durée Δt , elle développe une

puissance moyenne :

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

III Énergie

On appelle énergie tout ce qui peut se transformer en travail ou en une autre forme d'énergie.

- **Loi de conservation de l'énergie**

La nature obéit à une loi de CONSERVATION qui affirme que, dans un système isolé, il existe une quantité, l'ÉNERGIE, qui ne change pas lors de ses multiples modifications.

L'énergie totale d'un système isolé reste constante.

- **Unités**

L'énergie se note E et s'exprime en joules (J).

$$1 \text{ J} = 1 \text{ newton} \times 1 \text{ mètre}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ volt} \times 1 \text{ ampère} \times 1 \text{ seconde}$$

4,18 J sont nécessaires pour accroître de 1°C la température d'un gramme d'eau.

Electricité : l'énergie électrique est exprimée en kW.h, 1 kWh = 3 600 000 J

Carburants : TEP = tonne équivalent pétrole, 1 TEP = 11 600 kWh.

- **Cas de l'énergie cinétique**

Un système en mouvement possède de l'énergie cinétique.

Cas d'un mouvement de translation

Un système de masse m , animé d'un mouvement de translation à la vitesse v possède

de une énergie cinétique :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2}$$

E_c en (J), m en (kg) et v en (m s^{-1}).

Cas d'un mouvement de rotation

Un système de moment d'inertie J , animé d'un mouvement de rotation à la vitesse de

rotation angulaire Ω possède une énergie cinétique :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J \Omega^2}$$

J en (kg m^2)

- **Cas de l'énergie potentielle**

Un système immobile peut lui aussi fournir du travail. On emploie le terme d'énergie potentielle pour désigner cette nouvelle forme d'énergie.

Exemple : énergie potentielle de pesanteur

Un système de masse m , situé à une altitude h , présente une énergie potentielle : $E_p = m g h$. g intensité du champ de la pesanteur (valeur voisine de $9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ à la surface de la terre).

Lors d'une transformation d'énergie une partie de l'énergie de départ est convertie en énergie utile. Le reste est considéré comme l'ensemble des pertes.

- **Rendement**

Le rendement η est défini comme : $\eta = \frac{E_{\text{utile}}}{E_{\text{consommée}}}$ ou $\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{consommée}}}$.

Son expression peut également intégrer les pertes : $\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{utile}} + \text{pertes}}$

Le rendement est un rapport entre deux grandeurs identiques. Il n'a pas d'unité.

Éolienne

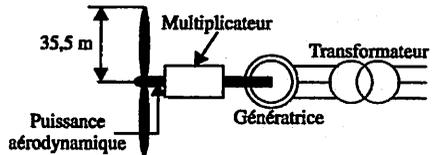
On considère une éolienne dont la longueur des pales du rotor est de 35,5 m.

S surface balayée par le rotor en m^2 .

v vitesse du vent en m/s .

C_p coefficient aérodynamique.

ρ densité de l'air : $\rho = 1,225 \text{ kg m}^{-3}$.



1. Calculer la surface balayée par les pales du rotor.
2. La puissance aérodynamique, ou puissance mécanique récupérée sur l'arbre du rotor, est donnée par la relation : $P_a = C_p \frac{1}{2} \rho S v^3$. À partir des valeurs de C_p données dans le tableau, calculer P_a pour les différentes vitesses du vent et tracer la courbe représentant $P_a = f(v)$. Donner la valeur maximale de cette puissance et la vitesse du vent correspondante.

V en m/s	1	3	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	25
C_p	0	0,27	0,42	0,48	0,5	0,5	0,5	0,49	0,45	0,39	0,34	0,28	0,12	0,06

3. L'éolienne est constituée de 4 éléments : le rotor qui fournit la puissance aérodynamique, le multiplicateur de vitesse de rendement 97 %, la génératrice de rendement 96 % et le transformateur de rendement 98 %. Pour une vitesse de vent de 9 m/s, déterminer la puissance fournie au réseau par l'éolienne et comparer cette valeur à la puissance cinétique de l'air qui traverse la surface balayée.

4. Une ferme comprend 10 éoliennes identiques. Le vent souffle à une vitesse moyenne de 9 m/s pendant 320 jours sur une année. Calculer l'énergie électrique produite par cette ferme d'éoliennes sur une année.

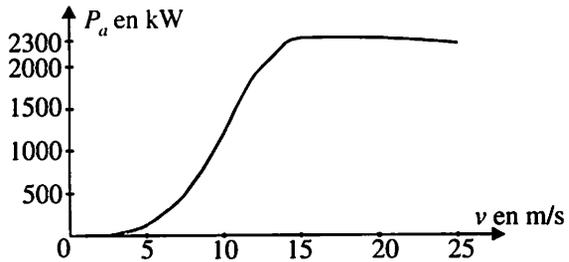
Solution

1. Surface balayée par les pales du rotor : $S = \pi R^2 = \pi 35,5^2 = 3959 \text{ m}^2$.
2. On applique la relation donnée pour P_a en prenant v et C_p dans le tableau.

Par exemple : $v = 9 \text{ m/s} \Rightarrow P_a = 0,5 \frac{1}{2} 1,225 3959 9^3 = 884 \text{ kW}$.

Pour une vitesse de vent comprise entre 15 et 25 m/s, la puissance avoisine les 2300 kW.

La puissance maximale est obtenue pour $v = 20 \text{ m/s}$ avec 2328 kW.



3. Pour $v = 9 \text{ m/s}$, $P_a = 884 \text{ kW}$. En considérant le rendement des éléments, on obtient une puissance utile : $P_u = P_a \eta_{\text{multi}} \eta_{\text{gene}} \eta_{\text{transfo}} = 807 \text{ kW}$. Pendant une durée Δt , l'air parcourt la distance $\Delta l = v \Delta t$. Le volume d'air V qui traverse la surface S est $V = S \Delta l$. Il a pour masse $m = \rho V$. On en déduit la puissance cinétique :

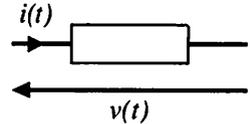
$$P_c = \frac{E_c}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \rho S v \Delta t v^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho S v^3 = 1768 \text{ kW}$$

$$\Rightarrow \frac{P_u}{P_c} = \frac{807}{1768} = 45,6 \%$$

4. Pour $v = 9 \text{ m/s}$, dix éoliennes fournissent 8,07 MW. Sur 320 jours l'énergie fournie est de $320 \cdot 24 \cdot 8,07 \cdot 10^6 = 61,9 \cdot 10^6 \text{ kWh}$ soit 223 TJ.

À propos de puissances...

Soit un dipôle parcouru par le courant $i(t)$ et soumis à la tension $v(t)$ orienté en convention récepteur.



I Définitions

- **Puissance instantanée**

Par définition : $p(t) = v(t) i(t)$. Elle traduit les échanges d'énergie instantanés entre le dipôle et son alimentation.

Elle peut aussi s'écrire : $p(t) = \frac{dW}{dt}$. Elle s'exprime en Watts.

- **Puissance active ou puissance moyenne**

Il s'agit de rendre compte du **bilan de l'énergie échangée** pendant un intervalle de temps considéré. $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$. Elle s'exprime en Watts. Lorsque qu'elle est positive, le dipôle se comporte comme un récepteur, lorsqu'elle est négative, il fournit (ou restitue) de l'énergie et se comporte comme un générateur.

En régime périodique de période T (fréquence f) : $W = \int_{(T)} v(t) i(t) dt$ et $P = W f$ soit

encore $P = \frac{1}{T} \int_{(T)} p(t) dt = \overline{v(t)i(t)}$.

ATTENTION dans de nombreux cas : $\overline{v(t)i(t)} \neq \overline{v(t)} \overline{i(t)}$.

- **Puissance apparente S**

C'est une grandeur qui ne rend pas directement compte d'un échange d'énergie mais permet de **dimensionner** les éléments qui « entourent » le dipôle (alimentation, câbles...). On l'exprime en voltampères (VA).

Avec V et I valeurs efficaces de $v(t)$ et $i(t)$: $S = VI$.

• **Facteur de puissance**

Par définition $f_p = \frac{P}{S}$.

C'est un nombre sans dimension qui rend compte de « l'efficacité » du dipôle : la puissance active en numérateur indique « le service rendu » alors que la puissance apparente en dénominateur donne les contraintes de dimensionnement de l'installation. Dans tous les cas $f_p \leq 1$.

Il est un des critères permettant de choisir entre différentes solutions techniques permettant de remplir un cahier des charges : plus il est proche de 1 et meilleure est l'exploitation de l'installation.

II Il y a du continu...

• **Tension et courant sont continus**

Si $i(t) = \overline{i(t)} = I$ et $v(t) = \overline{v(t)} = V$ alors : $P = VI$.

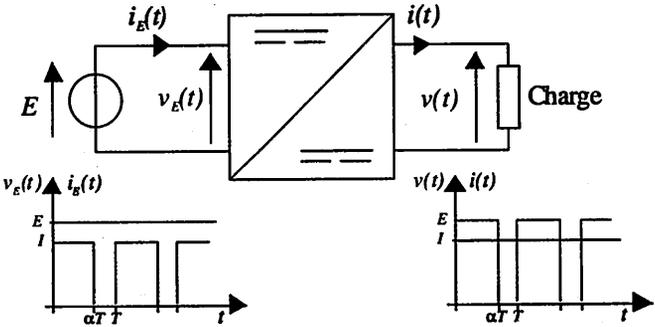
• **Une seule des deux grandeurs est continue**

Supposons que seul le courant est continu : $i(t) = \overline{i(t)} = I$.

$p(t) = v(t)I$ dans ce cas $P = \frac{1}{T} \int_{(T)} v(t)I dt = \overline{v(t)}I$.

Bilan de puissance d'un hacheur série

Le hacheur série est commandé selon une période T et un rapport cyclique α . Il est alimenté par une source de tension continue de valeur E et délivre un courant I parfaitement lissé à la charge.



À l'aide des graphes des grandeurs d'entrée et de sortie calculer la puissance en entrée et en sortie du hacheur. En déduire son rendement.

© Dunod - La photocopie non autorisée est un délit.

Solution

Calculons la puissance absorbée en entrée par le hacheur :

$$P_E = \overline{v_E(t) i_E(t)} = E \overline{i_E(t)} = \alpha I E$$

Calculons la puissance délivrée en sortie par le hacheur :

$$P = \overline{v(t) i(t)} = \overline{v(t)} I = \alpha E I.$$

On constate ainsi que le rendement du hacheur est égal à 1.

III Le régime est purement sinusoïdal

Le dipôle est linéaire : $v(t) = \widehat{V} \sin(\omega t)$ ET $i(t) = \widehat{I} \sin(\omega t - \varphi)$.

- **Puissance active**

$$p(t) = VI \cos \varphi - VI \cos(2\omega t - \varphi)$$

La puissance instantanée est la somme :

– d'un terme constant $P = VI \cos \varphi$

– d'un terme périodique de période $T/2$ appelé puissance fluctuante $p_f(t) = -VI \cos(2\omega t - \varphi)$ dont la valeur moyenne est nulle.

Puissance active (en W) : $P = VI \cos \varphi$, c'est la valeur moyenne de la puissance instantanée .

- **Puissance réactive (en var) :**

$Q = VI \sin \varphi$, elle est du signe de φ : positive si la charge est inductive, négative si elle est capacitive.

Un circuit inductif consomme de la puissance réactive, un circuit capacitif en fournit.

- **Puissance apparente, facteur de puissance**

Elle s'exprime en fonction des puissances active et réactive : $S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

On définit aussi la puissance apparente complexe, $\underline{S} = P + jQ = S e^{j\varphi}$.

Le facteur de puissance ne dépend que du déphasage : $f_p = \cos \varphi$

Théorème de Boucherot

En régime purement sinusoïdal, la puissance active (respectivement réactive) reçue par un groupement de dipôles est la somme algébrique des puissances actives (respectivement réactives) reçues par chacun des dipôles.

De même les puissances apparentes COMPLEXES s'additionnent.

ATTENTION ! Les puissances apparentes ne peuvent généralement pas être additionnées : elles ne se conservent que dans des cas particuliers.

IV Une seule des deux grandeurs est sinusoïdale

Considérons un dipôle non linéaire soumis à la tension $v(t) = \widehat{V} \sin(\omega t)$. Il absorbe un courant périodique alternatif dont la décomposition en série de Fourier est :

$$i(t) = \widehat{I}_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \widehat{I}_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots + \widehat{I}_n \sin(n\omega t - \varphi_n) + \dots$$

On rappelle que son fondamental est $i_1(t) = \widehat{I}_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$.

- **Puissance active**

Elle reste définie à partir de la puissance instantanée $P = \overline{v(t) i(t)}$.

Seuls les termes de même pulsation ont une valeur moyenne non nulle :

$$P = V I_1 \cos \varphi_1$$

La puissance active est véhiculée par le premier harmonique.

- **Puissance réactive**

Elle est définie par analogie avec le régime sinusoïdal et correspond à la quantité de puissance réactive qui serait mise en jeu si le courant était purement sinusoïdal.

$$Q = V I_1 \sin \varphi_1$$

Remarque : $\sqrt{P^2 + Q^2} = V I_1 = S_1$ avec S_1 puissance apparente du fondamental.

- **Puissance apparente, puissance déformante**

Elle s'écrit toujours $S = VI$, mais dans le cas qui nous occupe $S > \sqrt{P^2 + Q^2}$. On définit la quantité **D puissance déformante** (en VAR) du dipôle telle que :

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)} = \sqrt{S^2 - S_1^2}$$

D est liée à la présence d'harmoniques qui déforment le signal (par rapport à une sinusoïde). Elle est proportionnelle au taux de distorsion harmonique (cf. fiche 5) :

$$D = V I_1 \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = S_1 \cdot TDH.$$

• **Facteur de puissance**

$$f_p = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$$

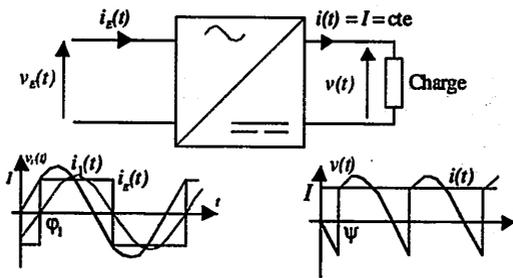
La définition indique que le facteur de puissance peut être dégradé :

- soit par la présence de puissance déformante ;
- soit par la présence de puissance réactive.

Pour séparer les deux influences on définit le **facteur de déplacement** dont l'expression correspond à celle du facteur de puissance en régime purement sinusoïdal :

$$\frac{P}{S_1} = \cos \varphi_1.$$

Redresseur monophasé commande parfait



Le redresseur est commandé avec un angle de retard à l'amorçage Ψ . Il délivre un courant I parfaitement lissé à la charge.

Le fondamental du courant d'entrée $i_E(t)$ a pour expression : $i_1(t) = \frac{4I}{\pi} \sin(\omega t - \Psi)$

1. À l'aide des graphes des grandeurs d'entrée et de sortie calculer les puissances apparente et active en entrée du redresseur.
2. En déduire son facteur de puissance. Que devient-il quand Ψ augmente ?
3. Calculer la puissance réactive consommée en entrée.
4. Calculer la puissance déformante. Comment évolue-t-elle quand Ψ augmente ?

Solution

1. La puissance apparente est le produit des valeurs efficaces : $S_E = V I_E = V I$.

Puissance active absorbée en entrée par le redresseur : le courant n'est pas sinusoïdal, la puissance active est donc véhiculée par son 1^{er} harmonique. D'après l'expression de

$$i_1(t) : I_1 = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi} \text{ et } \varphi_1 = \Psi : P_E = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi} V \cos \Psi = \frac{2\widehat{V}}{\pi} I \cos \Psi.$$

Nota : le redresseur est parfait, son rendement est 1 donc $P_E = P_S = \bar{v}I$. On retrouve

$$\text{ainsi : } P_E = \bar{v}I = \left(\frac{2\widehat{V}}{\pi} \cos \Psi \right) I.$$

2. Par définition $f_p = \frac{P_E}{S_E} = \frac{2\sqrt{2}V I \cos \Psi / \pi}{V I}$ donc $f = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \Psi$. **Le facteur de puissance diminue rapidement lorsque Ψ augmente.** Pour l'expliquer il faut examiner les puissances réactive et déformante.

3. $Q_E = \frac{2\widehat{V}}{\pi} I \sin \Psi$, **la puissance réactive augmente avec Ψ .**

$$4. D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)} = \sqrt{(VI)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} VI \right)^2} \text{ donc } D = VI \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}}.$$

La puissance déformante ne dépend pas de Ψ : elle est liée à « la forme » du signal. Ici le courant d'entrée est un carré qui se déplace sans se déformer quand Ψ augmente. Le spectre des amplitudes reste inchangé, seul celui des phases est modifié.

Un redresseur non commandé consomme la même puissance déformante que son homologue commandé.

La puissance apparente du fondamental S_1 ne dépend pas non plus de Ψ : c'est la répartition entre puissances active et réactive qui évolue et dégrade le facteur de puissance.

Régime triphasé équilibré

Toutes les relations énoncées en monophasé sont transposables en régime triphasé équilibré avec $v(t) = \widehat{V} \sin(\omega t)$ tension simple, $i(t)$ courant de ligne, U valeur efficace de la tension composée.

Les formules sont récapitulées dans le tableau figurant en annexe.

Éléments de magnétisme

Les courants électriques et les charges fixes sont à l'origine de champs électriques et magnétiques qui sont intimement liés. Les équations de Maxwell traduisent les relations entre ces champs et leurs sources.

Nous travaillerons dans l'approximation des états quasi stationnaires, et nous ne considérerons que des matériaux homogènes et isotropes.

I Les grandeurs fondamentales

- Le vecteur champ magnétique \vec{B}

Il dépend à la fois du circuit électrique qui le crée et de la présence éventuelle de matériau ferromagnétique. Son module s'exprime en Tesla et se mesure.

En un point situé à la surface de séparation entre l'air et un matériau ferromagnétique, sa composante normale se conserve.

Il est à l'origine de la rotation des machines. Un circuit électrique de moment \vec{M}

(cf. annexe) placé dans un champ magnétique \vec{B} subit un couple \vec{C} tel que :

$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ soit $C = M B \sin \alpha$ avec α angle de \vec{M} vers \vec{B} .

- Le vecteur excitation magnétique \vec{H}

Il ne dépend que du circuit électrique (géométrie et intensité des courants) qui produit le champ magnétique. Son module s'exprime en A/m et se calcule dans tous les cas par le théorème d'Ampère. Il permet d'accéder à l'expression de B.

Dans le vide $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ perméabilité magnétique du vide. Il est indifférent de travailler avec B ou H puisqu'ils sont proportionnels.

Dans un matériau ferromagnétique $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$.

μ_r est la perméabilité relative du matériau (plus elle est grande meilleur est le matériau : des valeurs de 10^3 à 10^5 sont courantes). Elle n'est pas forcément constante, elle diminue lorsque le matériau se sature.

• Le théorème d'Ampère

La circulation de \vec{H} le long d'un contour fermé orienté (C) est égale à la somme algébrique des courants enlacés.

Un courant est compté positif (respectivement négatif) s'il traverse la surface dans le sens positif (resp. négatif).

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k \pm n_k i_k$$

On utilise ce théorème en choisissant comme contour une ligne de champ et on obtient ainsi l'expression de H .

• L'énergie magnétique

On définit ainsi la densité d'énergie magnétique stockée (J/m^3) : $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

Dans le cas d'un matériau linéaire et homogène cette expression devient :

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} B^2$$

On constate que plus la perméabilité relative est grande moins le matériau est apte à stocker de l'énergie.

Si l'on souhaite emmagasiner de l'énergie dans un circuit magnétique il est impératif de pratiquer un entrefer : c'est là qu'elle est localisée.

Le circuit magnétique d'une inductance de lissage comporte toujours un entrefer, c'est là qu'est localisée l'énergie. C'est aussi le cas dans les machines tournantes. Un transformateur n'accumule pas d'énergie, son circuit magnétique n'en comporte pas.

II Les grandeurs usuelles de l'électrotechnicien

• Le flux magnétique

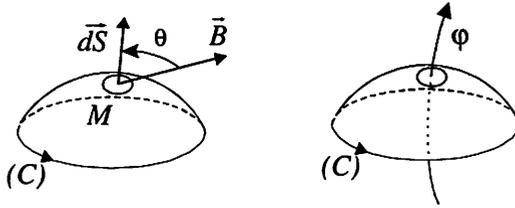
Définition : C'est une grandeur scalaire associée à \vec{B} qui s'exprime en Weber (Wb).

Le flux élémentaire $d\varphi$ à travers un élément de surface $d\vec{S}$ est :

$$d\varphi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos \theta$$

Le flux magnétique à travers une surface orientée quelconque est :

$$\varphi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Dans le cas particulier (fréquent) où le champ est uniforme (B constant) et perpendiculaire à la surface ($\theta = 0$) on obtient $\varphi = BS$.

Propriété : le flux est conservatif le long d'un tube de champ.

Dans le cas d'un circuit magnétique avec entrefer on déduit ainsi que le champ est le même dans l'air et dans le fer.

- **Réductance magnétique**

Par définition la réductance d'un circuit magnétique (Γ) de section S est :

$$\mathfrak{R} = \oint_{(\Gamma)} \frac{dl}{\mu_0 \mu_r S}$$

Si le circuit magnétique est parfait sa réductance est nulle.

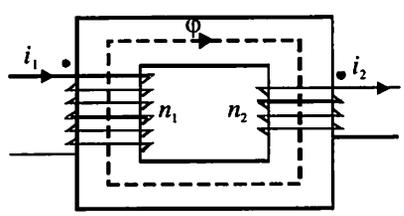
Dans le cas d'un circuit magnétique de longueur moyenne l , de section S et de perméabilité relative μ_r constantes, la réductance vaut : $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$.

Si le circuit présente un entrefer d'épaisseur e : $\mathfrak{R} = \frac{l-e}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{e}{\mu_0 S} \approx \frac{e}{\mu_0 S}$

III Des grandeurs magnétiques aux grandeurs électriques

- **La loi d'Hopkinson**

C'est la forme intégrale du théorème d'Ampère : $\mathfrak{R}\varphi = \sum_k \pm n_k i_k$.



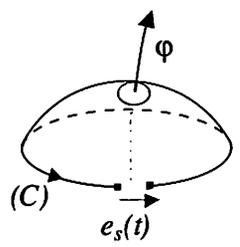
$$\Re \varphi = n_1 i_1 - n_2 i_2$$

• **La loi de Faraday**

Une spire traversée par un flux φ voit apparaître à ses bornes une force électromotrice $e_s(t)$ telle que :

$$e_s(t) = -\frac{d\varphi}{dt}$$

Si le circuit comporte n spires $e(t) = -n \frac{d\varphi}{dt}$



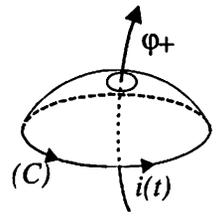
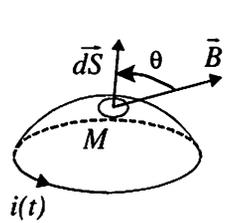
Cette relation permet de calculer la force électromotrice des machines : on établit l'expression du flux traversant le bobinage considéré, puis par dérivation on obtient la fem. En électrotechnique, il est d'usage d'établir des modèles équivalents électriques plus faciles à manipuler.

• **Inductance propre**

Soit une spire parcourue par un courant $i(t)$: ce courant crée un champ magnétique donc un flux à travers la surface de la spire. Ce flux φ , qualifié de **flux propre**, est proportionnel à $i(t)$.

Si l'on considère un circuit comportant n spires : $n\varphi = Li$

L est l'inductance propre du circuit en Henrys (H)

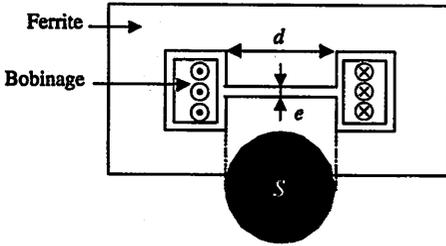


L'inductance propre d'un circuit est caractéristique de sa géométrie et de la nature du matériau qui le constitue. D'après la loi d'Hopkinson : $L = \frac{n^2}{\Re}$.

À partir de la définition de l'inductance on déduit :

- que la f.e.m. apparaissant aux bornes d'un circuit de n spires est : $e(t) = -L \frac{di}{dt}$;
- que l'énergie magnétique stockée (J) s'écrit : $W_m = \frac{1}{2} LI^2$.

Réalisation d'une inductance de lissage



d : diamètre du noyau central circulaire
 $d = 15 \text{ mm}$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ USI}$$

On s'intéresse à l'inductance de lissage d'une alimentation de PC.

Afin d'avoir un coefficient suffisant on décide de prendre pour valeur de $L = 50 \mu\text{H}$.

L'inductance est réalisée en enfermant un bobinage de N spires dans un pot en ferrite dont les dimensions géométriques sont précisées sur la figure et dont la perméabilité relative μ_r est infinie.

On supposera que B est uniforme dans l'entrefer et que les lignes de champ ne s'y dispersent pas.

1. Donner l'expression de la réluctance \mathfrak{R} du circuit magnétique.

2. L'inductance est parcourue par un courant $i_L(t)$ de valeur moyenne I_0 .

Exprimer le champ magnétique $B(t)$ dans l'entrefer en fonction de μ_0 , N , e et $i_L(t)$.

En déduire que sa valeur moyenne est : $B_0 = \frac{\mu_0 N I_0}{e}$.

3. Montrer que l'expression de l'inductance L est : $L = \mu_0 \frac{\pi d^2}{4e} N^2$.

4. Sachant que pour $I_0 = 20 \text{ A}$, on veut que B_0 soit égal à $0,30 \text{ T}$, calculer les valeurs de N et e .

Solution

1. D'après les hypothèses (μ_r infinie) on peut écrire $\mathfrak{R} = \frac{e}{\mu_0 S}$.

2. La loi d'Hopkinson conduit à $N i_L(t) = \mathfrak{R} \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = B(t) S$ on trouve $B(t) = \mu_0 \frac{N}{e} i_L(t)$. $B(t)$ et $i_L(t)$ sont donc proportionnels. En considérant les valeurs moyennes on trouve l'expression demandée.

3. L'inductance s'exprime en fonction de la réluctance par $L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$ d'où $L = \frac{N^2}{e} \mu_0 S$.

La section du noyau central est un disque de surface $S = \pi \frac{d^2}{4}$ d'où $L = \mu_0 \pi \frac{d^2 N^2}{4e}$.

4. D'après la question 2. $\frac{N}{e} = \frac{B_0}{\mu_0 I_0}$ donc $L = \mu_0 \frac{\pi d^2}{4} \frac{B_0}{\mu_0 I_0} N$ et $N = \frac{4L}{\pi d^2} \frac{I_0}{B_0} \simeq 19$

spires. L'épaisseur d'entrefer s'en déduit : $e = \frac{\mu_0 I_0}{B_0} N$ soit environ $1,6 \text{ mm}$.

Dynamique des fluides

Un **fluide** est un milieu matériel continu, déformable qui peut s'écouler : c'est le cas des liquides et des gaz. Ils sont caractérisés par diverses propriétés comme par exemple leur vitesse, leur pression, leur densité et leur température qui sont fonctions de l'espace et du temps.

I Généralités

• Définitions

La **masse volumique** ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) est définie par $\rho = m/V$.

Le **fluide incompressible** : sa masse volumique est constante (son volume est alors indépendant de sa pression). C'est le cas des liquides.

Nous nous intéressons uniquement aux fluides incompressibles.

L'**écoulement isovolume** : il s'effectue à masse volumique constante ; c'est le cas pour les fluides incompressibles.

L'**écoulement permanent ou stationnaire** : les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse...) ont des valeurs constantes au cours du temps.

La **ligne de courant et le tube de courant** : une ligne de courant est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse des particules du fluide. Le tube de courant est une surface tubulaire constituée par les lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. C'est l'analogie d'un tube de champ magnétique.

• Viscosité

Lorsqu'un fluide s'écoule, tout se passe comme si on avait affaire à un ensemble de lames superposées glissant les unes sur les autres.

Dans le cas d'un fluide parfait, le glissement est sans frottement : sa viscosité est nulle, la vitesse est uniforme sur une section droite d'un tube de courant.

Dans le cas d'un fluide réel une force de frottement F s'oppose au glissement : la vitesse d'une « lame de fluide » dépend de sa distance x au bord de la canalisation.

$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta x}$, η est le coefficient de viscosité dynamique (en Pascal.seconde : $\text{Pa} \cdot \text{s}$).

Remarque : La viscosité d'un liquide diminue beaucoup avec la température, celle des gaz augmente.

II Débits

Un débit permet de mesurer le flux d'une quantité relative à une unité de temps au travers d'une surface S quelconque. Cette quantité peut être évaluée à partir de sa masse Δm ou de son volume ΔV .

- **Débit-masse**

Pendant l'intervalle de temps Δt la masse Δm du fluide a traversé la surface S .

Par définition, le débit-masse de cet écoulement est : $q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Cette masse de fluide occupe le volume $\Delta V = S\Delta l$ tel que $\Delta m = \rho\Delta V = \rho S\Delta l$.

q_m peut donc s'écrire $q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S \frac{\Delta l}{\Delta t}$. Avec $\frac{\Delta l}{\Delta t} = v$, vitesse du fluide on obtient :

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v S$$

Équation de continuité : la conservation de la masse permet d'écrire qu'en régime permanent q_m est constant le long d'un tube de courant : $q_m = vS\rho = \text{cte}$

- **Débit-volume**

Si on choisit de travailler à partir du volume de fluide, on utilise le débit volume q_v . Pendant l'intervalle de temps Δt le volume ΔV du fluide a traversé la surface S .

Par définition le débit volume de cet écoulement est : $q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Comme $\Delta V = S\Delta l$ et $\frac{\Delta l}{\Delta t} = v$, on peut écrire : $q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = vS = \frac{q_m}{\rho}$.

Remarque : La vitesse moyenne v_{moy} du fluide dans une section droite S de la canalisation est la vitesse uniforme qui assurerait le même débit volumique à travers S que la répartition réelle des vitesses sur S : $v_{\text{moy}} = q_v/S$.

En régime stationnaire et pour un fluide incompressible, q_v est constant le long d'un tube de courant : $q_v = v_{\text{moy}}S = \text{cte}$.

III Fluide parfait

- **Écoulement SANS échange de travail**

Dans le cas de l'écoulement permanent, incompressible d'un fluide parfait au point *M* d'une ligne de courant on peut écrire

Le théorème de Bernoulli

- en termes d'énergie massique : $\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{cte}$ en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$

p/ρ : énergie massique des forces de pression ; gz : énergie potentielle massique de pesanteur ; $v^2/2$: énergie cinétique massique du fluide.

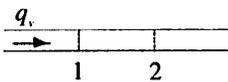
- en termes de pression : $p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2} = \text{cte}$ en Pascal (Pa)

p : pression statique ; ρgz : pression de pesanteur ; $\rho v^2/2$: pression cinétique.

- en termes de hauteur : $\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = H = \text{cte}$ (en mètres de colonne de fluide)

$\frac{p}{\rho g}$: hauteur de pression ; z : cote ; $\frac{v^2}{2g}$: hauteur cinétique ; H : hauteur totale.

Si on l'applique entre les sections 1 et 2 d'une même ligne de courant on obtient :



$$\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = 0$$

Remarque 1 : si de plus l'écoulement est irrotationnel (sans tourbillon) la constante ne dépend plus de la ligne de courant choisie. On peut alors écrire la forme étendue du théorème de Bernoulli : $p + \rho gz + \rho v^2/2 = \text{cte}$ en tous points de l'écoulement.

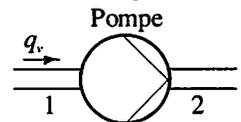
Remarque 2 : en multipliant par ρ l'expression en énergie massique du théorème de Bernoulli, on l'obtient en énergie volumique en $(\text{J} \cdot \text{m}^{-3})$: $p + \rho gz + \rho v^2/2 = E_v$. Cette expression est identique à celle en pression : l'énergie volumique est homogène à la pression.

- **Écoulement AVEC échange de travail**

Lorsque le fluide parfait traverse une machine hydraulique (pompe ou turbine), il échange de l'énergie avec cette machine sous forme d'un travail ΔW_h qui correspond à une puissance hydraulique $P_h = \Delta W_h / \Delta t$ (en W)

$P > 0$ si l'énergie est reçue par le fluide (pompe).

$P < 0$ si l'énergie est fournie par le fluide (turbine).



Le théorème de Bernoulli est (en Pa) : $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{P_h}{q_v}$.
 $E_h = \frac{P_h}{q_v}$ est aussi l'énergie volumique échangée avec la machine en (J.m⁻³).

IV Fluide réel

• Pertes de charge

C'est le nom donné aux pertes d'énergie subies par un fluide réel **en mouvement**. Les « **pertes de charge systématiques ou régulières** » sont dues aux frottements sur les parois de la canalisation. Les « **pertes de charge accidentelles ou singulières** » sont provoquées par des accidents de parcours (coude, changement de section, organe de réglage...).

• Théorème de Bernoulli

Lorsqu'on l'applique à un fluide réel avec pertes de charges :

- sans échange de travail $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = -\Delta p$

- avec échange de travail $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = -\Delta p + \frac{P_h}{q_v}$.

Étude d'une centrale hydraulique

Une centrale hydroélectrique de montagne capte l'eau d'une rivière et l'achemine vers les turbines par une conduite forcée de longueur totale $L = 1250$ m.

La pression atmosphérique p_a est constante et prise comme référence.

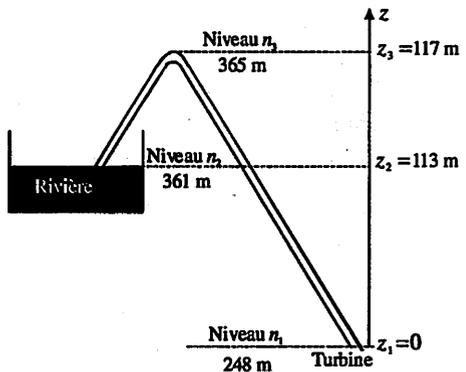
1. Calculer la différence de pression Δp_{23} entre les niveaux n_2 et n_3 puis Δp_{13} entre n_1 et n_3 . En déduire la pression relative p_1 au niveau n_1 .

2. Au niveau de la prise d'eau, la conduite est raccordée à un convergent d'embouchure rectangulaire de largeur 6,50 m et de hauteur 0,7 m.

Pour le calcul des hauteurs z , le niveau n_1 est considéré comme le niveau zéro.

Les pertes de charges sont constantes et estimées à 2,2 mm d'eau par mètre de conduite. Le débit volumique maximal à l'entrée du convergent est $Q_{\max} = 5$ m³ · s⁻¹.

2.1. Calculer la vitesse de l'eau v_{ec} à l'entrée du convergent. En déduire E_{ec} , l'énergie volumique disponible à l'entrée du convergent.



- 2.2.** Calculer les pertes d'énergie volumique E_p engendrées par la conduite.
2.3. À la sortie de la conduite l'eau est amenée à la turbine par un aspirateur cylindrique de diamètre $D = 3$ m. Calculer la vitesse de l'eau v_s , puis l'énergie volumique E_s disponible à la sortie de l'aspirateur.
2.4. En déduire la puissance hydraulique P_h de la turbine.

Solution

1. D'après les relations de statique des fluides : $\Delta p_{23} = -\rho g(n_3 - n_2) = -4 \cdot 10^4$ Pa. Le point 3 est au dessus du niveau n_2 de la rivière : toute la partie de conduite située entre ces deux points est en dépression.

$\Delta p_{13} = -\rho g(n_1 - n_3) = +117 \cdot 10^4$ Pa. La pression au niveau n_2 est la pression atmosphérique donc la pression relative p_1 est : $p_1 = \Delta p_{13} + \Delta p_{32} = 113 \cdot 10^4$ Pa. La partie de conduite située entre n_1 et n_2 est en surpression.

On aurait pu écrire directement $\Delta p_{21} = -\rho g(n_1 - n_2) = p_1$, le résultat est identique.

2.1. Par définition $v_{ec} = Q_v/S_{ec}$: ici la surface du convergent est $S_{ec} = 4,55$ m² donc pour le débit maximal $v_{ec} = 1,1$ ms⁻¹. En multipliant par ρ l'expression en énergie massique du théorème de Bernoulli, on obtient son expression en énergie volumique

$$p_{ec} + \rho g z_2 + \rho \frac{v_{ec}^2}{2} = E_{ec}.$$

À l'entrée du convergent la pression relative est nulle d'où $E_{ec} = 113,1 \cdot 10^4$ Jm⁻³.

2.2. Sur toute la longueur de la conduite les pertes de charge valent :

$$h_p = L \cdot 2,2 \cdot 10^{-3} = 2,75 \text{ m},$$

$$\text{soit une énergie volumique } E_p = \rho g h_p = 2,75 \cdot 10^4 \text{ Jm}^{-3}.$$

2.3. Le débit volumique se conserve donc $v_s = Q_{\max}/S_a$ avec $S_a = \pi D^2/4 = 7$ m² on obtient $v_s = 0,707$ ms⁻¹. La sortie de l'aspirateur est au niveau de restitution donc la pression relative est nulle et $z_a = z_1 = 0$ d'où $E_s = \rho v_s^2/2 = 0,025 \cdot 10^4$ Jm⁻³.

2.4. Le bilan des énergies volumiques est : $E_s - E_{ec} = E_h - E_p$. On trouve $E_h = P_h/Q_{\max} = -110,3 \cdot 10^4$ Jm⁻³ soit $P_h = -5,5$ MW.

La puissance est négative car le fluide la cède à la turbine. On retrouve ce même résultat en appliquant le théorème de Bernoulli (fluide réel avec pertes de charges et échange de travail) entre l'entrée du convergent et la sortie de l'aspirateur.

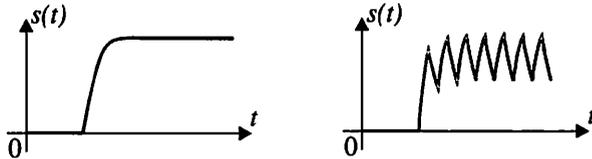
Avertissement : dans cette fiche la méthode de résolution des équations différentielles n'est pas traitée. Cette opération relève du cours de mathématiques.

I Définitions

- **Régime transitoire**

Le régime transitoire décrit l'évolution des grandeurs d'un système ou d'un circuit entre deux phases de fonctionnement en régime permanent. C'est-à-dire entre deux phases où les grandeurs sont soit constantes et indépendantes du temps soit évoluent de façons périodiques.

Exemples



On observe en bleu le régime transitoire de la grandeur $s(t)$.

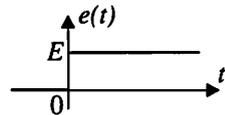
- **Réponse indicielle**

On appelle réponse indicielle l'évolution de la grandeur de sortie d'un système lorsque l'on applique sur son entrée un échelon.

Exemple : $e(t)$ échelon d'amplitude E .

$t < 0 \rightarrow e(t) = 0$; $t > 0 \rightarrow e(t) = E$.

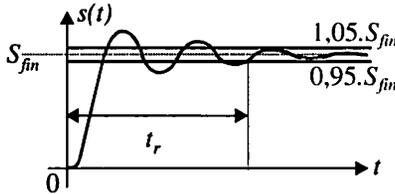
Le signal $e(t)$ peut se mettre sous la forme $e(t) = E \cdot u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unitaire, c'est-à-dire un échelon d'amplitude 1.



- **Temps de réponse**

C'est le temps t_r mis par la réponse indicielle $s(t)$ pour atteindre une fenêtre encadrant sa valeur finale à $\pm n\%$ et ne plus en sortir.

Exemple :



temps de réponse à 5 %.

II Circuit linéaire du premier ordre

• Définition

Un circuit linéaire du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier degré.

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)$$

- τ représente la constante de temps et s'exprime en secondes (s).
- K représente le gain statique du système.

Remarque : si $e(t)$ est un signal constant d'amplitude E , au bout d'un certain temps, la grandeur de sortie $s(t)$ est quasiment constante et le terme $\frac{ds(t)}{dt}$ devient nul. On a alors la relation $s(t) = KE$, d'où le nom de gain statique pour le coefficient K .

Exemple : évolution de la vitesse sur l'arbre d'un moteur.

$T_e(t)$ couple électromagnétique du moteur, $T_p(t) = f\Omega(t)$ couple des pertes, $T_r(t)$ couple résistant de la charge entraînée et J moment d'inertie ramené sur l'arbre du moteur. On met en application la relation fondamentale d'un solide en rotation :

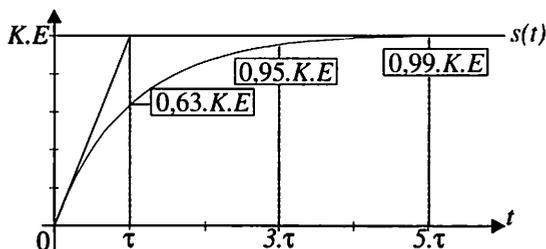
$$T_e(t) - T_p(t) + T_r(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} \Rightarrow \frac{T_e(t) + T_r(t)}{f} = \frac{J}{f} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t)$$

• Réponse indicielle :

Le système est initialement au repos : $s(0) = 0$. On applique un signal $e(t)$, échelon d'amplitude E . Pour $t > 0$, le système répond à l'équation :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = KE$$

L'évolution de la grandeur $s(t)$ est donnée par : $s(t) = KE \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$.



Le temps de réponse à 5 % d'un système du premier ordre est égal à trois fois la valeur de sa constante de temps : $t_r = 3\tau$.

On donne souvent pour définir ce temps la valeur de 5τ . Cette valeur correspond, en fait, au temps de réponse à 1 % près.

La tangente à la courbe au point d'origine coupe l'asymptote finale pour $t = \tau$.

Généralisation : on applique au système le signal $e(t) = E$ à partir d'un instant t_0 où le signal $s(t)$ a pour valeur $s(t_0) = S_0$. La réponse du système est donnée par :

$$s(t) = K \cdot E + (K \cdot E - S_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \Leftrightarrow s(t) = S_{fin} - (S_{fin} - s(t_0))e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Valeur finale
Instant Initial

Valeur Initiale

III Circuit linéaire du second ordre

- Définition**

Un circuit linéaire du second ordre est caractérisé par une équation différentielle du second degré.

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

- z représente le coefficient d'amortissement du système.
- ω_n représente la pulsation propre du système et s'exprime en rad/s.
- K représente le gain statique du système.

- Réponse indicielle :**

Le système est initialement au repos : $s(0) = 0$.

Pour $t > 0$, le système répond à l'équation : $\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = KE$.

Suivant les valeurs de z , trois types de réponse sont possibles :

Régime apériodique $z > 1$

$$s(t) = KE \left(1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right) u(t) \quad \text{avec} \quad \tau_1 = \frac{1}{\omega_n(z - \sqrt{z^2 - 1})}$$

$$\text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_n(z + \sqrt{z^2 - 1})}$$

La réponse ne présente pas de dépassement. Plus la valeur de z est grande plus le temps de réponse est long.

Régime critique $z = 1$

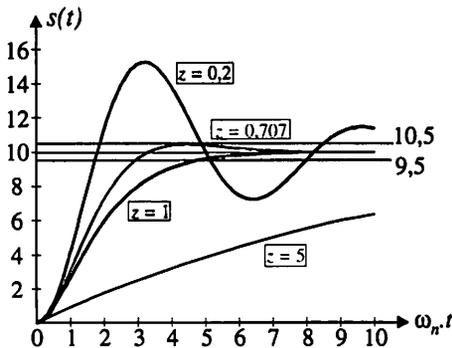
$$s(t) = KE \left(1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\omega_n}$$

C'est le fonctionnement qui offre la réponse la plus rapide sans dépassement.

Régime oscillatoire amorti $z < 1$

$$s(t) = KE \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \cdot e^{-z\omega_n t} \sin \left(\omega_p t + \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} \right) \right) \right) u(t)$$

La sortie est constituée d'un régime permanent KE auquel se superposent des oscillations de pulsation $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - z^2}$ dont l'amplitude s'atténue de façon exponentielle dans le temps. Pour $z = 0,707$ on obtient la réponse la plus rapide possible d'un système du second ordre.



On peut utiliser les abaques donnés en annexe pour déterminer le temps de réponse à 5 % et les dépassements.

Moteur à courant continu à aimant permanent

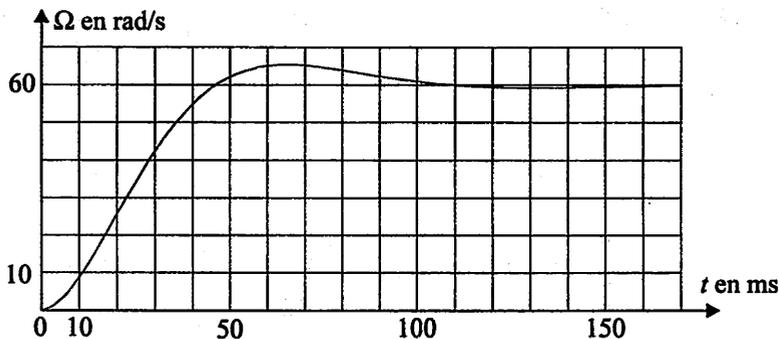
Le moteur fonctionne à vide. Les pertes fer et mécaniques sont négligeables. La f.é.m. du moteur et sa vitesse de rotation angulaire sont liées par la relation : $e(t) = K_e \Omega(t)$ avec $K_e = 0,2 \text{ V s/rad}$. L'induit est caractérisé par une résistance $R = 0,4 \Omega$ et une inductance $L = 5,5 \text{ mH}$. Le moment d'inertie des parties tournantes est $J = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

1. Écrire l'équation électrique de l'induit.
2. En appliquant le principe de la dynamique d'un solide en rotation, déterminer l'équation différentielle en $\Omega(t)$.
3. Montrer que l'on peut mettre cette équation sous la forme :

$$\tau_e \tau_m \frac{d^2 \Omega(t)}{dt^2} + \tau_m \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = \frac{E}{K_e}.$$

Donner l'expression de τ_e et justifier son nom de constante de temps électrique. Calculer τ_e et τ_m . En déduire les valeurs des constantes équivalentes K , z et ω_n .

4. En appliquant au moteur un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 12 V, on relève l'évolution suivante de la vitesse de rotation angulaire :



Cette évolution est-elle conforme à l'équation caractérisant le moteur ?

Solution

$$1. u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_e \Omega(t).$$

$$2. \text{R.F.D. : } T_e(t) - T_p(t) + T_r(t) = T_e(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} \quad (T_p(t) \text{ et } T_r(t) = 0)$$

Pour une machine à aimant permanent, donc à excitation constante, $T_e(t) = K_e i(t)$.

$$\Rightarrow i(t) = \frac{T_e(t)}{K_e} = \frac{J}{K_e} \frac{d\Omega(t)}{dt}. \text{ On remplace } i(t) \text{ dans l'équation de l'induit :}$$

$$u(t) = \frac{RJ}{K_e} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{LJ}{K_e} \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} + K_e \Omega(t);$$

$$\frac{u(t)}{K_e} = \frac{LJ}{K_e^2} \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} + \frac{RJ}{K_e^2} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t)$$

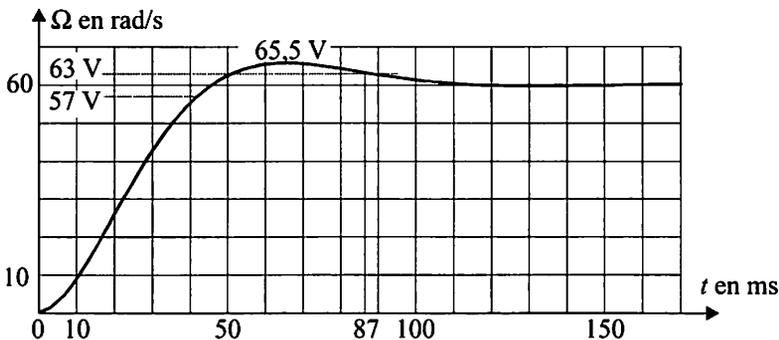
3. On pose $\tau_m = \frac{R \cdot J}{K_e^2}$. Comme $\tau_e \tau_m = \frac{LJ}{K_e^2} \Rightarrow \tau_e = \frac{LJ}{K_e^2} \frac{K_e^2}{R \cdot J} = \frac{L}{R}$. C'est bien l'expression de la constante de temps électrique de l'induit du moteur.

$$\tau_e = \frac{L}{R} = \frac{5,5 \cdot 10^{-3}}{0,4} = 13,75 \text{ ms et } \tau_m = \frac{RJ}{K_e^2} = \frac{0,42 \cdot 10^{-3}}{0,2^2} = 20 \text{ ms}$$

Calcul de K , z et ω_n : $\frac{1}{\omega_n^2} = \tau_e \tau_m \Rightarrow \omega_n = 60,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\frac{2z}{\omega_n} = \tau_m \Rightarrow z = 0,603$,

$$K = \frac{1}{K_e} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}.$$

4. On mesure sur la courbe :



$$\Omega_\infty = 60 \text{ rad/s} \Rightarrow K = \frac{\Omega_\infty}{U} = \frac{60}{12} = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1},$$

Premier dépassement : $D_1 = \frac{65,5 - 60}{60} = 0,092 \Rightarrow z \approx 0,6$ d'après l'abaque.

Temps de réponse à 5% : $t_r = 87 \text{ ms}$. D'après l'abaque donné en annexe, pour $z = 0,6$, $t_r \omega_n = 5,2$ d'où $\omega_n = \frac{5,2}{0,087} \approx 60 \text{ rad/s}$. Les valeurs calculées sont bien vérifiées par cette réponse indicielle.

La machine à courant continu

La MCC sera systématiquement considérée comme fonctionnant en moteur donc étudiée en convention récepteur. Les différentes grandeurs sont algébriques.

I Constitution, relations fondamentales

La machine à courant continu (MCC) est constituée de deux pièces de matériau magnétique (stator et rotor) séparées par un entrefer et d'un élément essentiel permettant d'accéder au circuit électrique tournant : l'ensemble collecteur-balais.

- **Le stator : l'inducteur**

Il est fixe et porte la source du champ magnétique. Celle-ci peut être constituée :

- d'**aimants permanents** (dans ce cas le flux inducteur est constant et fixé à la construction du moteur) ;
- d'un **bobinage** parcouru par un courant continu (dans ce cas le flux inducteur est réglable). Lorsque la machine n'est pas saturée le flux utile sous un pôle (en Weber) est proportionnel au courant d'excitation i_E : $\Phi = \lambda i_E$.

L'excitation peut être **séparée et constante** (cf fiche 13), ou bien **série**, le courant d'induit sert alors aussi à générer le flux.

- **L'ensemble collecteur-balais**

L'accès au bobinage rotorique se fait par l'intermédiaire de balais fixes qui frottent sur le **collecteur** constitué de plusieurs lames métalliques solidaires du rotor et connectées aux différents conducteurs du rotor. Grâce à ce dispositif, le sens du courant d'induit s'inverse au passage de la ligne neutre (c'est un « redresseur mécanique »). Le champ magnétique rotorique a une direction fixe, perpendiculaire au champ statorique.

- **Le rotor : l'induit**

Constitué d'un bobinage plus ou moins complexe, il subit l'influence du champ magnétique statorique sur lequel il tend à s'aligner.

Il a une résistance R (de faible valeur) et une inductance L (à laquelle on ajoute souvent l'inductance de lissage). Il est soumis à la tension $u(t)$ et parcouru par $i(t)$:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (1)$$

Remarque : cette équation, de nature différentielle, suggère que lors des variations de tension d'induit le comportement de la machine fait apparaître un temps de réponse électrique fixé par $\tau_e = L/R$.

• **Les relations électromécaniques**

Force électromotrice

L'expression de la force électromotrice (f.e.m.) est : $e(t) = [k\Phi]\Omega(t)$ (2)

k : constante dépendant des paramètres physiques de la machine,

$\Omega(t)$: vitesse de rotation angulaire de la machine (en rad.s⁻¹).

Couple électromagnétique

L'entrefer est le lieu de la conversion de puissance électromagnétique en puissance mécanique, ce qui s'exprime par : $p_{em}(t) = e(t)i(t) = c_{em}(t)\Omega(t)$.

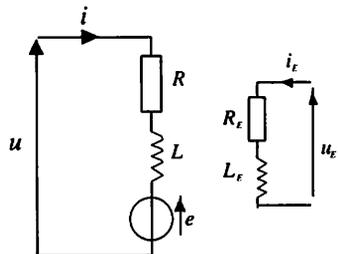
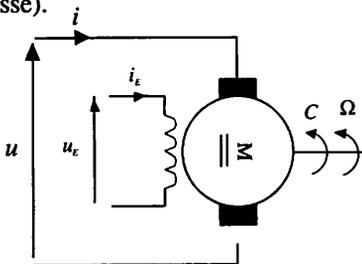
On en déduit que $c_{em}(t) = [k\Phi]i(t)$. (3)

II Modèles équivalents

• **Modèle complet**

On le déduit des équations précédentes.

Il est valide en régime permanent comme en régime transitoire (de courant et/ou de vitesse).



Si la machine est à aimants permanents, le schéma équivalent de l'inducteur n'a pas lieu d'être, on conserve uniquement le circuit d'induit, soit la partie gauche.

R se mesure par méthode voltampère-métrique à chaud.

L s'obtient à partir de la mesure de l'ondulation du courant d'induit lorsque la machine est alimentée par un hacheur.

Ce schéma se simplifie selon le contexte d'étude de la machine. Le seul cas où il est exploité sans adaptation est l'étude de la machine dans le cadre d'un asservissement.

- **Étude de la machine associée à un convertisseur (cf. fiche 14)**

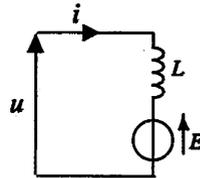
Dans cette situation l'induit constitue la charge d'un hacheur ou d'un redresseur. Les phénomènes observés sont périodiques et « rapides » (périodes de l'ordre de la dizaine de ms au maximum). La constante de temps de l'induit est grande devant la période du convertisseur : on peut négliger la résistance d'induit.

La vitesse (donc la force électromotrice) de la machine peut-être considérée comme constante pendant la durée d'observation. Elle est obtenue par l'étude préalable des valeurs moyennes $E = \bar{u} - R\bar{i}$.

Le modèle adopté est le plus souvent le suivant :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + E$$

$$E = k\Phi\Omega = \text{cte}$$



- **Étude de la machine en régime permanent ou en cycle de vitesse**

Toutes les grandeurs de la machine sont considérées comme constantes (elles sont notées par des majuscules), les inductances n'interviennent pas.

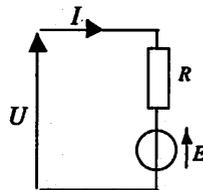
Remarque : Cette hypothèse s'applique de manière rigoureuse en régime permanent et en exploitant la différence de temps de réponse des grandeurs électriques et mécaniques lors des cycles de vitesse. Elle ne s'applique pas en cas d'asservissement.

Les équations se simplifient :

$$U = E + RI \quad (1),$$

$$E = k\Phi\Omega \quad (2),$$

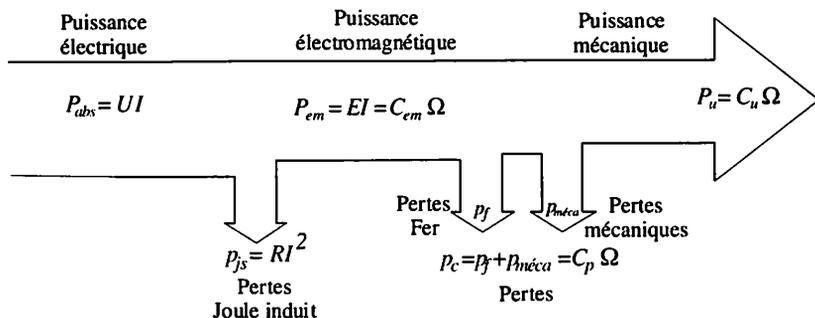
$$C_{em} = k\Phi I \quad (3)$$



III Du côté des puissances

- Le bilan des puissances

Les pertes fer p_{fe} et mécaniques p_m sont souvent globalisées sous la forme d'une puissance notée p_c toujours positive. Elle est mesurée par un essai à vide, en général à vitesse nominale.



Quel que soit le régime de fonctionnement et le sens de rotation de la machine les relations restent valides, seuls les signes changent.

	P_{em}	P_c	P_u	
moteur	> 0 C_{em} et Ω de mêmes signes	> 0	> 0	$P_{em} \geq P_u$
génératrice	< 0 C_{em} et Ω de signes opposés	> 0	< 0	$ P_{em} < P_{méca} $

On modélise p_c à l'aide du « couple de pertes » : $p_c = P_f + P_m = C_p \Omega$

Pour raisonner à partir des couples, il faut faire intervenir le signe de la vitesse :

$p_c = C_p \Omega > 0$ donc si $\Omega > 0$ $C_p > 0$ et si $\Omega < 0$ $C_p < 0$.

- Le rendement en régime permanent

Lorsque l'inducteur est bobiné, il est le siège de pertes Joule : $P_E = R_E I_E^2$.

$\eta = \frac{P_u}{P_{abs} + P_E}$, est le rendement global .

On définit aussi le rendement d'induit : $\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{P_u}{P_u + RI^2 + p_c}$.

Le moteur à flux constant

C'est le cas des moteurs à aimants permanents ou à excitation séparée constante. On a $\Phi = \lambda I_E = \text{cte}$ ce qui permet de poser $k\Phi = k = \text{cte}$.

I Équations de fonctionnement

Ce sont celles présentées dans la fiche précédente avec $k\Phi = K = \text{cte}$:

$e(t) = K\Omega(t)$ (1) La fem est l'image de la vitesse.

$c_{em}(t) = Ki(t)$ (2) Le courant est l'image du couple électromagnétique.

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (3)$$

Le moteur à flux constant est particulièrement adapté à la commande :

- en vitesse par action sur la tension d'induit qui lui est pratiquement proportionnelle compte tenu de la faible valeur de la résistance d'induit ;
- en couple par l'intermédiaire du courant d'induit qui lui est proportionnel.

On ajoute donc généralement le Principe fondamental de la dynamique :

$$c_u(t) + c'(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} \quad (4)$$

II Étude en régime permanent

Toutes les grandeurs de la machine – en particulier le courant d'induit et la vitesse – sont considérées comme constantes, les inductances n'interviennent pas.

- Les équations électromécaniques :

$$U = E + RI$$

$$E = K\Omega$$

$$C_{em} = KI$$

La vitesse est stabilisée $\frac{d\Omega}{dt} = 0$ donc $C_u + C' = 0$

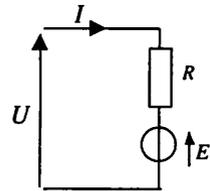


Figure 1

• Caractéristiques mécaniques

Elles permettent de déterminer les points de fonctionnement de la machine. On obtient en éliminant les variables électriques E et I au profit de la vitesse et du couple dans la relation d'induit.

$$E = K\Omega \text{ et } I = \frac{C_{em}}{K} \text{ d'où } U = K\Omega + \frac{R}{K}C_{em}$$

$$\text{Elles ont donc pour équation : } C_{em} = \frac{K}{R}U - \frac{K^2}{R}\Omega.$$

Ce sont des droites parallèles de pente fortement négative qui occupent les quatre quadrants du plan couple vitesse. (cf. exercice)

Pour un couple (donc un courant d'induit) donné, on peut inverser le signe de la vitesse par réglage de la tension d'induit.

Inversement, pour une tension d'induit donnée on passe d'une manière continue d'un fonctionnement moteur à un fonctionnement génératrice par changement du signe du couple électromagnétique.

Étude d'une MCC à flux constant en régime permanent

La machine à courant continu M_c est excitée par des aimants permanents. *Le flux est donc constant.* Les conventions de signe utilisées sont données sur la figure 1. On donne pour le point nominal : $U_n = 48 \text{ V}$; $I_n = 80 \text{ A}$; $n_n = 800 \text{ tr/min}$. Résistance de l'induit $R_a = 0,05 \Omega$.

1. Montrer que le moment du couple électromagnétique est $T_{em} = KI$. Calculer la constante K .
2. On réalise un essai moteur à vide à vitesse nominale. La puissance consommée par l'induit est $P_{a0} = 320 \text{ W}$. En négligeant les pertes par effet Joule dans l'induit calculer le couple de pertes T_p , le courant et la tension d'induit.
3. Pour le point nominal calculer le moment du couple utile et le rendement.
4. Montrer que l'équation de la caractéristique mécanique est :

$$T_{em} = 10,5U - 0,577n.$$

5. Tracer les caractéristiques mécaniques $T_{em}(n)$ suivantes C_1 pour $U = U_n$; C_2 pour $U = -U_n$, C_3 pour $I = I_n$ et C_4 pour $I = -I_n$.
6. Pour $U = U_n$ et $I = I_n$, placer les points correspondant à un fonctionnement en moteur dans le sens positif (M1) et en génératrice dans le sens positif (M2).
7. On suppose que le couple de pertes est constant en valeur absolue et égal à la valeur calculée au 2. Tracer (sur le graphe de la question 5) les caractéristiques mécaniques du couple T_u sur l'arbre en fonction de n : C'_1 pour $U = U_n$, C'_2 pour $U = -U_n$, C'_3 pour $I = I_n$ et C'_4 pour $I = -I_n$.

Solution

1. La puissance électrique est convertie en puissance mécanique dans l'entrefer :

$$P_{em} = EI = T_{em}\Omega \text{ d'où } T_{em}\Omega = K\Omega I \text{ soit } T_{em} = KI.$$

$$E_n = U_n - R_a I_n = 44 \text{ V}, \Omega = \frac{2\pi}{60}n \text{ donc } \Omega_n = 83,7 \text{ rads}^{-1};$$

$$K = E_n / \Omega_n \text{ d'où } K = 0,525 \text{ USI.}$$

2. Essai à vide : la puissance consommée correspond aux pertes, ici on néglige les pertes Joule donc $P_{a0} = T_p \Omega_n$. On trouve $T_p = 3,82 \text{ Nm}$.

Par ailleurs la vitesse est stabilisée donc $T_{em} = T_p = K I_0$ et l'essai est réalisé à vitesse nominale donc à fem nominale : $U_0 = E_n + R_a I_0$.

$$\text{On trouve } I_0 = 7,3 \text{ A et } U_0 = 44,37 \text{ V.}$$

La tension d'induit est réduite par rapport à sa valeur nominale puisque le courant d'induit est plus faible.

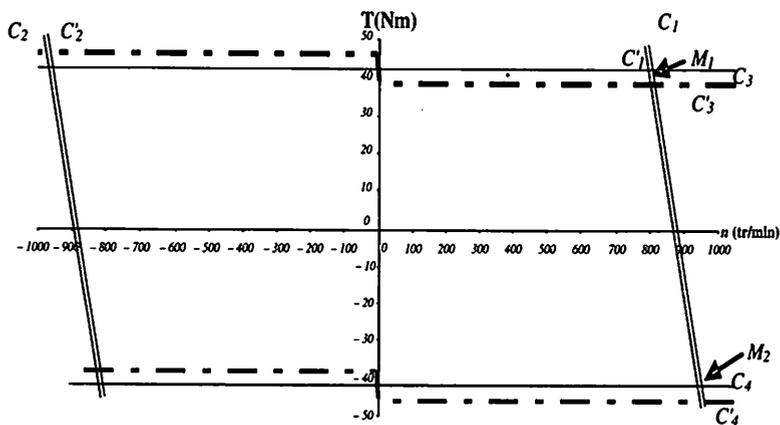
3. $T_n = K I_n$ est le couple électromagnétique nominal, le couple utile est $T_{un} = T_n - T_p$ soit $T_{un} = 38,2 \text{ Nm}$.

$$\text{Le rendement est : } \eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{T_{un}\Omega_n}{U_n I_n} \text{ soit } 83,3 \text{ \%}.$$

$$4. E = K\Omega \text{ et } I = \frac{T_{em}}{K} \text{ d'où } U = K\Omega + \frac{R}{K}T_{em} \text{ c'est-à-dire : } T_{em} = \frac{K}{R}U - \frac{K^2}{R} \frac{2\pi}{60}n.$$

L'application numérique donne les résultats proposés.

5. et 6. voir figure ci dessous



7. La machine tourne dans le sens positif.

En fonctionnement en moteur T_{em} et T_u sont tous deux positifs et le couple utile est plus faible que le couple électromagnétique.

En fonctionnement en génératrice, les deux couples sont négatifs. La valeur absolue du couple utile est plus grande que celle de T_{em} : c'est normal, dans ce cas la machine

reçoit de la puissance sous forme mécanique ($T_u \Omega$) qu'elle transforme en puissance électromagnétique après déduction des pertes.

III Démarrage et variation de vitesse

Les variables électriques varient beaucoup plus vite que les variables mécaniques ce qui permet de dissocier leurs évolutions lors de l'analyse. Le modèle et les équations électriques utilisées sont ceux de la figure 1.

Schématiquement on peut dire que lorsque le courant (donc le couple) varie, la vitesse est constante et inversement quand la vitesse commence à varier, le courant a atteint son régime permanent.

Si on étudie un démarrage on pose $\Omega(0) = 0$ donc $E = 0$ et on peut calculer le courant de démarrage : $I_d = U/R$.

Exemple : Démarrage sous tension nominale

Si on effectue un démarrage du moteur de l'exercice précédent sous la tension nominale on obtient $I_d = U_n/R$ soit un courant de 960 A !

Il est évident que c'est plus que risqué pour l'induit. On décide habituellement de limiter le courant de démarrage et on en déduit la valeur de la tension d'induit adaptée (très inférieure à la tension nominale).

Par exemple si on veut $I_d \leq 1,5I_n$ il faudra : $U_d \leq 1,5RI_n$ soit 6 V.

Si on fait varier la vitesse on utilise $C_u + C' = J \frac{d\Omega}{dt}$.

Une évolution linéaire de la vitesse correspond à un couple d'accélération constant : le point de fonctionnement de la machine se déplace horizontalement dans le plan couple-vitesse.

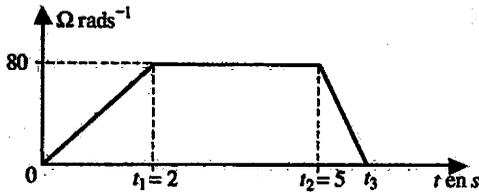
Une rupture de pente correspond à une variation brusque de couple qui se produit à vitesse constante : déplacement vertical rapide.

Cycle robotique

La machine de l'exercice précédent est ici supposée sans pertes autres que par effet Joule. Le couple résistant exercé par la charge est constant $T_r = -30 \text{ Nm}$, le moment d'inertie est $J = 0,15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Le système possède un blocage mécanique qui est éliminé à la date $t = 0$ et remis en œuvre à la date $t_3 = 6 \text{ s}$.

On veut obtenir une loi d'évolution de vitesse conforme à la figure suivante.



1. Représenter le parcours du point de fonctionnement de la machine dans le plan couple-vitesse.
2. Peut-on rendre le freinage plus efficace ?

Méthode : pour tracer le déplacement du point de fonctionnement dans le plan couple vitesse, il faut :

- connaître le graphe représentant le couple utile en fonction du temps, on l'obtient à partir du PFD et de l'analyse de la vitesse ;
- éliminer le temps en décrivant les évolutions simultanées du couple et de la vitesse.

Solution

1. Le principe fondamental de la dynamique permet de calculer le couple utile nécessaire à la réalisation de la loi de vitesse choisie :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = T_u + T_r \text{ d'où } T_u = J \frac{d\Omega(t)}{dt} - T_r.$$

On cherche les valeurs d'accélération nécessaires pour exécuter la loi de vitesse proposée par le cahier des charges.

L'accélération est la dérivée de la vitesse, c'est-à-dire la pente du graphe sur chacun

des intervalles. On en déduit le couple d'accélération $J \frac{d\Omega}{dt}$.

On peut ensuite calculer les valeurs du couple utile dans chaque intervalle.

	0^+	t_1^-	t_1^+	t_2^-	t_2^+	t_3^-
$d\Omega/dt$ en rads^{-2}	40	40	0	0	-80	-80
$J d\Omega/dt$ en Nm	6	6	0	0	-12	-12
$-T_r$ en Nm	30	30	30	30	30	30
T_u en Nm	36	36	30	30	18	18

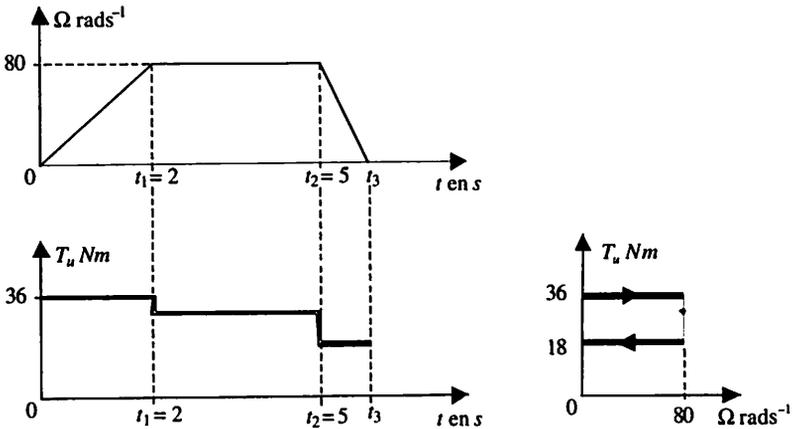
Pour tracer les déplacements du point de fonctionnement il faut reprendre les graphes intervalle par intervalle.

Entre 0 et $(t_1)^-$: la vitesse passe de 0 à 80 rads⁻¹ alors que le couple reste constant à 36 Nm : le déplacement du point de fonctionnement est horizontal.

À la date t_1 : le couple diminue brutalement et prend la valeur 30 Nm, la vitesse ne varie pas : déplacement vertical.

Entre $(t_1)^+$ et $(t_2)^-$: la vitesse reste constante à 80 rads⁻¹ alors que le couple le reste à 30 Nm. La machine compense le couple résistant le système fonctionne en régime permanent, le point de fonctionnement est immobile.

Entre $(t_2)^+$ et $(t_3)^-$: la vitesse passe de 80 rads⁻¹ à 0 alors que le couple reste constant à 18 Nm : le déplacement du point de fonctionnement est horizontal.



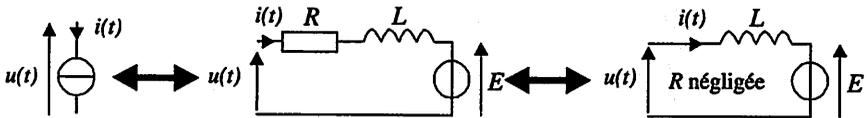
2. Pour freiner plus efficacement, il faut faire fonctionner la machine en génératrice c'est-à-dire passer dans le quadrant des couples négatifs. Pour que cela soit possible il faut que le variateur le permette : il doit être lui aussi réversible.

On notera qu'à partir de la loi de couple on peut déterminer le courant nécessaire à chaque intervalle : $I = T_{em}/K$. Ici le moteur est supposé sans perte donc $T_{em} = T_u$. Par exemple de 0 à t_1 le moteur doit développer un couple égal à 36 Nm soit un courant de 68,5 A.



Un hacheur est un convertisseur statique qui transfère de l'énergie d'une source continue vers un récepteur continu. Il peut être réversible. Sa commande permet le réglage de la valeur moyenne de la grandeur de sortie. Les applications des hacheurs sont nombreuses et essentiellement situées dans des associations de convertisseurs statiques.

Les sources de courant de cette fiche seront représentées par un circuit RLE .



On supposera la résistance R suffisamment faible (tension $Ri(t)$ négligée dans les équations) pour ne pas influencer la forme de l'évolution du courant $i(t)$. Sa valeur reste indis-

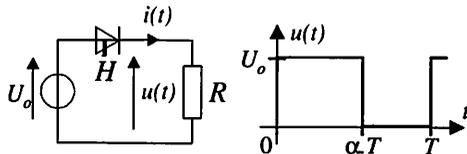
pensable pour le calcul de la valeur moyenne du courant $i(t)$: $\bar{i} = \frac{\bar{u} - E}{R}$.

Les hacheurs fonctionneront en conduction ininterrompue.

I Hacheur série

- **Sur charge résistive**

Il est utilisé dans les variateurs de vitesse pour les phases de freinage rhéostatique.



α : rapport cyclique de la commande, T période de fonctionnement du montage.

De 0 à αT : H commandé à la fermeture $u(t) = U_0$.

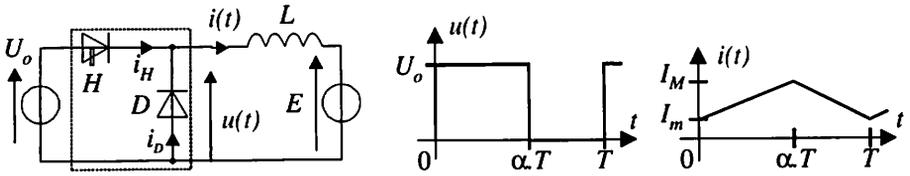
De αT à T : H commandé à l'ouverture $u(t) = 0$.

Dans ce type d'application, on s'intéresse à la puissance dissipée dans la résistance :

$$P = \frac{U^2}{R} \text{ avec } U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \alpha U_0^2 \Rightarrow P = \alpha \frac{U_0^2}{R}$$

- **Sur une source de courant**

De façon plus générale un hacheur série permet le transfert d'énergie d'une source de tension vers une source de courant. Il n'est pas réversible.



De 0 à αT : H commandé à la fermeture, D bloquée.

$$i_D(t) = 0, i_H(t) = i(t), u(t) = U_o = L \frac{di(t)}{dt} + E \text{ et } i(t) = \frac{U_o - E}{L} t + I_m$$

De αT à T : H commandé à l'ouverture, D passante.

$$i_D(t) = i(t), i_H(t) = 0, u(t) = 0 = L \frac{di(t)}{dt} + E \text{ et } i(t) = -\frac{E}{L}(t - \alpha T) + I_m$$

Caractéristiques :

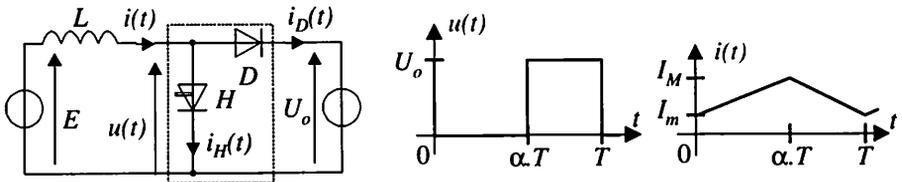
- Valeur moyenne de la tension : $\overline{u(t)} = \alpha U_o$
- Valeur moyenne du courant : $\overline{i(t)} = \frac{I_m + I_M}{2}$
- Ondulation du courant : $\Delta i(t) = \frac{I_M - I_m}{2} = \frac{\alpha(1 - \alpha)U_o}{2Lf}$, elle diminue quand on augmente la fréquence de fonctionnement. $\Delta i_{Max} = \frac{U_o}{8Lf}$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

Pour la déterminer, on part de $i(\alpha T) = \frac{U_o - E}{L} \alpha T + I_m = I_M$.

- Puissance transmise $P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_o i_H(t)dt = \alpha U_o \overline{i}$

II Hacheur parallèle

Le hacheur parallèle permet le transfert d'énergie d'une source de courant vers une source de tension. Il n'est pas réversible.



De 0 à αT : H commandé à la fermeture, D bloquée, $i_D(t) = 0, i_H(t) = i(t),$

$$u(t) = 0 = E - L \frac{di(t)}{dt} \text{ et } i(t) = \frac{E}{L} t + I_m$$

De αT à T : H commandé à l'ouverture, D passante $i_D(t) = i(t)$, $i_H(t) = 0$,
 $u(t) = U_0 = E - L \frac{di(t)}{dt}$ et $i(t) = \frac{E - U_0}{L}(t - \alpha T) + I_M$

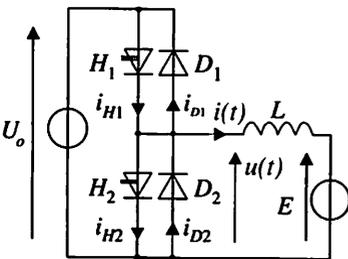
Caractéristiques :

- Valeur moyenne de la tension : $\overline{u(t)} = (1 - \alpha)U_0 = E \Rightarrow U_0 = \frac{E}{(1 - \alpha)}$
- Courant : $\overline{i(t)} = \frac{I_m + I_M}{2}$ et $\Delta i(t) = \frac{I_M - I_m}{2} = \frac{\alpha(1 - \alpha)U_0}{2Lf}$
- Puissance transmise : $P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 i_D(t)dt = (1 - \alpha)U_0 \overline{i}$.

Remarque : la tension de sortie de ce hacheur est supérieure à sa tension d'entrée $U_0 > E$, on lui donne le nom d'élevateur de tension.

III Hacheur réversible en courant

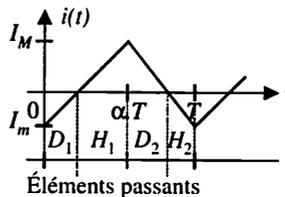
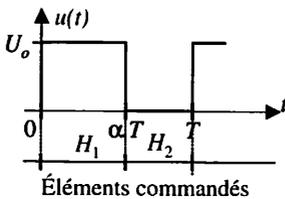
Ce hacheur est l'association d'un hacheur série (H_1, D_2) et d'un hacheur parallèle (H_2, D_1). Il est réversible. La source de tension et la source de courant doivent être réversibles en courant.



Si le courant est toujours positif, les éléments (H_1, D_2) de la partie hacheur série assurent sa conduction. Le hacheur transfère l'énergie de la source de tension vers la source de courant.

Si le courant est toujours négatif, les éléments (H_2, D_1) de la partie hacheur parallèle assurent sa conduction. Le hacheur transfère l'énergie de la source de courant vers la source de tension.

Examinons le cas où $i(t)$ change de signe sur une période de fonctionnement.



(cf. fiche 2).

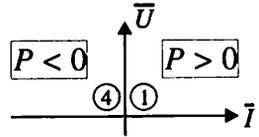
De 0 à αT : H_1 commandé à la fermeture, $U_0 = L \frac{di(t)}{dt} + E$ et $i(t) = \frac{U_0 - E}{L}t + I_m$.

De αT à T : H_2 commandé à l'ouverture, $0 = L \frac{di(t)}{dt} + E$ et $i(t) = -\frac{E}{L}(t - \alpha T) + I_m$.

Puissance transmise : $P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \alpha U_0 \bar{i}$.

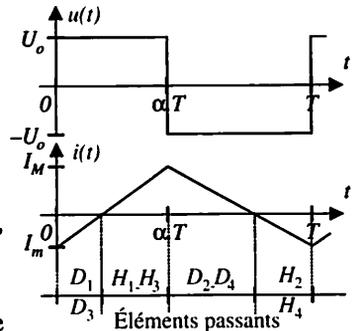
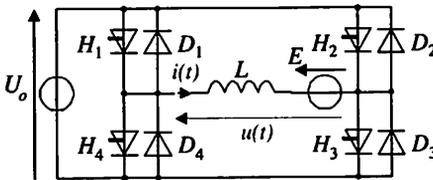
Si $\bar{i}(t) > 0$ ($\alpha U_0 > E$) : $P > 0$, puissance transmise de la source de tension vers la source de courant (quadrant 1).

Si $\bar{i}(t) < 0$ ($\alpha U_0 < E$) : $P < 0$, puissance transmise de la source de courant vers la source de tension (quadrant 4).



IV Hacheur quatre quadrants

Ce hacheur est constitué de deux cellules de commutation (H_1, D_1, H_4, D_4) et (H_2, D_2, H_3, D_3) (cf. fiche 2). Il est réversible en tension et en courant. La source de tension et la source de courant doivent être réversibles en courant et en tension.



De 0 à αT : H_1 et H_3 commandés à la fermeture,

$$u(t) = U_0 = L \frac{di(t)}{dt} + E, i(t) = \frac{U_0 - E}{L}t + I_m$$

De αT à T : H_2 et H_4 commandés à la fermeture

$$u(t) = -U_0 = L \frac{di(t)}{dt} + E, i(t) = \frac{-U_0 - E}{L}(t - \alpha T) + I_m$$

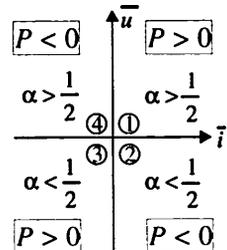
Caractéristiques :

- Valeur moyenne de la tension : $\bar{u} = (2\alpha - 1)U_0$

Si $\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{u} > 0$, si $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{u} < 0$.

- Puissance transmise : $P = (2\alpha - 1)U_0 \bar{i}$

Ce hacheur présente une double réversibilité, courant et tension.



Alimentation en 1500 V continu d'une locomotive

Sous caténaire de tension continue $E = 1,5$ kV, un hacheur élévateur de tension permet d'obtenir une tension d'alimentation $U_0 = 2,75$ kV.

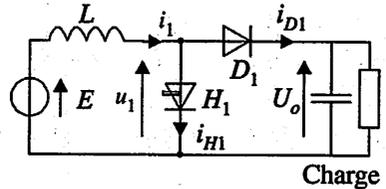
1. Étude du hacheur simple

i_1 est ininterrompu et varie entre I_{1m} et I_{1M} .

T période de fonctionnement ($f = 300$ Hz).

$L = 5$ mH (bobine idéale)

H_1 commandé à la fermeture de 0 à αT , à l'ouverture de αT à T .



1.1. Donner la tension u_1 pour $0 < t < \alpha T$, puis pour $\alpha T < t < T$.

1.2. Donner la relation entre \bar{u}_1 et E . Tracer l'allure de la tension u_1 . Calculer \bar{u}_1 en fonction de α et de E . En déduire la relation : $U_0 = \frac{E}{1 - \alpha}$.

1.3. Pour $0 < t < \alpha T$, puis pour $\alpha T < t < T$: déterminer l'équation différentielle relative au courant i et en déduire l'expression de ce courant.

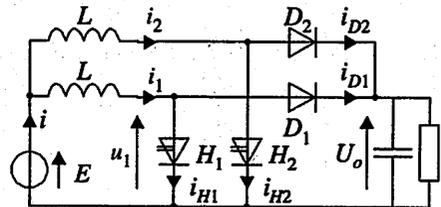
1.4. Tracer l'allure des courants i_1 et i_{H1} .

1.5. L'ondulation de i_1 est définie par la relation $\Delta i_1 = \frac{I_{1M} - I_{1m}}{2}$. Montrer à partir

de l'équation trouvée en 1.3. que $\Delta i_1(t) = \frac{\alpha E}{2Lf}$. Calculer Δi_1 pour $\alpha = 0,45$.

2. Étude de deux hacheurs à commande décalée

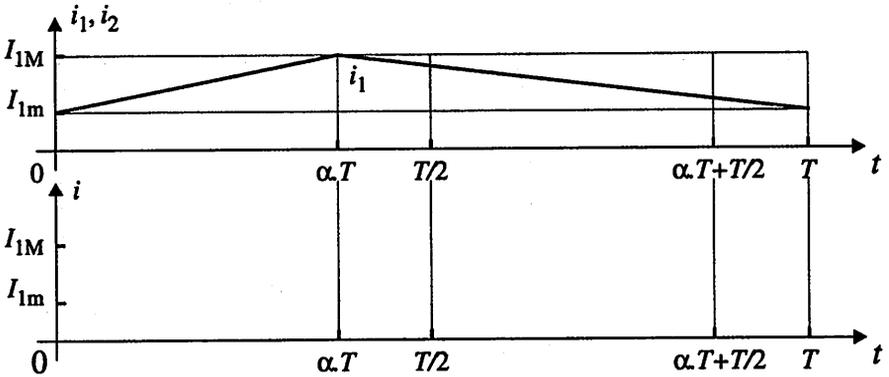
Afin de réduire les harmoniques de courant côté ligne, on double le montage traité précédemment d'un deuxième hacheur dont la commande sera décalée. $f = 300$ Hz et $L = 5$ mH.



H_1 est commandé à la fermeture pour $0 < t < \alpha T$, à l'ouverture pour $\alpha T < t < T$,

H_2 à la fermeture pour $\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} + \alpha T$ et à l'ouverture pour $\frac{T}{2} + \alpha T < t < \frac{3T}{2}$.

2.1. Écrire la relation entre i , i_1 et i_2 . Tracer sur la figure ci-dessous les courants i , i_2 .



2.2. Pour $0 < t < \alpha T$, donner la relation entre $\frac{di}{dt}$, $\frac{di_1}{dt}$ et $\frac{di_2}{dt}$. Expliciter alors $\frac{di}{dt}$ en fonction de U_0 , E et L .

2.3. Dédurre de la réponse 2.2. : $\Delta i = \frac{\alpha(1 - 2\alpha)E}{2Lf}$. Calculer Δi pour $\alpha = 0,45$.

Conclure.

Solution

1. Étude du hacheur simple

1.1. Pour $0 < t < \alpha T$, $u_1(t) = 0$ (H_1 fermé, D_1 bloquée).

Pour $\alpha T < t < T$, $u_1(t) = U_0$ (H_1 fermé, D_1 passante).

1.2. $E - L \frac{di_1(t)}{dt} = \overline{u_1(t)}$, $i_1(t)$ étant périodique $L \frac{di_1(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{u_1} = E$.

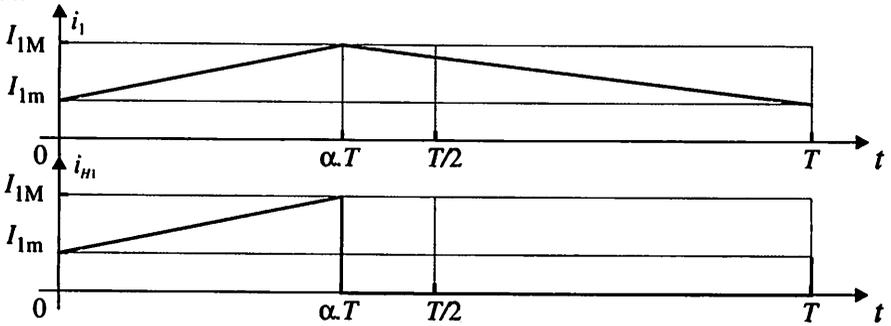


$$\overline{u_1} = \frac{1}{T}(U_0(\alpha T - T)) = (1 - \alpha)U_0 \Rightarrow U_0 = \frac{E}{1 - \alpha}$$

1.3. Pour $0 < t < \alpha T$, $E - L \frac{di_1(t)}{dt} = 0 \Rightarrow i_1(t) = \frac{E}{L}t + I_{1m}$.

Pour $\alpha T < t < T$, $E - L \frac{di_1(t)}{dt} = U_0 \Rightarrow i_1(t) = \frac{E - U_0}{L}(t - \alpha T) + I_{1m}$.

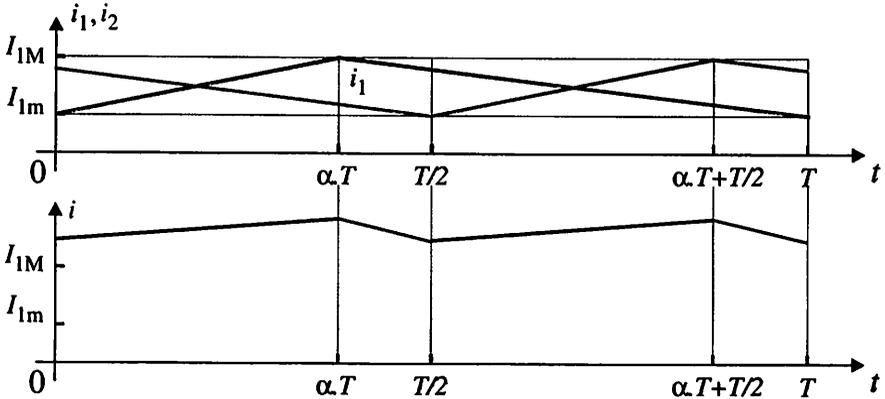
1.4.



1.5. À $t = \alpha T$, $i_1(\alpha T) = \frac{E}{L}\alpha T + I_{1m} = I_{1M} \Rightarrow \Delta i_1 = \frac{I_{1M} - I_{1m}}{2} = \frac{\alpha E}{2Lf} = 225 \text{ A.}$

2. Étude de deux hacheurs à commande décalée

2.1. $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$



2.2. Pour $0 < t < \alpha T$, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, $\frac{di(t)}{dt} = \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{E}{L} + \frac{E - U_0}{L}$
 H_1 passant, H_2 bloqué.

Pour $0 < t < \alpha T$, $i(t) = \left(\frac{2E - U_0}{L}\right)t + I_m$. À $t = \alpha T$, $i_1(\alpha T) = I_M$ soit

$I_M = \left(\frac{2E - U_0}{L}\right)\alpha T + I_m$. $\Delta i = \frac{I_M - I_m}{2} = \frac{U_0(1 - 2\alpha)\alpha}{2Lf}$. Pour $\alpha = 0,45$

$\Delta i = 41,25 \text{ A}$. En fonctionnant avec deux hacheurs on divise par 5,5 l'ondulation du courant. La fréquence du courant est multiplié par deux, ce qui facilite son filtrage.